

Optimal Diet Problem

ΡΟΥΣΚΑ ΝΑΤΑΛΙΑ

1092581



Στόχος

- Stigler's problem 1945: Κάλυψη θρεπτικών αναγκών με το ελάχιστο δυνατό κόστος
- Δεδομένα από USDA: 64 τροφές, 8 θρεπτικά συστατικά (θερμίδες, πρωτεΐνη, ασβέστιο, σίδηρος, βιταμίνη Α, βιταμίνη C, υδατάνθρακες και φυτικές ίνες)
- Επέκταση με περιορισμούς ποικιλίας μεταξύ των ημερών

Σενάριο 1 - Μοντελοποίηση

- Μεταβλητές απόφασης
 x_i : αριθμός μερίδων τροφής i
 y_i : 0/1 αν η τροφή i επιλέγεται
- Αντικειμενική συνάρτηση $\min z = \sum_{i=1}^M c_i x_i$
- Περιορισμοί θρεπτικών ορίων
Για κάθε συστατικό n $N_n^{\min} < \sum_{i=1}^M a_{ni} x_i < N_n^{\max}$
 c_i : κόστος ανά μερίδα φαγητού i
 a_{ni} : ποσότητα συστατικού n σε μία μερίδα φαγητού i
 $N_n^{\min/\max}$: ελάχιστη/μέγιστη ημερίσια ποσότητα συστατικού n

Σενάριο 1 - Μοντελοποίηση

- Περιορισμοί μερίδων

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \text{ και ακέραιοι}$$

$$x_i \leq S y_i \quad \forall i, \text{ αν } y_i = 0 \text{ τότε } x_i = 0 \text{ μη επιλεγμένη τροφή}$$

$$x_i \geq y_i \quad \forall i, \text{ αν } y_i = 1 \text{ τότε } 1 \leq x_i \leq S \text{ επιλεγμένη τροφή}$$

- Περιορισμοί ποικιλίας

Για κάθε προηγούμενο σετ τροφών $C \subseteq \{1, \dots, M\}$

$$\sum_{i \in C} y_i \leq |C| - k$$

k: ο αριθμός των τροφών που πρέπει να αλλάξουν σε σχέση με την κάθε προηγούμενη μέρα

S: μέγιστος αριθμός μερίδων κάθε τροφής ημερισίως

Σενάριο 1 - Αποτελέσματα

- Για $S=2$, $k=8$

	Day 1	Day 2	Day 3	Day 4	Day 5	Day 6	Day 7
Κόστος	Κόστος: €6.80	Κόστος: €8.32	Κόστος: €12.32	Κόστος: €13.12	Κόστος: €13.20	Κόστος: €14.08	Κόστος: €18.68
Μερίδες	Frozen Broccoli (2) Carrots,Raw (2) Banana (1) Oranges (1) Wheat Bread (2) White Bread (2) Chocolate Chip Cookies (2) 3.3% Fat,Whole Milk (1) Poached Eggs (2) Peanut Butter (2) Popcorn,Air-Popped (2) Potatoes, Baked (2)	Frozen Broccoli (2) Butter,Regular (1) Skim Milk (1) Scrambled Eggs (1) White Rice (2) Peanut Butter (2) Popcorn,Air-Popped (2) Tortilla Chip (1) Potatoes, Baked (2) Spaghetti W/ Sauce (1)	Frozen Broccoli (2) Apple,Raw,W/Skin (2) Banana (2) Oranges (2) Oatmeal Cookies (2) Celery, Raw (1) 2% Lowfat Milk (1) Frozen Corn (1) Lettuce,Iceberg,Raw (2) Pork (1) Popcorn,Air-Popped (2) Pretzels (1)	Frozen Broccoli (2) Wheat Bread (2) White Bread (2) Oatmeal Cookies (2) Celery, Raw (2) Chocolate Chip Cookies (2) Cheddar Cheese (1) Kielbasa,Prk (1) Potato Chips,Bbqflvr (1) Pretzels (2) Spaghetti W/ Sauce (2)	Frozen Broccoli (2) Apple,Raw,W/Skin (2) Wheat Bread (2) 3.3% Fat,Whole Milk (1) Raisin Brn, Kellg'S (1) Macaroni,Ckd (2) Pork (1) Popcorn,Air-Popped (2) Beanbacn Soup,W/Watr (1)	Frozen Broccoli (2) Banana (2) Oranges (1) Chocolate Chip Cookies (2) 2% Lowfat Milk (1) Cheerios (1) Hotdog, Plain (2) Spaghetti W/ Sauce (2)	Carrots,Raw (2) Kiwifruit,Raw,Fresh (1) White Bread (2) Celery, Raw (2) Cheddar Cheese (2) Frozen Corn (2) Lettuce,Iceberg,Raw (2) Peanut Butter (2) Splt Pea&Hamsoup (2) Potatoes, Baked (2) Beanbacn Soup,W/Watr (2)

- Σταδιακή αύξηση κόστους
- Frozen broccoli φθηνό/θρεπτικό

Σενάριο 1 – Παράμετροι S, k

- $k=7$ περισσότερα φθηνά/θρεπτικά τρόφιμα επαναχρησιμοποιούνται, ποικιλία μειώνεται, κόστος σχετικά σταθερό (12.48\$ τελευταία μέρα)
- $k=9$ λύση για 3 πρώτες ημέρες, 4η ημέρα ανέφικτη.
- $S=1$ κόστος αυξάνεται από την 1η μέρα σε 11.52\$, χρειάζονται ~15 διαφορετικά τρόφιμα για να καλυφθούν τα θρεπτικά όρια.
- $S=3$ το μοντέλο κολλάει σε πολύ λίγα φθηνά/θρεπτικά τρόφιμα, μόνο λύση για 1^η μέρα

Σενάριο 2 - Μοντελοποίηση

- Μεταβλητές απόφασης
 $x_{i,d}$: αριθμός μερίδων τροφής i που καταναλώνονται την ημέρα d
 $y_{i,d}$: 0/1 αν η τροφή i επιλέγεται την ημέρα d
- Αντικειμενική συνάρτηση $\min z = \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^M c_i x_{i,d}$
- Περιορισμοί θρεπτικών ορίων
Για κάθε συστατικό n $N_n^{min} < \sum_{i=1}^M a_{ni} x_{i,d} < N_n^{max}$

Σενάριο 2 - Μοντελοποίηση

- Περιορισμοί μερίδων

$$x_{i,d} \geq 0 \quad \forall i, d$$

$$x_{i,d} \leq S y_{i,d} \quad \forall i, d$$

αν $y_{i,d} = 0$ τότε $x_{i,d} = 0$ μη επιλεγμένη τροφή την ημέρα d

$x_{i,d} \geq y_{i,d} \quad \forall i, d$ αν $y_{i,d} = 1$ τότε $1 \leq x_{i,d} \leq S$ επιλεγμένη τροφή

- Περιορισμοί ποικιλίας

$$\sum_{d \in D} y_{i,d} \leq 1 \quad \forall i \text{ κάθε τροφή επιτρέπεται το πολύ σε μία μέρα}$$

Σενάριο 2 - Αποτελέσματα

- Για $D=3$, $S=2$ Η βέλτιστη λύση βρέθηκε σε χρόνο ~ 9 λεπτών και καμία τροφή δεν επαναλαμβάνεται

	Day 1	Day 2	Day 3
Total Cost	15.11 €	17.25 €	17.97 €
Foods/Servings	Lettuce,Iceberg,Raw: 2.0 Spaghetti W/ Sauce: 2.0 Kiwifruit,Raw,Fresh: 1.1439221 Oranges: 2.0 Chocolate Chip Cookies: 1.180989 Butter,Regular: 1.3255505 3.3% Fat,Whole Milk: 1.160571 Poached Eggs: 2.0 Raisin Brn, Kellg'S: 1.2064506 Popcorn,Air-Popped: 2.0 Tortilla Chip: 2.0	Carrots,Raw: 2.0 Celery, Raw: 2.0 Frozen Corn: 2.0 Potatoes, Baked: 2.0 White Bread: 2.0 Skim Milk: 1.0356255 Cheerios: 1.9489522 Peanut Butter: 2.0 Vegetbeef Soup: 1.8755239 Beanbacn Soup,W/Watr: 2.0	Frozen Broccoli: 2.0 Tofu: 2.0 Tomato,Red,Ripe,Raw: 1.28423 Apple,Raw,W/Skin: 2.0 Banana: 2.0 Wheat Bread: 2.0 Oatmeal Cookies: 2.0 Scrambled Eggs: 1.8676457 Potato Chips,Bbqflvr: 2.0 Pretzels: 1.3356422 Splt Pea&Hamsoup: 2.0

Σενάριο 2 - Αποτελέσματα

- D=3, S=3: Βέλτιστη λύση σε 41 sec, μικρότερο κόστος/day, αλλά λιγότερα διαφορετικά τρόφιμα ανά ημέρα

	Day 1	Day 2	Day 3
Total Cost	9.32 €	9.37 €	15.31 €
Foods/Servings	Frozen Broccoli: 3.0 Celery, Raw: 2.4979508 Potatoes, Baked: 3.0 Banana: 2.8833389 Poached Eggs: 3.0 Scrambled Eggs: 3.0 Tortilla Chip: 2.9813441	Carrots,Raw: 3.0 Lettuce,Iceberg,Raw: 2.0334242 Apple,Raw,W/Skin: 2.9871698 Oranges: 3.0 Wheat Bread: 3.0 3.3% Fat,Whole Milk: 1.8263119 Peanut Butter: 3.0 Popcorn,Air-Popped: 3.0 Pretzels: 1.263827	Spaghetti W/ Sauce: 3.0 White Bread: 3.0 Oatmeal Cookies: 1.5360414 Chocolate Chip Cookies: 3.0 Butter,Regular: 1.5099627 Skim Milk: 1.1468594 Beanbacn Soup,W/Watr: 1.2765552

Σενάριο 2 – Παράμετρος D

- D=4: Εκθετική αύξηση χρόνου επίλυσης λόγω 2M νέων μεταβλητών και N νέων περιορισμών (πολύ βαρύ υπολογιστικά)
- Χαλάρωση περιορισμού ποικιλίας: Κάθε φαγητό επιτρέπεται το πολύ 2 φορές
- Για D=4 και S=2 η λύση να βρέθηκε σε ~8 sec, τις δύο πρώτες μέρες προτείνονται τα ίδια φθηνά/θρεπτικά φαγητά και τις επόμενες δύο, διαφορετικό σετ τροφίμων.

Ευχαριστώ για τον χρόνο σας!

