# Signali i sustavi - Auditorna vježba 3 - Klasifikacija i osnovna svojstva sustava

1. **ZADATAK**: Ispitajte linearnost sustava definiranih sljedećim jednadžbama:

(a) $\dfrac{dy}{dt} + 2y(t) = x^2(t)$,

(b) $\dfrac{dy}{dt} + 3ty(t) = t^2x(t)$,

(c) $3y(t) + 2 = x(t)$,

(d) $\dfrac{dy}{dt} + y^2(t) = x(t)$,

(e) $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + 2y(t) = x(t)$,

(f) $\dfrac{dy}{dt} + (\sin t)y(t) = \dfrac{dx}{dt} + 2x(t)$,

(g) $\dfrac{dy}{dt} + 2y(t) = x(t)\dfrac{dx}{dt}$,

(h) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$.

**RJEŠENJE**:

(a) Sustav je linearan ako za $x_1(t) \Rightarrow y_1(t)$ i $x_2(t) \Rightarrow y_2(t)$ vrijedi: $c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \Rightarrow c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$. Za pobude $x_1(t)$ i $x_2(t)$ možemo napisati sljedeće dvije jednadžbe:

$$\frac{dy_1}{dt} + 2y_1(t) = x_1^2(t) \quad \text{i} \quad \frac{dy_2}{dt} + 2y_2(t) = x_2^2(t).$$

Množenjem prve jednadžbe sa $c_1$ i druge sa $c_2$, te njihovim zbrajanjem dobijemo:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(c_1y_1(t) + c_2y_2(t))}_{=y(t)} + 2\underbrace{(c_1y_1(t) + c_2y_2(t))}_{=y(t)} = \underbrace{c_1x_1^2(t) + c_2x_2^2(t)}_{\neq x^2(t)}.$$

Supstitucijom $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ i $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ nismo dobili početnu jednadžbu, dakle, sustav nije linearan.

(b) Za pobude $x_1(t)$ i $x_2(t)$ možemo napisati sljedeće dvije jednadžbe:

$$\frac{dy_1}{dt} + 3ty_1(t) = t^2x_1(t) \quad \text{i} \quad \frac{dy_2}{dt} + 3ty_2(t) = t^2x_2(t).$$

Množenjem prve jednadžbe sa $c_1$ i druge sa $c_2$, te njihovim zbrajanjem dobijemo:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(c_1y_1(t) + c_2y_2(t))}_{=y(t)} + 3t\underbrace{(c_1y_1(t) + c_2y_2(t))}_{=y(t)} = t^2\underbrace{(c_1x_1(t) + c_2x_2(t))}_{=x(t)}.$$

Supstitucijom $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ i $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ dobili smo početnu jednadžbu, dakle, sustav je linearan.

(c) Za pobude $x_1(t)$ i $x_2(t)$ možemo napisati sljedeće dvije jednadžbe:

$$3y_1(t) + 2 = x_1(t) \quad \text{i} \quad 3y_2(t) + 2 = x_2(t).$$

Množenjem prve jednadžbe sa $c_1$ i druge sa $c_2$, te njihovim zbrajanjem dobijemo:

$$3\underbrace{(c_1y_1(t) + c_2y_2(t))}_{=y(t)} + 2\underbrace{(c_1 + c_2)}_{\neq 1} = \underbrace{c_1x_1 + c_2x_2(t)}_{=x(t)}.$$

Supstitucijom $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ i $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ nismo dobili početnu jednadžbu, dakle, sustav nije linearan.

(d) Za pobude $x_1(t)$ i $x_2(t)$ možemo napisati sljedeće dvije jednadžbe:

$$\frac{dy_1}{dt} + y_1^2(t) = x_1(t) \quad \text{i} \quad \frac{dy_2}{dt} + y_2^2(t) = x_2(t).$$

Množenjem prve jednadžbe sa $c_1$ i druge sa $c_2$, te njihovim zbrajanjem dobijemo:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(c_1y_1(t) + c_2y_2(t))}_{=y(t)} + \underbrace{c_1y_1^2(t) + c_2y_2^2(t)}_{\neq y^2(t)} = \underbrace{c_1x_1(t) + c_2x_2(t)}_{=x(t)}.$$

Supstitucijom $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ i $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ nismo dobili početnu jednadžbu, dakle, sustav nije linearan.

(e) Za pobude $x_1(t)$ i $x_2(t)$ možemo napisati sljedeće dvije jednadžbe:

$$\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + 2y_1(t) = x_1(t) \quad \text{i} \quad \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 + 2y_2(t) = x_2(t).$$

Množenjem prve jednadžbe sa $c_1$ i druge sa $c_2$, te njihovim zbrajanjem dobijemo:

$$\underbrace{c_1\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + c_2\left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2}_{\neq\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} + 2\underbrace{(c_1y_1(t) + c_2y_2(t))}_{=y(t)} = \underbrace{c_1x_1(t) + c_2x_2(t)}_{=x(t)}.$$

Supstitucijom $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ i $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ nismo dobili početnu jednadžbu, dakle, sustav nije linearan.

(f) Za pobude $x_1(t)$ i $x_2(t)$ možemo napisati sljedeće dvije jednadžbe:

$$\frac{dy_1}{dt} + (\sin t)y_1(t) = \frac{dx_1}{dt} + 2x_1(t) \quad \text{i} \quad \frac{dy_2}{dt} + (\sin t)y_2(t) = \frac{dx_2}{dt} + 2x_2(t).$$

Množenjem prve jednadžbe sa $c_1$ i druge sa $c_2$, te njihovim zbrajanjem dobijemo:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(c_1y_1(t)+c_2y_2(t))}_{=y(t)}+(\sin t)\underbrace{(c_1y_1(t)+c_2y_2(t))}_{=y(t)}=$$

$$=\frac{d}{dt}\underbrace{(c_1x_1(t)+c_2x_2(t))}_{=x(t)}+2\underbrace{(c_1x_1(t)+c_2x_2(t))}_{=x(t)}.$$

Supstitucijom $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ i $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ dobili smo početnu jednadžbu, dakle, sustav je linearan.

(g) Za pobude $x_1(t)$ i $x_2(t)$ možemo napisati sljedeće dvije jednadžbe:

$$\frac{dy_1}{dt}+2y_1(t)=x_1(t)\frac{dx_1}{dt} \quad \text{i} \quad \frac{dy_1}{dt}+2y_1(t)=x_1(t)\frac{dx_1}{dt}.$$

Množenjem prve jednadžbe sa $c_1$ i druge sa $c_2$, te njihovim zbrajanjem dobijemo:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(c_1y_1(t)+c_2y_2(t))}_{=y(t)}+2\underbrace{(c_1y_1(t)+c_2y_2(t))}_{=y(t)}=\underbrace{c_1x_1(t)\frac{dx_1}{dt}+c_2x_2(t)\frac{dx_2}{dt}}_{\neq x(t)\frac{dx}{dt}}.$$

Supstitucijom $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ i $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ nismo dobili početnu jednadžbu, dakle, sustav nije linearan.

(h) Za pobude $x_1(t)$ i $x_2(t)$ možemo napisati sljedeće dvije jednadžbe:

$$y_1(t)=\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)d\tau \quad \text{i} \quad y_2(t)=\int_{-\infty}^{t}x_2(\tau)d\tau.$$

Množenjem prve jednadžbe sa $c_1$ i druge sa $c_2$, te njihovim zbrajanjem dobijemo:

$$\underbrace{c_1y_1(t)+c_2y_2(t)}_{=y(t)}=\int_{-\infty}^{t}\underbrace{(c_1x_1(\tau)+c_2x_2(\tau))}_{x(\tau)}d\tau.$$

Supstitucijom $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ i $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ dobili smo početnu jednadžbu, dakle, sustav je linearan.

2. **ZADATAK**: Ispitajte vremensku promjenjivost sustava definiranih sljedećim jednadžbama:

(a) $y(t) = x(t-2)$,

(b) $y(t) = x(-t)$,

(c) $y(t) = x(at)$,

(d) $y(t) = tx(t-2)$,

(e) $y(t) = \int_{-5}^{5} x(\lambda)d\lambda$,

(f) $y(t) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$.

**RJEŠENJE**:

(a) Sustav je vremenski nepromjenjiv ako za $x(t) \Rightarrow y(t)$ vrijedi $x(t-\tau) \Rightarrow y(t-\tau)$. Usporedbom odziva sustava na $x(t-\tau)$, $\mathcal{T}\{x(t-\tau)\}$, s $y(t-\tau)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{x(t-\tau)\} &= x(t-\tau-2)\\ &= y(t-\tau) = x(t-\tau-2),\end{aligned}$$

zaključujemo da je sustav vremenski nepromjenjiv.

(b) Usporedbom odziva sustava na $x(t-\tau)$, $\mathcal{T}\{x(t-\tau)\}$, s $y(t-\tau)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{x(t-\tau)\} &= x(-t-\tau)\\ &\neq y(t-\tau) = x(-t+\tau),\end{aligned}$$

zaključujemo da je sustav vremenski promjenjiv.

(c) Usporedbom odziva sustava na $x(t-\tau)$, $\mathcal{T}\{x(t-\tau)\}$, s $y(t-\tau)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{x(t-\tau)\} &= x(at-\tau)\\ &\neq y(t-\tau) = x(at-a\tau),\end{aligned}$$

zaključujemo da je sustav vremenski promjenjiv.

(d) Usporedbom odziva sustava na $x(t-\tau)$, $\mathcal{T}\{x(t-\tau)\}$, s $y(t-\tau)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{x(t-\tau)\} &= tx(t-\tau-2)\\ &\neq y(t-\tau) = (t-\tau)x(t-\tau-2),\end{aligned}$$

zaključujemo da je sustav vremenski promjenjiv.

(e) Usporedbom odziva sustava na $x(t-\tau)$, $\mathcal{T}\{x(t-\tau)\}$, s $y(t-\tau)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{x(t-\tau)\} &= \int_{-5}^{5} x(\lambda-\tau)d\lambda\\ &\neq y(t-\tau) = \int_{-5}^{5} x(\lambda)d\lambda,\end{aligned}$$

zaključujemo da je sustav vremenski promjenjiv.

(f) Usporedbom odziva sustava na $x(t-\tau)$, $\mathcal{T}\{x(t-\tau)\}$, s $y(t-\tau)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{x(t-\tau)\} &= \left(\frac{d}{dt}x(t-\tau)\right)^2 \\ &= y(t-\tau) = \left(\frac{d}{dt}x(t-\tau)\right)^2,\end{aligned}$$

zaključujemo da je sustav vremenski nepromjenjiv.

3. **ZADATAK**: Vremenski diskretan sustav prikazan na slici 1 naziva se elementom *jediničnog kašnjenja*. Odredite je li sustav: (a) bezmemorijski, (b) kauzalan, (c) linearan, (d) vremenski-nepromjenjiv, (e) stabilan.


Slika 1: Element jediničnog kašnjenja.

**RJEŠENJE**:

(a) Ulazno-izlazna jednadžba sustava glasi:

$$y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} = x[n-1].$$

Budući da vrijednost izlaza u $n$ ovisi o vrijednosti ulaza u $n-1$, sustav nije bezmemorijski.

(b) Budući da izlaz ne ovisi o budući vrijednostima ulaza, sustav je kauzalan.

(c) Za pobude $x_1[n]$ i $x_2[n]$ možemo napisati sljedeće dvije jednadžbe:

$$y_1[n] = x_1[n-1] \quad \text{i} \quad y_2[n] = x_2[n-1].$$

Množenjem prve jednadžbe sa $c_1$ i druge sa $c_2$, te njihovim zbrajanjem dobijemo:

$$\underbrace{c_1y_1[n] + c_2y_2[n]}_{=y[n]} = \underbrace{c_1x_1[n-1] + c_2x_2[n-1]}_{=x[n-1]}.$$

Supstitucijom $y[n] = c_1y_1[n] + c_2y_2[n]$ i $x[n] = c_1x_1[n] + c_2x_2[n]$ dobili smo početnu jednadžbu, dakle, sustav je linearan.

(d) Usporedbom odziva sustava na $x[n-n_0]$, $\mathcal{T}\{x[n-n_0)\}$, s $y[n-n_0]$:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{x[n-n_0]\} &= x[n-1-n_0] \\ &= y[n-n_0] = x[n-n_0-1],\end{aligned}$$

zaključujemo da je sustav vremenski nepromjenjiv.

(e) Budući da je:

$$|y[n]| = |x[n-1]| \leq |k|, \quad \text{ako je} \quad |x[n]| \leq k \quad \text{za svaki } n,$$

sustav je BIBO stabilan.

4. **ZADATAK**: Sustav ima ulazno-izlaznu jednadžbu: $y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} = nx[n]$. Odredite je li sustav: (a) bezmemorijski, (b) kauzalan, (c) linearan, (d) vremenski-nepromjenjiv, (e) stabilan.

**RJEŠENJE**:

(a) Budući da vrijednost izlaza u $n$ ovisi samo o vrijednosti ulaza u $n$, sustav je bezmemorijski.

(b) Budući da izlaz ne ovisi o budući vrijednostima ulaza, sustav je kauzalan.

(c) Za pobude $x_1[n]$ i $x_2[n]$ možemo napisati sljedeće dvije jednadžbe:

$$y_1[n] = nx_1[n] \quad \text{i} \quad y_2[n] = nx_2[n].$$

Množenjem prve jednadžbe sa $c_1$ i druge sa $c_2$, te njihovim zbrajanjem dobijemo:

$$\underbrace{c_1 y_1[n] + c_2 y_2[n]}_{=y[n]} = n \underbrace{(c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n])}_{=x[n]}.$$

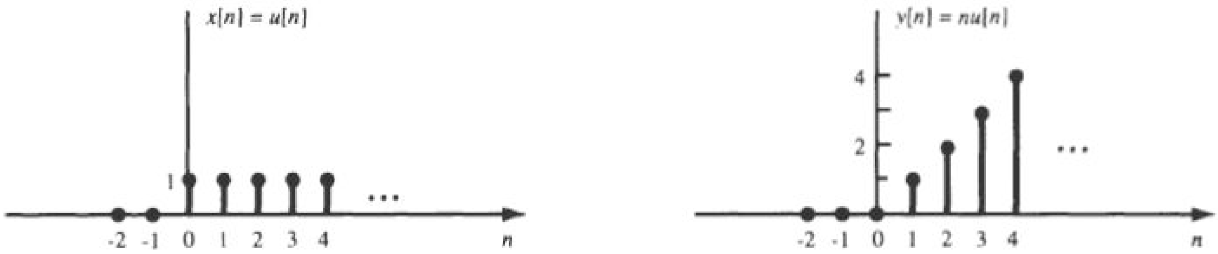
Supstitucijom $y[n] = c_1 y_1[n] + c_2 y_2[n]$ i $x[n] = c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n]$ dobili smo početnu jednadžbu, dakle, sustav je linearan.

(d) Usporedbom odziva sustava na $x[n-n_0]$, $\mathcal{T}\{x[n-n_0)\}$, s $y[n-n_0]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\{x[n-n_0]\} &= nx[n-n_0] && (1) \\ &\neq y[n-n_0] = (n-n_0)x[n-n_0], && (2) \end{aligned}$$

zaključujemo da je sustav vremenski promjenjiv.

(e) Neka je $x[n] = u[n]$. Tada je $y[n] = nu[n]$. Prema tome, ograničeni jedinični skok stvara niz koji neograničeo raste, kao što je to prikazano na slici 2, pa sustav nije BIBO stabilan.




Slika 2: Odziv sustava $y[n] = nx[n]$ na pobudu $x[n] = u[n]$.