 **ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ**

**ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ**

**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**

**ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ**

**ΕΡΓΑΣΙΑ 2η**

**ΝΑΤΑΛΙΑ ΡΟΥΣΚΑ - ΑΜ 1092581**

**ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ**

**ΣΟΦΙΑ ΔΑΣΚΑΛΑΚΗ**

**ΡΙΟ**

**31 ΜΑΙΟΥ 2025**

**Άσκηση 1**

**(α)**  To LP problem εισάγοντας μεταβλητές χαλάρωσης , ,

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

Χρησιμοποιώντας το module pulp που χρησιμοποιεί τον CBC MILP solver,λύνω το πρόβλημα LP.

*Κώδικας 1α*

A screen shot of a computer program

AI-generated content may be incorrect.

Οπότε παίρνω το παρακάτω αποτέλεσμα.

A screenshot of a computer

AI-generated content may be incorrect.

Δηλαδή η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι z\* = 28 και οι μεταβλητές απόφασεις παίρνουν τιμές . Η βασική λύση είναι οπότε οι βασικές μεταβλητές είναι οι και οι ελεύθερες είναι οι μηδενικές , , .

Ο βέλτιστος βασικός πίνακας σχηματίζεται από τις στήλες των βασικών μεταβλητών του πίνακα [Α | Ι3]

Β\* = N =

Οι δεσμευτικοί περιορισμοί είναι εκείνοι για τους οποίους ικανοποιείται ισότητα στην βέλτιστη κορυφή. Παρατηρούμε ότι και οι τρεις είναι δεσμευτικοί, αφού οι μεταβλητές χαλάρωσης είναι όλες μηδενικές

Η βέλτιστη κορυφή στο R5 ορίζεται από την τομή 5 ακριβώς υπερεπίπεδων, τα τρία των δεσμευτικών περιορισμών και τα . Άρα πρόκειται για μη εκφυλισμένη κορυφή.

**(β)** Εφαρμόζω μία διαταραχή γ στον συντελεστή c1 της βασικής μεταβλητής . Για να παραμείνει η βέλτιστη λύση στην ίδια κορυφή πρέπει οι αντικειμενικοί συντελεστές των μη βασικών μεταβλητών να παραμείνουν αρνητικοί δηλαδή

=

=>

Αν ο συντελεστής c1 είναι μέσα στο διάστημα ανοχής [-1,7] τότε η βέλτιστη κορυφή δεν αλλάζει, ενώ η αντικειμενική συνάρτηση μεταβάλλεται κατά Δz =

Εφαρμόζω μία διαταραχή γ στον συντελεστή c4 της βασικής μεταβλητής . Για να παραμείνει η βέλτιστη λύση στην ίδια κορυφή πρέπει οι αντικειμενικοί συντελεστές των μη βασικών μεταβλητών να παραμείνουν αρνητικοί δηλαδή

Αν ο συντελεστής c1 είναι μέσα στο διάστημα ανοχής [-inf, 4] τότε η βέλτιστη κορυφή δεν αλλάζει, ενώ η αντικειμενική συνάρτηση επίσης δεν αλλάζει αφού Δz =

**(γ)** Εφαρμόζω μία διαταραχή γ στον δεσμευτικό περιορισμό 1

+γ

H βέλτιστη λύση μπορεί να αλλάξει, όμως μας ενδιαφέρει ο ρυθμός μεταβολής της αντικείμενικής συνάρτησης καθώς μεταβάλλεται το b1 (σκιώδες κόστος περιορισμού)

Το διάστημα ανοχής για τον περιορισμό 1 ορίζεται από το κριτήριο εφικτότητας δηλ.

Για αυτό το διάστημα τιμών του γ, η z μεταβάλλεται σταθερά με ρυθμό όσο η βέλτιστη τιμή της αντίστοιχης δυικής μεταβλητής y1 = 6

Εφαρμόζω μία διαταραχή γ στον χαλαρό περιορισμό προσήμου

Το σκιώδες κόστος του περιορισμού αυτού είναι μηδέν, επειδή η μεταβλητή χαλάρωσης του είναι μη μηδενική και μέσω συμπληρωματικής χαλαρότητας η αντίστοιχη δυική μεταβλητή είναι 0. Άρα για το διάστημα ανοχής => (

γ η βέλτιστη κορυφή δεν αλλάζει και η αντικειμενική συνάρτηση μένει σταθερή.

**(δ)** Εφαρμόζοντας τους κανόνες μετασχηματισμού πρωτεύοντος σε δυικό πρόβλημα που φαίνονται παρακάτω προκύπτει το δυικό πρόβλημα

A close-up of a text

AI-generated content may be incorrect.

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

Eισάγοντας μεταβλητές χαλάρωσης έχουμε:

*Kώδικας 1δ*

A screen shot of a computer program

AI-generated content may be incorrect.

Παρατηρούμε την λύση του δυικού, που έχει ίδια βέλτιστη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης z\* = 28 με το πρωτεύον.

A screenshot of a computer

AI-generated content may be incorrect.

Συμπληρωματικά ζεύγη μεταβλητών στη βέλτιστη λύση

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Άρα επαληθέυται το θεώρημα συμπληρωματικής χαλαρότητας, δηλαδή και

**Άσκηση 2**

**(α)** Εφαρμόζοντας τους κανόνες μετασχηματισμού πρωτεύοντος σε δυικό πρόβλημα προκύπτει το δυικό πρόβλημα

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

Χρησιμοποιώντας το module pulp που χρησιμοποιεί τον CBC MILP solver,λύνω το πρόβλημα LP.

A screenshot of a computer

AI-generated content may be incorrect.

Η βέλτιστη βασική λύση αποτελείται από 4 μεταβλητές, τις μη μηδενικές και μία μηδενική από τις . Άρα πρόκειται για εκφυλισμένη βασική λύση.

Οι Π1, Π3, Π4 είναι δεσμευτικοί περιορισμοί και ο περιορισμός προσήμου για την είναι δεσμευτικός. Η βέλτιστη κορυφή στο R3 σχηματίζεται από την τομή 4 υπερεπιπέδων, τα τρία των δεσμευτικών περιορισμών και το άρα πρόκειται για εκφυλισμένη κορυφή.

**(β)** Με βάση τις συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας

A close-up of a text

AI-generated content may be incorrect.

Ο Π2 του δυικού είναι μη δεσμευτικός, οπότε η

H , οπότε ο Π3 του πρωτεύοντος είναι δεσμευτικός στη βέλτιστη λύση

γραμμικώς εξαρτημένα επίπεδα

Οπότε , δηλαδή το πρωτεύον έχει πολλαπλές βέλτιστες λύσεις

A white background with black text

AI-generated content may be incorrect.

*Κώδικας 2α*

A screen shot of a computer program

AI-generated content may be incorrect.

**Άσκηση 3**

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

Εξετάζω τη λύση με βάση το παρακάτω θεώρημα από το βιβλίο των Sierksma and Zwols για τη συνθήκη βελτιστότητας.

A close-up of a white background

AI-generated content may be incorrect.

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για είναι z = 15 και ελέγχω αν ισχύουν οι περιορισμοί

|  |
| --- |
| Π1 : μη δεσμευτικός = 2 |
| Π2 : δεσμευτικός = 0 |
| Π3 : δεσμευτικός = 0 |

Άρα ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί, οπότε το πρόκειται για εφικτή λύση.

Το δυικό πρόβλημα φαίνεται παρακάτω

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

O Π1 του πρωτεύοντος είναι μη δεσμευτικός, άρα από συμπληρωματική χαλαρότητα ισχύει .

Από τον Π1 του δυικού προκύπτει ότι και έπειτα από τον Π2 του δυικού προκύπτει ότι

Όμως ο Π3 του δυικού για τη λύση δεν ικανοποιείται, οπότε δεν είναι εφικτή.

Τελικά αφού δεν βρέθηκε εφικτή λύση y στο δυικό μέσω συμπληρωματικής χαλαρότητας για την οποία να ισχύει y =15 σημαίνει ότι η λύση δεν είναι βέλτιστη στο πρωτεύον.

**Άσκηση 4**

**(α)** Μοντελοποιήση του προβλήματος ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού.

|  |  |
| --- | --- |
| Μέρες εργασίας  Βάρδια | Αριθμός σερβιτόρων (μεταβλητή απόφασης) |
| Κυριακή - Πέμπτη |  |
| Δευτέρα - Παρασκευή |  |
| Τρίτη - Σάββατο |  |
| Τετάρτη - Κυριακή |  |
| Πέμπτη - Δευτέρα |  |
| Παρασκευή - Τρίτη |  |
| Σάββατο - Τετάρτη |  |

Περιορισμοί

|  |
| --- |
| Κυριακή |
| Δευτέρα |
| Τρίτη |
| Τετάρτη |
| Πέμπτη |
| Παρασκευή |
| Σάββατο |
|  |
|  |

Πρόβλημα ελαχιστοποίησης του πλήθους των σερβιτόρων άρα η αντικειμενική συνάρτηση

**(β)** Αρχικά χαλαρώνουμε τον περιορισμό για ακέραιες λύσεις και λύνουμε το πρόβλημα γ.π χρησιμοποιώντας το module pulp που χρησιμοποιεί τον CBC MILP solver.

A computer screen shot of a diagram

AI-generated content may be incorrect.

Με τη μέθοδο Branch and Bound βρέθηκαν 3 βέλτιστες λύσεις με z =16, οπότε σταματάμε τη διακλάδωση

*Κώδικας 4*

A screen shot of a computer program

AI-generated content may be incorrect.

**Άσκηση 5**

Αρχικά χαλαρώνουμε τον περιορισμό για ακέραιες λύσεις και λύνουμε το πρόβλημα γ.π. Επιλέγω τη για διόρθωση, οπότε προκύπτει το πρώτο branching και δημιουργούνται δύο νέα προβληματα γ.π. Η επιλόγη του επόμενου κόμβου για διακλάδωση γίνεται με Jumptracking, δηλ. επιλέγεται αυτός με τη μεγαλύτερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης.

A screen shot of a black background

AI-generated content may be incorrect.A computer screen shot of a diagram

AI-generated content may be incorrect.

*Κώδικας 5*

A screen shot of a computer program

AI-generated content may be incorrect.

A computer screen shot of a program code

AI-generated content may be incorrect.

**Άσκηση 6**

**(α)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Δέμα | Όγκος | Κέρδος |
| 1 | 2 | 10 |
| 2 | 3 | 14 |
| 3 | 4 | 31 |
| 4 | 6 | 48 |
| 5 | 8 | 60 |

Μοντελοποίηση: ‘Εστω η δυαδική μεταβλητή που παίρνει τιμή 1 όταν το δέμα παραδίδεται και 0 στην αντίθετη περίπτωση.

Πρόβλημα μεγιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης

Περιορισμοί

Πρόκειται για πρόβλημα τύπου Knapsack

Διατάσσω τα δέματα με βάση το κέρδος τους ανά μονάδα όγκου, και ορίζω νέες μεταβλητές σύμφωνα με τη διάταξη. Χαλαρώνω τον περιορισμό για δυικές μεταβλητές.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Δέμα | Κέρδος/Όγκος | Σειρά |
| 1 | 5 |  |
| 2 | 14/3 |  |
| 3 | 7.75 |  |
| 4 | 8 |  |
| 5 | 7.5 |  |

Χαλαρωμένο πρόβλημα

Προφανής λύση

A black numbers and a white background

AI-generated content may be incorrect.A screenshot of a black screen

AI-generated content may be incorrect.

A black background with white text

AI-generated content may be incorrect.A black screen with white numbers and white text

AI-generated content may be incorrect.



 A black numbers on a white background

AI-generated content may be incorrect.

A screenshot of a black screen

AI-generated content may be incorrect.A screen shot of a black background with white text

AI-generated content may be incorrect.A screen shot of a black background with white text

AI-generated content may be incorrect.A black screen with white numbers and a black background

AI-generated content may be incorrect.





A black screen with white text

AI-generated content may be incorrect.A screenshot of a black screen

AI-generated content may be incorrect.A black background with white numbers and white text

AI-generated content may be incorrect.A screenshot of a computer screen

AI-generated content may be incorrect.A screenshot of a black screen

AI-generated content may be incorrect.A black screen with white text and numbers

AI-generated content may be incorrect.

A black screen with white text

AI-generated content may be incorrect.A screenshot of a computer screen

AI-generated content may be incorrect.

Βέλτιστη

Οι υπόλοιποι κόμβοι τερματίζονται γιατί η καλύτερη μέχρι τώρα λύση έχει z = 79 > zu του κάθε κόμβου

Άρα η βέλτιστη λύση είναι να παραδοθούν τα δέματα 3, 4.

*Κώδικας 6α*

A screen shot of a computer program

AI-generated content may be incorrect.

**(β)** Το χαλαρωμένο πρόβλημα μαζί με το δυικό του φαίνονται παρακάτω:

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

Στη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος ισχύει

Άρα με βάση τις συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας

A close-up of a white background

AI-generated content may be incorrect.

Οι Π1, Π2, Π3 του δυικού είναι δεσμευτικοί και ,

Οπότε βρίσκουμε επίσης

Η λύση αυτή είναι εφικτή και δίνει z =86.5, οπότε οι δύο λύσεις είναι βέλτιστες στα προβλήματα.

A screenshot of a computer screen

AI-generated content may be incorrect.**(γ)** Η βέλτιστη ακέραια λύση του δυικού είναι

Παρατηρώ ότι στο πρωτεύον ακέραιο πρόβλημα η βέλτιστη λύση έχει z = 79, ενώ στο δυικό ακέραιο έχει z = 88

Επομένως δεν ισχύουν οι συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας για το ακέραιο πρωτεύον και το δυικό του.

*Κώδικας 6γ*

A screen shot of a computer program

AI-generated content may be incorrect.