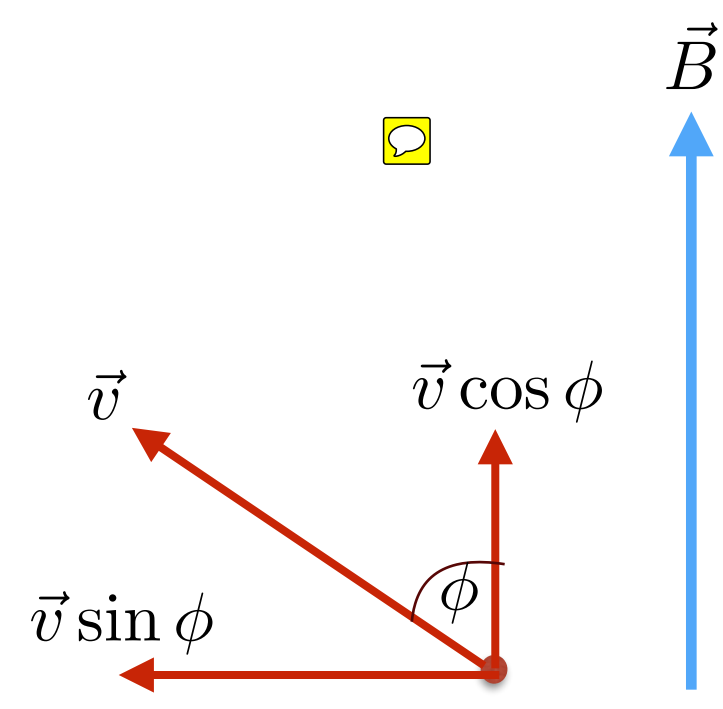
Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Ένα ηλεκτρόνιο με κινητική ενέργεια K= 22.5 eV εισέρχεται σε περιοχή οπου υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, μέτρου $4.55 \times 10^{-4} T$. Η γωνία μεταξύ των κατευθύνσεων του $\vec{B}$ και της ταχύτητας $\vec{v}$ του ηλεκτρονίου ειναι $\phi = 65.5^0$. Πόσο είναι το βήμα της ελικοειδούς τροχιάς που ακολουθεί το ηλεκτρόνιο;

- Το βήμα p είναι η απόσταση που διανύει το ηλεκτρόνιο παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο σε μια περίοδο περιφοράς T.



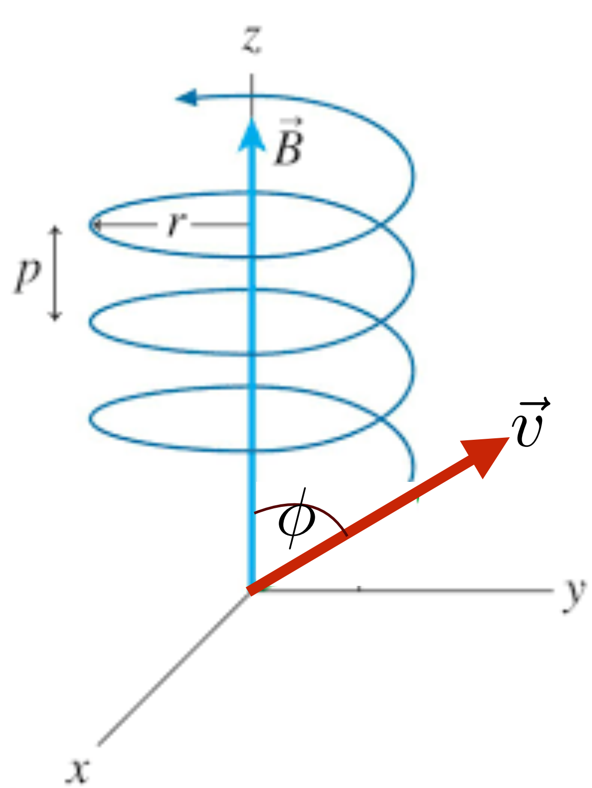
- Το βήμα p είναι η απόσταση που διανύει το ηλεκτρόνιο παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο σε μια περίοδο περιφοράς T. Ισχύει: $p = (v\cos\phi)T$

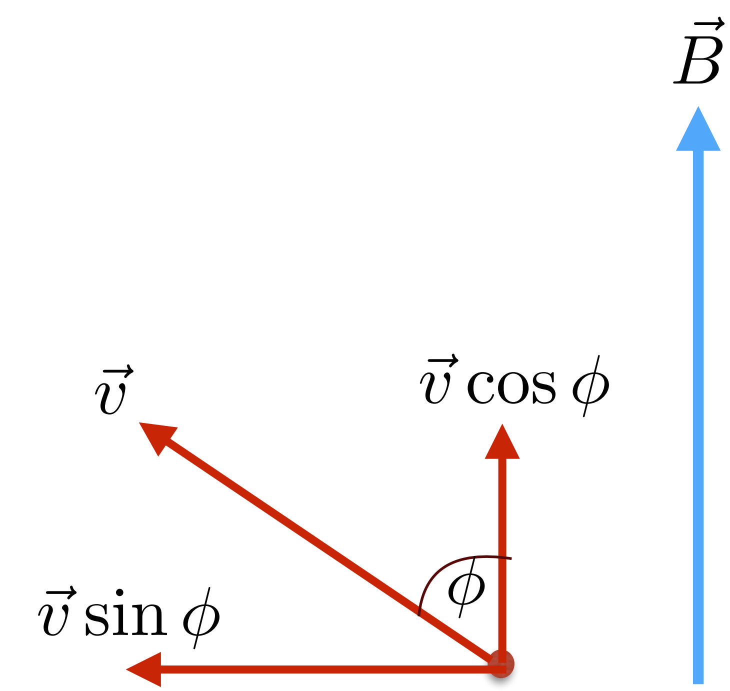
- Η **παράλληλη** στο μαγνητικό πεδίο συνιστώσα της ταχύτητας καθορίζει το βήμα της έλικας p (δηλαδή την απόσταση μεταξύ διαδοχικών στροφών).

- Η **κάθετη** στο μαγνητικό πεδίο συνιστώσα της ταχύτητας καθορίζει την ακτίνα της έλικας.

- Μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του ηλεκτρονίου απο την δεδομένη κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(22.5eV)(1.6\times 10^{-19}J/eV)}{9.1\times 10^{-31}Kg}} \simeq 2.81\times 10^6 m/s$$





- Η δύναμη που δέχεται το κινούμενο ηλεκτρόνιο είναι:

$$F_B = |q\vec{u} \times \vec{B}| = |-q_e v \sin\phi B| = q_e u B \sin\phi$$

- Η δύναμη αυτή δρά ώς κεντρομόλος δύναμη άρα, η τροχιά r της κυκλικής τροχιάς ειναι:

$$F_B = m\frac{(u\sin\phi)^2}{r} \quad \rightarrow \quad q_e u B \sin\phi = \frac{m(u\sin\phi)^2}{r} \quad \rightarrow \quad r = \frac{mv\sin\phi}{q_e B}$$

- Η περίοδος Τ της κυκλικής τροχιάς, ισούται με την περιφέρεια του κύκλου διαιρεμένη με την ταχύτητα περιστροφής:

$$T = \frac{2\pi r}{v\sin\phi} = \frac{2\pi}{v\sin\phi}\frac{mv\sin\phi}{q_e B} = \frac{2\pi m}{q_e B}$$

- Το βήμα p ισούται:

$$p = (v\cos\phi)T = (v\cos\phi)\frac{2\pi m}{q_e B}$$

$$= (2.81 \times 10^6 m/s)(\cos 65.5^O)\frac{2\pi(9.1 \times 10^{-31} Kg)}{(1.6 \times 10^{-19} C)(4.55 \times 10^{-4} T)} \simeq 9.16 cm$$

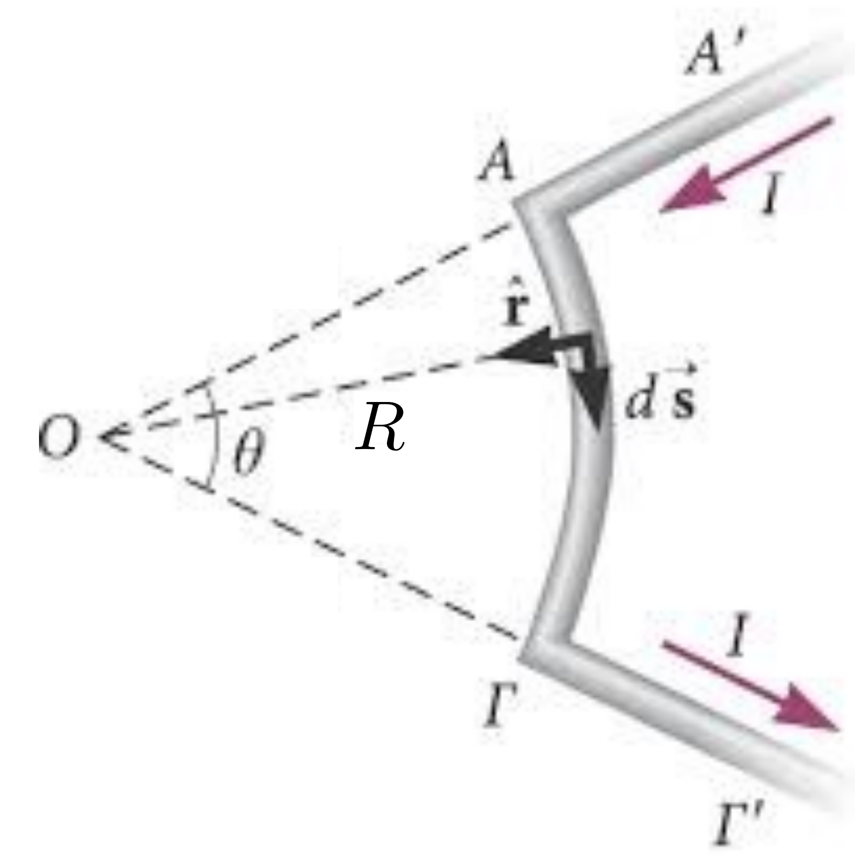
Άσκηση 2:

Ο αγωγός του σχήματος διαρρέεται απο ρεύμα I και αποτελείται από ένα κυκλικό τόξο ακτίνας R και κεντρικής γωνίας θ=π/4 rad, και δυο ευθύγραμμα τμήματα των οποίων οι προεκτάσεις τέμνονται στο κέντρο O του τόξου. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο O.

- Για την εύρεση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο O θα κάνουμε χρήση του νόμου **Biot - Savart**:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

- Θα υπολογίσουμε ξεχωριστά το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται στο σημείο O χωριστά απο κάθε ένα απο τα τρία ευδιάκριτα τμήματα του αγωγού:
  (1) το ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ' ,
  (2) το ευθύγραμμο τμήμα ΓΓ',
  (3) το κυκλικό τόξο ΑΓ.



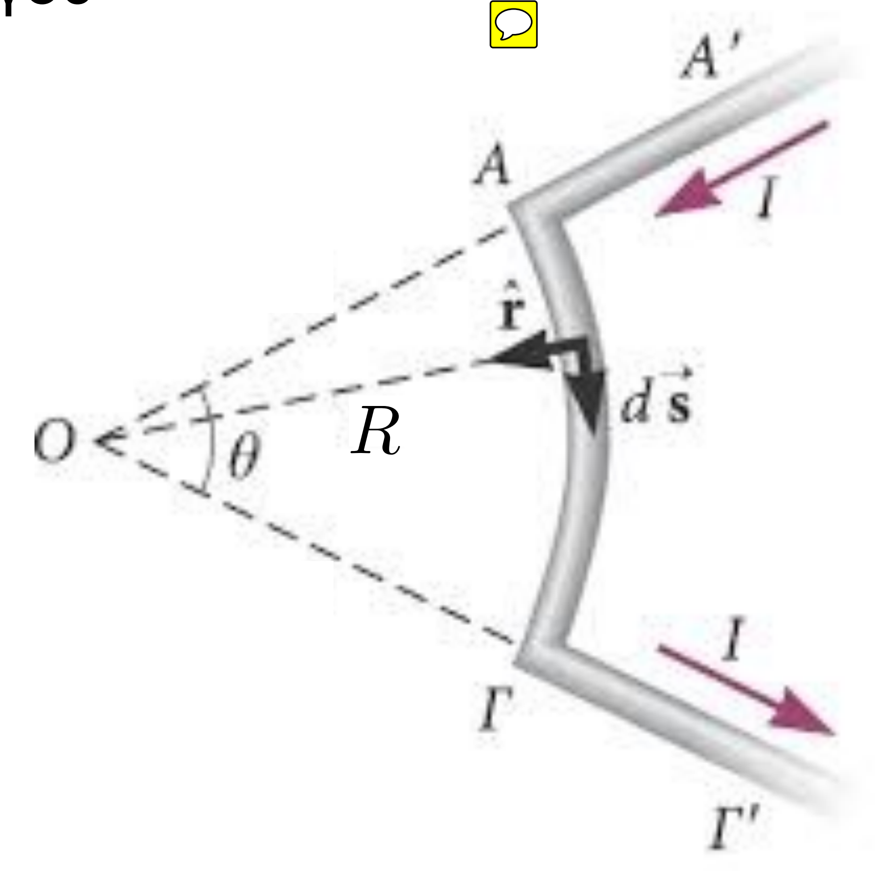
- Για το ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ’:

Για οποιοδήποτε ρευματοφόρο στοιχείο, η γωνία φ ανάμεσα στο $d\vec{s}$ και το $\hat{r}$ είναι μηδέν. Άρα:

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{s}\times\hat{r}}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ids\sin 0}{R^2} = 0$$

Επομένως,το ρεύμα κατά μήκος του ευθύγραμμου αγωγού ΑΑ’ δεν δημιουργεί μαγνητικό πεδίο στο σημείο Ο.

$$\vec{B}_1 = 0$$



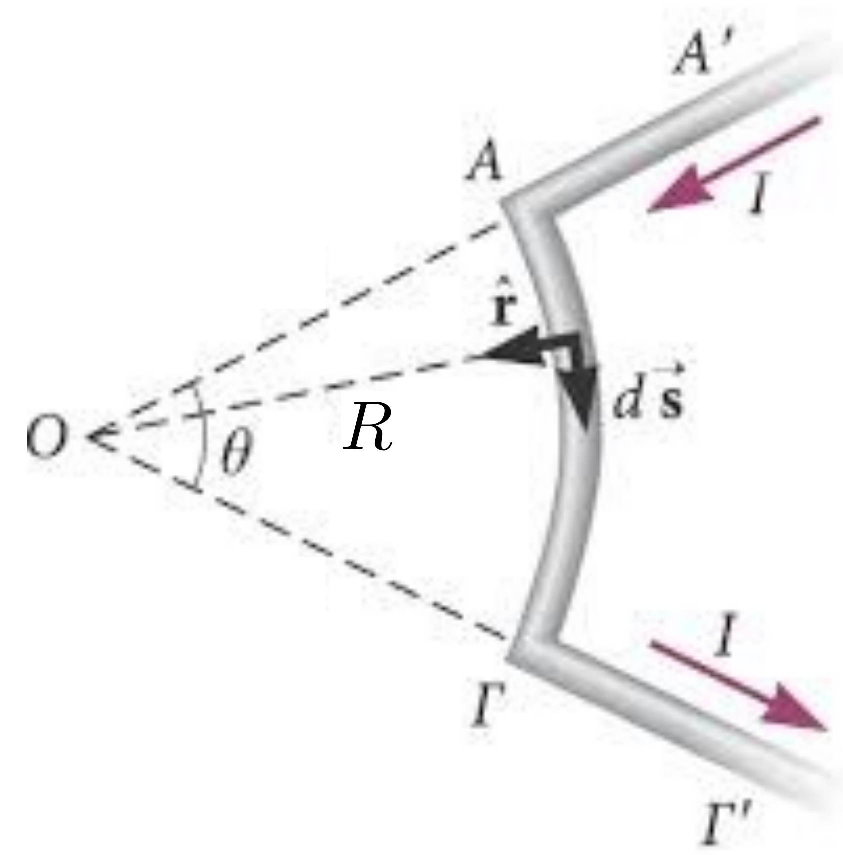
- Για το ευθύγραμμο τμήμα ΓΓ’:

  Για οποιοδήποτε ρευματοφόρο στοιχείο , η γωνία φ ανάμεσα στο $d\vec{s}$ και το $\hat{r}$ είναι 180^o. Άρα:

$$dB_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{s}\times\hat{r}}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ids\sin\pi}{R^2} = 0$$

Επομένως,το ρεύμα κατά μήκος του ευθύγραμμου αγωγού ΓΓ’ δεν δημιουργεί μαγνητικό πεδίο στο σημείο Ο.

$$\vec{B}_2 = 0$$



- Για το κυκλικό τόξο ΑΓ:

Κάθε ρευματοφόρο στοιχείο μήκους $d\vec{s}$ δημιουργεί μαγνητικό πεδίο μέτρου dB_3 στό σημείο Ο.

$$dB_3 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{s}\times\hat{r}}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ids\sin(\frac{\pi}{2})}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(Rd\theta)}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(d\theta)}{R}$$

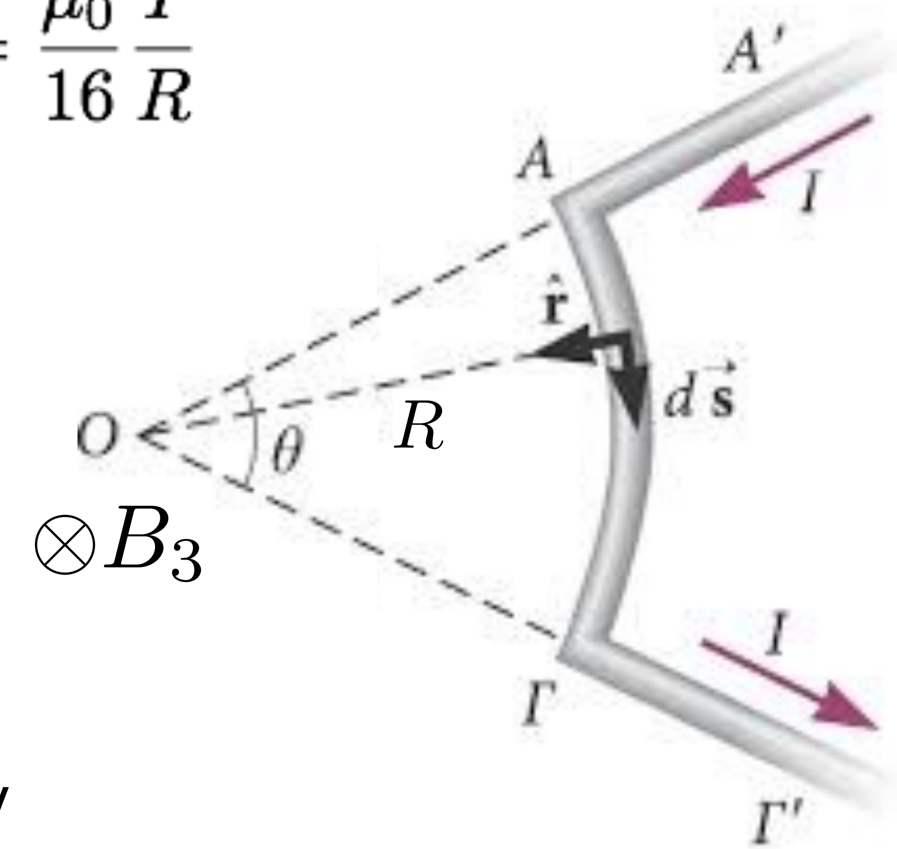
$$ds = Rd\theta$$

Άρα το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από όλο το τόξο είναι:

$$B_3 = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} dB_3 = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(d\theta')}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(\frac{\pi}{4})}{R} = \frac{\mu_0}{16}\frac{I}{R}$$

Το συνολικό μαγνητικό πεδίο όλου του ρευματοφόρου αγωγού είναι:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = B_3 = \frac{\mu_0}{16}\frac{I}{R}$$



Εφαρμόζοντας τον *κανόνα του δεξιού χερίου* βρίσκουμε την **κατεύθυνση** του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Ο. Το μαγνητικό πεδίο δείχνει απο την σελίδα προς τα μέσα.

Άσκηση 3:

Δύο παράλληλοι αγωγοί πολύ μεγάλου μήκους διαρρέονται απο ρεύματα I_1 και I_2 προς αντίθετες κατευθύνσεις όπως στο σχήμα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείταο στο σημείο P.

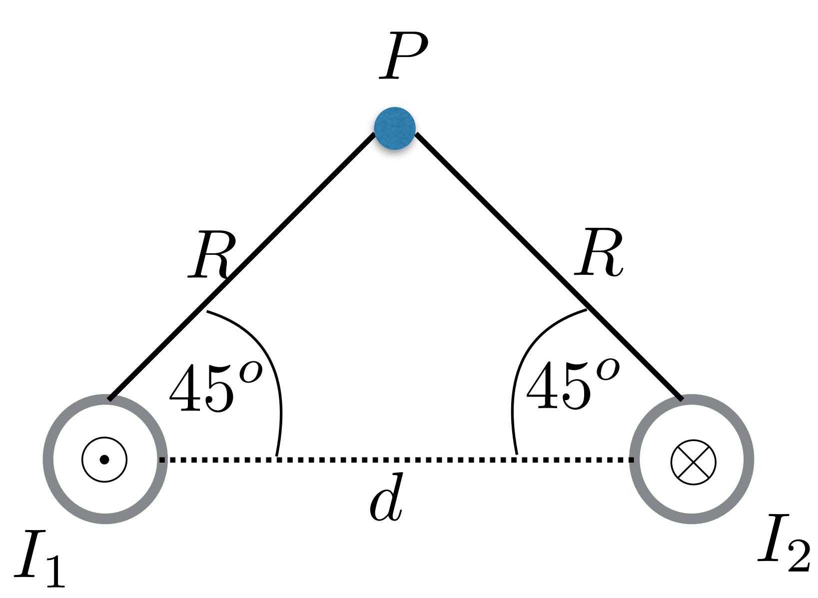
$I_1 = 15A \quad , \quad I_2 = 32A \quad , \quad d = 5.3cm$

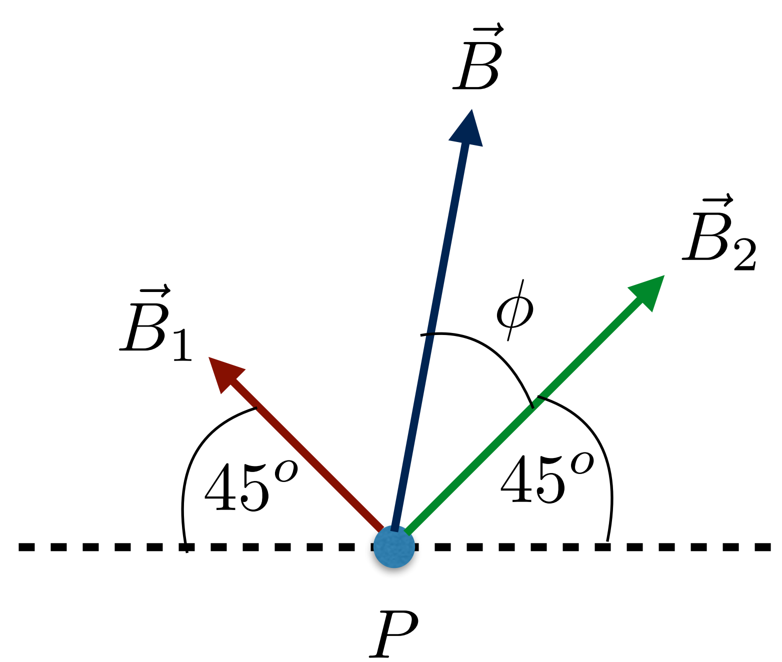
- Στο σημείο P τα ρεύματα I_1 και I_2 δημιουργούν μαγνητικα πεδία $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας τον *κανόνα του δεξιού χεριού* βρίσκουμε την **κατεύθυνση** του αντίστοιχου μαγνητικού πεδίου στο σημείο P. Ισχύει για τα μέτρα:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d \cos 45^o}$$

,

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d \cos 45^o}$$





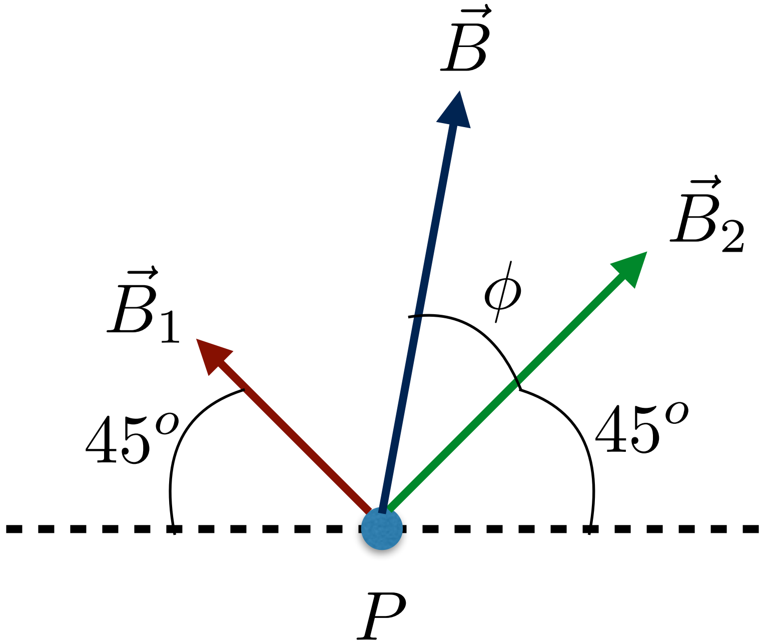
- Τα $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Οπότε απο το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0}{2\pi d \cos 45^o}\sqrt{I_1^2 + I_2^2} =$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7} T \cdot m/A)(\sqrt{(15A)^2 + (32A)^2})}{(2\pi)(5.3 \times 10^{-2} m)(\cos 45^o)} \simeq 190 \mu T$$

- Για την γωνία φ ισχύει:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{B_1}{B_2} = \tan^{-1}\frac{I_1}{I_2} = \tan^{-1}\frac{15A}{32A} = 25^o$$

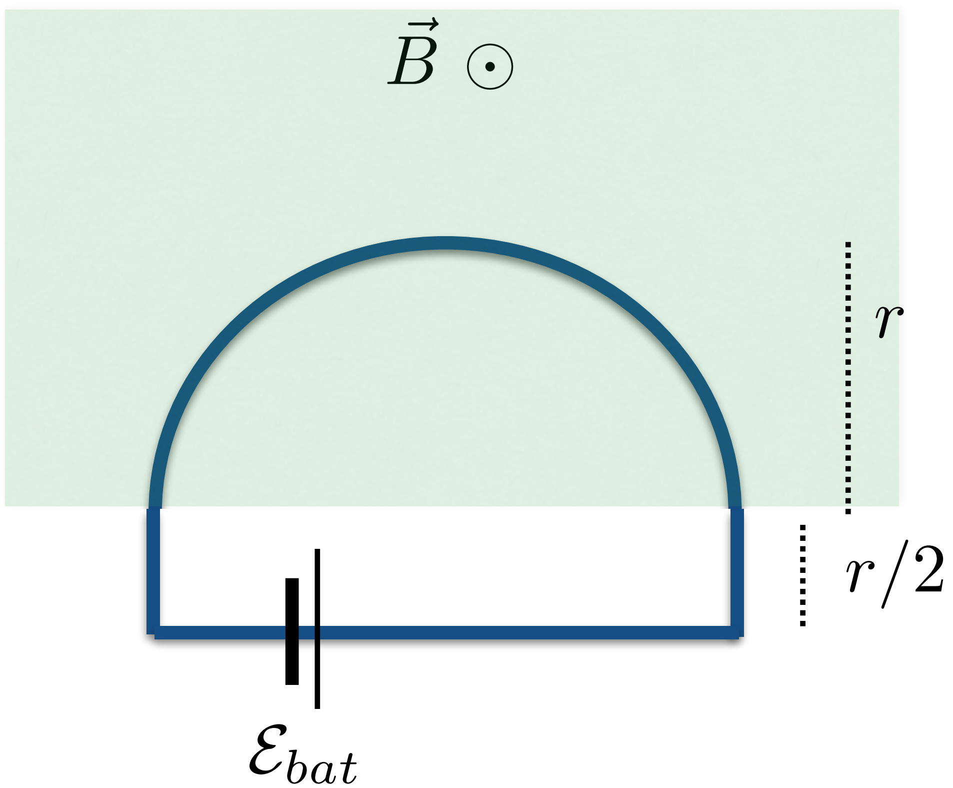


Άσκηση 4:

Αγώγιμος βρόχος αποτελείται απο ένα ημικύκλιο ακτίνας r=0.20m και τρία ευθύγραμμα τμήματα. Το ημικύκλιο βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ όπως στο σχήμα μέτρου $B = 4.0t^2 + 2.0t + 3.0 \ \ T$. Μπαταρία με ΗΕΔ $\mathcal{E}_{bat} = 2.0 \ V$ είναι συνδεδεμένη με τον βρόχο αντίστασης R=2.0 Ω.

(α) Πόσο είναι το μέτρο και ποιά η κατεύθυνση της επαγόμενης ΗΕΔ $\mathcal{E}_{ind}$ στον βρόχο, την χρονική στιγμή t=10s;

(β) Πόσο είναι το ρεύμα στον βρόχο την χρονική στιγμή t=10s;



(α)

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \int dA = BA$$

- Σύμφωνα με τον νόμο του Faraday:

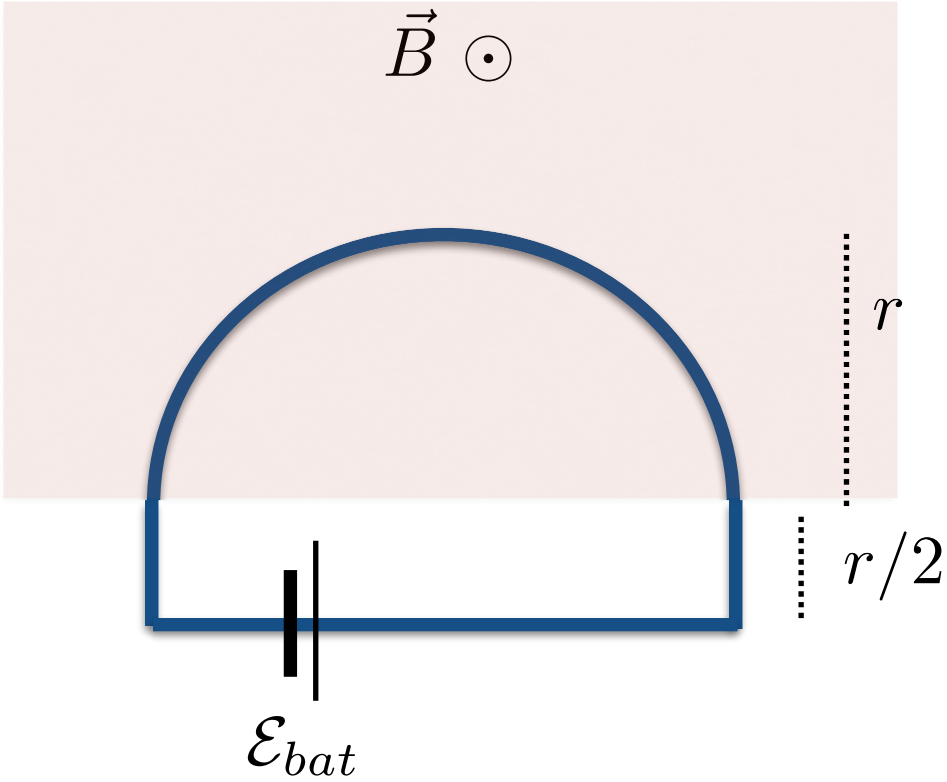
$$\mathcal{E}_{ind} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = A\frac{dB}{dt}$$

- Μαγνητική ροή διέρχεται μόνο απο το ημικύκλιο. Αντικαθιστώντας το εμβαδό ημικυκλίου στην άνωθεν σχέση έχουμε:

$$\mathcal{E}_{ind} = A\frac{dB}{dt} = \left(\frac{1}{2}\pi r^2\right)\frac{d}{dt}\left(4.0t^2 + 2.0t + 3.0\right) = \frac{\pi r^2}{2}(8.0t + 2.0)$$

- Την χρονική στιγμή t=10 s,

$$\mathcal{E}_{ind} = \frac{\pi(0.20m)^2}{2}[8.0(10) + 2.0] \simeq 5.2V$$



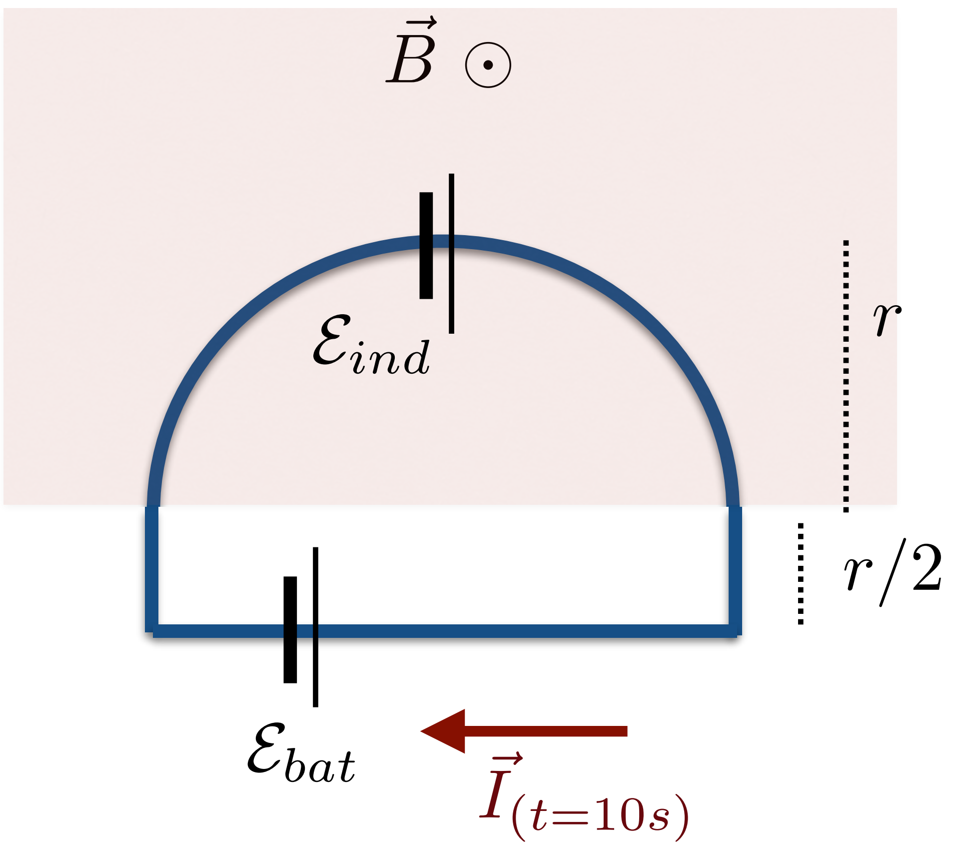
- Επειδή το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο (που οφείλεται στο επαγόμενο ρεύμα) πρέπει να **αντιτίθεται** στην αύξηση της μαγνητικής ροής πρέπει αναγκαστικά να έχει κατεύθυνση προς το εσωτερικό της σελίδας. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του δεξιού χερίου βρίσκουμε οτι το ρεύμα έχει την φορά των δεικτών του ρολογιού και επομένως το ίδιο ισχύει και για την επαγόμενη ΗΕΔ $\mathcal{E}_{ind}$.

(β)

- Το ρεύμα την χρονική στιγμή t=10 s είναι:

$$I_{(t=10s)} = \frac{\mathcal{E}_{ind} - \mathcal{E}_{bat}}{R} = \frac{5.152V - 2.0V}{2.0\Omega} \simeq 1.6A$$

Με φορά όπως στο σχήμα.



Άσκηση 5:

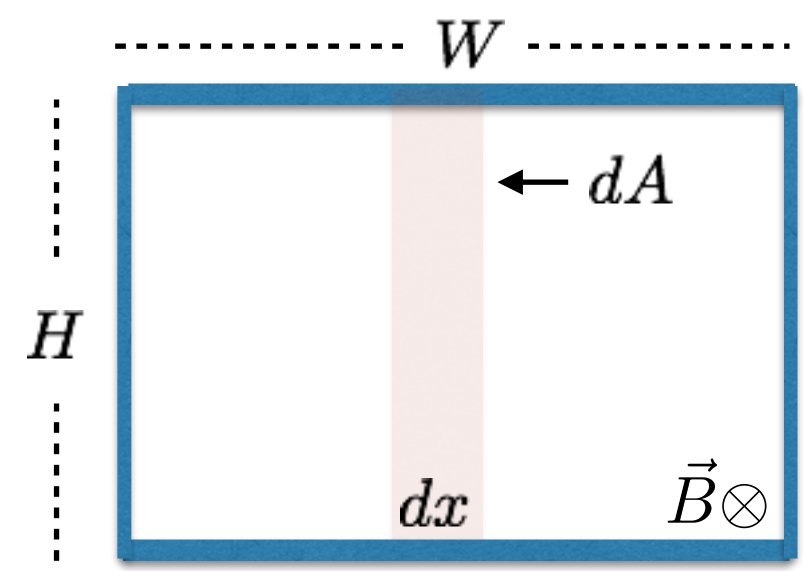
Ορθογώνιο συρμάτινος βρόχος βρίσκεται εντός μή ομογενούς και μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$. Το μετρό του πεδίου δίνεται απο την σχέση $B = 4t^2x^2\ [T, m, s]$. Οι διαστάσεις του βρόχου είναι W=3,0m και H=2,0m. Υπολογείστε το μέτρο και την κατεύθυνση της επαγώμενης ΗΕΔ $\mathcal{E}$ κατά μήκος του βρόχου τη στιγμή t=0,10s.

- Θεωρούμε το στοιχειώδες εμβαδό dA με ύψος H και πλάτος dx. Η ροή διαμέσου του βρόχου την χρονική στιγμή t είναι:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B dA = \int \left(4t^2x'^2\right)\left(H dx'\right) = 4t^2 H \int_{x=0}^{x=3,0} x'^2 dx = 72t^2 \quad [weber]$$

- Για να βρούμε το μέτρο της επαγώμενης ΗΕΔ χρησιμοποιούμε τον νόμο του Faraday:

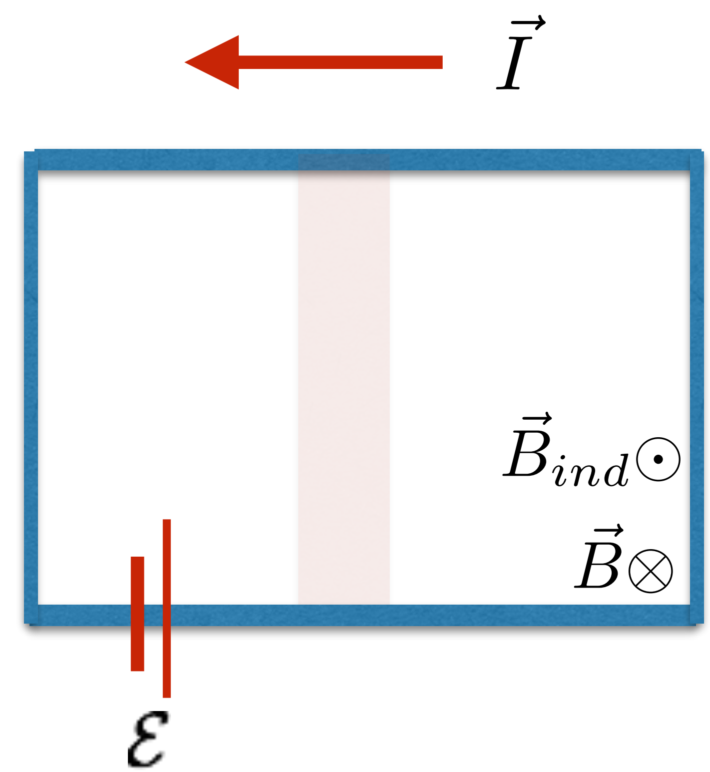
$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d\left(72t^2\right)}{dt} = 144t \quad [V/s]$$



- Την χρονική στιγμή t=0,10s:

$$\mathcal{E} = \left(144V/s\right)\left(0,10s\right) = 14V$$

- Η μαγνητική ροή διαμέσου του βρόχου είναι αυξανόμενη πρός το εσωτερικό της σελίδας. Σύμφωνα με τον νόμο του Lenz το μαγντηικό πεδίο B_{ind} του επαγόμενου ρεύματος αντιτίθεται σε αυτή την αύξηση οπότε κατεύθυνεται προς το εξωτερικό της σελίδας. Επομένως σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού το επαγώμενο ρεύμα πρέπει να έχει την αντίθετη φορά απο αυτή των δεικτών του ρολογιού. και συνεπώς το ίδιο ισχύει και για την ΗΕΔ $\mathcal{E}$.



Άσκηση 6:

Μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο διαρρέει την ροζ κυκλική περιοχή ακτινάς R=8.5cm. Το μαγνητικού πεδίου μεταβάλλεται χρονικά ώς dB/dt=0,13 [T/s] .

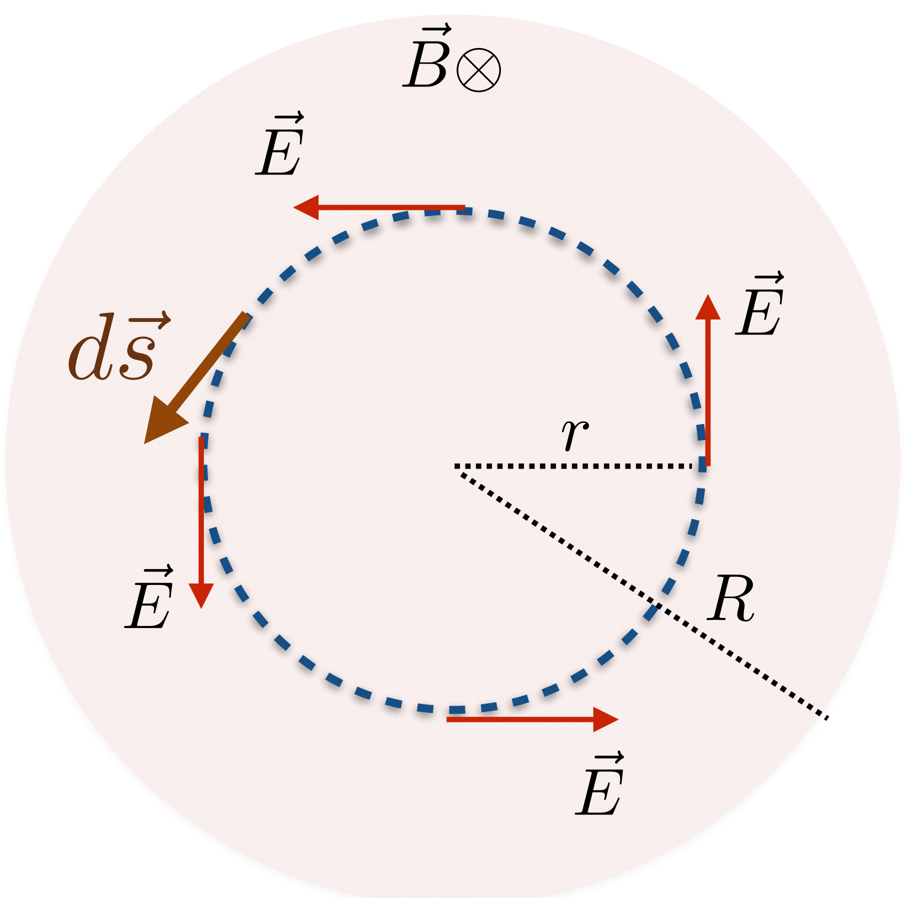
(α) Υπολογίστε το μέτρο E του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου σε σημεία εντός του μαγνητικού πεδίου, σε ακτίνα r απο το κέντρο του μαγνητικού πεδίου. Να υπολογίσετε την τιμή αυτής της σχέσης για r=5.2cm.

(β) Υπολογίστε το μέτρο E του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου σε σημεία εκτός του μαγνητικού πεδίου, σε ακτίνα r απο το κέντρο του μαγνητικού πεδίου. Να υπολογίσετε την τιμή αυτής της σχέσης για r=12.5cm.

(α)

- Για τον υπολογισμό του μέτρου E του ηλεκτρικού πεδίου θα εφαρμόσουμε τον νόμο του Faraday στην καμπύλη c που φαίνεται στο σχήμα:

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$



- Χρησιμοποιούμε κυκλική διαδρομή ολοκλήρωσης με ακτίνα $r \leq R$. Λόγω συμμετρίας το ηλεκτρικό πεδίο Ε έχει ίδια τιμή σε όλα τα σημεία κατά μήκος τη κυκλικής διαδρομής. Για το αριστερό μέλος του νόμου του Faraday ισχύει:

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_c E ds = E \int_c ds = E(2\pi r)$$

- Για το δεξί μέλος του νόμου του Faraday ισχύει:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B dA = B \int dA = BA = B(\pi r^2)$$

- Συνδιάζοντας τα αποτελέσματα μας και εξαλείφοντας το αρνητικό πρόσημο στον νόμο του Faraday έχουμε:

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{d\Phi_B}{dt} \;\rightarrow E(2\pi r) = \frac{dB}{dt}(\pi r^2) \;\rightarrow\; E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

- Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$E = \frac{\left(5.2 \times 10^{-2} m\right)}{2}\left(0.13 T/s\right) = 3,4 mV/m$$

(β)

- Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία αλλά για δρόμο ολοκλήρωσης ακτίνας $r \geq R$. Έχουμε:

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_c E ds = E \int_c ds = E(2\pi r)$$

και

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B dA = B \int dA = BA = B(\pi R^2)$$

- Συνδιάζοντας τα αποτελέσματα μας και εξαλείφοντας το αρνητικό πρόσημο στον νόμο του Faraday έχουμε:

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{d\Phi_B}{dt} \rightarrow E(2\pi r) = \frac{dB}{dt}(\pi R^2) \rightarrow E = \frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$$

- Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$E = \frac{\left(8.5 \times 10^{-2} m\right)^2}{\left(2\right)\left(12.5 \times 10^{-2} m\right)}\left(0.13 T/s\right) = 3,8 mV/m$$

Άσκηση 7:

Δίνεται ηλεκτρικό πεδίο, που δεν εξαρτάται απο τη συντεταγμένη z, της μορφής:

E=0 , γιά $r_\perp = \sqrt{x^2+y^2} < R$

Και

$$\vec{E} = A\frac{x\hat{x}+y\hat{y}}{x^2+y^2} = A\frac{\vec{r}_\perp}{r_\perp^2} = A\frac{\hat{r}_\perp}{r_\perp}$$ **, για** $r_\perp = \sqrt{x^2+y^2} \geq R$

Όπου A θετική σταθερά, και $r_\perp = x\hat{x}+y\hat{y}$ **είναι το διάνυσμα από το σημείο (0,0,z) στο σημείο (x,y,z) (και που είναι, επομένως, κάθετο στον άξονα των z με μήκος** $r_\perp = \sqrt{x^2+y^2}$ **)**

(α) Δείξετε οτι το πεδίο $\vec{E}$ **είναι ηλεκτροστατικό.**

(β) Δείξετε οτι το δυναμικό ειναι επίσης ανεξάρτητο του z.

(γ) Υπολογίστε το δυναμικό παντού στο χώρο, ώς προς

το δυναμικό αναφοράς $V(0,0,0) = V_0$**.**

(α)

- Στην ηλεκτροστατική το ηλεκτρικό πεδίο είναι αστρόβιλο. Για να το δείξουμε αυτο αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Ισχύει:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A\, x/r_\perp^2 & A\, y/r_\perp^2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{x}0 - \hat{y}0 + \hat{z}A\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r_\perp^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r_\perp^2}\right)\right] \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τις μερικές παραγώγους στην (1):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r_\perp^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = y(-1)\left(x^2+y^2\right)^{-2}2x = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Ομοίως:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r_\perp^2}\right) = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Άρα απο η (1) συνεπάγεται: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, άρα το $\vec{E}$: ηλεκτροστατικό.

(β)

- Για $r_\perp < R$, $\vec{E}_z = 0$ αλλά $\vec{E}_z = \frac{\partial V}{\partial z} \to \frac{\partial V}{\partial z} = 0$. Άρα V: ανεξάρτητο του z.

- Για $r_\perp > R$, $V = \int \vec{E} \cdot d\vec{r}_\perp$. Εφόσον δεν υπάρχει συνιστώσα του Ηλεκτρικού πεδίου στον z άξονα, το δυναμικό θα ειναι ανεξάρτητο του z.

(γ)

- Ως διαδρομή ολοκλήρωσης επιλέγουμε να ξεκινήσουμε απο το σημείο (x,y,z) στο οποίο θα υπολογιστεί το V και θα ακολουθήσουμε διαδρομή κατα μήκος του $r_\perp$.

Για $0 \leq r_\perp \leq R$:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}_\perp \rightarrow \int_{V_O}^{V_{(r_\perp)}} dV = -\int_{r=0}^{r_\perp} \vec{E} \cdot d\vec{r}_\perp \rightarrow$$

$$\rightarrow V_{(r_\perp)} - V_0 = -\int_{r=0}^{r_\perp} \vec{0} \cdot d\vec{r}_\perp \rightarrow$$

$$\rightarrow V_{(r_\perp)} - V_0 = -0 \rightarrow \boxed{V_{(r_\perp)} = V_0}$$

Για $r_\perp \geq R$:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}_\perp \rightarrow \int_{V_O}^{V_{(r_\perp)}} dV = -\int_{r=0}^{r_\perp} \vec{E} \cdot d\vec{r}_\perp \rightarrow$$

$$\rightarrow V_{(r_\perp)} - V_0 = -\int_{r=0}^{R} \vec{E} \cdot d\vec{r}_\perp - \int_{R}^{r_\perp} \vec{E} \cdot d\vec{r}_\perp \rightarrow$$

$$\rightarrow V_{(r_\perp)} - V_0 = -0 - \int_{R}^{r_\perp} A \frac{\hat{r}_\perp}{r_\perp} \cdot d\vec{r}_\perp \rightarrow$$

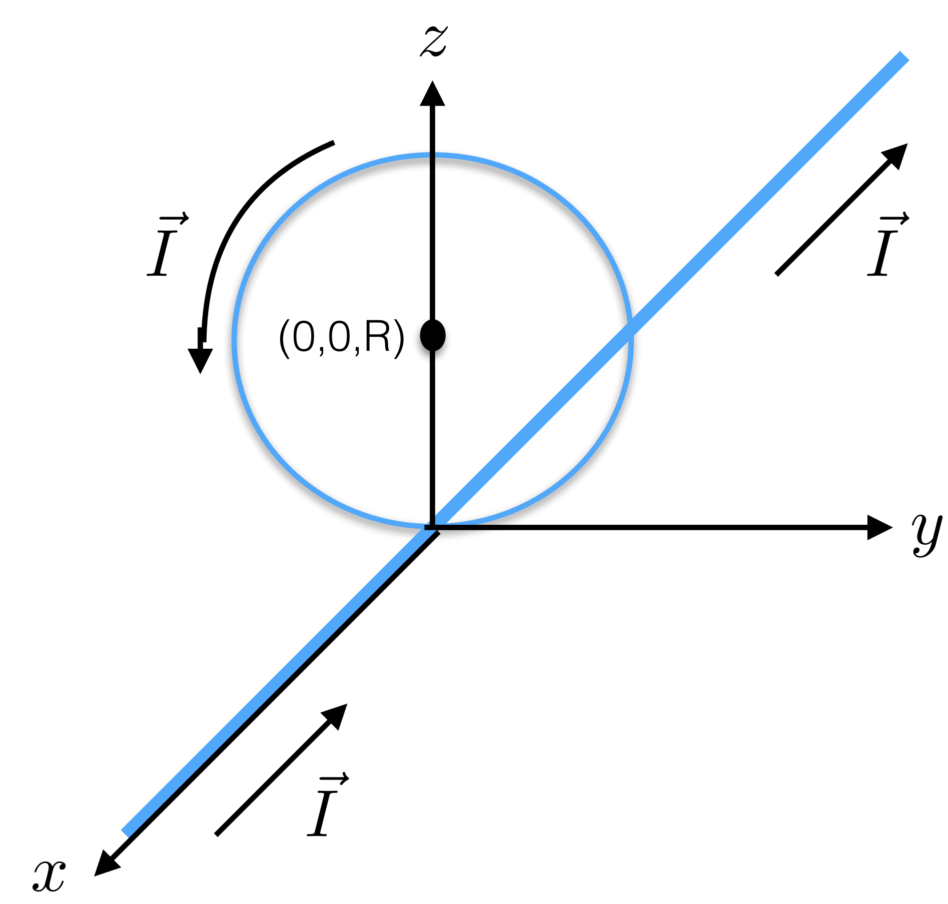
$$\rightarrow V_{(r_\perp)} = V_0 - \int_{R}^{r_\perp} A \frac{1}{r_\perp} dr_\perp \;\rightarrow\; V_{(r_\perp)} = \boxed{V_0 - A \ln(\frac{r_\perp}{R})}$$

Άσκηση 8:

(α) Να υπολογίσετε, με τη βοήθεια του νόμου του Ampere, το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση *r* από ευθύγραμμο αγωγό άπειρου μήκους, που διαρρέεται από ρεύμα *I*.

(β) Να υπολογίσετε, με τη βοήθεια του νόμου των Biot-Savart, το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο κυκλικού αγωγού, ακτίνας *R*, που διαρρέεται από ρεύμα *I*.

(γ) Θεωρήστε τρισορθογώνιο σύστημα αναφοράς O*xyz*. Κατά μήκος του άξονα των *x* εκτείνεται ευθύγραμμος αγωγός άπειρου μήκους ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα έντασης *I*, κατά την αρνητική φορά των *x*. Στο σημείο O = (0, 0, 0), ο αγωγός έχει σχήμα κύκλου ακτίνας *R* με κέντρο το σημείο (0, 0, *R*), και μετά συνεχίζει την ευθύγραμμη πορεία του. Το κυκλικό τμήμα της τροχιάς βρίσκεται στο επίπεδο (O*yz*) και διαρρέεται από ρεύμα στη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογισθεί η διανυσματική τιμή της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο σημείο (0, 0, *R*).



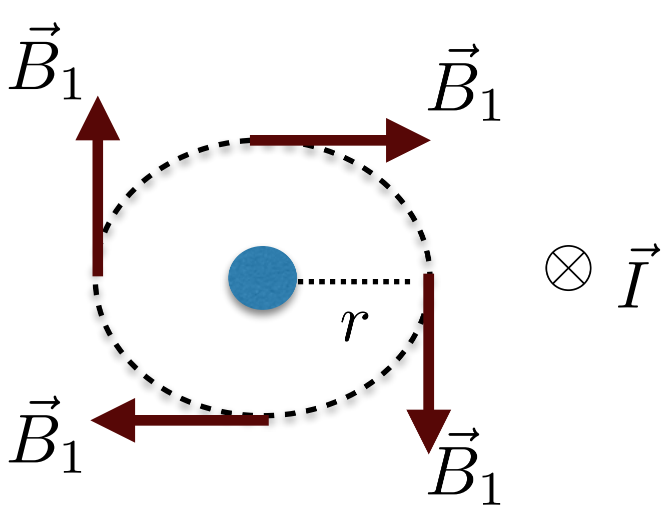
(α)

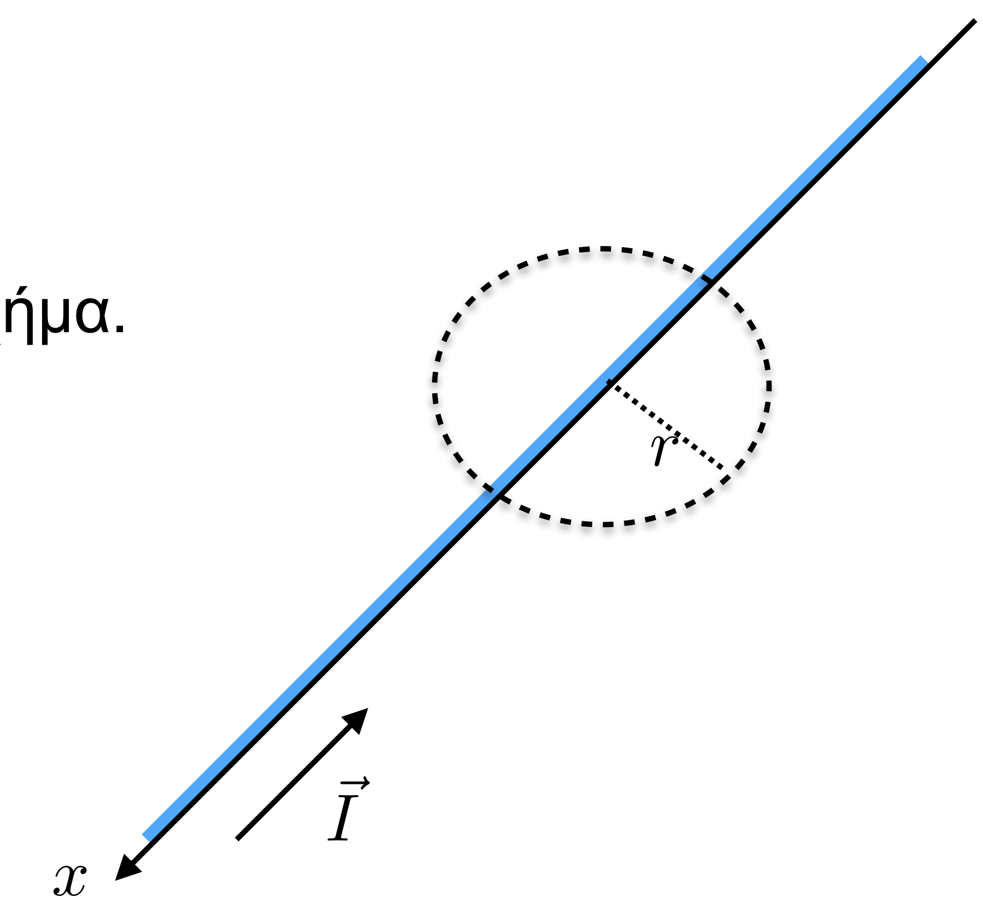
- Για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο στο **εξωτερικό του αγωγού** και σε απόσταση r απο το κέντρο, θα εφαρμόσουμε τον νόμο του Ampere. Επιλέγουμε ως δρόμο ολοκλήρωσης κύκλο ακτίνας r (μαύρη διακεκομμένη γραμμή) ομόκεντρο με τον αγωγό.

- Σύμφωνα με τον νόμο του Ampere:

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \rightarrow \oint B_1 dl = \mu_0 I \rightarrow B_1 2\pi r = \mu_0 I \rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Οι κατευθύνσεις των διανυσμάτων φαίνονται στο σχήμα.





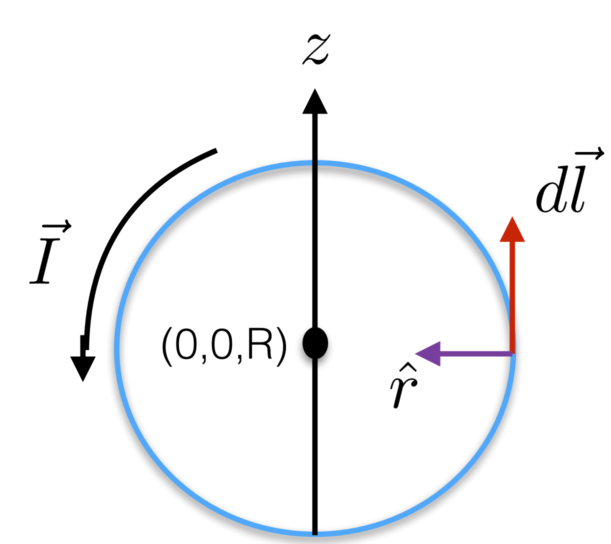
(β)

- Το μαγνητικό πεδίο στο σημείο (0,0,R) λόγω του ρεύματος που διαρρέει τον κυκλικό αγωγό θα υπολογιστεί σύμφωνα με τον νομο Biot - Savart. Υποθέτω απειροστό τμήμα του βρόχου μήκους dl το οποίο δημιουργεί μαγνητικό πεδιο $d\vec{B}_2$ στο σημειο (0,0,R). Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου είναι:

$$dB_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{|d\vec{l} \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{(Rd\phi)}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\phi}{R}$$

- Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε ότι:

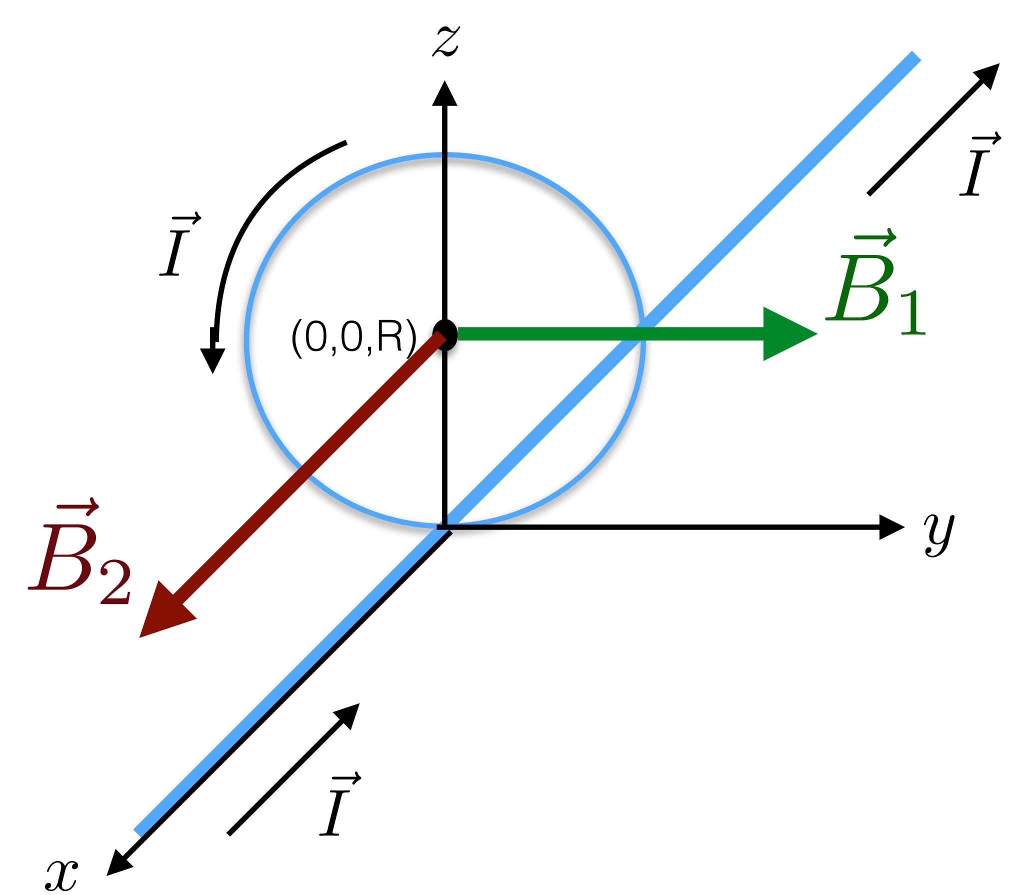
$$B_2 = \int dB_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\phi}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 I}{2R}$$



(γ)

- Το συνολικό μαγνητικό πεδίο στο σημείο (0,0,R) υπολογίζεται ώς επαλληλία των μαγνητικών πεδίων $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{y} + \frac{\mu_0 I}{2R}\hat{x} \rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(\pi\hat{x} + \hat{y})}$$



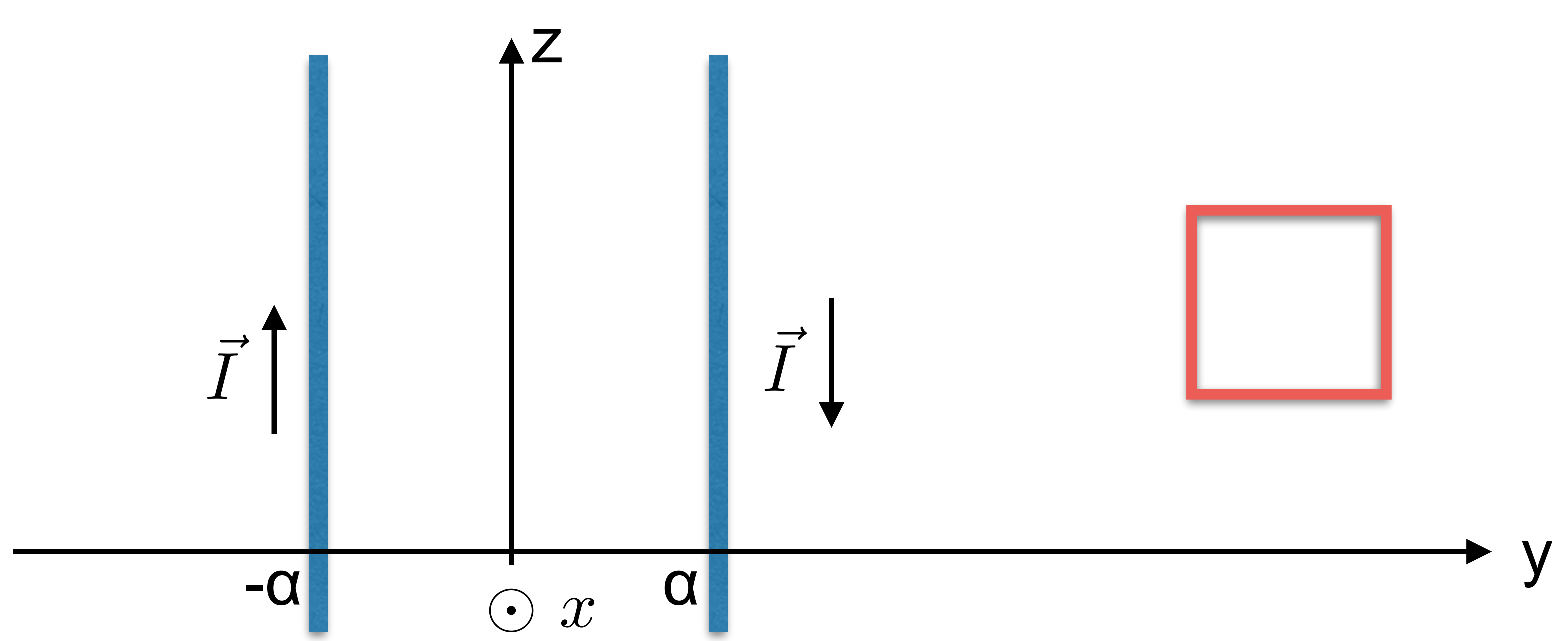
Άσκηση 9:

Δύο λεπτοί, άπειροι, ευθύγραμμοι αγωγοί, βρίσκονται στο επίπεδο *yz*, είναι παράλληλοι προς τον άξονα των *z*, και απέχουν αποστάσεις ± α ,αντίστοιχα, από αυτόν. Ο αγωγός που βρίσκεται στη θέση y=-α διαρρέεται από σταθερό ρεύμα *I* στην κατεύθυνση $+\hat{z}$, ενώ ο αγωγός που βρίσκεται στη θέση y=α διαρρέεται από σταθερό ρεύμα *I* στην κατεύθυνση $-\hat{z}$.

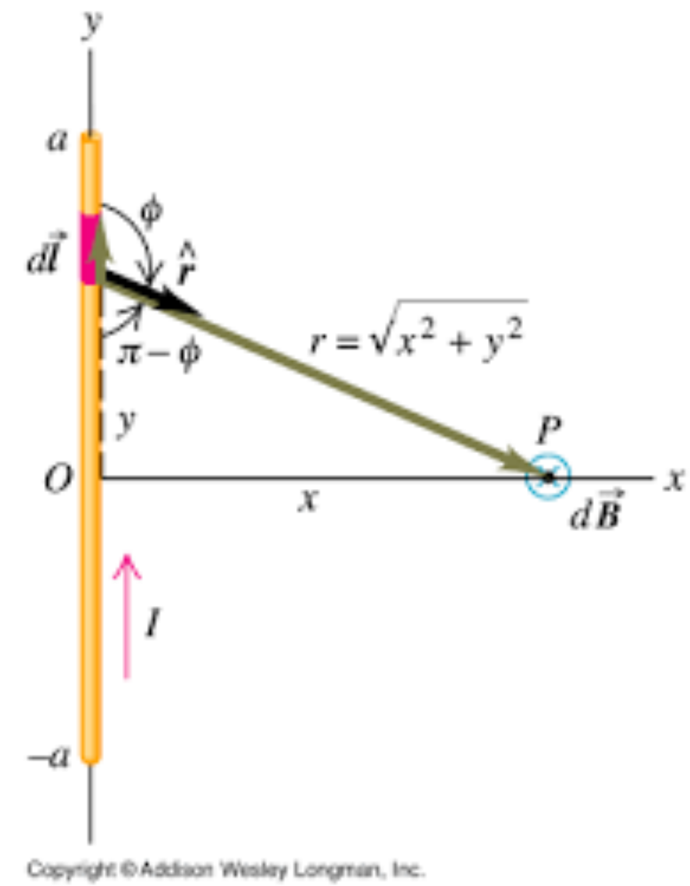
(α) Δείξετε ότι, για μεγάλες τιμές του *y*, για τις οποίες το α^2 είναι αμελητέο σε σύγκριση με το y^2, το μαγνητικό πεδίο σε σημεία πάνω στο επίπεδο *yz* δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \alpha I}{\pi y^2}\hat{x}$$

(β) Αγώγιμος βρόχος σε σχήμα τετραγώνου πλευράς *α*, βρίσκεται στο επίπεδο *yz,* με τις πλευρές του παράλληλες προς τους άξονες των *y* και *z,* αντίστοιχα. Ο βρόχος κινείται με σταθερή ταχύτητα $u\hat{y}$, έτσι ώστε, τη χρονική στιγμή *t*, η πλευρά του που βρίσκεται πιο κοντά στον άξονα των *z* να απέχει απόσταση ut από αυτόν. Υποθέστε ότι ο βρόχος βρίσκεται πολύ μακριά από τους αγωγούς (δηλ. $ut \gg \alpha$), ώστε να ισχύει η προσεγγιστική μορφή του πεδίου που βρέθηκε στο (α), και βρείτε την ΗΕΔ που επάγεται στο βρόχο.



Αρχικά θα υπολογίσουμε το μαγνητικο πεδίο που δημιουργείται σε σημειο της μεσοκαθέτου ενός αγωγού μήκους 2α ο οποίος διαρεέται απο ρεύμα έντασης Ι.



- Ο απειροστός αγωγός δημιουργεί μαγνητικο πεδίο στο σημείο P μέτρου:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I|d\vec{l} \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dy \sin\phi}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{x dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

- Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\alpha}{x\sqrt{x^2 + \alpha^2}}$$

$$d\vec{l} = d\vec{y}$$

$$\sin\phi = \sin(\pi - \phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- Στην περίπτωση οπου ο αγωγός έχει άπειρο μήκος $2\alpha \to \infty$ τότε $\sqrt{x^2 + \alpha^2} \to \alpha$ και η άνωθεν σχέση απλουστεύεται:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

- Η φορά του μαγνητικού πεδίου βρίσκεται σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού

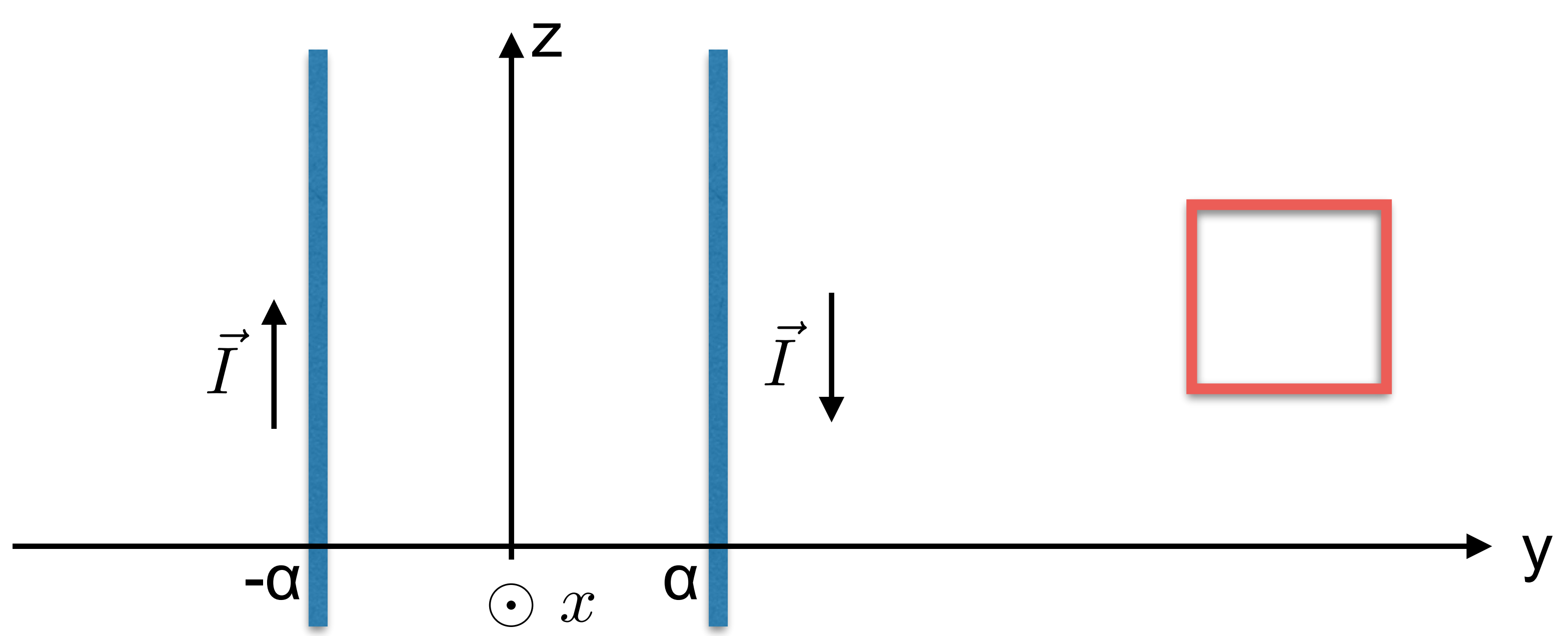
(α)

- Το μαγνητικό πεδίο δεν εξαρτάται απο το z. Σε τυχαίο z το μαγνητικό πεδιο που δημιουργείται απο τους δυο αγωγούς στις θέσεις -α και +α είναι:

$$\vec{B}(y) = \vec{B}_{(-\alpha)}(y) + \vec{B}_{(\alpha)}(y) = (-\hat{x})\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi(y+\alpha)}\right) + (\hat{x})\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi(y-\alpha)}\right) =$$

$$= \hat{x}\left(\frac{\mu_o I}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{y-\alpha} - \frac{1}{y+\alpha}\right) = \hat{x}\left(\frac{\mu_o I}{2\pi}\right)\frac{2\alpha}{y^2-\alpha^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{B}(y) \simeq \hat{x}\frac{\mu_0 I \alpha}{\pi y^2}$$



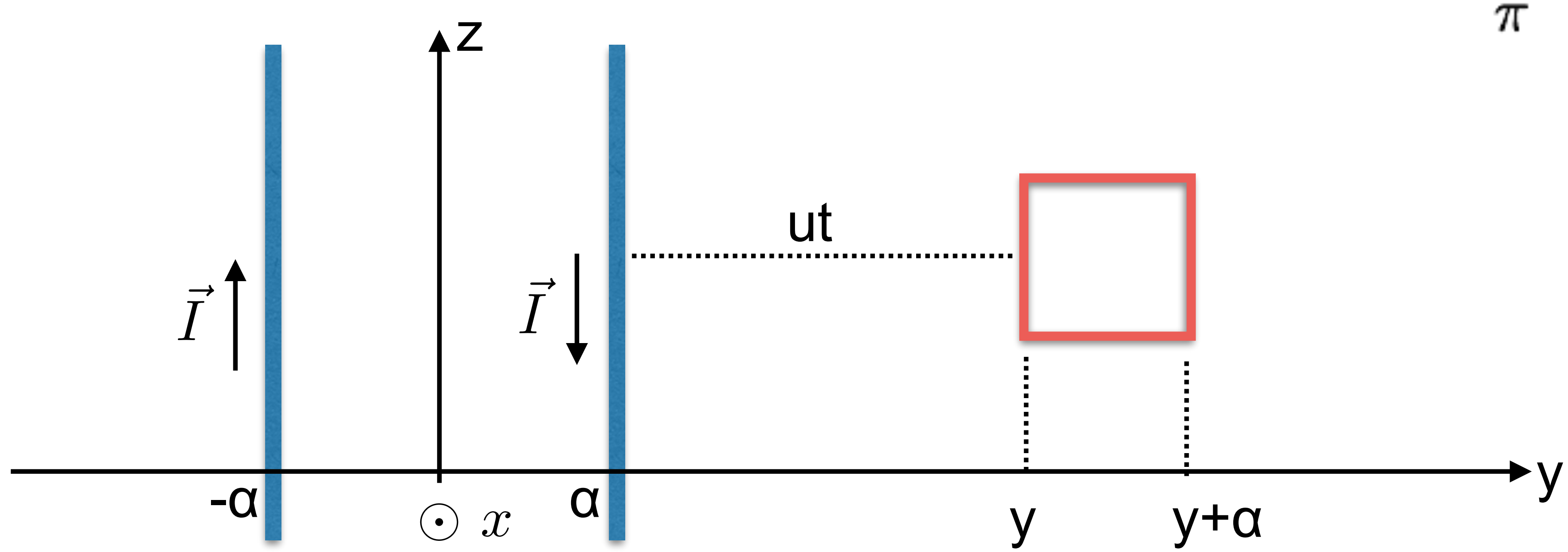
(β)

- Για τον υπολογισμό της ΗΕΔ από επαγωγή στο πλαίσιο πλευράς α , λαμβάνουμε υπόψη τη μεταβολή του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πλαισίου (συναρτήση του y, σε κάποιο σταθερό χρόνο).

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int B \cdot dA\Big) = -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int B dA\Big) = -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_y^{y+\alpha} \big(\frac{\mu_0 I \alpha}{\pi y^2}\big)(\alpha dy)\Big) =$$

$$= -\frac{\mu_0 I \alpha^2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_y^{y+\alpha} \big(\frac{dy}{y^2}\big)\Big) = -\frac{\mu_0 I \alpha^2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\Big(-\frac{1}{y+\alpha} - \frac{1}{y}\Big) = \frac{\mu_0 I \alpha^2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\alpha}{y^2+\alpha y}\Big) \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathcal{E} = \frac{\mu_0 I \alpha^2}{\pi}\frac{(2y+\alpha)\dot{y}}{y^2(y+\alpha^2)}$$



- εφόσον $y \gg \alpha$ μπορούμε να απαλείψουμε το α οπότε προκύπτει:

$$|\mathcal{E}| \simeq \frac{\mu_0 I \alpha^3}{\pi} \frac{2y\dot{y}}{y^4} = 2\frac{\mu_0 I \alpha^3}{\pi} \frac{(ut)u}{(ut)^4} = 2\frac{\mu_0 I \alpha^3}{\pi} \frac{1}{u^2 t^3}$$

- Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το μαγνητικό πεδίο ίδιο σε όλη την έκταση του πλαισίου σε κάθε χρόνο t:

$$|\mathcal{E}| = |\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}| = |\frac{\partial}{\partial t}\Big(\big(\frac{\mu_0 I \alpha}{\pi y^2}\big)\alpha^2\Big)| = |\frac{\mu_0 I \alpha^3}{\pi} \frac{\partial}{\partial t}\Big(y^{-2}\Big)| = 2\frac{\mu_0 I \alpha^3}{\pi y^3}\dot{y} =$$

$$= 2\frac{\mu_0 I \alpha^3}{\pi} \frac{1}{u^2 t^3}$$

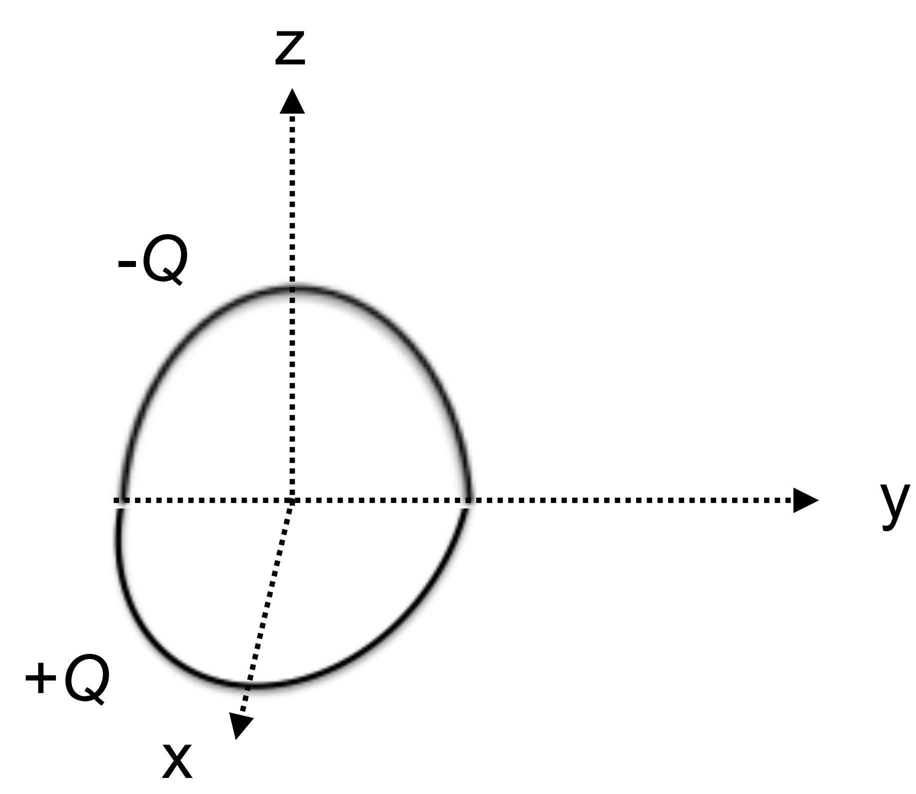
Άσκηση 10:

(α) Φορτίο *Q* κατανέμεται ομοιόμορφα σε ημικύκλιο ακτίνας *R*. Δείξετε ότι:

(i) Το δυναμικό (ως προς το άπειρο) στο κέντρο του ημικυκλίου είναι όσο και το δυναμικό από σημειακό φορτίο *Q* σε απόσταση *R*.

(ii) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο του ημικυκλίου είναι όση και αυτή από σημειακό φορτίο (2*Q*/π) σε απόσταση *R*. Σχολιάστε τη διαφορά ανάμεσα στα ερωτήματα (i) και (ii).

(β) Φορτία + *Q* και – *Q* κατανέμονται ομοιόμορφα σε δύο ημικύκλια ακτίνας *R*, με κοινή διάμετρο στον άξονα (O*y*) και κοινό κέντρο το σημείο O = (0, 0, 0). Το ημικύκλιο με το φορτίο + *Q* βρίσκεται στο επίπεδο (*x*, *y*), προς την πλευρά των θετικών *x*, ενώ το ημικύκλιο με το φορτίο –*Q* βρίσκεται στο επίπεδο (*y*, *z*), προς την πλευρά των θετικών *z* (βλ. σχήμα). Να υπολογιστεί η τιμή του δυναμικού (ως προς το άπειρο) και το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο O = (0, 0, 0).



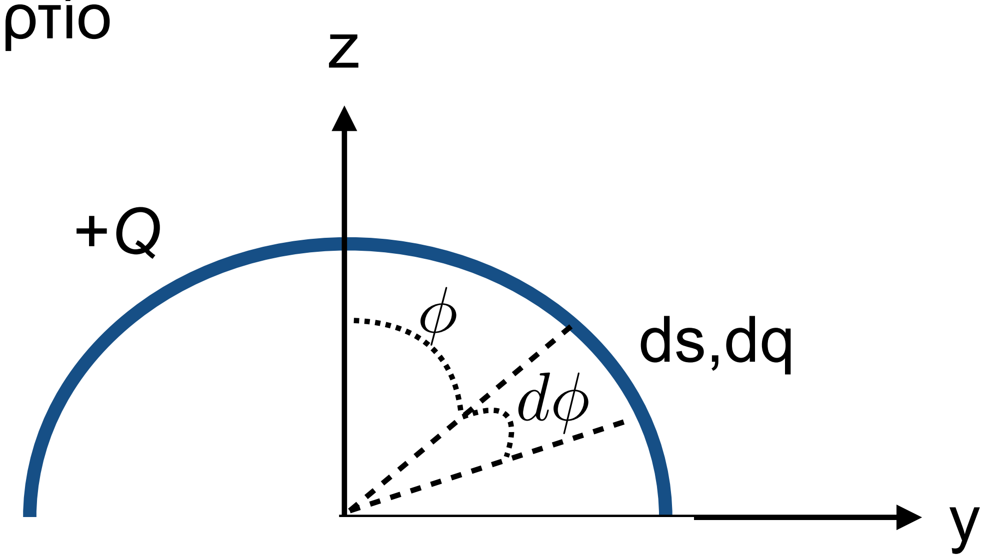
(α)

(i) Για τον υπολογισμό του δυναμικού και του πεδίου στο κέντρο (x = 0, y = 0) του ημικυκλίου υπολογίζουμε τα αντίστοιχα μεγέθη ως άθροισμα συνεισφορών από στοιχειώδη τόξα μήκους ds=$R d\varphi$ μεταξύ των γωνιών φ και φ+dφ ως προς τον άξονα x (βλ. σχήμα). Επομένως:

- Ορίζουμε ως λ την γραμμική πυκνότητα φορτίου. Για ένα στοιχειώδες τμήμα του ημικυκλίου μήκους ds φορτίου dq ισχύει:

$$\lambda \equiv \frac{dq}{ds} = \frac{Q}{\pi R} \rightarrow \ dq = ds\frac{Q}{\pi R} \rightarrow dq = (R d\phi)\frac{Q}{\pi R} \rightarrow \ dq = d\phi\frac{Q}{\pi}$$

- Για τον υπολογισμό του δυναμικού κάθε στοιχειώδες φορτίο dq συνεισφέρει στοιχειώδες δυναμικό dV:



$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{R} = \frac{1}{4\pi^2\epsilon_0}\frac{Q d\phi}{R}$$

- Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$V = \int dV = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{4\pi^2\epsilon_0}\frac{Q d\phi}{R} = \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

(ii) Για τον υπολογισμό της έντασης του ηλετρικού πεδίου, η οποία είναι διανυσματικό μέγεθος, ακολουθούμε παραπλήσια διαδικασία. Κάθε στοιχειώδες φορτίο dq προκαλεί στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}$ στο κέντρο του ημικυκλίου:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi^2\epsilon_0}\frac{Qd\phi}{R^2}$$

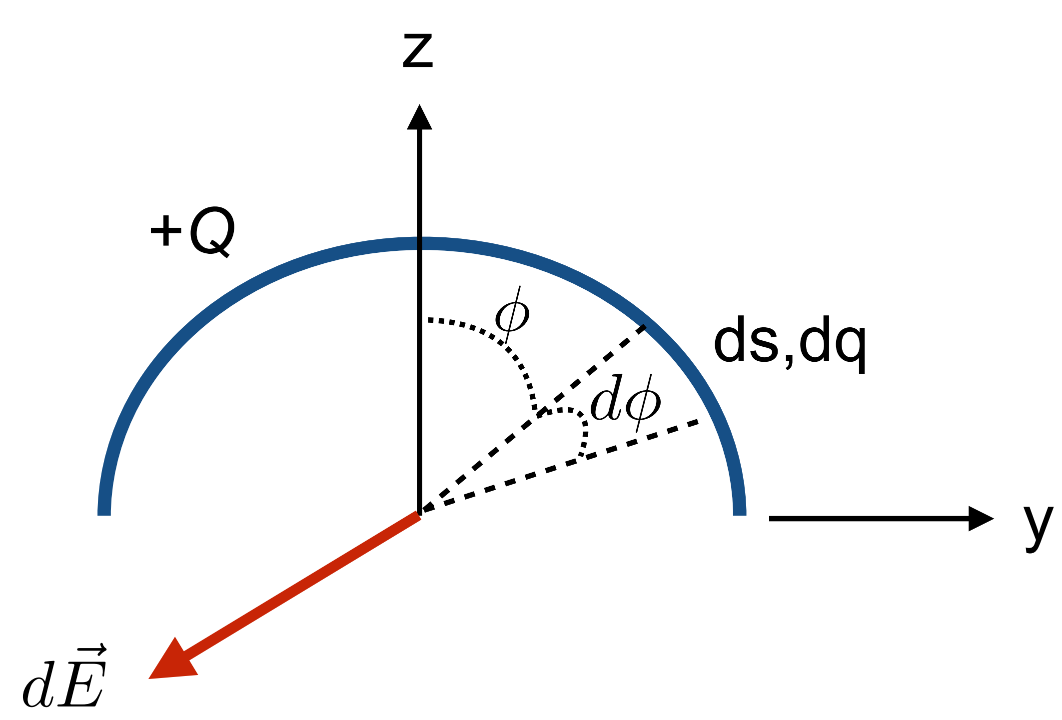
- Λόγω συμμετρίας του ημικυκλίου οι συνιστώσες της έντασης στον y άξονα αλληλο-αναιρούνται. Άρα θα λάβουμε υπόψη μονο τις συνιστώσες στον z άξονα:

$$dE_z = dE\cos\phi = \frac{1}{4\pi^2\epsilon_0}\frac{Qd\phi}{R^2}\cos\phi$$

- Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$E = \int dE_z = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{4\pi^2\epsilon_0}\frac{Qd\phi}{R^2}\cos\phi =$$

$$= \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2}\Big(\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)\Big) = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}$$



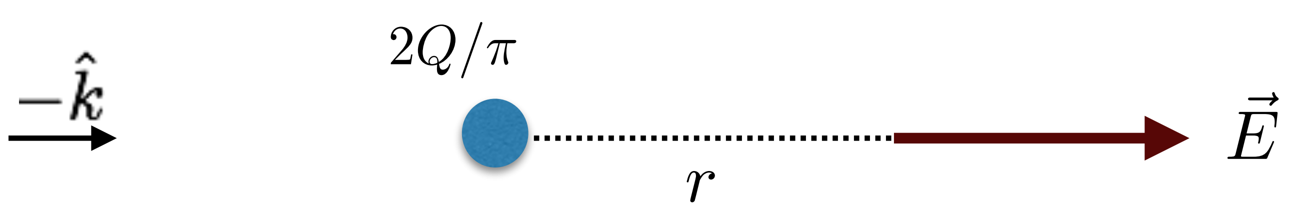
- Τελικά:

$$\vec{E} = -\hat{k}\frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}$$

- Ξαναγράφοντας την σχέση ως:

$$\vec{E} = -\hat{k}\frac{\left(\frac{2Q}{\pi}\right)}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad \text{ή} \quad E = \frac{\left(\frac{2Q}{\pi}\right)}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Δηλαδή όσο και το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται απο σημειακό φορτίο 2Q/π στην ίδια απόσταση R.



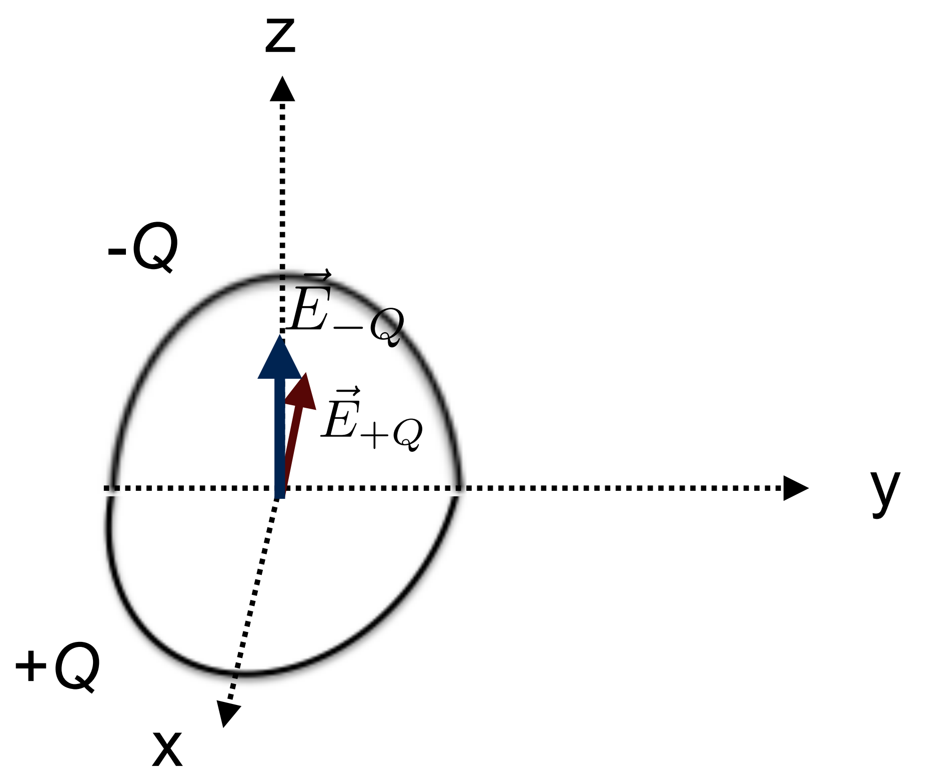
(β)

- Το δυναμικό στο κέντρο των δύο ημικυκλίων θα είναι:

$$V_{tot} = V_{-Q} + V_{+Q} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = 0$$

- Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο των δύο ημικυκλίων θα είναι:

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_{-Q} + \vec{E}_{+Q} = +\hat{k}\frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} - \hat{x}\frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}(\hat{k} - \hat{x})$$



Άσκηση 11:

Το ηλεκτρικό δυναμικό V(x,y,z) σε μια περιοχή του χώρου δίνεται από τη σχέση:

$$V = A\left(x^2 - y^2 + 4xy + \sqrt{5}z^2\right)$$

Όπου A όπου θετική σταθερά.

(α) Βρείτε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου.

(β) Δείξετε ότι η επιφάνεια πάνω στην οποία η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου έχει μέτρο με τιμή ίση με E_0 είναι σφαιρική, και βρείτε την ακτίνα της και τη θέση του κέντρου της.

(γ) Υπολογίστε την πυκνότητα φορτίου ρ(x,y,z) στην οποία οφείλεται το ηλεκτρικό πεδίο.

(δ) Υπολογίστε τη ροή του ηλεκτρικού πεδίου, Φ_E, μέσα από τη σφαιρική επιφάνεια του ερωτήματος (β).

(α)

- Από τη σχέση $\vec{E} = -\nabla V$ βρίσκουμε:

$$\vec{E} = -\left(\hat{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial k}\right) = A\Big(-(2x+4y)\hat{i} - (-2y+4x)\hat{j} - (2\sqrt{5}z)\hat{k}\Big) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{E} = -2A\Big((x+2y)\hat{i} - (y-2x)\hat{j} + (\sqrt{5}z)\hat{k}\Big)}$$

(β)

- Το τετράγωνο του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$|\vec{E}|^2 = 4A^2\Big((x+2y)\hat{i} - (y-2x)\hat{j} + (\sqrt{5}z)\hat{k}\Big)^2 = 20A^2\Big(x^2+y^2+z^2\Big)$$

- Για δεδομένη τιμή E_0 του ηλεκτρικού πεδίου ισχύει:

$$|\vec{E}|^2 = E_0 = 20A^2\Big(x^2+y^2+z^2\Big) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{E_0^2}{20A^2} = x^2+y^2+z^2}$$

που αποτελεί γεωμετρικό τόπο σφαίρας με κέντρο το σημείο (0,0,0) και ακτίνα $R = \dfrac{E_0^2}{20A^2}$

(γ)

- Σύμφωνα με την σχέση $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$ προκύπτει:

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = -2A\epsilon_0 \left(\frac{\partial (x+2y)}{\partial x} + \frac{\partial (-y+2x)}{\partial y} + \frac{\partial (\sqrt{5}z)}{\partial z} \right) =$$

$$= -2A\epsilon_0 \left(1 - 1 + \sqrt{5} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\rho = -2\sqrt{5}\epsilon_0 A}$$

(δ)

- Σύμφωνα με τον νόμο Gauss, η ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα απο μια κλειστή επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R και όγκου V είναι ίση με:

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv = \frac{\rho}{\epsilon_0} V$$

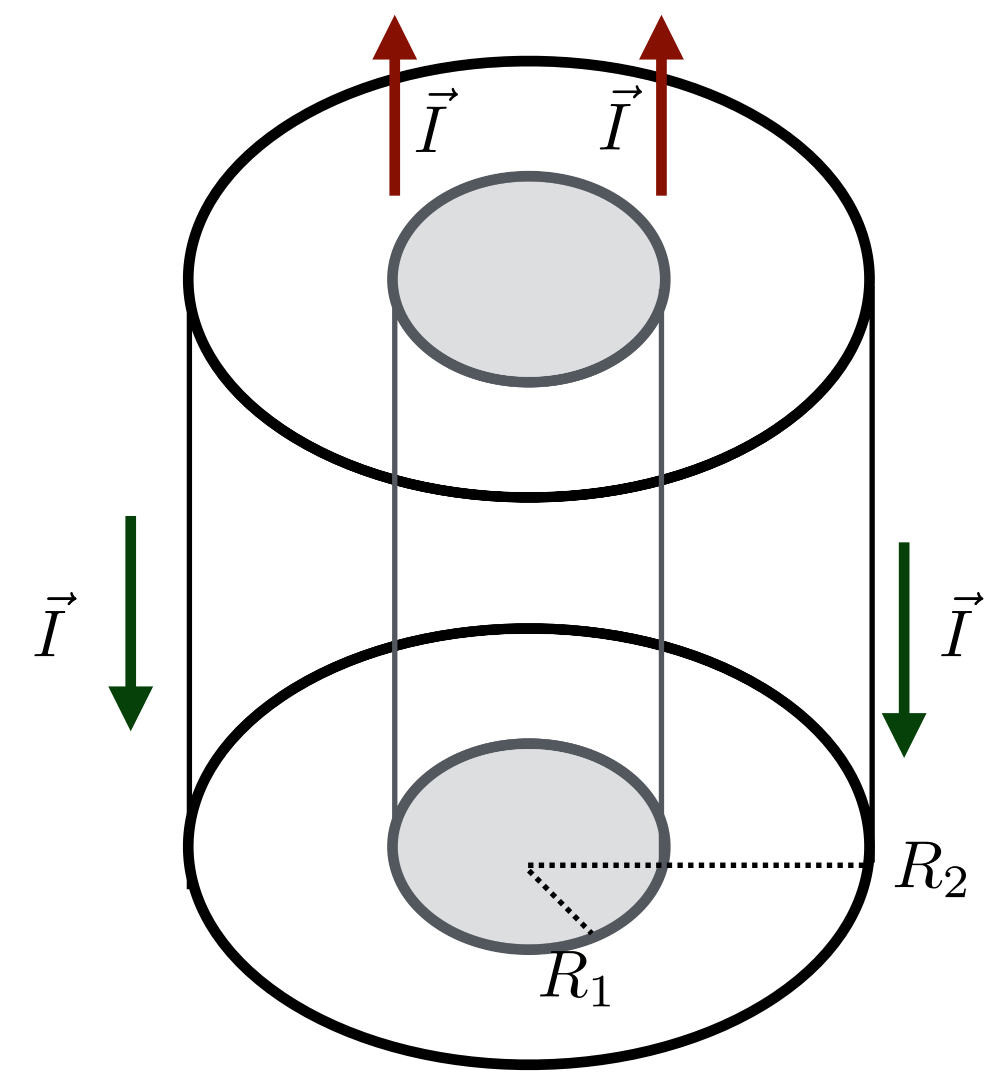
$$= \frac{\Big(-2\sqrt{5}\epsilon_0 A\Big)}{\epsilon_0} \int_V dv = \frac{\Big(-2\sqrt{5}\epsilon_0 A\Big)}{\epsilon_0} \Big(\frac{4}{3}\pi\big(\frac{E_0}{2\sqrt{5}A}\big)^3\Big) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\Phi_E = -\frac{\pi E_0^3}{15A^2}}$$

Άσκηση 12:

Ένα ομοαξονικό καλώδιο αποτελείται από δύο λεπτούς (αμελητέου πάχους) κυλινδρικούς μεταλλικούς ομοαξονικούς σωλήνες άπειρου μήκους με ακτίνες R_1 και R_2 ($R_1 < R_2$). Οι δύο σωλήνες διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I το οποίο κατανέμεται ομοιόμορφα και στους δύο σωλήνες, αλλά έχει αντίθετες κατευθύνσεις στον καθένα (βλ. σχήμα).

(α) Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο σε όλα τα σημεία του χώρου.
(β) Υπολογίστε τη μαγνητική ενέργεια ανά μονάδα μήκους του καλωδίου.
(γ) Υπολογίστε την αυτεπαγωγή του καλωδίου ανά μονάδα μήκους του.



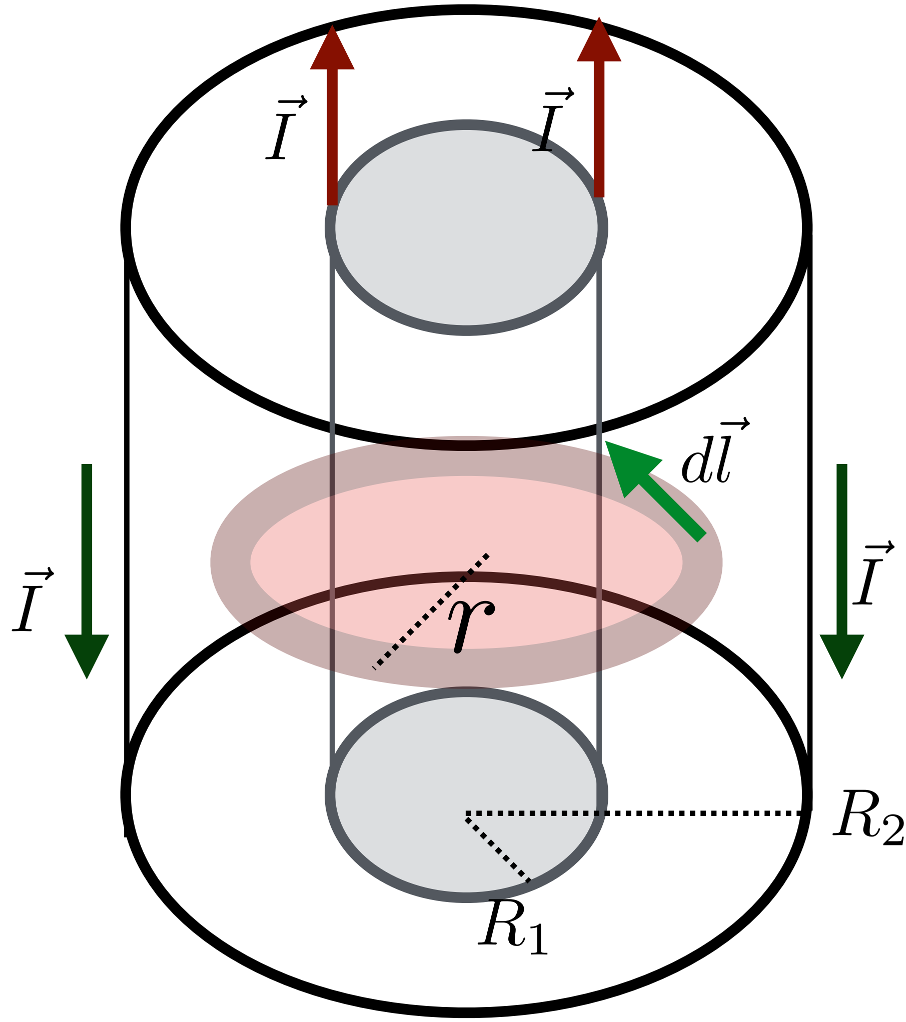
(α)

- Επιλέγουμε ώς δρόμο ολοκλήρωσης κύκλο ακτίνας r (κόκκινη γραμμή). Ισχύει

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int B dl = B \int dl = B(2\pi r)$$

- Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$



Για $r < R_1$

$$B_{(r)}(2\pi r) = \mu_0 I_{enc} \;\rightarrow\; B_{(r)}(2\pi r) = \mu_0 0 \;\rightarrow\; \boxed{B_{(r)} = 0}$$

Για $R_1 < r < R_2$

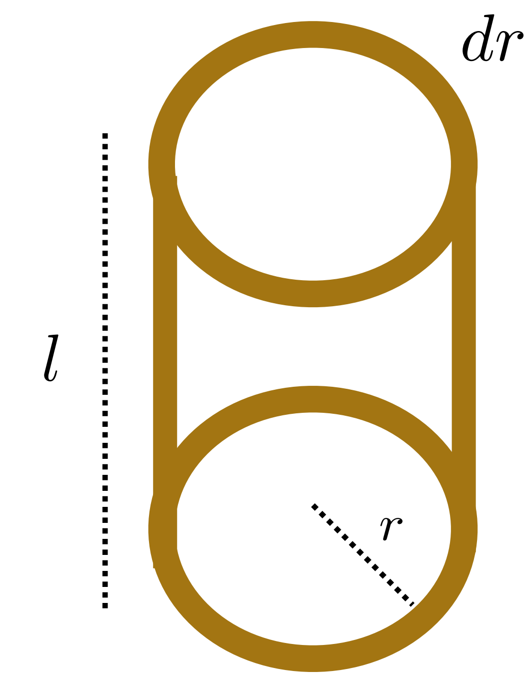
$$B_{(r)}(2\pi r) = \mu_0 I_{enc} \;\rightarrow\; B_{(r)}(2\pi r) = \mu_0 I \;\rightarrow\; \boxed{B_{(r)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

Για $r > R_2$

$$B_{(r)}(2\pi r) = \mu_0 I_{enc} \;\rightarrow\; B_{(r)}(2\pi r) = \mu_0(+I - I) \;\rightarrow\; B_{(r)}(2\pi r) = \mu_0 0 \;\rightarrow\; \boxed{B_{(r)} = 0}$$

(β)

- Μαγνητικό πεδίο υπάρχει μόνο ανάμεσα στους δύο κυλίνδρους.



- Η μαγνητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου είναι:

$$u_B = \frac{U_B}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Όπου U_B η μαγνητική ενέργεια και V ο όγκος

- Έστω κυλινδρικός φλοιός μήκους l ακτίνας r με ($R_1 < r < R_2$) και παχους dr. Ο όγκος του φλοιού ειναι: $dV = 2\pi r dr l$. Η μαγνητική ενέργεια που περικλείει είναι:

$$\frac{dU_b}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0} \rightarrow dU_B = \frac{B^2}{2\mu_0}dV \rightarrow dU_B = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2\left(2\pi r dr l\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow dU_B = \frac{\mu_0}{4\pi} l I^2 \frac{dr}{r}$$

- Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$U_B = \int dU_B = \frac{\mu_0}{4\pi} l I^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} l I^2 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

- Άρα η μαγνητική ενέργεια ανα μονάδα μήκους U_B/l είναι:

$$\boxed{\frac{U_B}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

(γ)

- Έστω καλώδιο μήκους l με συντελεστή αυτεπαγωγής L. Η ενέργεια που ειναι αποθηκευμένη στο καλώδιο είναι:

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε την αυτεπαγωγή ανα μονάδα μήκους L/l :

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2 \rightarrow \qquad \frac{\mu_0}{4\pi} l I^2 \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2} L I^2 \quad \rightarrow \quad \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$