

Reconstruction d'images par approche $TV - TV^2$

Nathan Rouxelin

INSA de Rouen – Département Génie Mathématique

16 mai 2017

Plan

Introduction

Le problème de débruitage

Régularisation $H^1(\Omega)$

Approche $TV - TV^2$

Le problème d'inpainting

Approche $TV - TV^2$

Conclusion

Introduction

Deux grands problèmes du traitement d'images :

- ▶ le débruitage
- ▶ l'inpainting



Figure 1 – Image bruitée

Résolution par approche variationnelle.



Figure 2 – Image «trouée»

Notations

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné (souvent un pavé).

On modélise :

- ▶ une image en niveaux de gris :

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

- ▶ une image en couleurs :

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

- ▶ une image observée :

$$u_d := R u_0 + v$$

avec R un opérateur linéaire et v un bruit additif.

But : Retrouver u_0 connaissant u_d .

Le problème de débruitage

Dans cette partie, on considère que $Ru = u$.

Le problème d'attache aux données

$$\min_{u \in V} \|u - u_d\|_{L^2(\Omega)}^2$$

est mal posé.

Exemple : $\Omega :=]0, 1[, V := H^1(\Omega)$, $u_n := x^n$ et $u_d := 0$.

Solution : ajouter une pénalisation

$$\min_{u \in V} \|u - u_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \varphi(u)$$

Régularisation $H^1(\Omega) - 1/3$

Soient $V := H^1(\Omega)$ et

$$\mathcal{J}_\alpha : u \mapsto \|u - u_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On considère le problème

$$\min_{u \in V} \mathcal{J}_\alpha(u).$$

Existence d'une solution : \mathcal{J}_α est continue, coercive et convexe.

Régularisation $H^1(\Omega) - 2/3$

Calcul de la solution

Condition d'optimalité : $\forall v \in V$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}'_\alpha(u; v) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}_\alpha(u + \varepsilon v) - \mathcal{J}_\alpha(u)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \int_{\Omega} |v|^2 + |\nabla v|^2 dx + 2 \int_{\Omega} (u - u_d)v + \nabla u \cdot \nabla v dx \\ &= 2 \int_{\Omega} (u - u_d)v + \nabla u \cdot \nabla v dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

Solution optimale :

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u + u = u_d \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Unicité de la solution : théorème de Lax-Milgram.

Régularisation $H^1(\Omega) - 3/3$

Implémentation numérique

Approche dynamique : discrétisation par différences finies

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u + u = u_d \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u = u_d \text{ en } t = 0 \end{array} \right.$$



Figure 3 – Image de départ



Figure 4 – Image débruitée

Modèle $TV - TV^2$

On considère le problème

$$\min_{u \in BV^2(\Omega)} \|u - u_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha TV(u) + \beta TV^2(u)$$

avec

- ▶ $BV(\Omega)$: l'espace des fonctions à variation bornée
- ▶ $BV^2(\Omega)$: l'espace des fonctions à hessien borné
- ▶ $TV(u)$: la variation totale de u

$$TV(u) := \sup \left\{ \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx \middle| \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\}$$

- ▶ $TV^2(u)$: la variation totale seconde de u

$$TV^2(u) := \sup \left\{ \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div}^2 \varphi(x) dx \middle| \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\}$$

Variation totale d'une fonction

Idée naturelle de la variation totale :

$$TV(u) := \int_{\Omega} |\nabla u(x)| dx$$

À partir de la définition : $\varphi := (\varphi_1, \varphi_2)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx &= \int_{\Omega} u(x) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x) \right) dx \\ (\text{IPP}) \quad &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \varphi_1(x) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \varphi_2(x) \right) dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \varphi dx \\ &\leqslant \int_{\Omega} |\nabla u| dx. \end{aligned}$$

Il existe une suite $(\varphi^n)_n$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n = - \frac{\nabla u}{|\nabla u|}.$$

Les espaces $BV(\Omega)$ et $BV^2(\Omega)$

Définitions :

- ▶ $BV(\Omega) := \left\{ u \in L^1(\Omega) \mid TV(u) < \infty \right\}$
- ▶ $BV^2(\Omega) := \left\{ u \in W^{1,1}(\Omega) \mid \nabla u \in BV(\Omega) \right\}$

Théorème :

Les espaces

- ▶ $BV(\Omega)$ muni de la norme

$$\|\cdot\|_{BV(\Omega)} := \|\cdot\|_{L^1(\Omega)} + TV(\cdot)$$

- ▶ $BV^2(\Omega)$ muni de la norme

$$\|\cdot\|_{BV^2(\Omega)} := \|\cdot\|_{BV(\Omega)} + TV^2(\cdot)$$

sont des espaces de Banach.

Dans la suite, on travaillera avec des fonctions telles que

$$TV(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx \quad \text{et} \quad TV^2(u) = \int_{\Omega} |\nabla^2 u| dx$$

Itération de Bregman

Problème avec contraintes :

$$\min \{E(u) | Au = b\}$$

avec E convexe et A linéaire.

Problème équivalent sans contraintes :

$$\sup_{\lambda} \min_u E(u) + \frac{\lambda}{2} \|Au - b\|_2^2$$

La contrainte $Au = b$ est satisfaite quand $\lambda \rightarrow \infty$.

Algorithme itératif :

Itération de Bregman

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \arg \min_u E(u) + \frac{\lambda}{2} \|Au - b_n\|_2^2 \\ b_{n+1} &= b_n + (b - Au_{n+1}) \end{aligned}$$

Méthode *Split Bregman* pour le débruitage – 1/6

Problème original :

$$\min_{u \in BV^2(\Omega)} \frac{1}{2} \|u - u_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} + \beta \|\nabla^2 u\|_{L^1(\Omega)}$$

Problème avec contraintes :

$$\min_{u,v,w} \left\{ \frac{1}{2} \|u - u_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|v\|_{L^1(\Omega)} + \beta \|w\|_{L^1(\Omega)} \middle| v = \nabla u, w = \nabla^2 u \right\}$$

On peut donc appliquer l'itération de Bregman.

Méthode *Split Bregman* pour le débruitage – 2/6

Application de l'itération de Bregman

Première étape :

$$\begin{aligned}(u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}) = \arg \min_{u,v,w} & \frac{1}{2} \|u - u_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|v\|_{L^1(\Omega)} + \|w\|_{L^1(\Omega)} \\ & + \frac{\lambda}{2} \|b_{1,n} + \nabla u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \frac{\lambda}{2} \|b_{2,n} + \nabla^2 u - w\|_{L^2(\Omega)}^2\end{aligned}$$

Deuxième étape :

$$b_{1,n+1} = b_{1,n} + \nabla u_{n+1} - v_{n+1}$$

Troisième étape :

$$b_{2,n+1} = b_{2,n} + \nabla^2 u_{n+1} - w_{n+1}$$

Méthode *Split Bregman* pour le débruitage – 3/6

Séparation

On résout la première étape en séparant les variables :

- ▶ Problème en u :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \arg \min_u & \frac{1}{2} \|u - u_d\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \frac{\lambda_1}{2} \|b_{1,n} + \nabla u - v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \frac{\lambda_2}{2} \|b_{2,n} + \nabla^2 u - w_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

- ▶ Problème en v :

$$v_{n+1} = \arg \min_v \alpha \|v\|_{L^1(\Omega)} + \frac{\lambda_1}{2} \|b_{1,n} + \nabla u_{n+1} - v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

- ▶ Problème en w :

$$w_{n+1} = \arg \min_w \beta \|w\|_{L^1(\Omega)} + \frac{\lambda_2}{2} \|b_{2,n} + \nabla^2 u_{n+1} - w\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Méthode *Split Bregman* pour le débruitage – 4/6

Solution du problème en u

Condition d'optimalité : (équation d'Euler-Lagrange dans le cas discret)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \lambda_1 (D_{xx}(u_{n+1}) + D_{yy}(u_{n+1})) \\ + \lambda_2 (D_{4x}(u_{n+1}) + D_{4y}(u_{n+1}) + 2D_{2x2y}(u_{n+1})) \\ = u_d + \lambda_1(D_x(b_{1,n}^x - v_n^x) + D_y(b_{1,n}^y - v_n^y)) \\ - \lambda_2(D_{xx}(b_{2,n}^{xx} - w_n^{xx}) + D_{yy}(b_{2,n}^{yy} - w_n^{yy}) + 2D_{xy}(b_{2,n}^{xy} - w_n^{xy})) \end{aligned}$$

Résolution :

$$u_{n+1} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(R)/FD)$$

avec R le membre de droite et FD la transformée de Fourier du facteur du membre de gauche.

Ici «/» désigne la division terme-à-terme des matrices.

Méthode *Split Bregman* pour le débruitage – 5/6

Solution des problèmes en v et w

Résolution par seuillage doux.

Dans le cas scalaire :

$$\min_x F(x) := \frac{1}{2}(x - y)^2 + \varphi(x)$$

$$\frac{dF}{dx}(x) = 0 \iff y = x + \varphi'(x)$$

Or, on a $\varphi(x) := \lambda|x|$ d'où $\varphi'(x) = \lambda signe(x)$.

À l'optimum, on a

$$x^* = \max(|y| - \lambda, 0)signe(y).$$

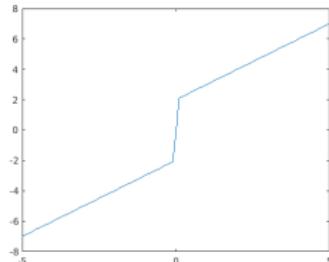


Figure 5 – $y = x + \varphi'(x)$

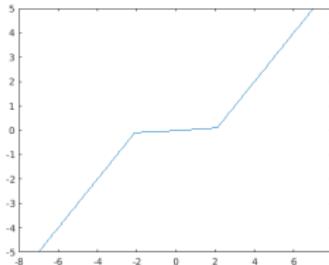


Figure 6 – $x^*(y)$

Méthode *Split Bregman* pour le débruitage – 6/6

Résultats numériques



Figure 7 – Image dégradée



Figure 8 – Image restaurée

Le problème d'inpainting

On cherche à remplir les «trous» dans une image, on choisit donc

$$Ru = \mathbb{1}_{\Omega \setminus D} u.$$

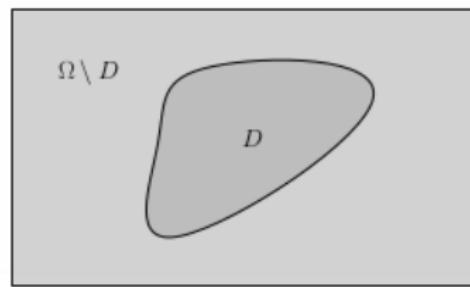


Figure 9 – Problème d'inpainting

Méthode *Split Bregman* pour l'inpainting – 1/3

Difficulté :

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{\Omega \setminus D} u) \neq \mathcal{F}(u)\mathbb{1}_{\Omega \setminus D}$$

Il faut donc changer la méthode de séparation : on ajouter une variable \tilde{u} supplémentaire.

Problème 1 :

$$u_{n+1} = \arg \min_u \frac{1}{2} \|\mathbb{1}_{\Omega \setminus D}(u - u_d)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda_0}{2} \|b_{0,n} + \tilde{u}_n - u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Problème 1 bis :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{n+1} = & \arg \min_{\tilde{u}} \frac{\lambda_0}{2} \|b_{0,n} + \tilde{u} + u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \frac{\lambda_1}{2} \|b_{1,n} + \nabla \tilde{u} - v_n\|_{L^1(\Omega)} \\ & + \frac{\lambda_2}{2} \|b_{2,n} + \nabla^2 \tilde{u} - w_n\|_{L^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Méthode *Split Bregman* pour l'inpainting – 2/3

Résultats numériques



Figure 10 – Image dégradée

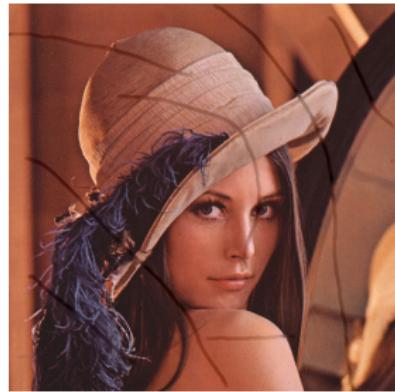


Figure 11 – Image restaurée

Méthode *Split Bregman* pour l'inpainting – 3/3

Résultats numériques bis



Figure 12 – Image restaurée

Conclusion

- ▶ Résultats satisfaisants pour le problème de débruitage.
- ▶ Résultats moins satisfaisant pour le problème d'inpainting.
- ▶ Choix des paramètres ?