ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Caractérisation de* **Dist**. Note (*)
de Mlle **Marie-Françoise Gouzou** et M. **Roland Grunig**, transmise par M. Henri Cartan.

Les résultats de la première partie conduisent à la construction d'une bicatégorie (2) Rel (**Cat**) équivalente à la bicatégorie des distributeurs (**Dist**). Cette bicatégorie joue un rôle très important pour la démonstration du théorème de la deuxième partie qui permet de caractériser **Dist** comme solution d'un problème universel.

1. Notations. — La plupart des notations sont celles de (1). Gr $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ désigne la catégorie dont les objets sont les triplets $(\mathbf{D}, q_\mathbf{A}, q_\mathbf{B})$ où $q_\mathbf{A} : \mathbf{D} \to \mathbf{A}$, $q_\mathbf{B} : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$ et une flèche de $(\mathbf{D}, q_\mathbf{A}, q_\mathbf{B})$ dans $(\mathbf{D}', q'_\mathbf{A}, q'_\mathbf{B})$ est une flèche $\mathrm{H} : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ telle que $q'_\mathbf{A} \circ \mathrm{H} = q_\mathbf{A}$, $q'_\mathbf{B} \circ \mathrm{H} = q_\mathbf{B}$.

Proposition 1. — *Soit un foncteur* $\mathrm{H} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, φ_H *et* φ^H *les distributeurs associés,* $\varepsilon'_\mathrm{H} : \varphi_\mathrm{H} \circ \varphi^\mathrm{H} \to \mathrm{I}_\mathbf{B}$, $\eta'_\mathrm{H} : \mathrm{I}_\mathbf{A} \to \varphi^\mathrm{H} \circ \varphi_\mathrm{H}$ *les morphismes montrant que* φ_H *est adjoint à gauche de* φ^H. *On a :*

(1) η'_H *est un isomorphisme si et seulement si* H *est pleinement fidèle;*

(2) ε'_H *est un isomorphisme si et seulement si pour tout objet* B *de* $\mathbf{B}$ *le foncteur canonique de* (H, B) *dans* $(\mathbf{B}, \mathrm{B})$ *est cofinal.*

Proposition 2. — *Il existe un foncteur* $\mathrm{K}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} : \mathrm{Gr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \to \mathbf{Dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *admettant un adjoint à droite pleinement fidèle,* $\mathrm{H}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$, *définis par*

$$\mathrm{K}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{D}, q_\mathbf{A}, q_\mathbf{B}) = \varphi_{q_\mathbf{B}} \circ \varphi^{q_\mathbf{A}},$$

$$\begin{array}{rl} \mathrm{K}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathrm{H}) : & \varphi_{q_\mathbf{B}} \circ \varphi^{q_\mathbf{A}} \xrightarrow{\sim} (\varphi_{q'_\mathbf{B}} \circ \varphi_\mathrm{H}) \circ (\varphi^\mathrm{H} \circ \varphi^{q'_\mathbf{A}}) \xrightarrow{\sim} \varphi_{q'_\mathbf{B}} \circ \left[(\varphi_\mathrm{H} \circ \varphi^\mathrm{H}) \circ \varphi^{q'_\mathbf{A}}\right] \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{Id} \circ (\varepsilon'_\mathrm{H} \circ \mathrm{Id})} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varphi_{q'_\mathbf{B}} \circ (\mathrm{I}_{\mathbf{D}'} \circ \varphi^{q'_\mathbf{A}}) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big\downarrow \wr \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varphi_{q'_\mathbf{B}} \circ \varphi^{q'_\mathbf{A}} \end{array}$$

$$\mathrm{H}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\varphi) = (\mathbf{D}_\varphi, p_\mathbf{A}, p_\mathbf{B}) \qquad \text{où} \quad \mathrm{Ob}(\mathbf{D}_\varphi) = \coprod_{\substack{\mathrm{A} \in |\mathbf{A}| \\ \mathrm{B} \in |\mathbf{B}|}} \varphi(\mathrm{B}, \mathrm{A}),$$

$\mathrm{H}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(v)$ *est l'unique flèche rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{D}_\varphi, p_\mathbf{A}, p_\mathbf{B}) & \xrightarrow[\sim]{t} & \varphi \\ {\scriptstyle \mathrm{K}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}[\mathrm{H}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(v)]}\Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle v} \\ \mathrm{K}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{D}_{\varphi'}, p'_\mathbf{A}, p'_\mathbf{B}) & \xrightarrow[\sim]{t'} & \varphi' \end{array}$$

où t *est l'isomorphisme canonique entre* φ et $\varphi_{p_\mathbf{B}} \circ \varphi^{p_\mathbf{A}}$.

Proposition 3. — *Soient* $G : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$, $F : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, $\varphi = \varphi^F \circ \varphi_G$. *On définit une transformation naturelle* $\alpha : F \circ p_\mathbf{B} \to G \circ p_\mathbf{A}$ *en posant* $\alpha_D = D$. $(\mathbf{D}_\varphi, p_\mathbf{A}, p_\mathbf{B}, \alpha)$ *est la catégorie* (G, F), *que nous appelerons ici deux-produit fibré* de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ *au-dessus de* $\mathbf{C}$.

Proposition 4. — *La bicatégorie* Rel ($\mathbf{Cat}$) *définie ci-dessous est équivalente à* $\mathbf{Dist}$:

— *Les objets de* Rel ($\mathbf{Cat}$) *sont ceux de* $\mathbf{Cat}$;

— Rel ($\mathbf{Cat}$) $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *est la sous-catégorie pleine de* Gr $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *dont les objets sont les* $(\mathbf{D}_\varphi, p_\mathbf{A}, p_\mathbf{B})$ *où* $\varphi \in |\mathbf{Dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B})|$;

— $D_{\varphi_2} \circ D_{\varphi_1} = D_{\varphi_2 \circ \varphi_1}$.

Remarque. — Soient $(\mathbf{D}_{\varphi_1}, F_1, G_1)$ associé à $\varphi_1 : \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$; $(\mathbf{D}_{\varphi_2}, F_2, G_2)$ associé à $\varphi_2 : \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}$ et $(\mathbf{D}, \pi_1, \pi_2)$ le deux-produit fibré de $\mathbf{D}_{\varphi_1}$ et $\mathbf{D}_{\varphi_2}$ au-dessus de $\mathbf{B}$.

Le distributeur $K_{\mathbf{A},\mathbf{C}}(\mathbf{D}, G_2 \circ \pi_2, F_1 \circ \pi_1)$ est isomorphe à $\varphi_2 \circ \varphi_1$ et à cet isomorphisme est associé une flèche $H : \mathbf{D} \to \mathbf{D}_{\varphi_2 \circ \varphi_1}$ dans Gr $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$.

2. Caractérisation de $\mathbf{Dist}$.

Définitions et notations. — *a.* Soient $\mathcal{S}$ une bicatégorie, $\Gamma : \mathbf{Cat} \to \mathcal{S}$ et $\Gamma^* : \mathbf{Cat}^* \to \mathcal{S}$ deux homomorphismes de bicatégories coïncidant sur les objets.

On dit que Γ et Γ^* possèdent une adjonction cohérente si et seulement si pour tout foncteur $H : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ il existe des deux-cellules

$$\varepsilon_H : \Gamma(H) \circ \Gamma^*(H) \to \mathcal{J}_{\Gamma(\mathbf{B})}; \qquad \eta_H : \mathcal{J}_{\Gamma(\mathbf{A})} : \Gamma^*(H) \circ \Gamma(H)$$

vérifiant

$$\begin{aligned} AC_0 : \quad & (\varepsilon_H \star \varphi_H) \circ (\varphi_H \star \eta_H) = 1_{\varphi_H}, \\ & (\varphi^H \star \varepsilon_H) \circ (\eta_H \circ \varphi^H) = 1^{\varphi^H}; \end{aligned}$$

AC_1 : Pour tous foncteurs $H : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$; $K : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(KH)\circ\Gamma^*(KH) \arrow[r, "\sim"'] \arrow[dddrr, "\varepsilon_{KH}"'] & {[\Gamma(K)\circ\Gamma(H)]\circ[\Gamma^*(H)\circ\Gamma^*(K)]} \arrow[r, "\sim"'] & \Gamma(K)\circ\{[\Gamma(H)\circ\Gamma^*(H)]\circ\Gamma^*(K)\} \arrow[d, "\mathrm{Id}\circ(\varepsilon_H\circ\mathrm{Id})"] \\
& & \Gamma(K)\circ[\mathcal{J}_{\Gamma(\mathbf{B})}\circ\Gamma^*(K)] \arrow[d, "\wr"'] \\
& & \Gamma(K)\circ\Gamma^*(K) \arrow[d, "\varepsilon_K"] \\
& & \mathcal{J}_{\Gamma(\mathbf{C})}
\end{tikzcd}$$

et le diagramme pour η_H, η_K, η_{HK} est aussi commutatif.

AC_2 : Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Gamma(1_{\mathbf{A}}) \circ \Gamma^*(1_{\mathbf{A}}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\varepsilon_{1_{\mathbf{A}}}"'] & \mathfrak{I}_{\Gamma(\mathbf{A})} \circ \mathfrak{I}_{\Gamma(\mathbf{A})} \arrow[d, "\wr"] \\ & \mathfrak{I}_{\Gamma(\mathbf{A})} \end{tikzcd}$$

ainsi que le diagramme analogue pour $\eta_{1_{\mathbf{A}}}$.

AC_3 : Pour tous foncteurs $H : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $K : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ et toute transformation naturelle $\alpha : H \to K$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \Gamma(H) \circ \Gamma^*(K) \arrow[r, "\Gamma(\alpha)\circ \mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\circ\Gamma^*(\alpha)"'] & \Gamma(K) \circ \Gamma^*(K) \arrow[d, "\varepsilon_K"] \\ \Gamma(H) \circ \Gamma^*(H) \arrow[r, "\varepsilon_H"'] & \mathfrak{I}_{\Gamma(\mathbf{B})} \end{tikzcd}$$

ainsi que le diagramme analogue pour η_H et η_K.

b. Soient

$$G : \mathbf{A} \to \mathbf{C}; \qquad F : \mathbf{B} \to \mathbf{C};$$
$$\pi_1 : \mathbf{D} \to \mathbf{A}; \qquad \pi_2 : \mathbf{D} \to \mathbf{B}.$$

Proposition 5. — *Il existe une bijection q de* $\mathrm{Hom}(F \circ \pi_2, G \circ \pi_1)$ *sur* $\mathrm{Hom}(\Gamma(\pi_2) \circ \Gamma^*(\pi_1), \Gamma^*(F) \circ \Gamma(G))$.

c. Soient $(\mathcal{S}, \Gamma, \Gamma^*)$ et $(\mathcal{S}_1, \Gamma_1, \Gamma_1^*)$ possédant une adjonction cohérente. Une flèche $(\mathcal{S}, \Gamma, \Gamma^*) \to (\mathcal{S}_1, \Gamma_1, \Gamma_1^*)$ est un triplet (K, α, α^*) où $K : \mathcal{S} \to \mathcal{S}_1$ est un homomorphisme, $\alpha : K\Gamma \to \Gamma_1$ et $\alpha^* : K\Gamma^* \to \Gamma_1^*$ sont des isomorphismes naturels tels que $\alpha_{\mathbf{A}} = \alpha^*_{\mathbf{A}} = \mathfrak{I}_{\Gamma_1(\mathbf{A})}$ rendant commutatif pour tout foncteur $H : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} K(\Gamma(H) \circ \Gamma^*(H)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "K(\varepsilon_H)"'] & K\Gamma(H) \circ K\Gamma^*(H) \arrow[r, "\alpha_H \circ \alpha^*_H"] & \Gamma_1(H) \circ \Gamma_1^*(H) \arrow[d, "\varepsilon_{1H}"] \\ K(\mathfrak{I}_{\Gamma(\mathbf{B})}) \arrow[rr] & & \mathfrak{I}_{\Gamma_1(\mathbf{B})} \end{tikzcd}$$

ainsi que le diagramme analogue pour η_H et η_{1_H}.

Théorème. — *Pour toute bicatégorie* $\mathcal{S}$ *munie de* $\Gamma : \mathbf{Cat} \to \mathcal{S}$, $\Gamma^* : \mathbf{Cat}^* \to \mathcal{S}$ possédant une adjonction cohérente, telle que :

(1) ε_H *est un isomorphisme si* H *vérifie la condition de la proposition* 1

(2) *pour tout deux-produit fibré* $q(\alpha)$ *est un isomorphisme*

il existe une flèche $(K, \alpha, \alpha^*) : (\mathbf{Dist}, \varphi_-, \varphi^-) \to (\mathcal{S}, \Gamma, \Gamma^*)$ *telle que pour toute autre flèche* (K', α', α'^*) *il existe un et un seul isomorphisme* $\nu : K' \to K$ *vérifiant* $\alpha \circ (\nu \star \varphi_-) = \alpha'$, $\alpha^* \circ (\nu \star \varphi^-) = \alpha'^*$.

(*) Séance du 3 janvier 1973.

(1) J. Benabou, Cours E. N. S. Sèvres 1969-1970, Notes multigraphiées.
(2) J. Benabou, Exposé Oberwalfach (juillet 1972).
(3) J. Benabou, *Introduction to bicategories* (*Lecture Notes in Mathematics* n° 47).

Université Paris VII,
IREM,
2, *place Jussieu,*
75005-*Paris.*