ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Critères de représentabilité des foncteurs.* Note (*) de M. **Jean Benabou**, présentée par M. Henri Villat.

On donne un critère « formel » de représentabilité de foncteurs F à valeurs dans les ensembles. Ce critère est utilisé pour obtenir des conditions suffisantes maniables, qui se ramènent à montrer que F n'est pas « trop grand ». Différents critères de majoration permettent de retrouver la plupart des cas « concrets » de représentabilité et d'existence d'adjoints.

1. Critère « formel » de représentabilité. — Soit $\mathfrak{U}$ un univers. Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ sont deux $\mathfrak{U}$-catégories, X un objet de $\mathcal{C}$ et $K : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ un foncteur, un système projectif de source X et de but K : $\xi = (\xi(S) : X \to K(S))$ $(S \in Ob(\mathcal{S}))$ est un morphisme du foncteur constant K_X dans K. On note Proj (X, K) l'ensemble de ces systèmes. Si $\mathcal{C}'$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur, on note $F \circ \xi$ le système $(F(\xi(S))) \in \mathrm{Proj}\,(F(X), F \circ K)$. Si $F \circ K$ a une limite projective $\xi' \in \mathrm{Proj}(X', F \circ K)$, on note $\lambda(F\xi)$ le morphisme canonique $F(X) \to X'$. On dit que $\xi \in \mathrm{Proj}(X, K)$ est *séparant* (resp. *recollant*) si, pour tout objet Y de $\mathcal{C}$, le morphisme $\lambda(\mathrm{Hom}(Y, \xi)) : \mathrm{Hom}(Y, X) \to \varprojlim \mathrm{Hom}(Y, K(.))$ est injectif (resp. surjectif). [En général $\varprojlim \mathrm{Hom}(Y, K(.))$ *n'est pas* un $\mathfrak{U}$-ensemble.] Il est clair que ξ est recollant et séparant $\Leftrightarrow \xi = \varprojlim K$.

Soit $\mathcal{C}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie et $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}\,(\mathfrak{U})$ un foncteur de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des ensembles qui sont éléments de $\mathfrak{U}$. On définit [([1]) ou ([4])] une $\mathfrak{U}$-catégorie $\mathcal{S}$ et un foncteur $K : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ de la façon suivante : Les objets de $\mathcal{S}$ sont les couples (X, x) où $X \in Ob(\mathcal{C})$ et $x \in F(X)$; les flèches sont les couples (f, x) où $f : X \to Y \in \mathcal{C}$ et $x \in F(X)$; la source de (f, x) est (X, x) et le but est $(Y, F(f)\,(x))$; la composition est

$$(g, F(f)\,(x))\,(f, x) = (gf, x).$$

Le foncteur K est défini par

$$K(X, x) = X; \qquad K(f, x) = f.$$

Théorème 1. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}\,(\mathfrak{U})$ *est représentable;*

(ii) *La catégorie* $\mathcal{S}$ *a un objet initial;*

(iii) *Le foncteur* K *a une limite projective et* F *est compatible avec cette limite;*

(iv) *Il existe un objet* X *de* $\mathcal{C}$ *et un système projectif séparant* $\xi \in \mathrm{Proj}\,(X, K)$ *tel que* $\lambda\,(F\xi) : F(X) \to \varprojlim F \circ K$ *est surjective.*

2. Majorations. — Une $\mathfrak{U}$-catégorie $\mathcal{I}$ est $\mathfrak{U}$-*petite,* s'il existe une $\mathfrak{U}$-catégorie $\mathcal{K}$ équivalente à $\mathcal{I}$ et telle que $Ob\,(\mathcal{K}) \in \mathfrak{U}$. Un foncteur

$\Phi : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ est $\mathfrak{U}$-*petit* si $\mathcal{J}$ et $\mathcal{C}$ sont deux $\mathfrak{U}$-catégories et si $\mathcal{J}$ est $\mathfrak{U}$-petite. Un objet X d'une $\mathfrak{U}$-catégorie $\mathcal{C}$ est à *sous-objets* (resp. quotients) $\mathfrak{U}$-*petits* si la catégorie des sous-objets de X (resp. des quotients de X) est $\mathfrak{U}$-petite; il est $\mathfrak{U}$-*petit* s'il est à sous-objets et objets-quotients $\mathfrak{U}$-petits. $\mathcal{C}$ est *à petits quotients* (resp. sous-objets, resp. objets) si tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ est à quotients (resp. sous-objets, resp. quotients et sous-objets) $\mathfrak{U}$-petits. Les catégories « usuelles » sont toutes à petits objets. Une $\mathfrak{U}$-catégorie $\mathcal{C}$ est à $\mathfrak{U}$-$\varprojlim$ si tout foncteur $\mathfrak{U}$-petit de but $\mathcal{C}$ admet une $\varprojlim$.

Soit $\mathcal{C}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie et $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}(\mathfrak{U})$ un foncteur. En général, le foncteur K du paragraphe 1 n'est pas $\mathfrak{U}$-petit. Nous allons donner plusieurs « critères de majoration » permettant de ramener (iii) à la considération de $\varprojlim$ de foncteurs $\mathfrak{U}$-petits.

Soit $f : X \to Y \in \mathcal{C}$, et $y \in F(Y)$ on dit que *y passe par f* s'il existe $x \in F(x)$ tel que $y = F(f)(x)$. On dit que $x \in F(X)$ *engendre* X si pour tout couple $f, g : X \to Y$, $F(f)(x) = F(g)(x) \Rightarrow f = g$. On dit que $x \in F(X)$ *engendre strictement* X si pour tout sous-objet $j : X' \to X$ de X, si x passe par j, j est un isomorphisme. F est $\mathfrak{U}$-*borné* s'il existe une famille $\mathcal{M} = (X_m)_{m \in M}$ avec $M \in \mathfrak{U}$, $X_m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ telle que pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et $x \in F(X)$, il existe $f : X_m \to X$ tel que x passe par f. F est *génériquement* $\mathfrak{U}$-*borné* s'il existe une famille $\mathcal{G} = (X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ avec $\Gamma \in \mathfrak{U}$, $X_\gamma \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ telle que si $x \in F(X)$ engendre X, X est isomorphe à un des X_γ. F est *strictement* $\mathfrak{U}$-*borné* s'il existe une famille $\mathcal{L} = (X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ avec $\Lambda \in \mathfrak{U}$, $X_\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ telle que si $x \in F(X)$ engendre strictement X, X est isomorphe à un X_λ.

La notion essentielle est celle de foncteur $\mathfrak{U}$-borné. En effet, si F est $\mathfrak{U}$-borné, on définit une catégorie $\mathfrak{U}$-*petite* $\mathfrak{S}'$ et un foncteur $\Phi = \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$ de la manière suivante : Les objets de $\mathfrak{S}'$ sont les couples (m, x) où $m \in M$ et $x \in F(X_m)$; les flèches sont les quadruples (n, f, m, x) où $f : X_m \to X_n \in \mathcal{C}$ et $x \in F(X_m)$, la source étant (m, x) et le but $(n, F(f)(x))$; la composition est donnée par

$$(p, g, n, F(f)(x)) \circ (n, f, m, x) = (p, gf, m, x);$$

le foncteur Φ est défini par

$$\Phi(m, x) = (X_m, x), \qquad \Phi(n, f, m, x) = (f, x).$$

Avec ces notations, on a :

Lemme 1. — *Si $\mathcal{C}$ est à produits fibrés et $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ est $\mathfrak{U}$-borné et commute avec les produits fibrés; pour toute $\mathfrak{U}$-catégorie $\mathcal{C}'$ et tout foncteur $K' : \mathfrak{S} \to \mathcal{C}'$, K' a une limite projective $\Rightarrow K' \circ \Phi$, petit foncteur, a une limite projective, et les deux sont canoniquement isomorphes.*

On exprime ceci en disant que Φ fait de $\mathfrak{S}'$ une catégorie *cofinale* dans $\mathfrak{S}$.

Théorème 2. — *Soit $\mathcal{C}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie ayant des $\mathfrak{U}$-$\varprojlim$. Un foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}(\mathfrak{U})$ *est représentable $\Leftrightarrow$ il est $\mathfrak{U}$-borné et commute avec les* $\varprojlim$.

Pour reconnaître qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}(\mathfrak{U})$ est $\mathfrak{U}$-borné on dispose des critères suivants :

Proposition 1. — *Soit $\mathcal{I}$ une $\mathfrak{U}$-petite catégorie et*

$$\Phi : \quad \mathcal{I} \to \mathrm{Fonct}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens}(\mathfrak{U}))\,;$$

$i \leadsto F_i : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}(\mathfrak{U})$, *un foncteur. Si les* F_i *sont tous* $\mathfrak{U}$-*bornés*, $\varinjlim_i F_i$ *est* $\mathfrak{U}$-*borné.*

Supposons pour simplifier que $\mathcal{C}$ est à $\mathfrak{U}$-$\varprojlim$ et que F commute aux $\mathfrak{U}$-$\varprojlim$.

Proposition 2. — *Si $\mathcal{C}$ est à petits sous-objets : génériquement $\mathfrak{U}$-borné $\Rightarrow$ strictement $\mathfrak{U}$-borné $\Rightarrow$ $\mathfrak{U}$-borné.*

Proposition 3. — *Si $\mathcal{C}$ est à petits objets quotients : $\mathfrak{U}$-borné $\Rightarrow$ génériquement $\mathfrak{U}$-borné $\Rightarrow$ strictement $\mathfrak{U}$-borné.*

Les trois notions coïncident dans le cas où $\mathcal{C}$ est à petits objets, et l'on a alors :

Proposition 4. — *Si $\mathcal{C}$ est à petits objets et* $G : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}(\mathfrak{U})$ *est un foncteur $\mathfrak{U}$-borné, tout sous-foncteur* F *de* G, *qui commute avec les* $\varprojlim$, *est $\mathfrak{U}$-borné.*

Dans le cas où $\mathcal{C}$ admet un cogénérateur C, c'est-à-dire un objet tel que le foncteur $\mathrm{Hom}(.,C) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}(\mathfrak{U})$ soit fidèle, on a un critère de majoration « indépendant du foncteur F ». En effet :

Proposition 5. — *Soit $\mathcal{C}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie à $\mathfrak{U}$-limites projectives, ayant un cogénérateur* C *tel que pour tout* $I \in \mathfrak{U}$, C^I *soit à sous-objets $\mathfrak{U}$-petits (c'est le cas si $\mathcal{C}$ est à sous-objets petits) un foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}(\mathfrak{U})$ *est représentable si et seulement si il commute aux limites projectives.*

3. Remarques et applications.

Remarque 1. — Toutes les définitions se dualisent au cas des foncteurs contravariants, et les résultats subsistent.

Remarque 2. — Avec des modifications évidentes, tout ce qui précède est valable si l'on ne se place pas dans le « contexte des univers », mais dans le formalisme où l'on distingue « classes » et « ensembles », « grosses catégories » et « petites catégories ».

Les critères de représentabilité donnés au paragraphe 2 permettent de retrouver, en général avec des hypothèses plus faibles, les théorèmes d'existence d'adjoints donnés par Freyd ([2]). Par exemple, du théorème 2, on déduit :

Théorème 3. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie à limites projectives et* $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *un foncteur,* S *a un adjoint à gauche si et seulement si il commute avec les limites projectives et pour tout objet* D *de* $\mathcal{D}$, *le foncteur* $\mathrm{Hom}(D, S(.))$ *est borné.*

[Freyd obtient le même théorème en supposant, en outre, que $\mathcal{C}$ est à petits sous-objets et que pour tout $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, $\mathrm{Hom}(D, S(.))$ n'est pas le foncteur vide.]

La proposition 4 permet de construire des « objets définis par générateurs et relations » quand on sait construire des « objets libres ». De façon précise on a :

THÉORÈME 4. — *Soient* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *des* $\mathcal{U}$-*catégories et* $S : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$; $P : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ *des foncteurs tels que :*

(i) $P \circ S = Q$ *et* P *est fidèle;*

(ii) $\mathcal{A}$ *est à petits objets;*

(iii) $\mathcal{A}$ *est à* $\mathcal{U}$-*limites projectives et* Q *a un adjoint à gauche.*

Alors S *admet un adjoint à gauche* $\Leftrightarrow$ S *commute avec les* $\mathcal{U}$-*limites projectives.*

Par exemple, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des catégories d'ensembles « munies de structures » $\mathcal{C}$ est la catégorie des ensembles, P et Q sont les foncteurs qui « oublient les structures » et S un foncteur qui « oublie une partie de la structure », (i) et (ii) sont satisfaits et il suffit de vérifier (iii) et de savoir que S commute aux $\varprojlim$, ce qui est en général assez facile, pour que S admette un adjoint à gauche.

De la proposition 4 on déduit encore :

THÉORÈME 5. — *Soit* $\mathcal{C}$ *une* $\mathcal{U}$-*catégorie à* $\mathcal{U}$-$\varprojlim$ *et petits objets,* $\mathcal{C}$ *a des* $\mathcal{U}$-*limites inductives si et seulement si il existe une* $\mathcal{U}$-*catégorie* $\mathcal{A}$ *ayant des* $\mathcal{U}$-*sommes directes et un foncteur fidèle* $P : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ *ayant un adjoint à gauche.*

[Les applications de ce théorème au cas où $\mathcal{A} = \mathrm{Ens}(\mathcal{U})$ et P est le foncteur « oubli de structures » sont très nombreuses.]

(*) Séance du 11 janvier 1965.

(1) EHRESMANN, *Gattungen von lokalen Structuren* (*Jahresberichte der Deutschen. Mat. Vereinigung*, 60, 1957).

(2) FREYD, *Abelian Categories*, Harper et Row, New-York, 1964.

(3) GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie algébrique*, chap. 0, Presses Universitaires de France, 1961.

(4) KAN, *Adjoint Functors* (*Trans. Amer. Mat. Soc.*, 1958).

(65, *rue d'Hauteville, Paris*, 5e.)