

# 情報統計 第5回

2023年8月2日 神奈川工科大学



櫻井 望

公益財団法人 **かずさDNA研究所**  
先端研究開発部 シーズ開拓研究室  
藻類代謝エンジニアリングチーム

# 昨日

- 図で見える化
- 数値で見える化(統計の基礎)  
平均、分散、標準偏差  
母平均、母分散…
- アンケートでデータを作る
- Excelの基本操作
- Pythonやってみる

# 今日

見える化した数値や、そこから感じ取れる仮説が、**どれだけ正しそうかを、客観的に評価**する方法

# 検定

の考え方を学びます

有意水準5%で  
帰無仮説は棄却されました。  
従って、\*\*\*です。

検定

- 区間推定

- 分布とその使い方

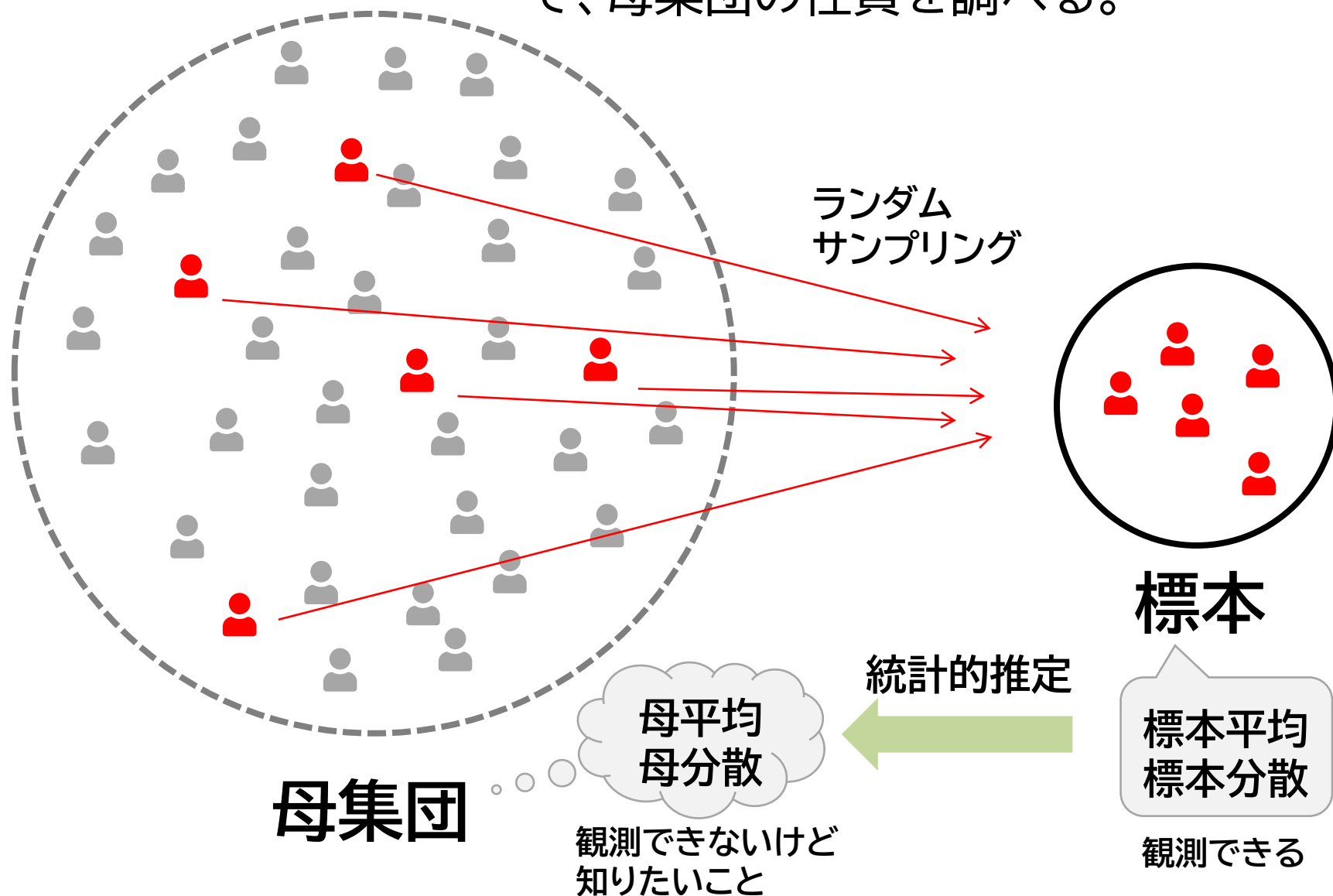
# 学習目標

区間推定を通じて、検定などの基本となる分布と、その使い方を身につけます

- ✓ 正規分布
- ✓ 標準正規分布
- ✓  $t$  分布

## 統計的推定

母集団が大きい、あるいは無限大の場合、母集団を全体的に観測できないとき、標本を観測することで、母集団の性質を調べる。



母平均  $\mu$  ← 標本平均  $\bar{x}$

一致が期待できる

母分散  $\sigma^2$  ~~←~~ 標本分散  $s^2$

実は一致が期待できない!!

一致が期待できるのは、母集団の全標本を観測できる場合(全数検査)だけ

←  
一致が期待できる

不偏(標本)分散  $v^2$

真の値から外れていないことを、  
不偏性があると言うので



# 点推定



「母平均 $\mu$ はこの値」、「母分散 $\sigma^2$ はこの値」のように、一つの代表値を決める方法

# 区間推定

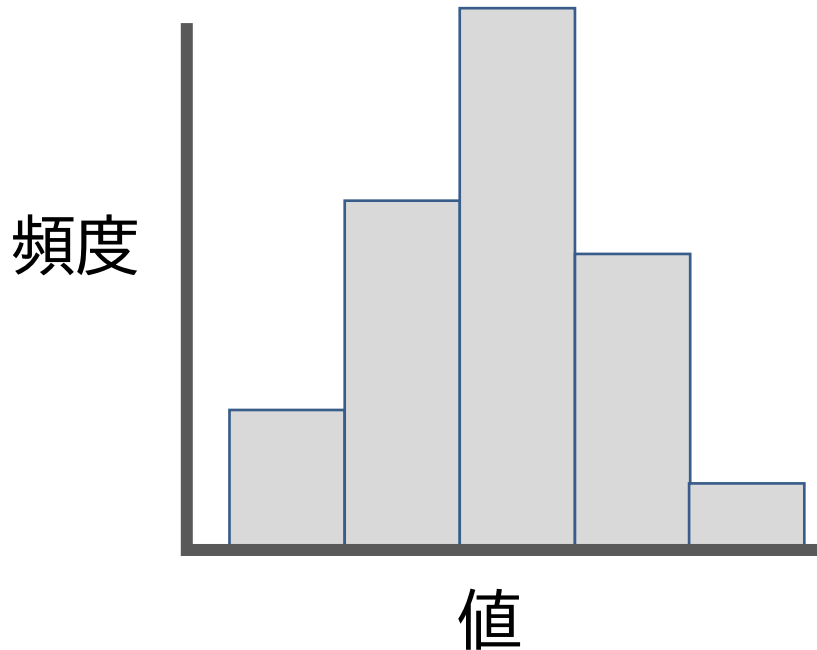


「神奈川県の子の平均身長は、信頼係数95%で170.2~174.6 cmである」のように、幅を持たせて表現する方法

# 標準正規分布

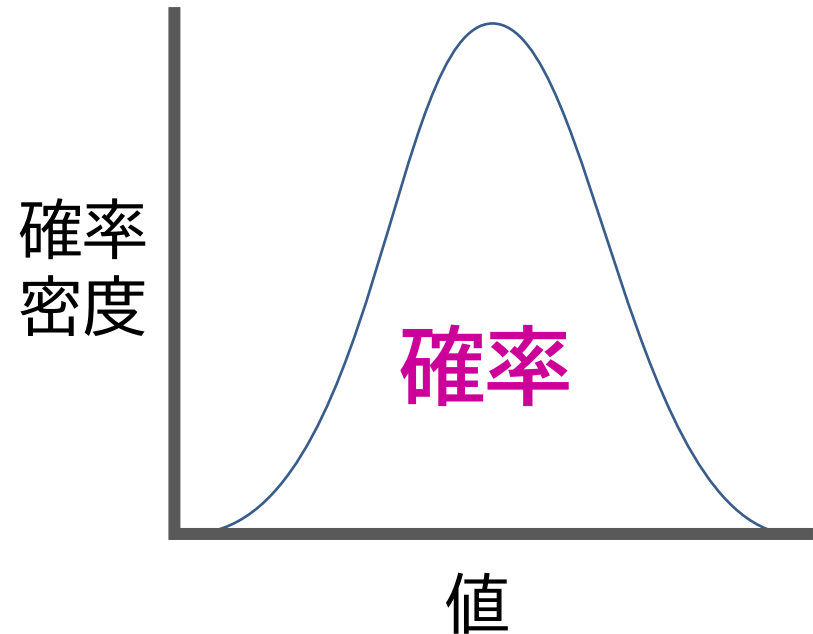
# 分布

データの散らばり具合を表したものの



ヒストグラム

観測結果を表したものの



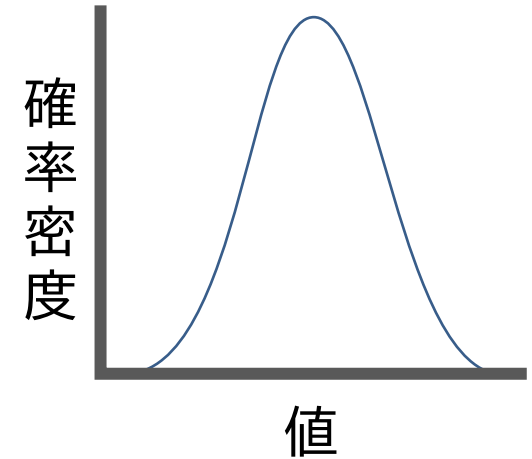
確率密度関数

事象の起こる確率を表したものの

代表的な分布

# 正規分布(ガウス分布)

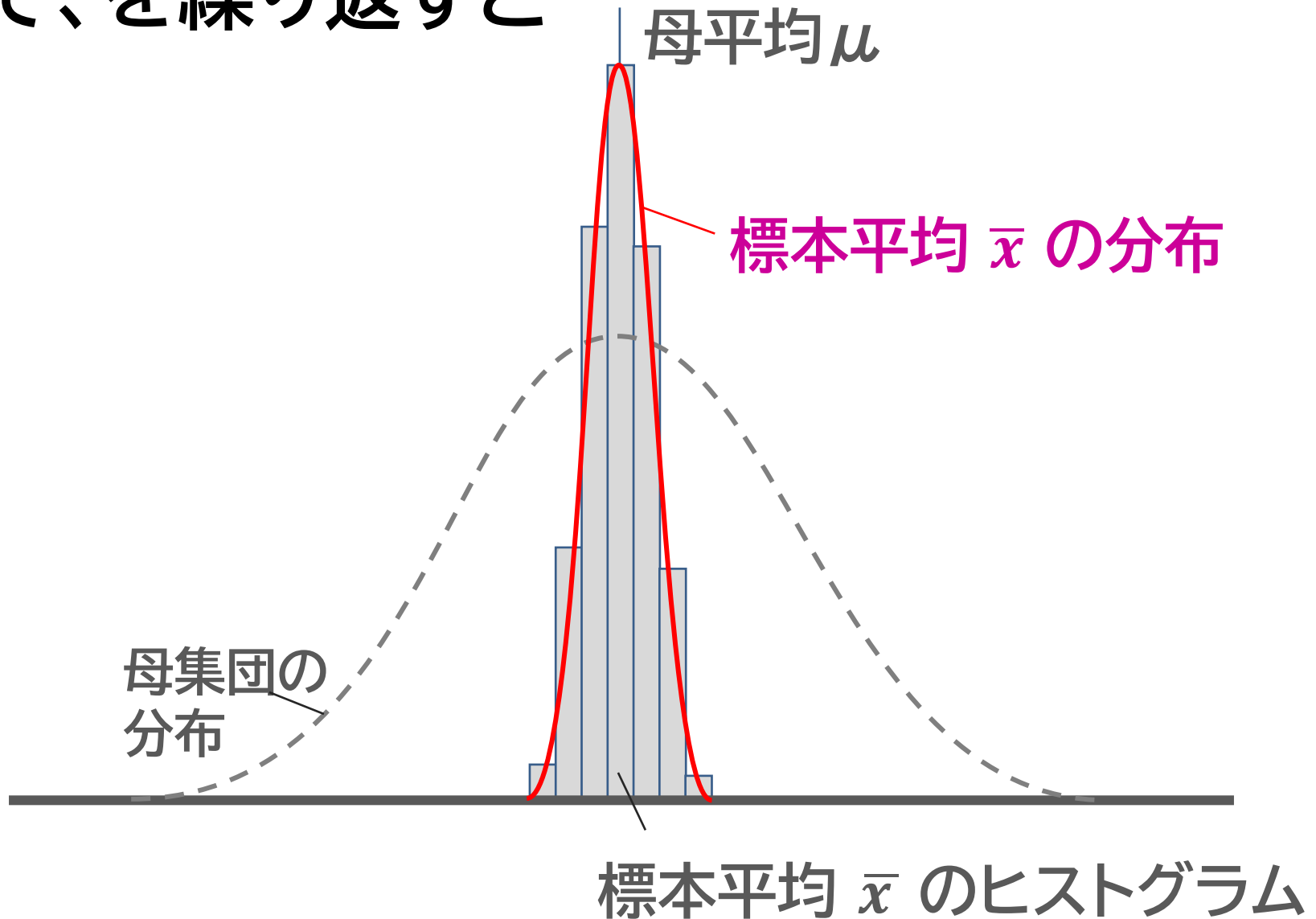
- 平均値が中心で、
- 平均値に近いものが多く、
- 左右に均等な釣り鐘状の分布



均等な確率で生じたばらつきの場合にとる分布

- ✓ 身長分布
- ✓ 測定誤差分布
- ✓ 自然界で起こるゆらぎ          など

サンプリングして標本平均 $\bar{x}$ を算出して、を繰り返すと…



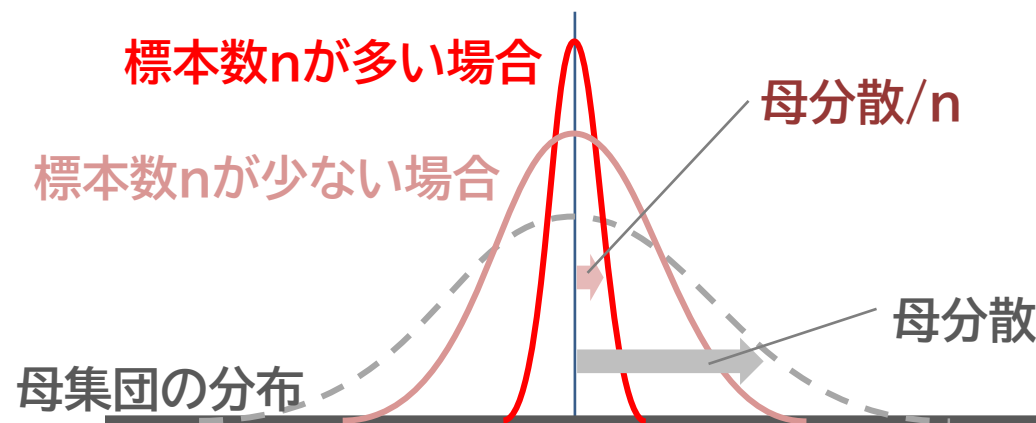
# 標本平均 $\bar{x}$ の分布

- 正規分布に従う
- 分散は、標本数  $n$  が大きいほど、小さくなる

$n$ =母集団数 $N$  なら、全数検査なので、母平均 $\mu$ とのずれはゼロになる。

$n=1$  なら、母集団のうち一つずつを測定するのと同じなので、分散も同じ。

- 分散は、**母分散 $\sigma^2$ の $1/n$** になる



## 中心極限定理

# 標準誤差

母平均 $\mu$ の推定値のばらつきを表したものの

= 標本平均 $\bar{x}$ の分布の標準偏差  
分散の平方根

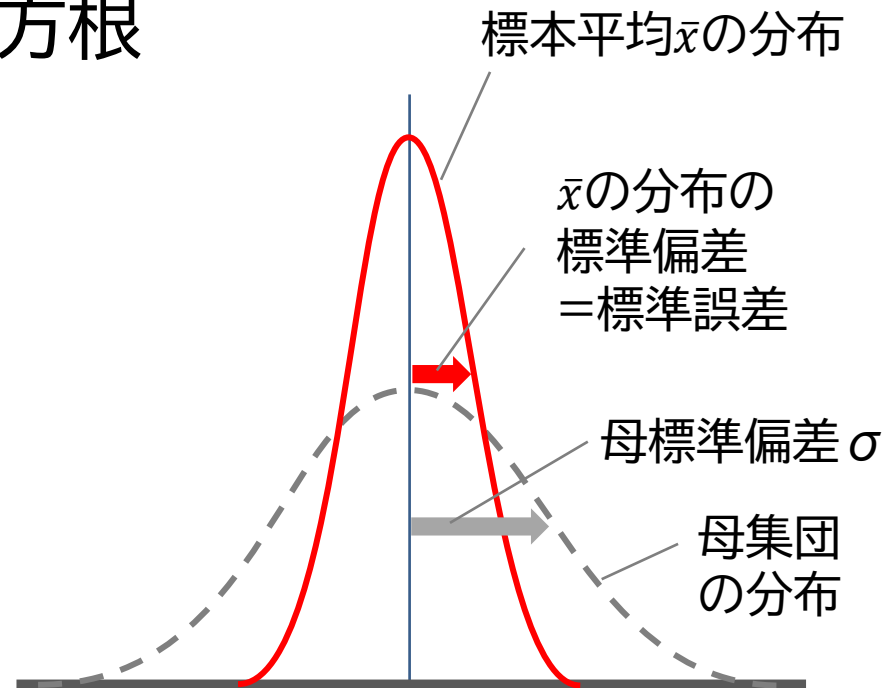
中心極限定理から

= 母分散 $\sigma^2$ の $1/n$ 、の平方根

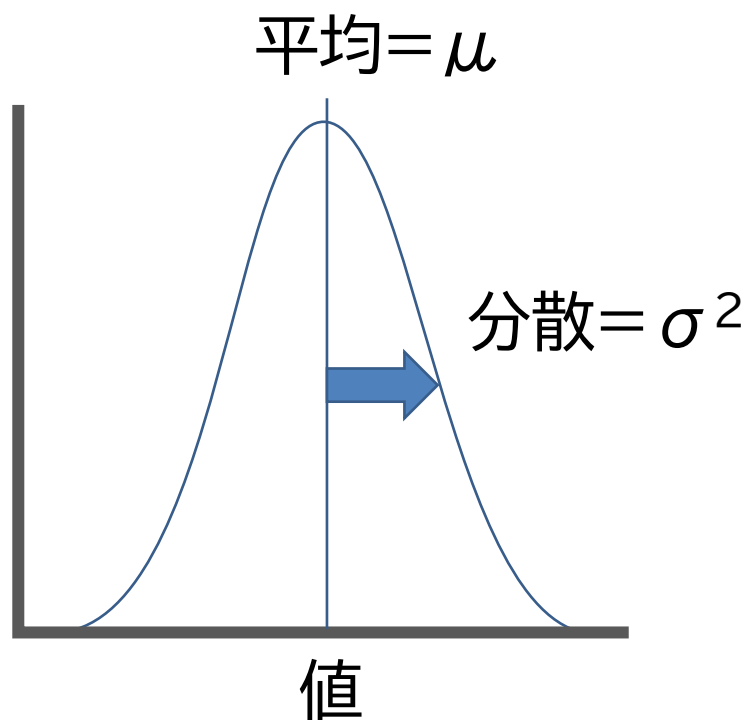
$$= \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

不偏標本標準偏差

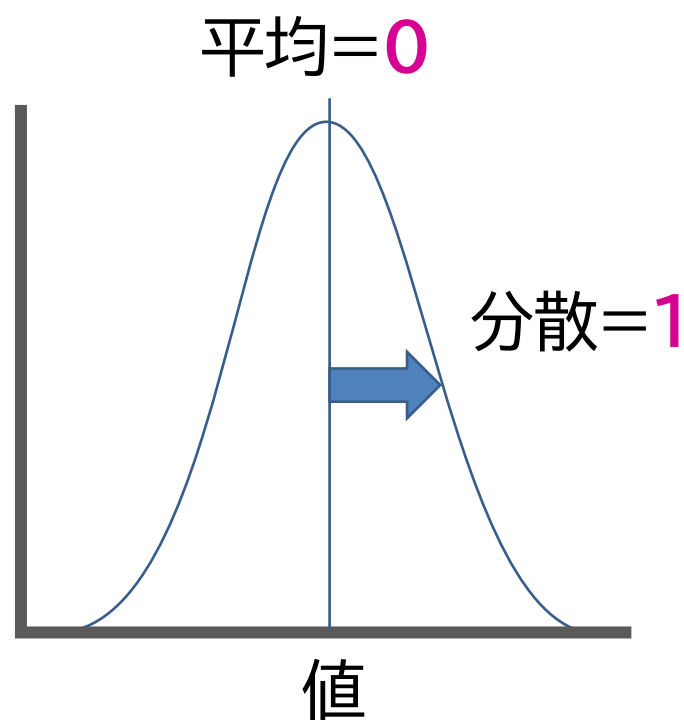


# 正規分布



平均と分散で決まる  
 $N(\mu, \sigma^2)$ と表記

# 標準正規分布



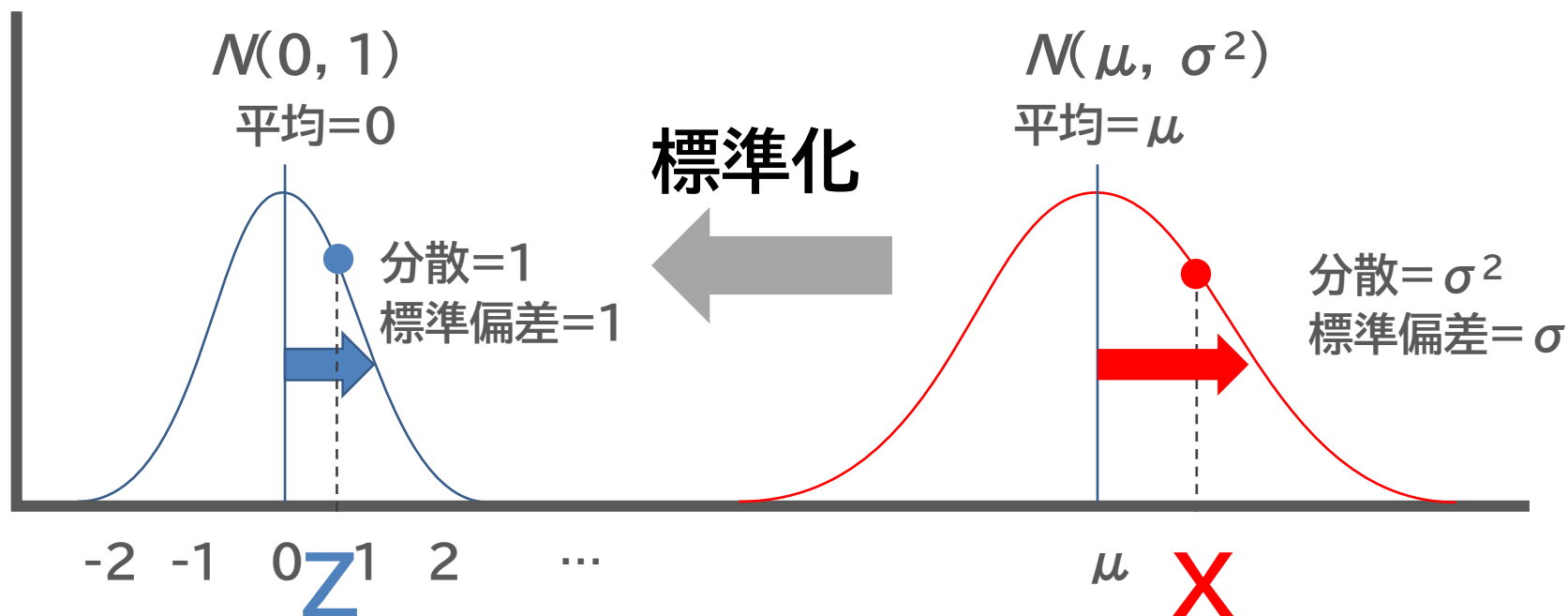
$N(0, 1)$



# 標準化(Z変換)

$N(\mu, \sigma^2)$ の正規分布に従う変数 $X$ について、

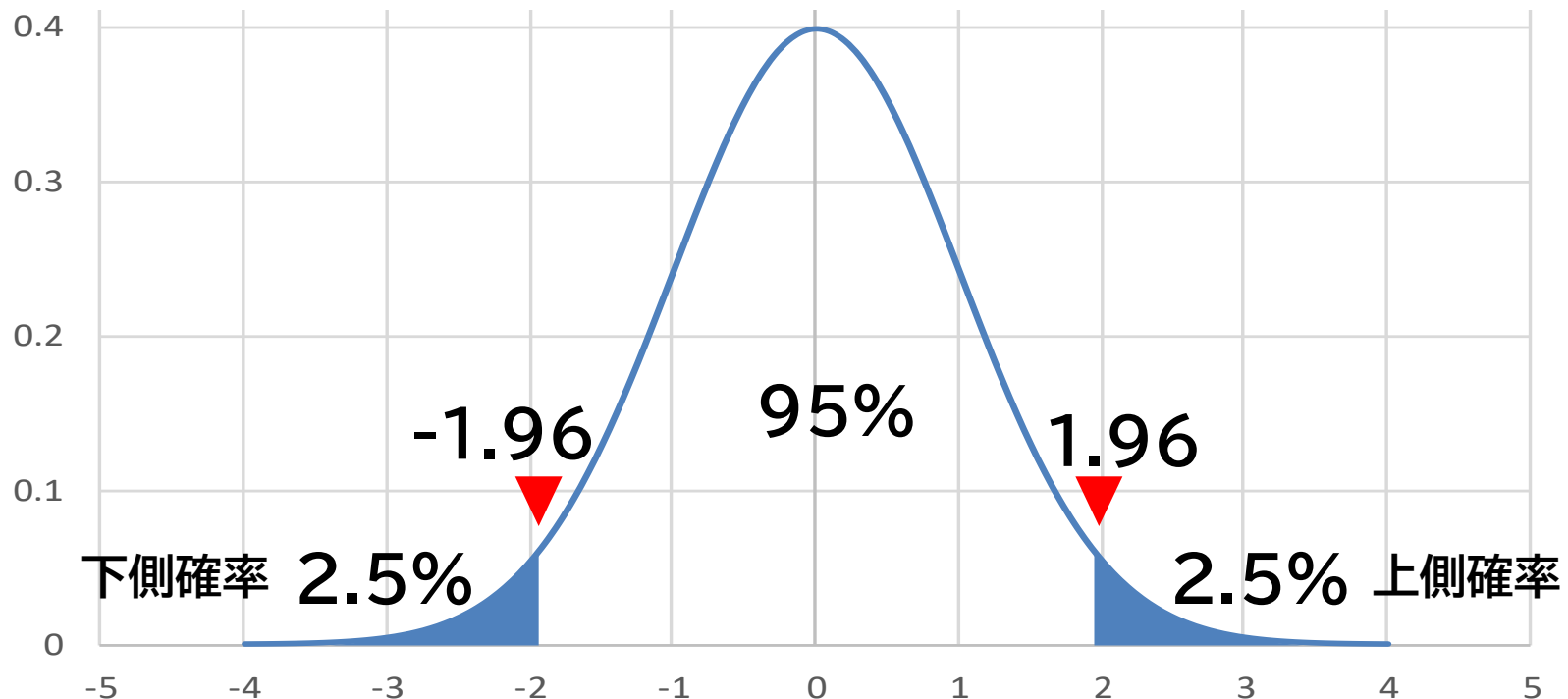
$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$  と変換すると、標準正規分布になる。



中央を $\mu$ ずらして、幅を1に合わせているだけ！

# 標準正規分布

- 形が一定なので、ある値より外側の面積が計算できる  
例) 1.96以上なら2.5%
- 逆に言えば、外側がある面積(事象がおこる確率)となる境界値を求めることができる
- 左右対称。上側(下側)の面積を上側(下側)確率という



# 標準正規分布表

上側確率をあらかじめ  
計算したもの

Excelでは、  
NORM.S.DIST関数  
NORM.S.INV関数  
で求められる

出典

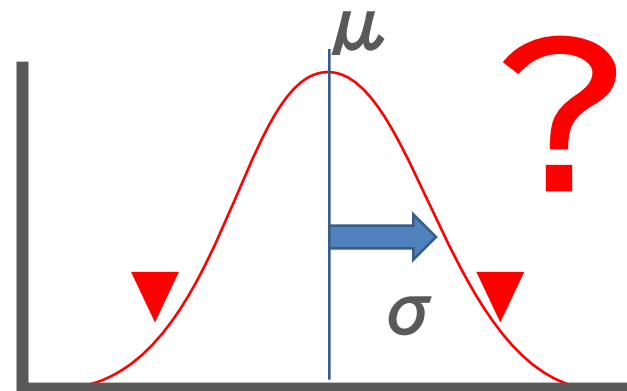
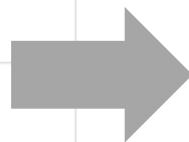
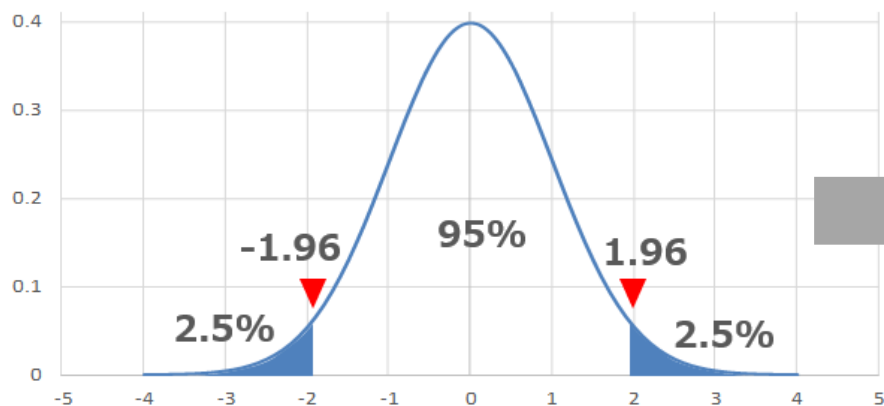
<https://to-kei.net/distribution/normal-distribution/table/>

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414
0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
2.5	0.00620	0.00602	0.00584	0.00566	0.00549	0.00533	0.00517	0.00502	0.00486	0.00471
2.6	0.00456	0.00441	0.00426	0.00411	0.00396	0.00382	0.00367	0.00353	0.00339	0.00325
2.7	0.00311	0.00297	0.00283	0.00269	0.00256	0.00242	0.00229	0.00216	0.00203	0.00190
2.8	0.00177	0.00164	0.00151	0.00139	0.00127	0.00115	0.00103	0.00091	0.00080	0.00069
2.9	0.00058	0.00057	0.00056	0.00055	0.00054	0.00053	0.00052	0.00051	0.00050	0.00049
3.0	0.00048	0.00047	0.00046	0.00045	0.00044	0.00043	0.00042	0.00041	0.00040	0.00039

# 区間推定の考え方

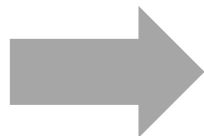
- ある事象が正規分布に従っていることが分かっており、
- 平均 $\mu$ 、分散 $\sigma^2$ が分かっているなら、
- 標準正規分布におけるa%のときの境界値を用いて、もとの正規分布の境界値を計算する

(この境界値の間の区間を、a%信頼区間という)



# 標準化

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

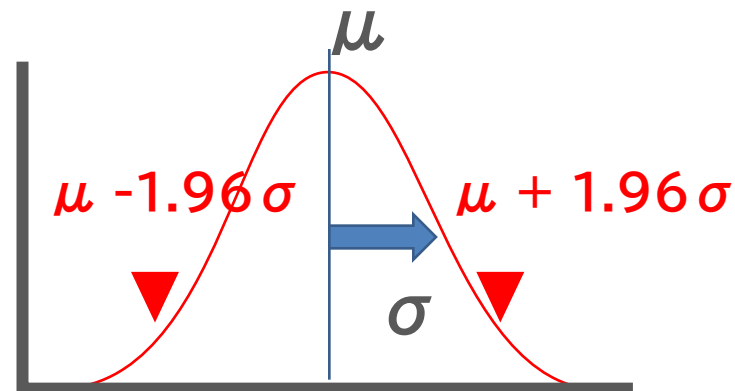
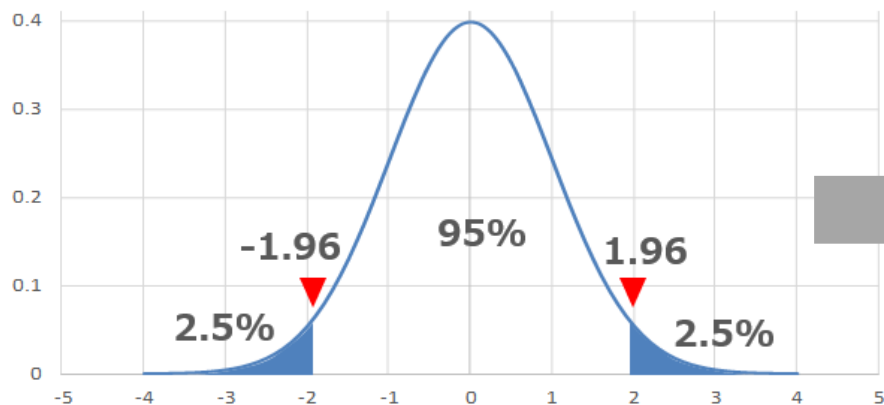


# 標準化の逆

$$X = \mu + Z\sigma$$

例)  $Z = 1.96$ なら、

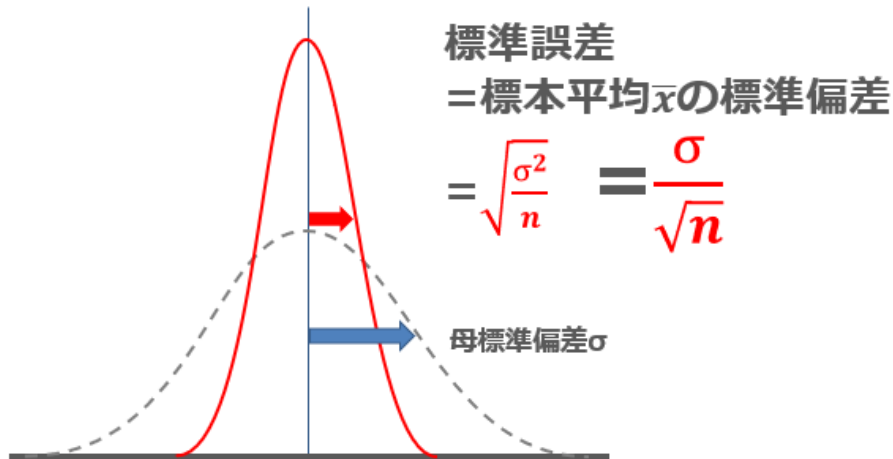
$$X = \mu + 1.96\sigma$$



# 母集団の平均値を推定する問題の場合

## 標準誤差

- 標本平均 $\bar{x}$ の標準偏差のこと。  
つまり、母平均 $\mu$ の推定値のばらつきを表す
- 母分散 $\sigma^2$ の $1/n$ の平方根



$\mu$ 推定値:  $\bar{x}$

標準偏差:  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

を当てはめてみると...

# 区間推定のまとめ

母平均 $\mu$ の推定値：標本平均  $\bar{x}$

推定値の標準偏差：標本平均の標準偏差  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

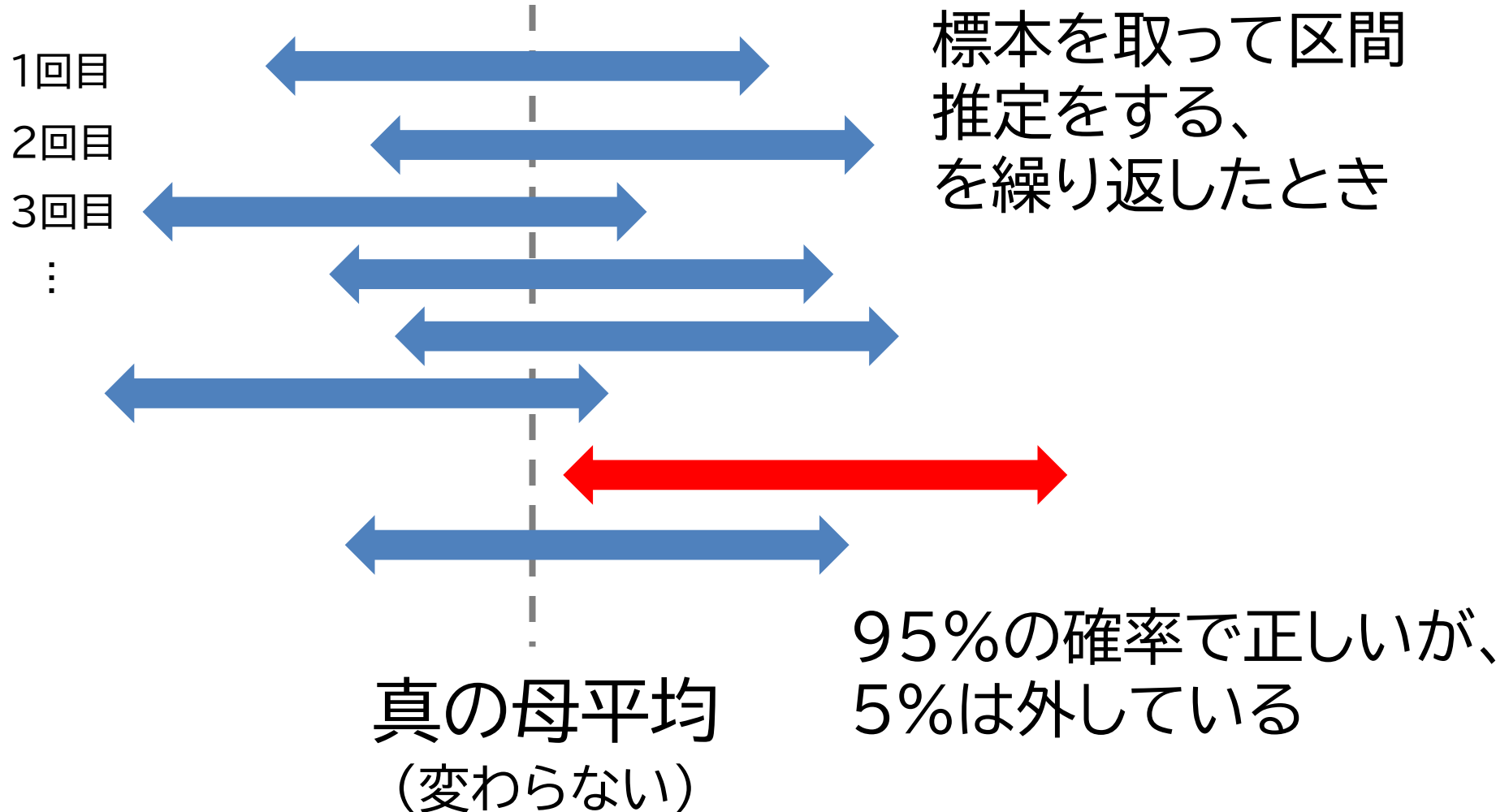
この場合、95%信頼区間は、以下で求められる

$$\bar{x} - 1.96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1.96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

意味：

「母集団から標本を取り出して95%信頼区間を求めるという作業を100回やったとき、母平均がその区間内に含まれる場合が95回おこる」

# イメージ





一般化すると

## 区間推定(分散既知の場合)

母平均 $\mu$ 、母分散 $\sigma^2$ の正規分布する母集団から抽出した $n$ 個の標本から求められる、 $a\%$ 信頼区間は以下となる。

$$\bar{x} - A * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + A * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ここで $A$ は、標準正規分布表から、

$$\alpha (\text{信頼係数}) = (100-a)/2/100$$

で求められる境界値

ただし...

$$\bar{x} - 1.96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1.96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

**母分散  $\sigma^2$  は不明**な場合がほとんど

母平均  $\mu$  が不明(推定したい)のに母分散  $\sigma^2$  だけ分かっているって、  
どうということ？ そんな状況はほとんどない！



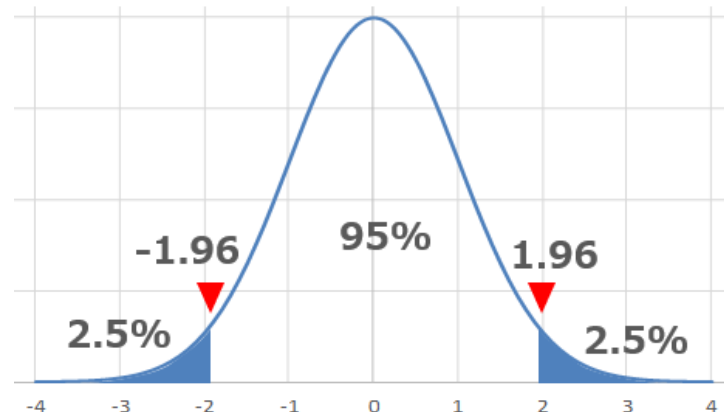
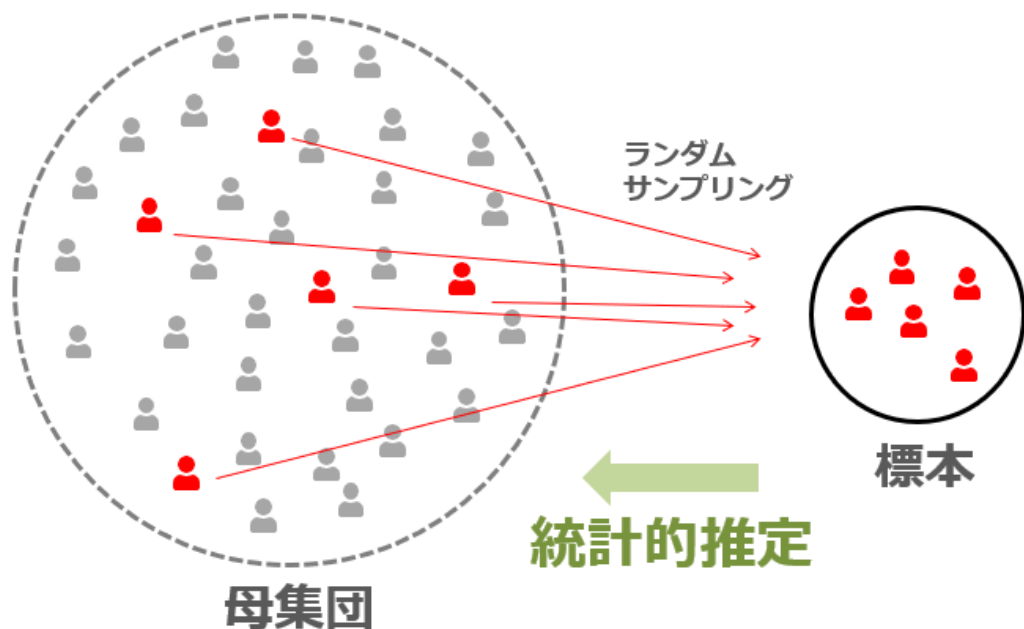
母分散が不明な場合は、正規分布ではなく、 **$t$  分布**を用いて同様に考える

# $t$ 分布

標準正規分布の、  
標本数が少ない場合の  
実用化バージョン

# $t$ 分布 スチューデントの $t$ 分布

正規分布する母集団から標本をとり、母平均 $\mu$ を求めようとするとき、標本数が少ないと、標本側で起こる確率を、標準正規分布ではうまく表現しきれない。実際の実験などでは、標本数が少ないことがほとんど。そこで考え出された、**標準正規分布の、標本数を考慮した、実用化バージョン。**



# 考えた人

ウィリアム・シーリー・ゴセット  
William Sealy Gosset  
イギリスの統計学者



出典:Wikipedia

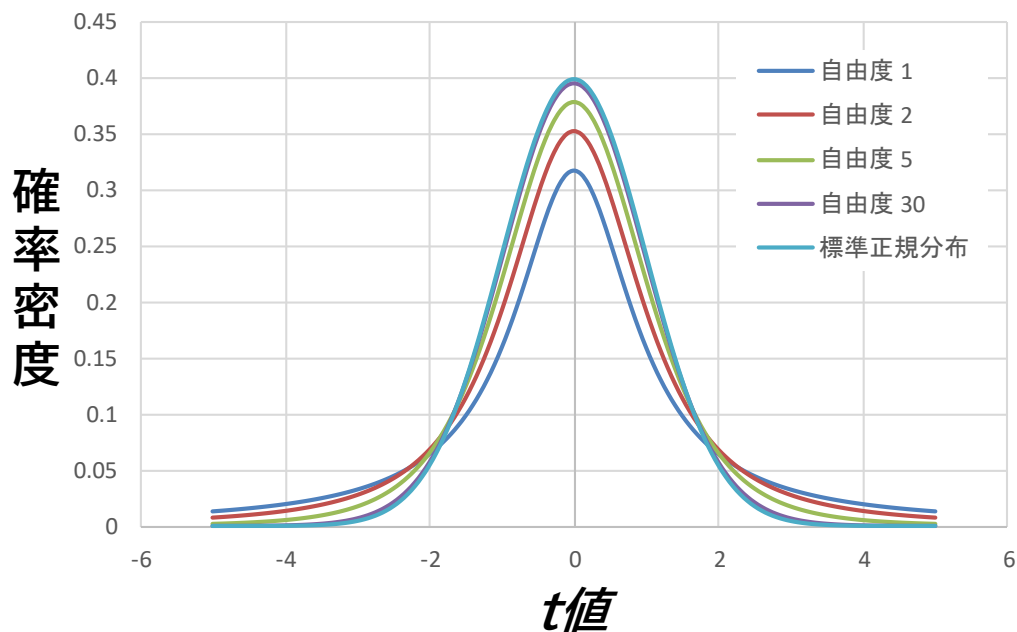


ギネスビール社で醸造とオオムギの品種改良の研究をするなかで $t$ 分布を発見したが、ギネス社は社員の論文発表を禁じていたため、スチューデントというペンネームで論文発表した(1908年)。

出典:ギネス社HP

# $t$ 分布

## $t$ 分布表



自由度(標本-1)が小さいほど裾野が広がっており、自由度が高くなると標準正規分布に近づく

Excelでは、T.DIST、T.INV関数で計算できる

自由度 $\nu$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819

出典

<https://to-kei.net/distribution/t-distribution/t-table/>

# $t$ 分布

性質: 母平均 $\mu$ 、不偏分散 $v^2$ の正規分布に従う母集団から抽出した $n$ 個の標本を使って求めた次の統計量 $t$ は、自由度 $(n-1)$ の $t$ 分布に従う。

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{v}{\sqrt{n}}}$$

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

標準化(z変換)

「標本平均 $\bar{x}$ の分布を標準化した」と言える。

これまでと同様の考え方



# 区間推定(母分散が不明な場合)

母平均 $\mu$ 、不偏分散 $v^2$ の母集団から抽出した $n$ 個の標本から求められる、 $a\%$ 信頼区間は以下となる。

$$\bar{x} - A * \frac{v}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + A * \frac{v}{\sqrt{n}}$$

ここで $A$ は、**t分布表**から、

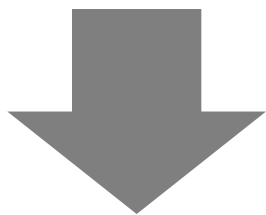
✓ 自由度 $=n-1$

✓  $\alpha$  (信頼計数)  $= (100-a)/2/100$

で求められる境界値。

# まとめ

分布(確率密度関数)

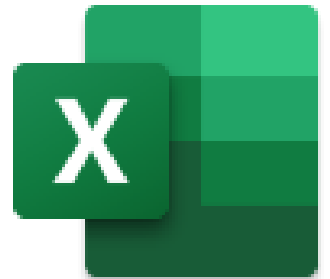


事象が起きる確率を推定できる！

# 描いてみよう

- 標準正規分布
- $t$ 分布
- 裾野の面積と境界値を計算

標準化してみよう



【参考】覚える必要はありません

*正規分布の確率密度関数*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

*標準正規分布の確率密度関数*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

【参考】覚える必要はありません

*t* 分布の確率密度関数

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)}$$

$v$ : 自由度