ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Φυσική-Ηλεκτρομαγνητισμός

Διδάσκων Αναπλ. Καθ. Δ. Γ. Αγγελάκης

Ενότητα II: Ηλεκτρικό Πεδίο

Επιμέλεια σημειώσεων: Ν. Σχετάκης

Σκοποί Ενότητας

- Εισαγωγή στην έννοια του ηλεκτρικού πεδίου
- Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης πηγής
- Ορισμός έντασης ηλεκτρικού πεδίου και μονάδες.
- Υπολογισμός έντασης ηλεκτρικού πεδίου σε απλές συμμετρικές γεωμετρίες: Σημείο, γραμμή, επιφάνεια.

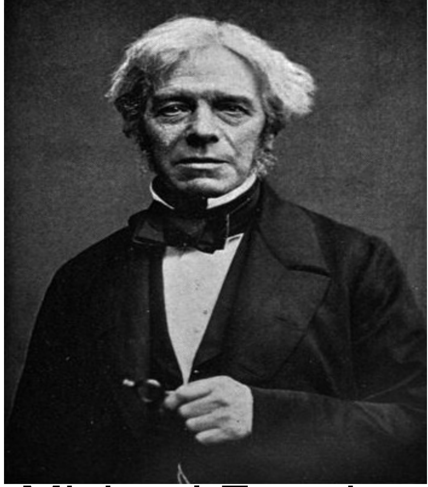
Λέξεις κλειδιά

- Ηλεκτρικό πεδίο, δίπολο, ηλεκτρική κατανομή φορτίου, ηλεκτρικά φορτισμένος δακτύλιος, ηλεκτρικά φορτισμένος δίσκος.

Περιεχόμενα ενότητας

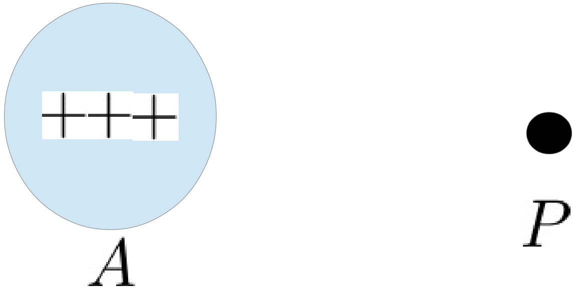
- Ηλεκτρικό πεδίο
- Ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου
- Ηλεκτρικό πεδίο ενός διπόλου
- Ηλεκτρικό πεδίο συνεχούς κατανομής φορτίου
- Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου δακτυλίου
- Ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου
- Βιβλιογραφία

Ηλεκτρικό πεδίο



Michael Faraday
(1791 - 1867)

- Ο χώρος που περιβάλλει ένα ηλεκτρικό φορτίο αποκτά μια ιδιότητα που καλείται ηλεκτρικό πεδίο.
- Το ηλεκτρικό πεδίο ασκεί μια δύναμη επάνω σε άλλα ηλεκτρικά φορτισμένα αντικείμενα.
- Την έννοια του ηλεκτρικού πεδίου εισήγαγε για πρώτη φορά ο Michael Faraday.



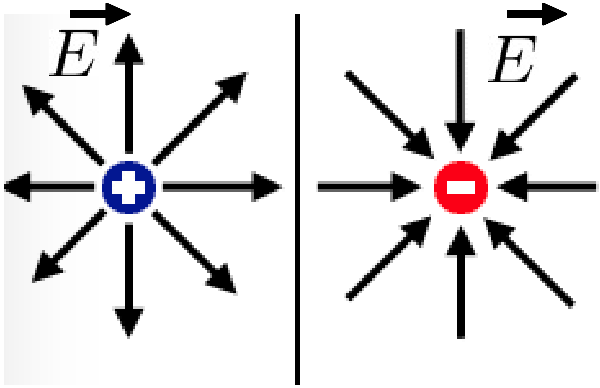
- Το φορτισμένο σώμα Α προσδίδει στον χώρο γύρω του την χαρακτηριστική ιδιότητα να απωθεί ή να έλκει ηλεκτρικά φορτία.
- Το φορτισμένο σώμα Α δημιουργεί **ηλεκτρικό πεδίο** γύρω του.

Ηλεκτρικό πεδίο

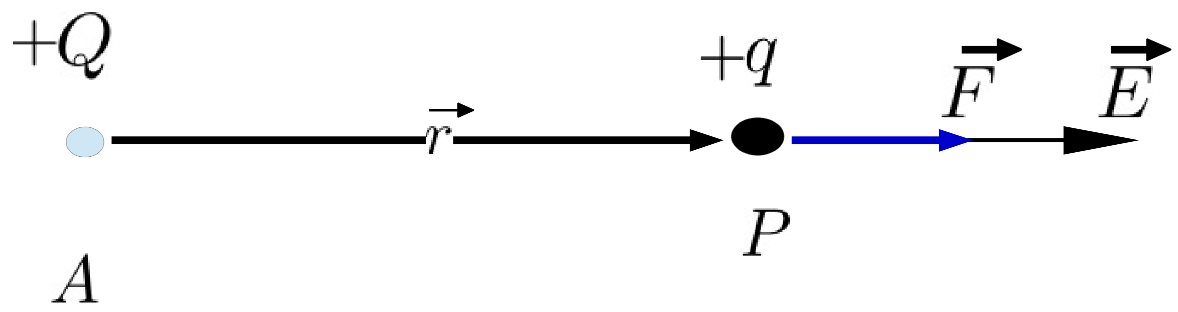
- Το ηλεκτρικό πεδίο ειναι διανυσματική ποσότητα
- Περιγράφει την ηλεκτρική δύναμη ανα μονάδα φορτίου σε δεδομένο σημείο του χώρου
- Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ορίζεται ως:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{|q|}$$

- Μονάδες έντασης: N/C
- Φορά έντασης πεδίου: Εξαρτάται απο το είδος του φορτίου που προκαλεί το πεδίο



Ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου



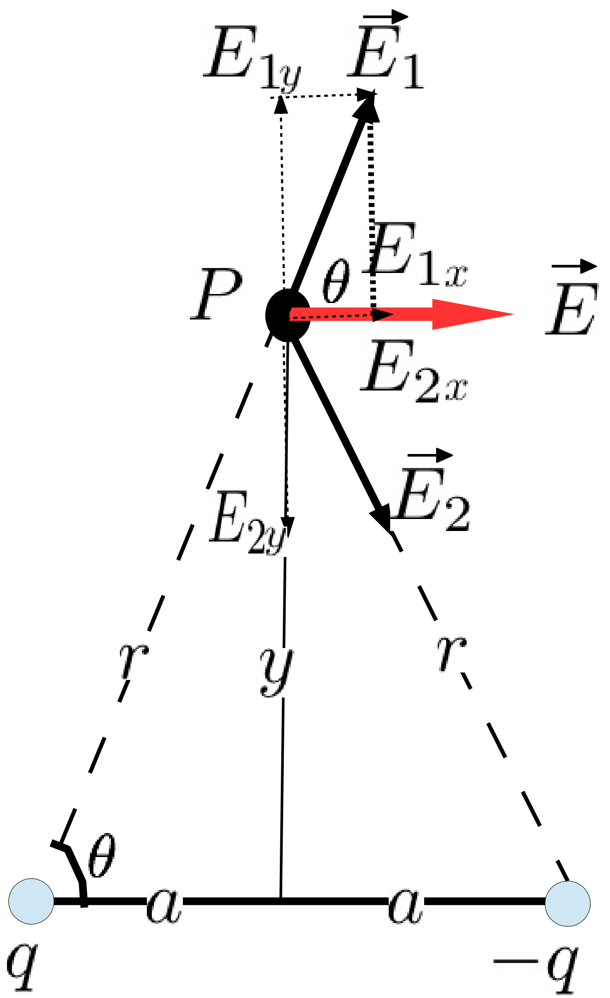
- Θετικά φορτισμένο σωμάτιο Α δημιουργεί γύρω του ηλεκτρικό πεδίο.
- Θέλουμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P
- Υποθέτουμε δοκιμαστικό φορτίο +q στο σημείο P:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{|q|} = k\frac{|Qq|}{|q|r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|Qq|}{|q|r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|Q|}{r^2}\hat{r}\ [N/C]$$

(Για τον υπολογισμό της έντασης χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της έντασης και τον νόμο του Coulomb)

Ηλεκτρικό πεδίο ενός διπόλου

Τα σημειακά φορτία q και $-q$ τοποθετούνται όπως στο σχήμα.
Να υπολογιστεί η ένταση $\vec{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P.



- Στο σημείο P ισχύει:

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$$

- Λόγω συμμετρίας ισχύει για το μέτρο της έντασης:

$$|E_1 = |E_2| = k\frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(y^2+a^2)}$$

- Συνιστώσες:

$$|E_{1y}| = |E_{2y}| \rightarrow \vec{E}_{1y} = -\vec{E}_{2y}$$

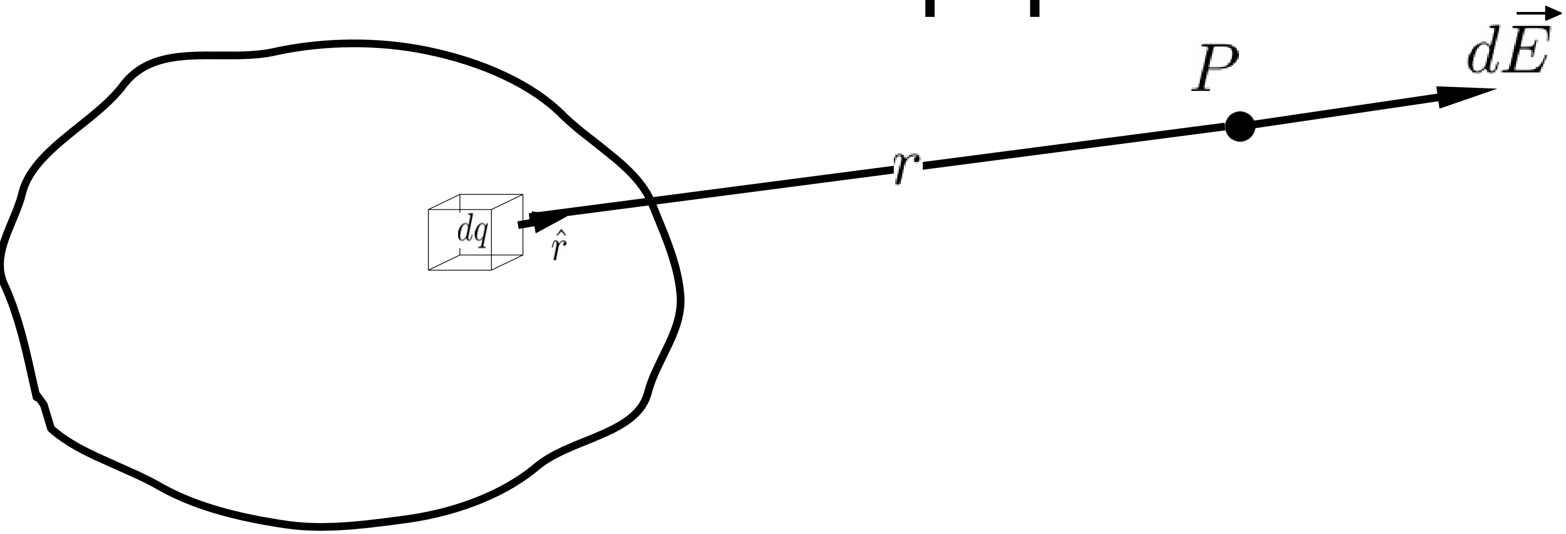
$$|E_{1x}| = |E_{2x}| = E_1 cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{y^2+a^2}\frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\alpha}{(y^2+\alpha^2)^{3/2}}$$

- Άρα:

$$E = 2|E_{1x}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2qa}{(y^2+a^2)^{3/2}}\ [N/C]$$

Ηλεκτρικό πεδίο συνεχούς κατανομής φορτίου



- Θεωρούμε στοιχειώδες φορτίο dq
- Το πεδίο d$\vec{E}$ που δημιουργεί καθε dq στο σημείο P είναι:

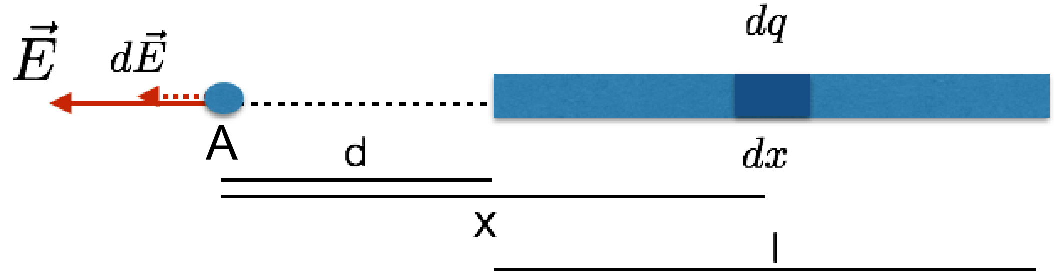
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

- Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν στο σημείο P όλα τα στοιχειώδη ηλεκτρικα φορτια dq είναι:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lim_{dq_i \to 0}\sum_i \frac{dq_i}{r_i^2}\hat{r}_i \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

Ηλεκτρικό πεδίο συνεχούς κατανομής φορτίου (ράβδος)

Ομογενώς φορτισμένη ράβδος με Q>0 συνολικό φορτίο και μήκος l βρίσκεται σε απόσταση d από την αρχή των αξόνων. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στην αρχή των αξόνων



Ορίζουμε την γραμμική πυκνότητα φορτίου λ ώς:

$$\lambda = \frac{dq}{dx} \qquad [1]$$

Εφόσον η ράβδος είναι ομοιογενώς φορτισμένη (σταθερή κατανομή φορτίου) ισχύει:

$$\lambda = \frac{dq}{dx} = \frac{Q}{l}$$

Το στοιχειώδες φορτίο dq προκαλεί ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}$ στο σημείο A(0,0) με κατεύθυνση όπως στο σχήμα και μέτρο :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{x^2}$$

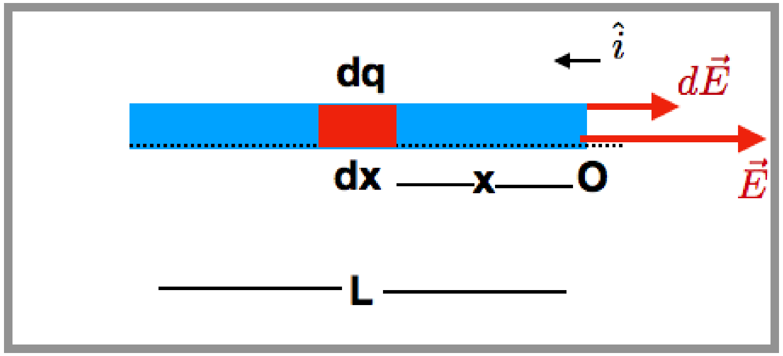
Με ολοκλήρωση της άνωθεν σχέσης για όλο το μήκος της ράβδου, βρίσκουμε το μέτρο του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ που δημιουργείται στο σημείο A(0,0).

$$E = \int_{\rho\acute{\alpha}\beta\delta o} dE = \int_d^{l+d} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{x^2} \overset{[1]}{=} \int_d^{l+d} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\lambda dx)}{x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_d^{l+d}\frac{dx}{x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left|\left[-\frac{1}{l+d}+\frac{1}{d}\right]\right| =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{l}{d(d+l)} = \frac{(Q/l)}{4\pi\epsilon_0}\frac{l}{d(d+l)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d(d+l)} \rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d(d+l)}\hat{i}$$

Ηλεκτρικό πεδίο μεταβλητής πυκνότητας φορτίου (ράβδος)

Έστω ράβδος με συνολικό φορτίο +Q , μήκος L και γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda = ax^3$ όπου α σταθερά και x ή απόσταση απο το δεξιό άκρο της ράβδου το οποίο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο δεξιό άκρο της ράβδου.



- Η γραμμική πυκνότητα φορτίου ορίζεται ως:

$$\lambda = \frac{dq}{dx} = ax^3 \quad \textbf{[1]}$$

Ολοκληρώνοντας την **[1]** υπολογίζουμε την σταθερά α:

$$\frac{dq}{dx} = ax^3 \rightarrow dq = a\,x^3 dx \rightarrow \int_0^Q dq = \int_0^l a\,x^3 dx \rightarrow Q = a\frac{l^4}{4} \rightarrow a = \frac{4Q}{l^4}$$

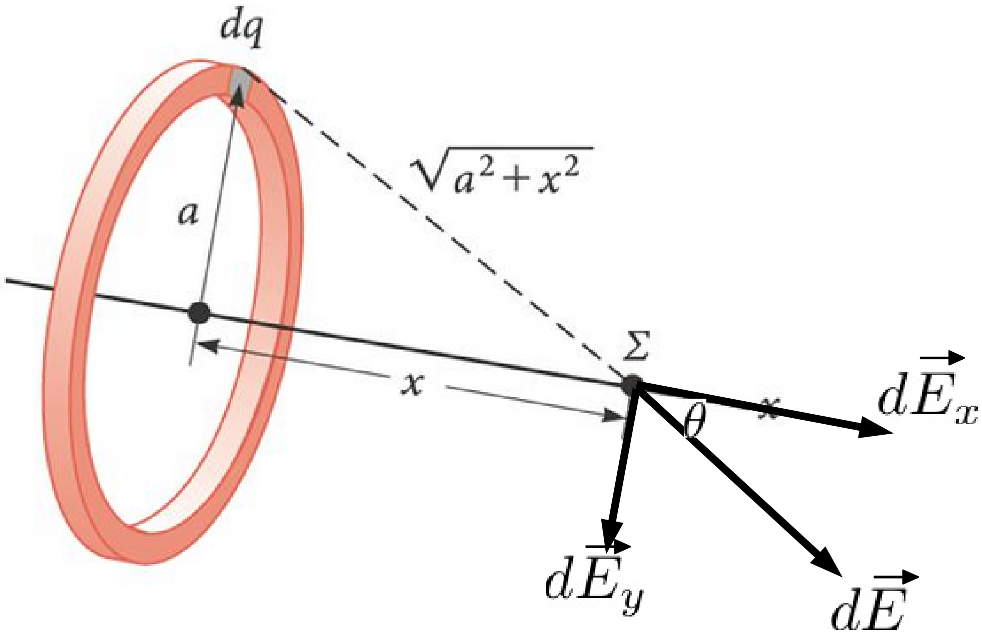
- Το στοιχειώδες φορτίο dq προκαλεί ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}$ στο σημείο O(0,0) με κατεύθυνση όπως στο σχήμα και μέτρο:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{x^2} \quad \textbf{[2]}$$

Με ολοκλήρωση της **[2]** για όλο το μήκος της ράβδου, βρίσκουμε το μέτρο του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ που δημιουργείται στο σημείο O(0,0):

$$E = \int_{\rho\acute{\alpha}\beta\delta o} dE = \int_{\rho\acute{\alpha}\beta\delta o} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{x^2} \overset{[1]}{=} \int_0^l \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(a\,x^3\,dx)}{x^2} = \int_0^l \frac{1}{4\pi\epsilon_0} ax\,dx = \frac{l^2 a}{8\pi\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = -\frac{l^2 a}{8\pi\epsilon_0}\hat{i}$$

Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου δακτυλίου



- Το μέτρο της έντασης ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο dq στο σημείο Σ είναι:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{(\sqrt{\alpha^2+x^2})^2}$$

- Το μέτρο της έντασης στο σημείο Σ προκύπτει απο το άθροισμα μόνο των οριζόντιων συνιστώσεων dE_x καθώς οι κάθετες συνιστώσες dE_y αλληλοαναιρούνται.

- Το μέτρο της έντασης στο σημειο Σ είναι:

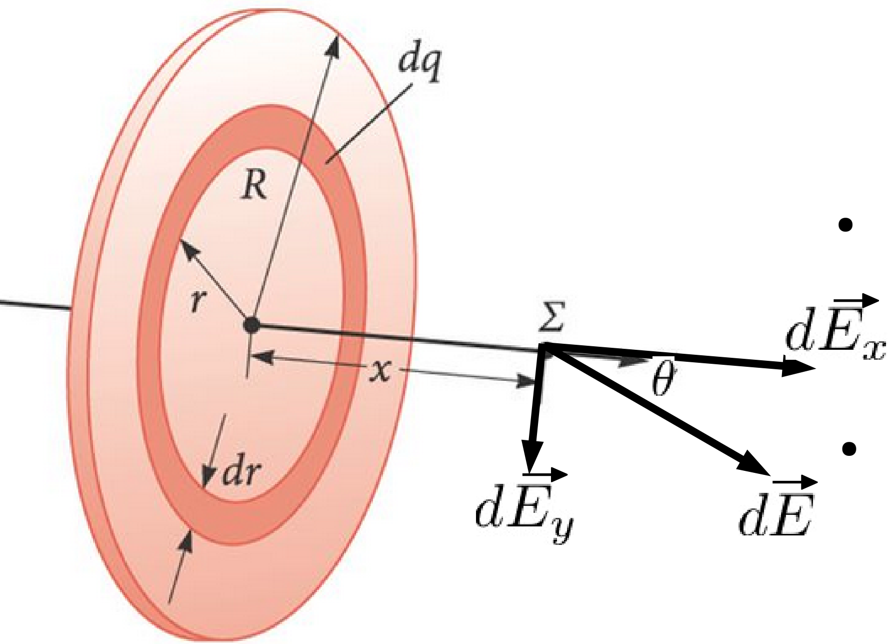
$$E = \int_{\delta\alpha\kappa\tau\acute{\upsilon}\lambda\iota o} dE_x = \int_{\delta\alpha\kappa\tau\acute{\upsilon}\lambda\iota o} dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(\sqrt{\alpha^2+x^2})^2}\frac{x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}\int_{\delta\alpha\kappa\tau\acute{\upsilon}\lambda\iota o} dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(\alpha^2+x^2)^{3/2}}Q$$

- Η ένταση παίρνει μέγιστες τιμές στα σημεία: $\frac{dE}{dx} = 0 \rightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$

- Όταν το σημείο Σ βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση (σε σχέση με τις διαστάσεις του δακτυλίου, $x >> \alpha$) τότε προσεγγιστικά ισχύει:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x^2}$$

Ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου



- Θεωρώ στοιχειώδη δακτύλιος, ακτινας r, παχους dr και εμβαδου dA, όπου:

$$dA = 2\pi r dr$$

- Ορίζω ως σ την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ωστε:

$$\sigma \equiv \frac{dq}{dA} = \frac{Q}{A}$$

- Λόγω συμμετρίας, το μέτρο της έντασης στο σημείο Σ προκύπτει απο το άθροισμα μόνο των συνιστώσεων dE_x

$$E = \int_{δίσκο} dE_x \cos\theta = \int_{δίσκο} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(\sqrt{r^2+x^2})^2} \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}} =$$

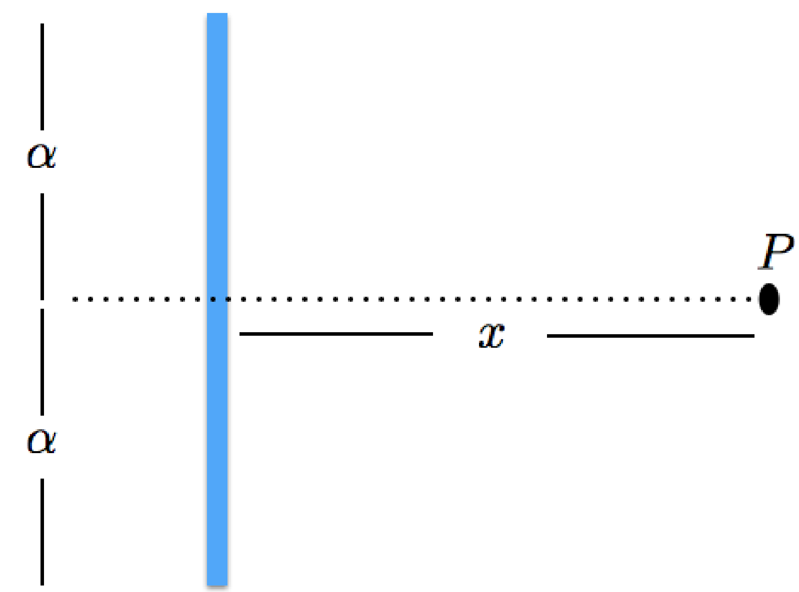
$$= \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dq}{(r^2+x^2)^{3/2}} = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x(\sigma 2\pi r dr)}{(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(x^2+r^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left(- \frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}\Big|_0^R \right) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{(R^2/x^2+1)}}\right]$$

- Στο όριο οπου $R >> x$, έχουμε: $E = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$

Άσκηση: Πεδίο γραμμικής κατανομής φορτίου σε δύο διαστάσεις

Ηλεκτρικό φορτίο q κατανέμεται ομογενώς σε γραμμή με μήκος 2α που βρίσκεται πάνω στον άξονα y. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο P του άξονα x που απέχει απόσταση x απο την αρχή.



- Διαμερίζουμε τη γραμμή σε απειροστά (στοιχειώδεις) τμήματα μήκους dy τα οποία φέρουν φορτίο dq. Για να βρούμε το φορτίο, dq, καθε απειροστού τμήματος ορίζουμε την γραμμική πυκνότητα φορτίου ως:

$$\lambda \equiv \frac{dq}{dy} = \frac{q}{2\alpha} \quad \rightarrow \quad dq = \frac{q}{2\alpha} dy$$

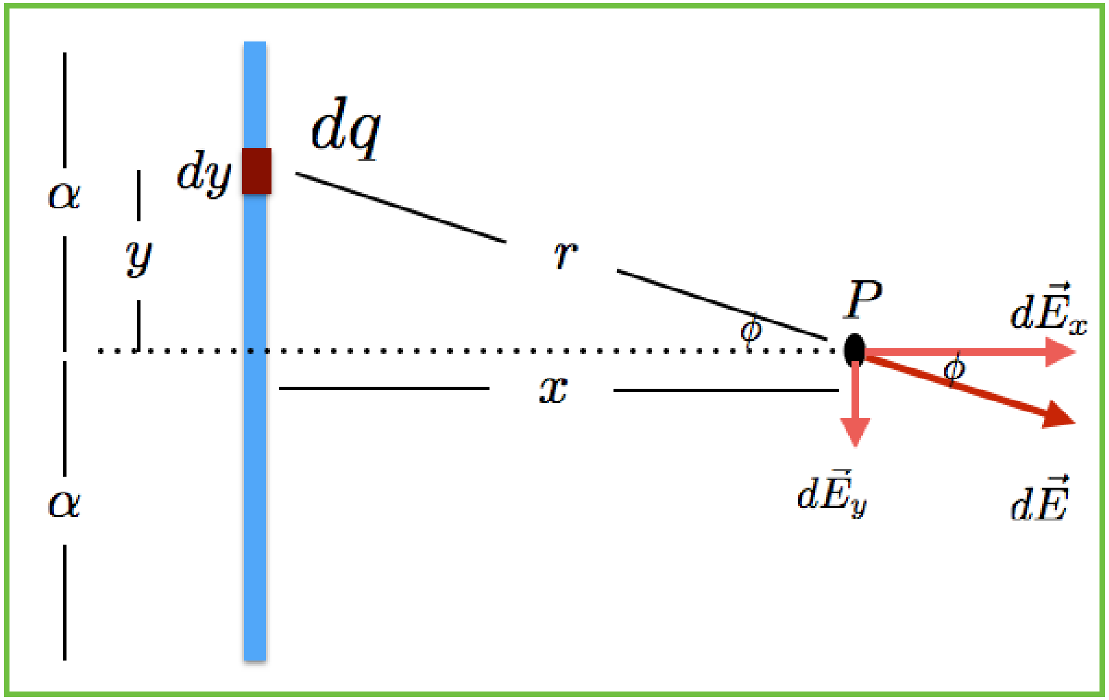
- Η απόσταση r του σημείου P απο ένα στοιχειώδες τμήμα μήκους dy και απόστασης y απο την αρχή ειναι:

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

- Το μέτρο, dE του πεδίου στο P, που οφείλεται στο στοιχειώδες τμήμα, είναι:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \; dy}{2\alpha(x^2 + y^2)}$$



- Το πεδίο $d\vec{E}$ έχει συνιστώσες με μέτρο:

$$dEx = dE\cos\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\ dy}{2\alpha(x^2+y^2)}\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{xdy}{2\alpha(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dEy = dE\sin\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\ dy}{2\alpha(x^2+y^2)}\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{ydy}{2\alpha(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- Για να βρούμε τις συνιστώσες του ολικού πεδίου, ολοκληρώνουμε αυτές τις εκφράσεις:

$$E_x = \int dEx = \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\ dy}{2\alpha(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\ x}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x\sqrt{x^2+\alpha^2}}$$

$$E_y = \int dEy = \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y\ dy}{2\alpha(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{y\ dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

- Σε διανυσματική μορφή το πεδίο στο σημείο P είναι:

$$\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x\sqrt{x^2+\alpha^2}}\hat{i}$$

- Για x>>α, ισχύει:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x^2}\hat{i}$$

Βιβλιογραφία

- Hugh D. Young , Πανεπιστημιακή Φυσική: τόμος Β', Εκδόσεις Παπαζήση, 1994
- Serway R. A., John W. Jewett, Φυσική για Επιστήμονες και Μηχανικούς - Ηλεκτρισμός και μαγνητισμός, Φώς και οπτική, Σύγχρονη φυσική, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2013