Instituto de Matemáticas, Universidad de Talca

Cálculo I

Primer semestre 2021

Indice

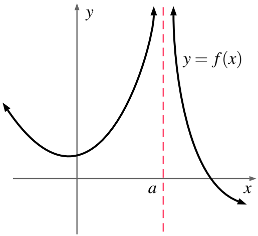
Límites infinitos

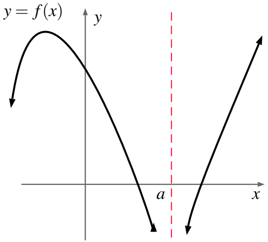
Límites infinitos

Límites infinitos: Sea f una función definida en ambos lados de a, excepto posiblemente en a, entonces

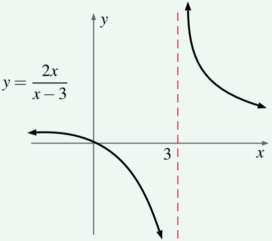
$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes (arbitrariamente grandes y negativos) haciendo que x se acerque suficientemente a a, pero no es igual que a.





Ejemplo



- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \infty$

Obs: Las expresiones $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, señalan que el límite no existe, sin embargo muestran el comportamiento de $f(x)$ cuando x tiende al valor a.

Límites en el infinito

Límites en el infinito

Una función f puede aproximarse a un valor constante L cuando la variable x crece o decrece sin cota. Esto se denota

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad ó \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Cuando la función crece o decrece indefinidamente cuando x tiende a infinito se denota

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

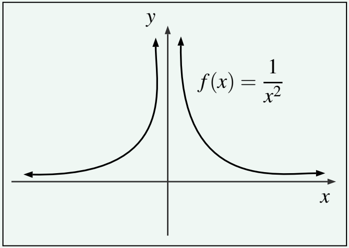
Observación: Puede que la función no se aproxime a ningún valor, y además no tienda a infinito. En este caso simplemente se dirá que el límite no existe. Un ejemplo de esto es:

$$\lim_{x \to \infty} \cos(x) = \nexists$$

Ejemplo

Determinar $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$, si es que existe.

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$



Propiedades de los límites en el infinito

1. Si $c \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} c = c$
2. Si $p > 0 \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} x^p = \infty$
3. Si $p > 0 \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0$
4. Si $p > 0, c \neq 0 \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^p} = 0$
5. $a > 1 \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} a^x = \infty$
6. Si $0 < b < 1 \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} b^x = 0$

Observación:

A continuación se presentan ciertas formas posibles al evaluar límites. Sea $c \neq 0$.

- $\frac{c}{0} = \infty$
- $\frac{\infty}{c} = \infty$
- $c \cdot \infty = \infty$
- $\frac{c}{\infty} = 0$

Límites en el infinito de funciones polinomiales

Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Se tiene que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ puede ser ∞ o $-\infty$. Esto depende de el signo de a_n y la pariedad de n.

Ejemplo

1. $\lim_{x\to\infty}(3x^3 - x + 5) = \infty$
2. $\lim_{x\to-\infty}(3x^3 - x + 5) = -\infty$
3. $\lim_{x\to\infty}(3 - 5x - 2x^2) = -\infty$

Límites en el infinito de funciones racionales

Ejemplo

1. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{6x^3 - 2x + 4}{7 - 3x^2 + 2x^3} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{6 - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{\frac{7}{x^3} - \frac{3}{x^2} + 2} = 3$
2. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4x^2 + 2x - 1}{3x + 5} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{4x + 2 - \frac{1}{x}}{3 + \frac{5}{x}} = \infty$
3. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 - 3x^2 + 41}{3x^5 + 7} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{41}{x^5}}{3 + \frac{7}{x^5}} = 0$

Teorema

Sean $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ *y* $q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ *polinomios tales que* $\lim_{x \to \infty} p(x) = \infty$ *y* $\lim_{x \to \infty} q(x) = \infty$ *respectivamente. Entonces*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m} & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n < m \\ \infty & si \quad n > m \end{cases}$$

Ejemplo

1. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{6x^3 - 2x + 4}{7 - 3x^2 + 2x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x^3}{2x^3} = 3$
2. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 2x - 1}{3x + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2}{3x} = \infty$
3. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + 41}{3x^5 + 7} = \frac{4x^2}{3x^5} = 0$
4. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 1}}{3x + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}}{x(3 + \frac{5}{x})} = \frac{2}{3}$

Forma indeterminada $\infty - \infty$

Ejemplo

1. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x-x^2}{1+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x}=-1$$

2. $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-x)\cdot\left(\frac{\sqrt{x+1}+x}{\sqrt{x+1}+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x^2}{\sqrt{x+1}+x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x}-x)}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x}-x)}{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\infty$$

Ejercicios propuestos

Ejercicios propuestos

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+5x+1}{7x^3+1}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+x^2-17}{x^3+18x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-5}}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(2x^3+1)^6}{(3x^9-1)^2}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x-\dfrac{x^2}{x+1}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^3+1}-x)$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{3x}$
9. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$
10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+1)^3(4x-5)(x+2)}{x^3(9x+2)(3x-1)}$

Límites especiales

Límites especiales

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$

En general para calcular un límite de la forma

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 1^\infty$$

podemos decir que

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}$$

Ejercicios propuestos

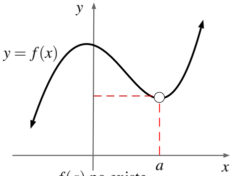
Ejercicios propuestos

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(3x)}{x+\sin(2x)}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{1-\cot(x)}{1-\tan(x)}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{1-2\cos(x+\pi/3)}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{6x}-e^{3x}}{\sin(3x)}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2/2}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1}\right)^{x^2}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^{x}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^2-x+1}{x^2+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+\sin(x))^{1/x}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left[\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{\frac{1}{\sin(x)}}$
14. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{x-2}{x^2+x-2}\right)^{1+\cot^2(x)}$
15. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0+} \sqrt[x^2]{1-5x^2}$

Continuidad

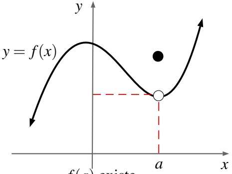
Continuidad

Intuitivamente se dice que una función $y = f(x)$ es continua en $x = a$, cuando f está definida en $x = a$ y en un entorno a $x = a$, y la gráfica de $f(x)$ al pasar por $x = a$ no presenta saltos o cortes. ¿Cuáles de las siguientes funciones $y = f(x)$, son continuas en $x = a$?



$f(a)$ no existe

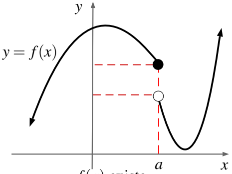
$\lim_{x\to a} f(x)$ existe



$f(a)$ existe

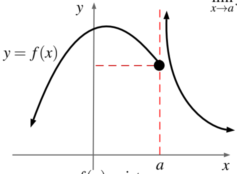
$\lim_{x\to a} f(x)$ existe

$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$



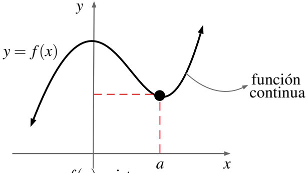
$f(a)$ existe

$\lim_{x\to a} f(x)$ no existe



$f(a)$ existe

$\lim_{x\to a} f(x)$ no existe



$f(a)$ existe

$\lim_{x\to a} f(x)$ existe

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Definición

Una función $y = f(x)$ es **continua en** $x = a$ cuando se cumplen las siguientes condiciones:

1. Existe $f(a)$. Es decir $a \in Dom(f)$.
2. Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Obs: Cuando $y = f(x)$ **no es continua** en $x = a$, se dice que es **discontinua** en $x = a$.

Tipos de discontinuidades

Hay dos tipos de discontinuidades:

1. **Discontinuidad Reparable** en $x = a$, cuando:

Caso 1: $f(a)$ no existe
$\lim_{x \to a} f(x)$ existe

Ej : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, en $x = 1$

Caso 2: $f(a)$ existe
$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Ej : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

2. **Discontinuidad Irreparable** en $x = a$, cuando:

Caso 1: $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe

Ej : $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$, en $x = 1$

Caso 2: al menos uno de los límites laterales no existe

Ej : $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Ejemplo

Veamos si la siguiente función es continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot \cos(x) - 2}{\sin(2 \cdot x)} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

- $f(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{2 \cdot \cos(x) - 2}{\sin(2 \cdot x)} = 2 \cdot \lim_{x \to 0^-} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(2 \cdot x)} \cdot \frac{2x}{2x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\cos(x) - 1}{x} \cdot \frac{2x}{\sin(2 \cdot x)} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Como $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) \Longrightarrow f$ no es continua en $x = 0$ y su discontinuidad es irreparable.

Ejemplo

Sea $y = f(x)$ definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2+10x+3}{x^2+4x+3} & \text{si } x < -3 \\ 4 & \text{si } x = -3 \\ a \cdot \frac{\sin(x+3)}{x+3} & \text{si } x > -3 \end{cases}$$

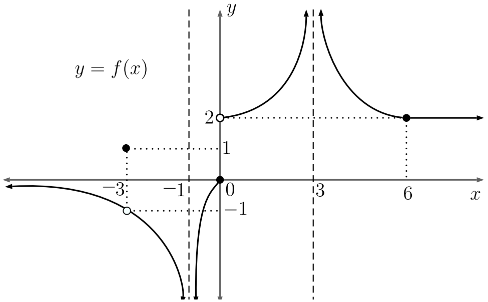
Determinemos los valores de a, de modo que $f(x)$ sea continua en el punto $x = -3$.

- $f(-3) = 4$
- $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{3x^2 + 10x + 3}{x^2 + 4x + 3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+3)(3x+1)}{(x+3)(x+1)} = 4$
- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} a \cdot \dfrac{\sin(x+3)}{x+3} = a$

Luego para que f sea continua en $x = -3$ $a = 4$.

Ejercicios propuestos

1. Dado el siguiente gráfico



Clasifique las discontinuidades de f en reparables o irreparables, según corresponda.

Ejercicios propuestos

2. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & \text{si} \quad x<1 \\ 4 & \text{si} \quad x=1 \\ \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ Determinar si f es continua en $x=1$.

3. Determinar los valores de a, b para que la siguiente función sea continua en $x=0$ y en $x=3$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{si} & x<0 \\ \dfrac{4-\sqrt{4x+4}}{x^2-2x-3} & \text{si} & x \geq 0, x \neq 3 \\ 5b & \text{si} & x=3 \end{cases}$$

4. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+20x^2-44x}{8-x^3} & \text{si } x<2 \\ 2a & \text{si } x=2 \\ \dfrac{\sin(4-2x)}{\sqrt{2x}-2} & \text{si } 2<x\leq 5 \end{cases}$$

Determine, en caso de existir, el valor de a para que f sea continua en $x=2$.