## 問題への取り組み方

まず，問題が何を言っているのかを理解する必要があります。問題を自分の言葉で語ることができるか，言い換えることができるかを考えてみましょう。

さて、問題が何を聞いているのか、おおよそ理解した気持ちになれたとして、その次に，問題解決のために何ができるでしょうか。

## いかにして問題を解くか

### [1] 迷子の防止

1-1 条件をすべて使ったか？

1-2 結論を推測できるか？（証明問題ではない場合）

1-3 結論を示すためには何を示せばよいか？（結論から遡る，結論と同値な命題を作る）

1-4 「詳細」と「俯瞰」を意識する。(計算処理と全体の流れ)

1-5 その言葉の定義は何か？

### [2] 問題解決の糸口

2-1 具体例を計算し，リストを作成する。次に，作成したリストにパターンを見出せるか？

2-2 似た問題を解いたことはないか？（もしあれば）その問題に帰着させることはできるか？

2-3 単純化（難易度をコントロールする）

2-4 特殊化した問題を解くことはできるか？ 部分的に問題を解くことはできるか？

2-5 絵，図，グラフを描くことはできるか？

2-6 否定，余事象を考える

# 補足

## [1-1] 条件の整理

条件が多い場合は，既に使った条件にアンダーラインを引くとよい。

## [1-3] 結論から遡る例

$abc = 1, \quad a+b+c = ab+bc+ca$ のとき，
$a, b, c$ のうち少なくとも 1 つは 1 であることを示せ。

$\Downarrow$ 結論から遡る

$$\begin{aligned} & \cdots \\ \iff\ & abc - (ab+bc+ca) + (a+b+c) - 1 = 0 \\ \iff\ & (a-1)(b-1)(c-1) = 0 \\ \iff\ & a, b, c \text{ のうち少なくとも 1 つは 1} \end{aligned}$$

のように，結論から逆向きに辿ると容易くなる。

## [2-1] 具体例を計算し，リストを作成する例

数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_1 = 7, \quad a_{n+1} = \dfrac{4a_n - 9}{a_n - 2}$ を満たすとする。一般項 $\{a_n\}$ を求めよ。

$\Downarrow$ 具体計算とリストの作成

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 7 | $\frac{19}{5}$ | $\frac{31}{9}$ | $\frac{43}{13}$ |

**第 1 項:** $a_1 = 7$，**第 2 項:** $a_2 = \dfrac{4 \cdot 7 - 9}{7-2} = \dfrac{28-9}{5} = \dfrac{19}{5}$

**第 3 項:** $a_3 = \dfrac{4 \cdot \frac{19}{5} - 9}{\frac{19}{5} - 2} = \dfrac{\frac{76}{5} - \frac{45}{5}}{\frac{19}{5} - \frac{10}{5}} = \dfrac{\frac{31}{5}}{\frac{9}{5}} = \dfrac{31}{9}$，**第 4 項:** $a_4 = \dfrac{4 \cdot \frac{31}{9} - 9}{\frac{31}{9} - 2} = \dfrac{\frac{124}{9} - \frac{81}{9}}{\frac{31}{9} - \frac{18}{9}} = \dfrac{\frac{43}{9}}{\frac{13}{9}} = \dfrac{43}{13}$

これより $a_1 = \dfrac{7}{1}$ と読み替えれば、$a_n = \dfrac{12n-5}{4n-3}$ と推測できる。(あとは帰納法を使えば良い。)

## [2-3] 単純化の例

生徒 9 人を次の 3 つのグループに分ける分け方は何通りあるか。

(1) 4 人，3 人，2 人の 3 つのグループに分ける。
(2) 3 人ずつ，3 つのグループ $A, B, C$ に分ける。
(3) 3 人ずつ，3 つのグループに分ける。

⇓ 単純化

生徒 4 人を 2 つのグループに分ける分け方は何通りあるか。

(1) 3 人，1 人の 2 グループに分ける。
(2) 2 人ずつ，区別のある 2 グループ $X, Y$ に分ける。
(3) 2 人ずつ，区別のない 2 グループに分ける。

**(1)**　3 人のグループを $X$，残りの 1 人を $Y$ とする。具体的に書き出すと，

$$
\begin{aligned}
X :&\{B, C, D\} \quad Y : \{A\} \\
X :&\{A, C, D\} \quad Y : \{B\} \\
X :&\{A, B, D\} \quad Y : \{C\} \\
X :&\{A, B, C\} \quad Y : \{D\}
\end{aligned}
$$

以上より，分け方は 4 通りである。

**(2)**　まずグループ $X$ に入る 2 人を決める。残りの 2 人は自動的にグループ $Y$ に入る。

$$
\begin{aligned}
X :&\{A, B\} \quad Y : \{C, D\} \\
X :&\{A, C\} \quad Y : \{B, D\} \\
X :&\{A, D\} \quad Y : \{B, C\} \\
X :&\{B, C\} \quad Y : \{A, D\} \\
X :&\{B, D\} \quad Y : \{A, C\} \\
X :&\{C, D\} \quad Y : \{A, B\}
\end{aligned}
$$

以上より，分け方は 6 通りである。

**(3)**　(2) で書き出した分け方のうち，$X$ と $Y$ を入れ替えても同じとみなされるものをまとめる。

$$
\begin{aligned}
&\{A, B\}|\{C, D\} \\
&\{A, C\}|\{B, D\} \\
&\{A, D\}|\{B, C\}
\end{aligned}
$$

たとえば (2) の $X : \{A, B\}, Y : \{C, D\}$　と　$X : \{C, D\}, Y : \{A, B\}$ は (3) では同一の分け方とみなす。以上より，分け方は 3 通りである。

**考察**

具体的に単純化を行い、リスト化できる場合の数の問題に難易度を下げることで，グループに名前がある時とない時の区別が分かりやすくなった。そして、**この考え方を 9 人の場合にもそのまま適用できる。**

## [2-4] 部分的に問題を解くことはできるか？ の例

> $2 \leq x \leq 6$ において常に，$x^2 - 4ax + 4a + 8 > 0$ が成り立つような実数 $a$ の範囲を求めよ。

$\Downarrow$ 部分問題

> $a = 0$ は答えの領域に含まれるか？

定数 $a$ に具体的な値を代入してみる。ここでは最も単純な候補として $a = 0$ を考えると，

$$x^2 - 4ax + 4a + 8 \xrightarrow{a=0} x^2 + 8$$

となる。任意の実数 $x$ に対して $x^2 \geq 0$ であるから $x^2 + 8 > 0$ が成り立ち，特に $2 \leq x \leq 6$ においても常に正である。

### 部分的な結論

以上より，$a = 0$ のとき $2 \leq x \leq 6$ において $x^2 - 4ax + 4a + 8 > 0$ が成立する。したがって，$a = 0$ は問題の答えの領域に含まれる。(この結果は検算に使うとよい。)