



Конспект №2

Структура и интуиция предела

Перед тем, как давать строгое определение предела, давайте посмотрим на его **структуру**:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a,$$

где \lim — оператор, с помощью которого объявляем, что хотим вычислить предел;

$f(x)$ — функция, от которой вычисляем предел;

$x \rightarrow x_0$ — база;

a — ответ.

Смысл предела легко понять на **интуитивном уровне**. Он отвечает на вопрос: как ведёт себя функция $f(x)$, если её аргумент x приближается к некоторому значению x_0 ? Иными словами, к какому значению стремится $f(x)$ по некоторой базе $x \rightarrow x_0$?

Например, рассмотрим предел следующей функции:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - x^2 - 17x - 15}{x^2 - 3x - 10}$$

В точке -2 данная функция не определена (на ноль делить нельзя!), но при этом мы можем посмотреть, как ведёт себя функция **предельно близко** к этой точке.

Знак минус над числом -2 означает, что мы хотим посмотреть, что происходит со значениями функции, если к точке -2 мы "подползаем" слева. Т.е. берём значения близкие, но меньшие (-3, -2.5, -2.1, -2.0001 и т.д.).

Если мы начнём перебирать значения функции в этих точках, то увидим, что с приближением слева к точке -2 значения будут всё больше расти. Таким образом, подставляя аргументы или нарисовав график, получим, что:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - x^2 - 17x - 15}{x^2 - 3x - 10} = +\infty$$

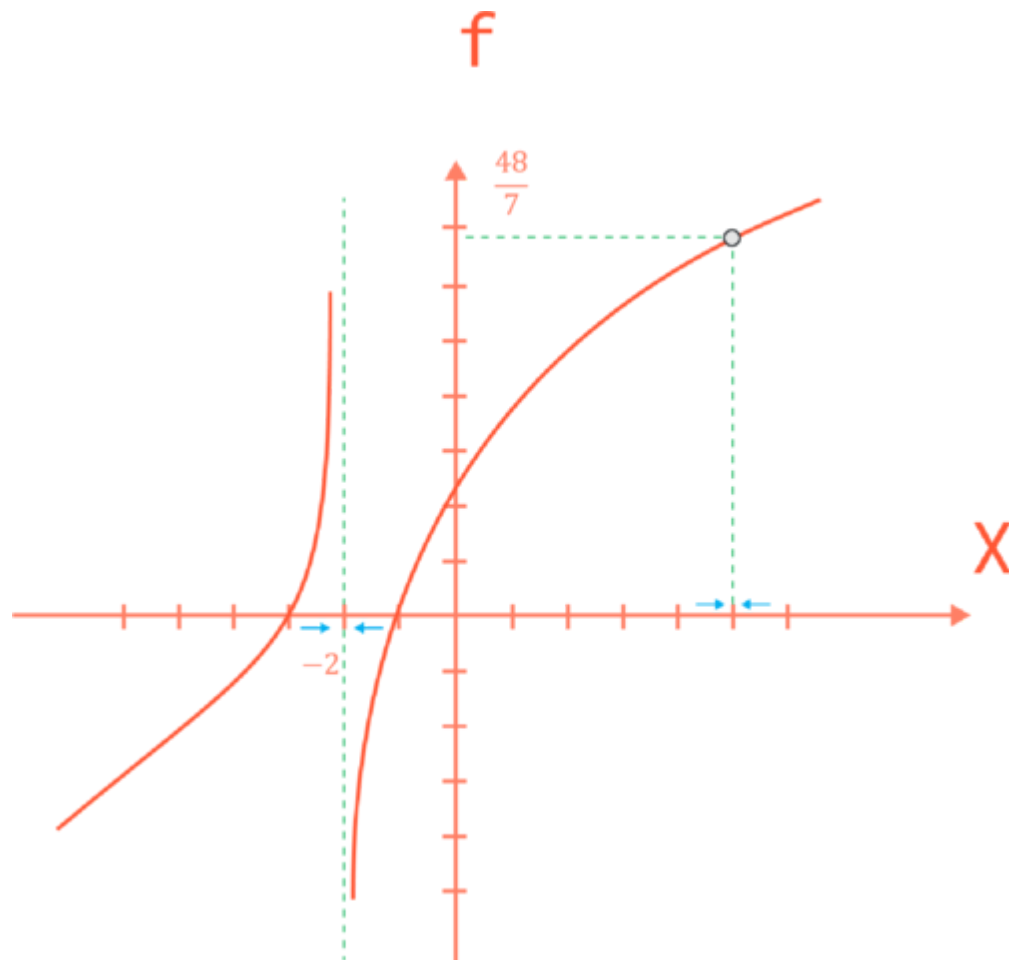


График рассматриваемой функции

Пределы в ML

В машинном обучении пределы находят множественное применение.

Несколько примеров:

1. Сквозь пределы появляются производные, и мы можем минимизировать различные функционалы, максимизировать метрики.
2. В статьях по МО и алгоритмам можно встретить выражения вида $O(n \cdot \log n)$, описывающие сложность алгоритмов. За этой формулировкой также кроются пределы, некоторое асимптотическое поведение функций.

Строгое определение

Математически **определение предела** записывается следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : f(U_{\delta_\varepsilon}(x_0)) \subset V_\varepsilon(a)$$

Словами определение можно сформулировать так:

Предел некоторой функции $f(x)$ по базе $x \rightarrow x_0$ равен числу a **тогда и только тогда**, когда для любого эпсилон больше нуля существует такая дельта-окрестность больше нуля, что образ дельта-окрестности возле точки x_0 полностью содержится в эпсилон-окрестности точки a .

Иными словами, если мы утверждаем, что предел функции $f(x)$ по базе $x \rightarrow x_0$ равен числу a , то, какую бы маленькую ε -окрестность точки a мы ни взяли, всегда найдётся такая δ -окрестность точки x_0 , что её образ будет полностью лежать внутри ε -окрестности точки a .

Давайте проиллюстрируем это определение на графике.

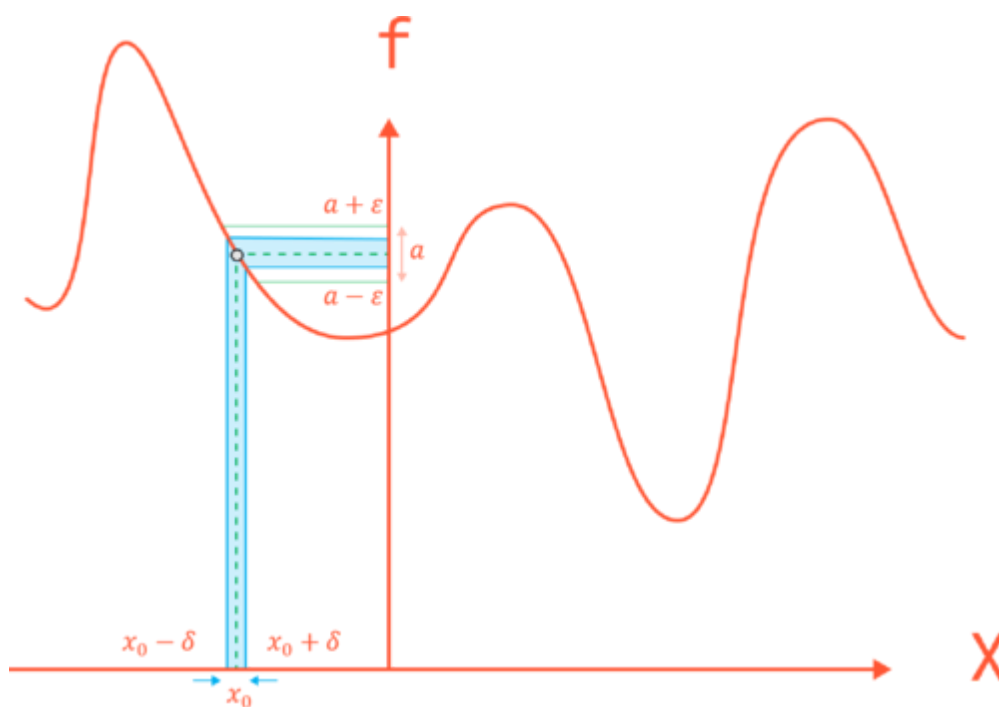


Иллюстрация определения предела

Какую бы зелёную "трубочку" возле точки a мы ни выбрали, всегда найдётся такая δ -окрестность точки x_0 , что её образ будет лежать внутри этой зелёной "трубочки".

Что такое **образ δ -окрестности**? Это синяя "трубочка", которую мы отображаем на ось Of . То есть синяя "трубочка", вложенная в зелёную, иллюстрирует, что образ δ -окрестности точки x_0 лежит внутри ε -окрестности точки a .

Чтобы понять, почему это работает, приведём контрпример.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq b$$

В таком случае мы можем установить такой ε , что не найдётся ни одного δ , при котором образ δ -окрестности точки x_0 будет полностью содержаться внутри ε -окрестности точки a .

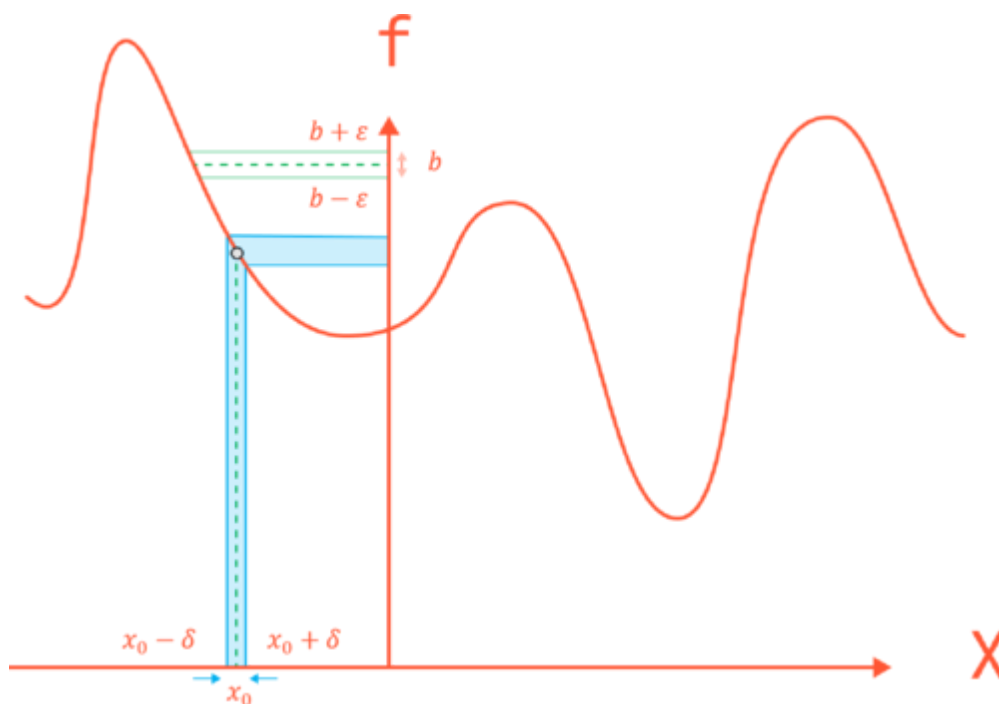


Иллюстрация контрпримера

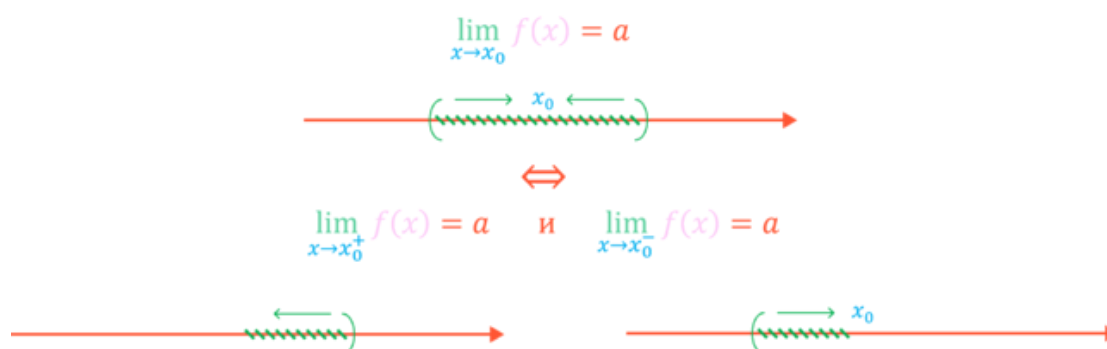
Можем ли мы подобрать такую синюю "трубочку", чтобы она полностью лежала внутри зелёной? Кажется, что нет.

Одно- и двусторонние пределы

Двусторонний предел — предел функции, подразумевающий "приближение" к предельной точке с обеих сторон.

Односторонний предел подразумевает "приближение" только с одной стороны — справа или слева. Такие пределы называются соответственно правосторонними и левосторонними.

Здесь важно отметить их связь. Если мы утверждаем, что существует двусторонний предел, и он равен числу a , то должны существовать право- и левосторонние пределы, равные числу a .



Связь односторонних пределов с двусторонними можно проиллюстрировать на примере следующей функции:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Посчитаем односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

Здесь оба односторонних предела существуют, но равны разным числам, поэтому двусторонний предел существовать не будет:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ не существует}$$

Алгоритм проверки предела через определение

Строгое математическое определение можно записать в **форме неравенств**:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \quad \forall x : |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Докажем с помощью него, например, что $\lim_{x \rightarrow 2} 10x + 5 = 25$:

Подставив всё необходимое в определение, получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \quad \forall x : |x - 2| < \delta \rightarrow |(10x + 5) - 25| < \varepsilon$$

Нам нужно решить второе неравенство и убедиться, что существует некоторая δ , при которой оно будет верно для всех x , удовлетворяющих первому неравенству.

Решим второе неравенство:

$$|(10x + 5) - 25| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x - 2| < \frac{\varepsilon}{10}$$

Таким образом, утверждение выше верно: какой бы ε мы ни выбрали, найдется $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{10}$, для которого будет верно:

$$\forall x : |x - 2| < \delta \rightarrow |(10x + 5) - 25| < \varepsilon$$

Простейшие пределы некоторых элементарных функций

1. Гипербола

$$\begin{aligned} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} &= 0, & \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} &= 0 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= +\infty, & \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= -\infty \end{aligned}$$

P.S. Если правый и левый предел равны бесконечностям с разными знаками, существует договорённость, что двусторонний предел будет равен бесконечности:

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

2. Показательная функция

• $a > 1$:

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

• $0 < a < 1$:

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

3. Логарифм

• $a > 1$:

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \quad \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

• $0 < a < 1$:

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty, \quad \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

4. Обратные тригонометрические функции

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \quad \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \quad \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Базовые методы вычисления пределов

Метод №1: Элементарные функции в точке из $D(f)$

Если $f(x)$ — элементарная, а точка $x_0 \in D(f)$ (лежит в области определения $f(x)$), тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Примеры:

$$\begin{aligned} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x &= \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow e^2} \ln(x \cdot e) &= \ln(e^2 \cdot e) = 3 \end{aligned}$$

Метод №2: «Пристальный взгляд»

Метод состоит в том, чтобы "прикинуть", к какому значению стремится функция по указанной базе, и сразу найти ответ, если не возникает сложных неопределенностей.

Примеры:

$$\begin{aligned} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin x \cdot \ln(1+x) &= [0 \cdot 0 \cdot 0] = 0 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} &= \left[\frac{-\infty}{0^+} \right] = -\infty \\ \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(2+e^{x+2}) \cdot \operatorname{arctg} x}{\sin^x 1} &= \left[\frac{\operatorname{const}}{\infty} \right] = 0 \end{aligned}$$

Метод №3: Деление на старший/младший член

Метод предназначен для частного многочленов (или показательных выражений) и соответствующих ему неопределенностей $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ и $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Данный метод в основном работает в случаях, когда в базе также содержится бесконечность.

Примеры:

При неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, чаще всего необходимо делить на старший член:

$$\cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x^2 + 3}{3x^4 + x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^4 + 5x^2 + 3)/x^4}{(3x^4 + x^3)/x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^4}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{3}$$

Когда возникает неопределенность $\left[\frac{0}{0} \right]$, зачастую нужно делить не на старший член, а на младший:

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+x^2+x^3}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+\sqrt{x^8}}}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+x^2+x^3)/x^1}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+\sqrt{x^8}}/x^1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+x+x^2}{-\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} = \frac{1}{-\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

Также метод можно применять к показательным функциям. В таком случае старший/младший член определяется по основанию показательной функции:

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1}+2^x}{3^{x+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 3^x + 2^x}{3^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3 \cdot 3^x + 2^x)/3^x}{(3^{x+1})/3^x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^x}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^x} = 3$$

Метод №4: Домножение на сопряженное

Использование формул типа $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ или $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ для избавления от неопределенностей.

Пример:

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x}-1) \cdot (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} +$$

1) = 3

Продвинутые методы вычисления пределов I

Метод №5: Символика Ландау и связанные обозначения

Символы Ландау — новые для нас элементы математического языка, которые используются для сравнения асимптотического поведения функций. Они оказываются полезны как для решения пределов, так и в прикладных областях, например, для оценки оптимальности алгоритмов.

▷ Функцию $f(x)$ называют **бесконечно малой** по базе $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

Например, \sqrt{x} является бесконечно малой по базе $x \rightarrow 0$

▷ Функцию $f(x)$ называют **бесконечно большой** по базе $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

Например, \sqrt{x} является бесконечно большой по базе $x \rightarrow +\infty$

▷ Функцию $f(x)$ называют **финально ограниченной** по базе $x \rightarrow x_0$, если в некоторой окрестности точки x_0 она ограничена

Например, $f(x) = \frac{1}{x}$ финально ограничена по базе $x \rightarrow 5$, но не является таковой по базе $x \rightarrow 0$. Это видно из графика: в окрестности точки 5 мы можем подобрать такие числа, выше и ниже которых функция значения не принимает, в окрестности же нуля такие числа мы подобрать не можем.

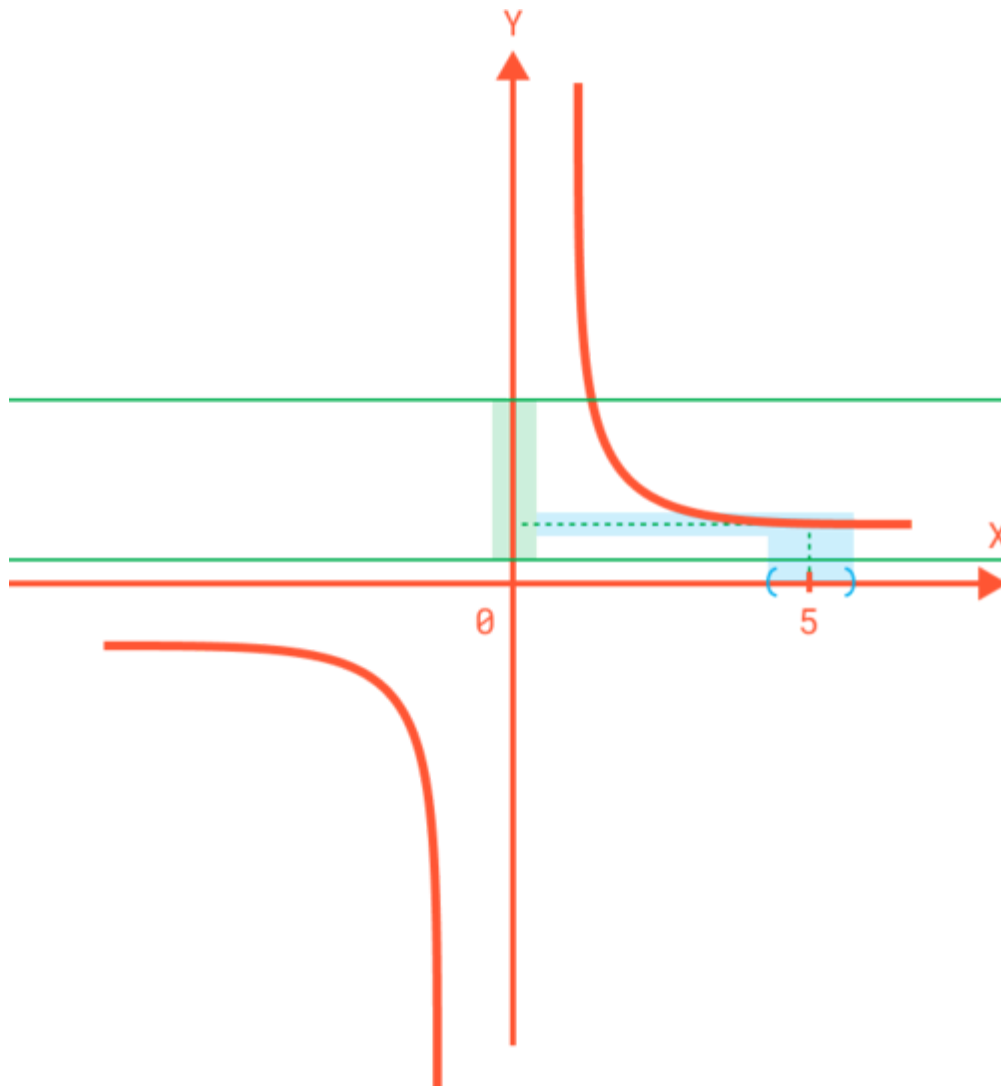


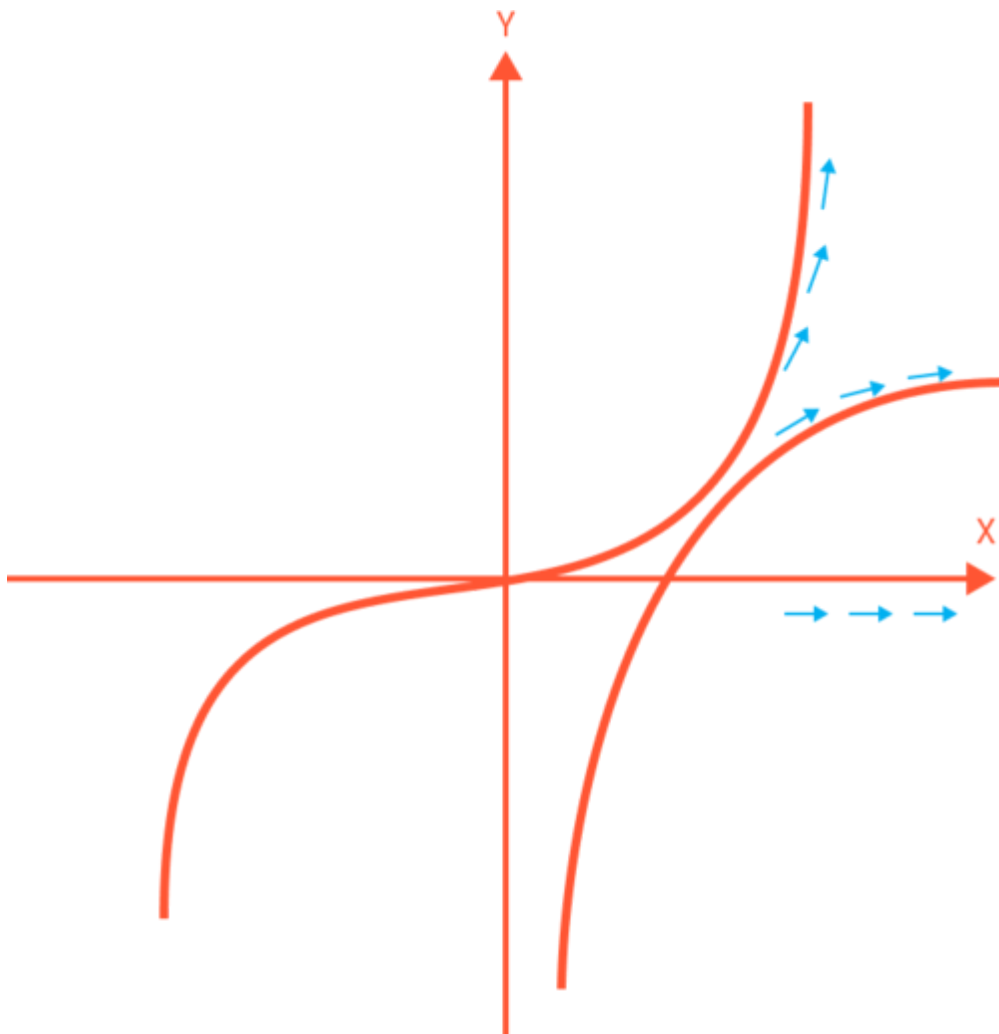
График функции $y = 1/x$

▷ Функция $f(x)$ есть $O(g(x))$ по базе $x \rightarrow x_0$, если $\frac{f(x)}{g(x)}$ является финально ограниченной по этой же базе.

Например, $x^5 = O(x^7)$ по базе $x \rightarrow 4$, так как $\frac{x^5}{x^7} = \frac{1}{x^2}$ ф.о. по базе $x \rightarrow 4$.
 Причем $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{16}$. Если мы можем вычислить предел функции по некоторой базе, можно смело говорить, что эта функция финально ограничена по данной базе.

Или, например, $\sin x = O(1)$ по любой базе, так как $\frac{\sin x}{1}$ ограничена всюду, ведь область значений $E\left(\frac{\sin x}{1}\right) = [-1; 1]$

Когда говорят, что $f(x)$ есть $O(g(x))$ по базе $x \rightarrow x_0$, имеют в виду, что $f(x)$ приближается к некоторому значению (или колеблется возле него) со скоростью, соизмеримой со скоростью функции $g(x)$. Например, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\log x} = +\infty$, то есть x^3 растет на порядок быстрее, чем $\log x$. В таком случае $x^3 \neq O(\log x)$, $x \rightarrow +\infty$



▷ Функция $f(x)$ есть $o(g(x))$ по базе $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Например, выше рассмотрели предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\log x} = +\infty$. Если перевернуть его, то как раз выйдет, что:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^3} = 0 \Rightarrow \log x = o(x^3)$, $x \rightarrow +\infty$, то есть логарифм растет на порядок медленнее.

▷ Функция $f(x) \sim g(x)$ (**эквивалентна**) по базе $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Эквивалентность означает идентичность функций при максимальном приближении. Например, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел)

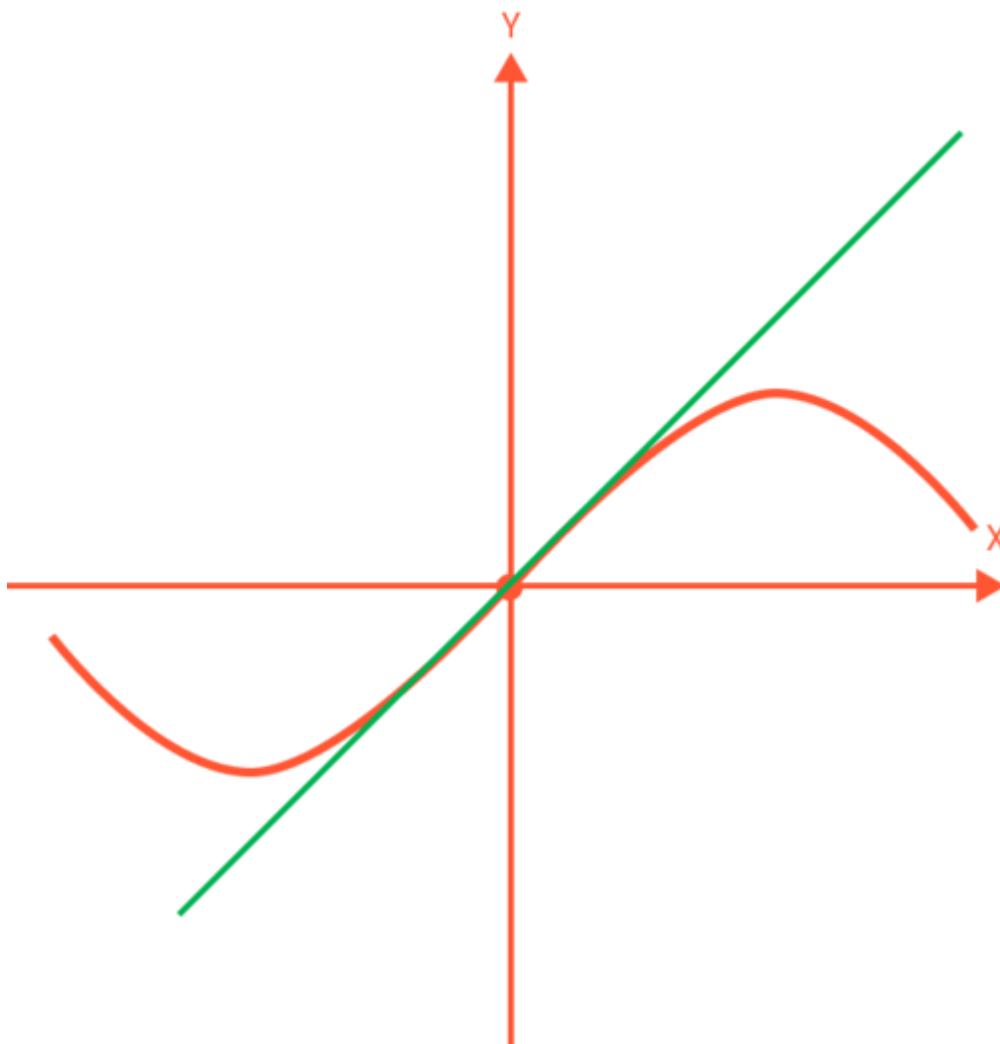


Иллюстрация эквивалентности функций $\sin(x)$ и x по базе $x \rightarrow 0$

Пусть $f(x)$ является бесконечно малой по некоторой базе $x \rightarrow x_0$, тогда справедливы следующие эквивалентности:

- $\sin f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} f(x)$,
- $\arcsin f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- $\operatorname{tg} f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} f(x)$,
- $\operatorname{arctg} f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- $1 - \cos f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)^2}{2}$,
- $\log_a(1 + f(x)) \sim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \frac{1}{\ln a}$
- $a^{f(x)} - 1 \sim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \ln a$,
- $e^{f(x)} - 1 \sim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- $(1 + f(x))^m - 1 \sim_{x \rightarrow x_0} m \cdot f(x)$

Пример:

$$1 - \cos \sqrt{tg(x^4 - 256)} \sim_{x \rightarrow 4} \frac{tg(x^4 - 256)}{2} \sim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 256}{2}$$

Символика Ландау: применение

После того, как разобрались с определениями, приведем несколько фактов:

1. Произведение бесконечно малой и финально ограниченной есть бесконечно малая

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \cos x = 0$$

2. Множители относительно функции можно заменять на эквивалентные выражения

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot \arcsin x}{(\sqrt[5]{1 - 3x^2} - 1) \cdot \ln(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} \cdot x}{\frac{1}{5} \cdot (-3x^2) \cdot x} = -\frac{5}{6}$$

3. Бесконечно большие функции по скорости роста можно расположить в следующем порядке по убыванию: показательно-степенные, показательные, степенные, логарифмические

Тогда практически устно можно решить следующие примеры:

$$\begin{aligned} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{e^x} &= \infty, & \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^x} &= 0 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{x^{100}} &= \infty, & \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100}}{3^x} &= 0 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} &= \infty, & \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} &= 0 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x}{\log_3 x} &= \infty, & \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_3 x}{5^x} &= 0 \end{aligned}$$

4. $f(x) + o(f(x)) \sim f(x)$

Доказательство простое: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + o(f(x))}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{f(x)} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 1 + 0 = 1$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + x^2}{4^x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + o(3^x)}{4^x + o(4^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{4^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = 0$$

Продвинутое методы вычисления пределов II

Метод №6: Логарифмирование + экспоненцирование

Решая неопределенности вида $[1^\infty]$ и $[\infty^0]$, выгодно преобразовать $f(x) = e^{\ln f(x)}$

Пример:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{tg^4 \sqrt{x}}{x}\right)^{\frac{1}{2x}} &= [1^\infty] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1 + \frac{tg^4 \sqrt{x}}{x})^{\frac{1}{2x}}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(1 + \frac{tg^4 \sqrt{x}}{x}\right)^{\frac{1}{2x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x} \ln \left(1 + \frac{tg^4 \sqrt{x}}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{tg^4 \sqrt{x}}{2x^2} = \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x})^4}{2x^2} &= \frac{1}{2} \\ \text{P. S. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{tg^4 \sqrt{x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x})^4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \rightarrow \ln \left(1 + \frac{tg^4 \sqrt{x}}{x}\right) \sim_{x \rightarrow 0^+} \frac{tg^4 \sqrt{x}}{x} \end{aligned}$$

Метод №7: Правило Лопитала

Для неопределенностей вида $[\frac{\infty}{\infty}]$ и $[\frac{0}{0}]$ в случае существования предела действует следующее правило:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{x-2}-2)'}{(x-6)'} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{1} = \frac{1}{4}$$

Метод №8: Замена переменной

Иногда, особенно при работе с пределами тригонометрических функций, полезно совершить замену переменных, как бы сдвинув базу в другую точку. Самые популярные замены выглядят следующим образом: $x = t \pm a$ или $x = \frac{1}{t}$

Пример:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2} &= \left\| \begin{array}{l} \text{let } x = t + \pi \\ \text{then } t \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t+\pi)}{\pi^2 - (t+\pi)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin(t)}{-t^2 - 2\pi t} = \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t \cdot (t+2\pi)} &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$