



**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΚΡΗΤΗΣ**

Φυσική (Ηλεκτρομαγνητισμός)

Ενότητα VII: Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή

Σκοποί ενότητας

- Χρήση του νόμου του Faraday για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου και της Ηλεκτρεγερτικής Δύναμης (ΗΕΔ) που αναπτύσσεται από επαγωγή σε κλειστά κυκλώματα διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων.

Λέξεις κλειδιά

- Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή, νόμος Faraday, κανόνας Λενζ, εναλλάκτης, δίσκος Faraday, επαγόμενα ηλεκτρικά πεδία

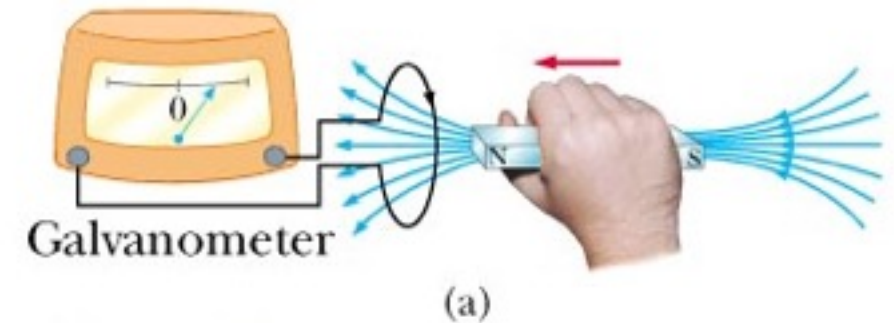
Περιεχόμενα ενότητας

- Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή
- Νόμος Faraday
- Εναλλάκτης
- Δίσκος Faraday
- Ηλεκτρεγερτική δύναμη λόγω κίνησης
- Κανόνας Λενζ (Lenz)
- Επαγόμενα ηλεκτρικά πεδία
- Εξισώσεις Maxwell

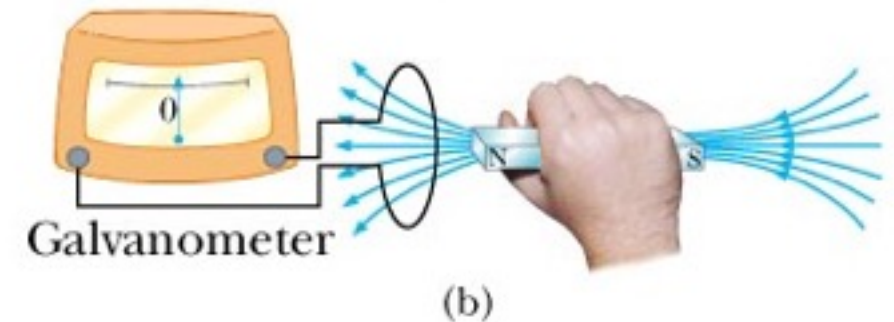
Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή

- Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή: η εμφάνιση ηλεκτρισμού εξαιτίας μαγνητικού πεδίου.
- το φαινόμενο της ανάπτυξης διαφοράς δυναμικού (Ηλεκτρεγερτικής Δύναμης- ΗΕΔ) στα άκρα ενός αγωγού, η οποία λαμβάνει χώρα όταν μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια που ο συγκεκριμένος αγωγός ορίζει.

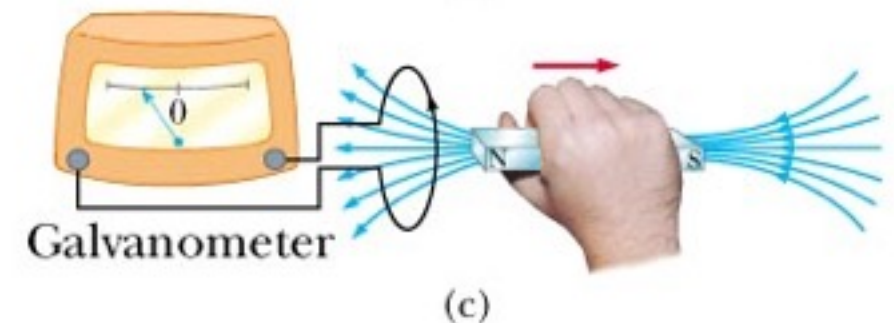
(a) Πλησιάζοντας ένα μαγνήτη στον βρόχο το γαλβανόμετρο δείχνει ρεύμα στον βρόχο.



(b) Διατηρώντας τον μαγνήτη σταθερό δεν επάγεται ρεύμα.



(c) Απομακρύνοντας τον μαγνήτη από τον βρόχο το γαλβανόμετρο δείχνει επαγόμενο ρεύμα στον βρόχο με φορά αντίθετη από αυτή στο σχήμα (a).



Η επαγόμενη ΗΕΔ είναι ανάλογη του ρυθμού μεταβολής της μαγνητικής ροής.

Νόμος Faraday



- Νόμος επαγωγής Faraday: Η ΗΕΔ (Ηλεκτρεγερτική Δύναμη) που επάγεται σε έναν βρόχο ισούται με το αρνητικό του ρυθμού μεταβολής της μαγνητικής ροής που διαπερνά τον βρόχο.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

- Υπενθυμίζουμε πως η μαγνητική ροή που διαπερνά βρόχο ισούται με:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

- Στην περίπτωση που αντί για ένα βρόχο έχουμε πηνίο με N σπείρες τότε η συνολική ΗΕΔ που επάγεται θα είναι:

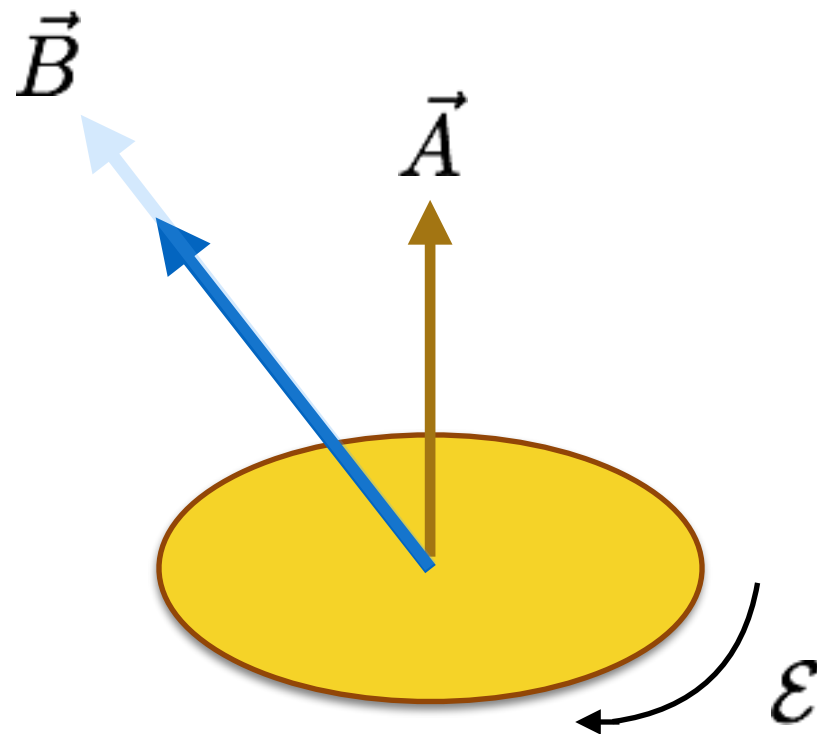
$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Νόμος Faraday

- Φορά της επαγόμενης ΗΕΔ:

- Ορίζουμε την κατεύθυνση του διανύσματος διατομής \vec{A} που χαρακτηρίζει την επιφάνεια
- Το πρόσημο της μαγνητικής ροής καθορίζεται από τις κατευθύνσεις των \vec{B} και \vec{A} .
- Με τον αντίχειρα στην κατεύθυνση του \vec{A} λυγίζουμε τα δάχτυλα. Αν η φορά μιας ΗΕΔ (ή ενός ρεύματος) στο κύκλωμα είναι η ίδια με την φορά των δαχτύλων, τότε είναι θετική, ενώ εάν είναι αντίθετη είναι αρνητική.

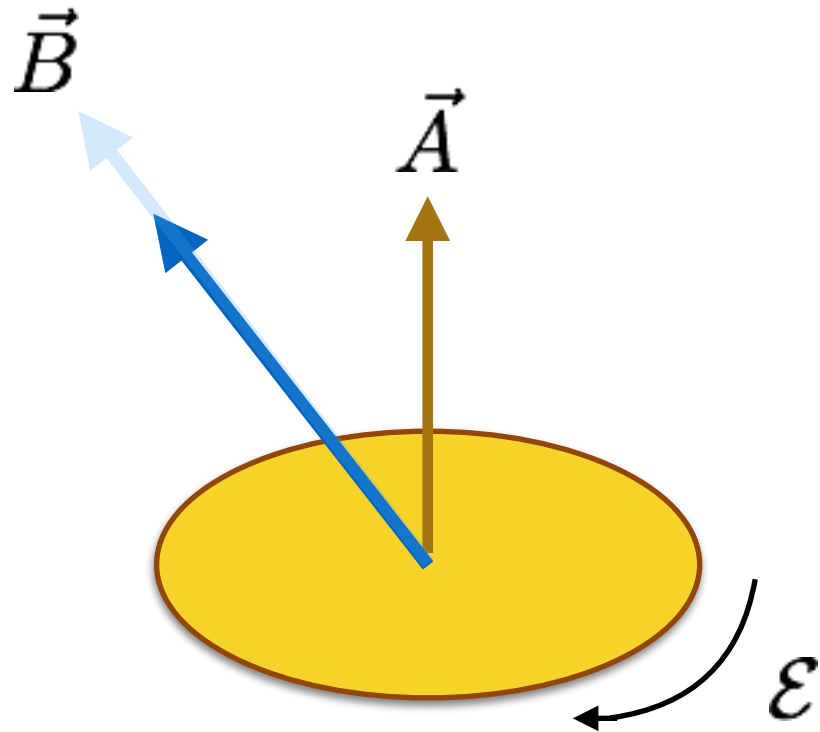
(αυξανόμενο)



$$\Phi_B > 0, \quad \frac{d\Phi_B}{dt} > 0$$

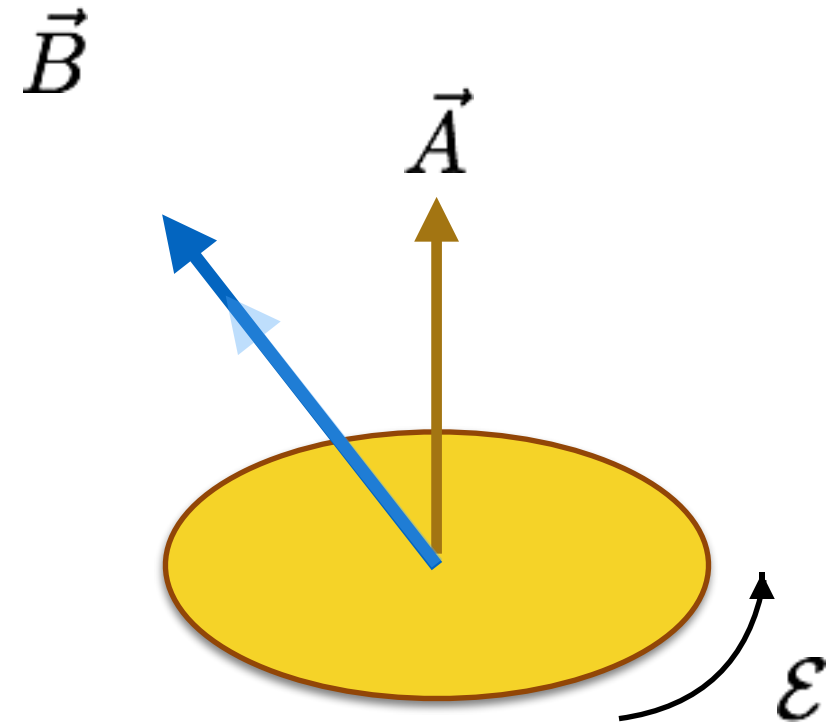
Νόμος Faraday

(αυξανόμενο)



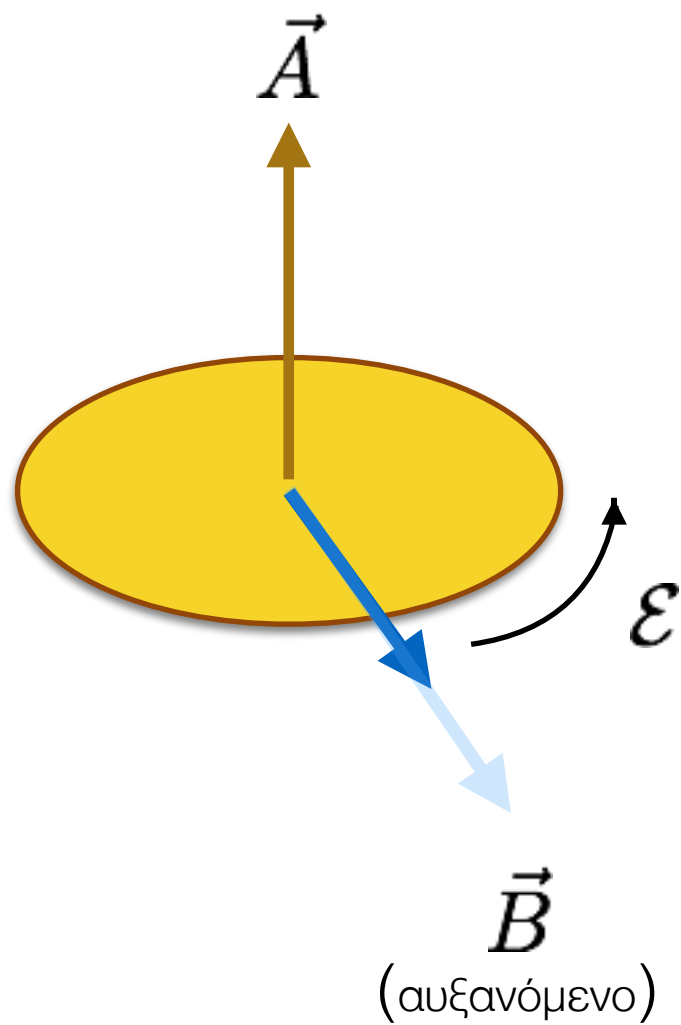
$$\Phi_B > 0, \frac{d\Phi_B}{dt} > 0$$

(μειωνόμενο)

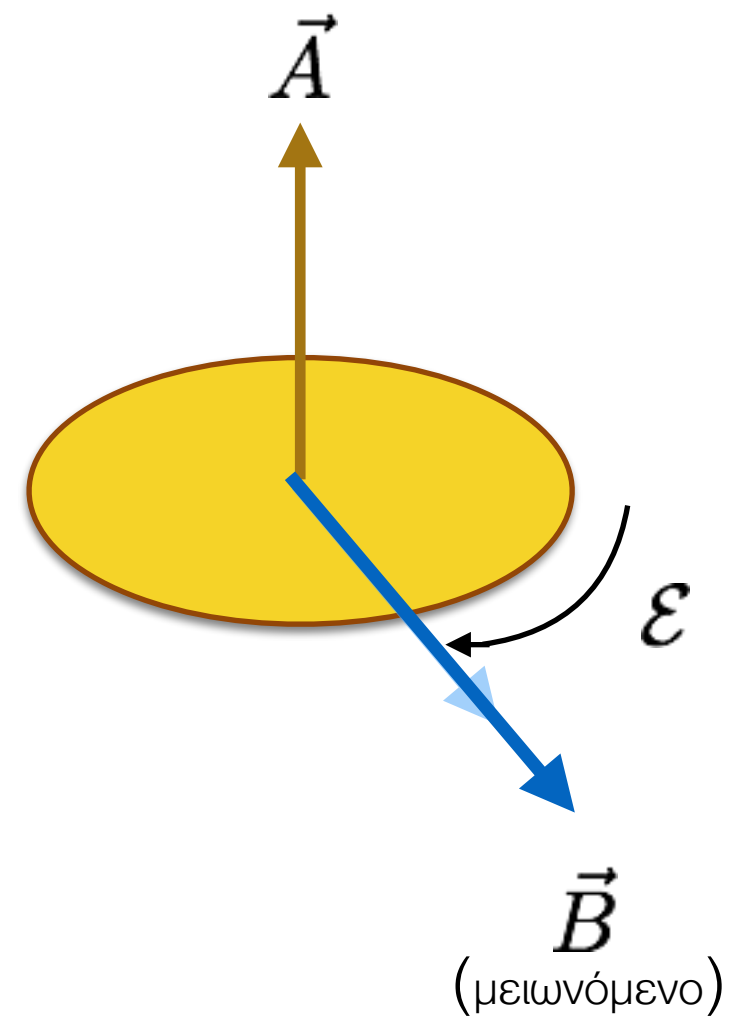


$$\Phi_B > 0, \frac{d\Phi_B}{dt} < 0$$

Νόμος Faraday



$$\Phi_B < 0, \quad \frac{d\Phi_B}{dt} < 0$$



$$\Phi_B < 0, \quad \frac{d\Phi_B}{dt} > 0$$

Κανόνας Λενζ (Lenz)

- Κανόνας Λένζ: Κάθε επαγωγικό φαινόμενο τείνει να αντιτεθεί στη μεταβολή που το προκάλεσε.

Το επαγόμενο ρεύμα σε έναν βρόχο έχει φορά τέτοια ώστε να δημιουργεί μαγνητικό πεδίο, το οποίο αντιτίθεται στη μεταβολή της μαγνητικής ροής που διαπερνά τον βρόχο.

- Ο κανόνας του Λένζ έχει άμεση σχέση με το αρνητικό πρόσημο στον νόμο του Faraday και βασίζεται στην αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Εαν δεν υπήρχε το αρνητικό πρόσημο στον νόμο του Faraday, το επαγόμενο ρεύμα θα δημιουργούσε μαγνητικό πεδίο το οποίο θα αθροίζοταν με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Αυτή η αύξηση θα προκαλούσε επιπρόσθετη αύξηση στην μαγνητική ροή αρα και στο ρεύμα στον βρόχο με αποτέλεσμα το ρεύμα να αυξάνεται επ'απειρον.

Νόμος Faraday

Πηνίο αποτελείται από $N=500$ κυκλικούς βρόχους σύρματος ακτίνας $r=4\text{cm}$ και είναι τοποθετημένο σε ομογενές μαγνητικό πεδίο \vec{B} σχηματίζοντας γωνία $\theta=60^\circ$ με αυτό όπως στο σχήμα. Το πεδίο ελαττώνεται με ρυθμό $0,2\text{ T/s}$. Να βρεθεί η τιμή της επαγόμενης ΗΕΔ.

- Η μαγνητική ροή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι:

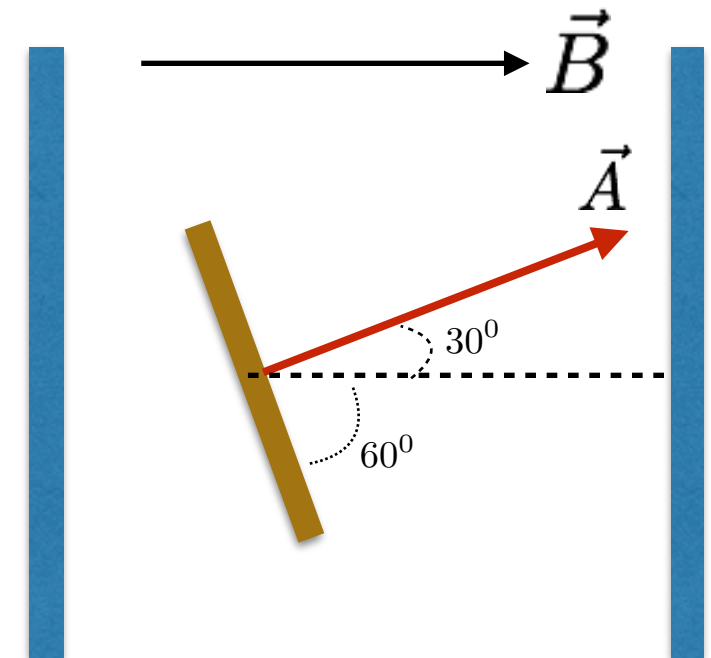
$$\Phi_B = BA \cos 30^\circ$$

- Ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής είναι:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_B}{dt} &= \frac{dB}{dt} A \cos 30^\circ = (-0,2\text{ T/s})(0,005\text{ m}^2)(0,866) = \\ &= -8,7 * 10^{-4}\text{ Tm/s} = -8,7 * 10^{-4}\text{ Wb/s}\end{aligned}$$

- Η επαγόμενη ΗΕΔ θα είναι:

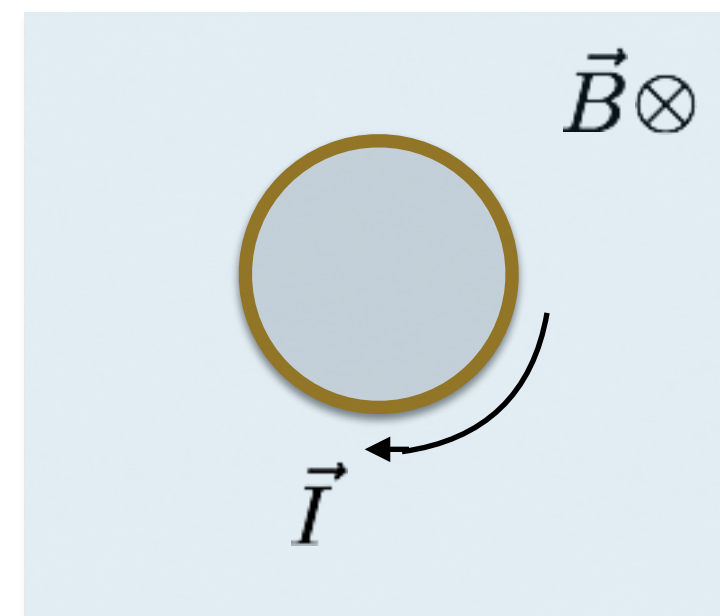
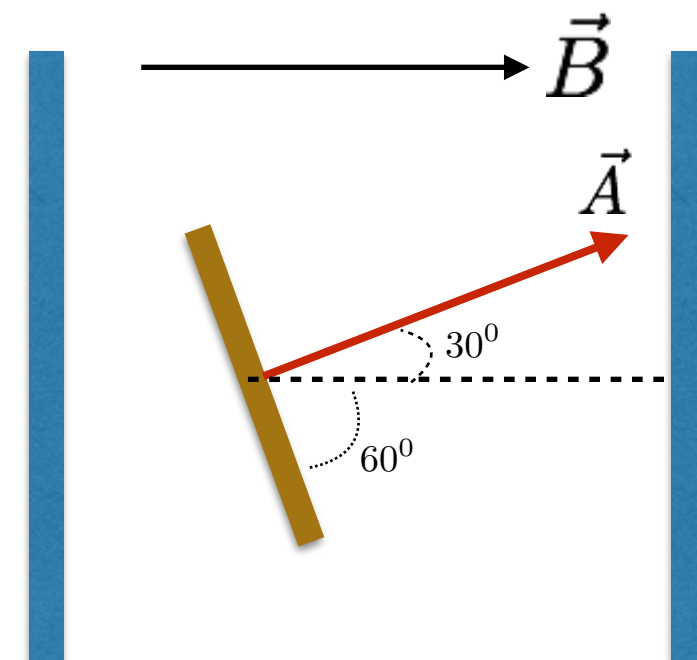
$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -(500)(-8,7 * 10^{-4}\text{ Wb/s}) = 0,43\text{ V}$$



$$A = \pi r^2 = 0,005\text{ m}^2$$

Νόμος Faraday

- Βάση της κατεύθυνσης που ορίσαμε το διανύσμα της επιφάνειας η ροή που διαπερνά το πηνίο ελαττώνεται άρα η ΗΕΔ θα είναι **θετική**.
- Παρατηρώντας απο τα αριστερά και προς την κατεύθυνση του διανύσματος της επιφάνειας, η θετική φορά για την ΗΕΔ είναι η φορά των δεικτών του ρολογιού (σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού).
- Αν τα άκρα του πηνίου συνδεθούν μεταξύ τους τότε η φορά του ρεύματος στο πηνίο θα έχει την φορά των δεικτών του ρολογιού.



Εναλλάκτης (ηλεκτρογεννήτρια)

Τετραγωνικός βρόχος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο \vec{B} . την χρονική στιγμή $t=0$, $\phi=0^\circ$. Να βρεθεί η επαγόμενη ΗΕΔ.

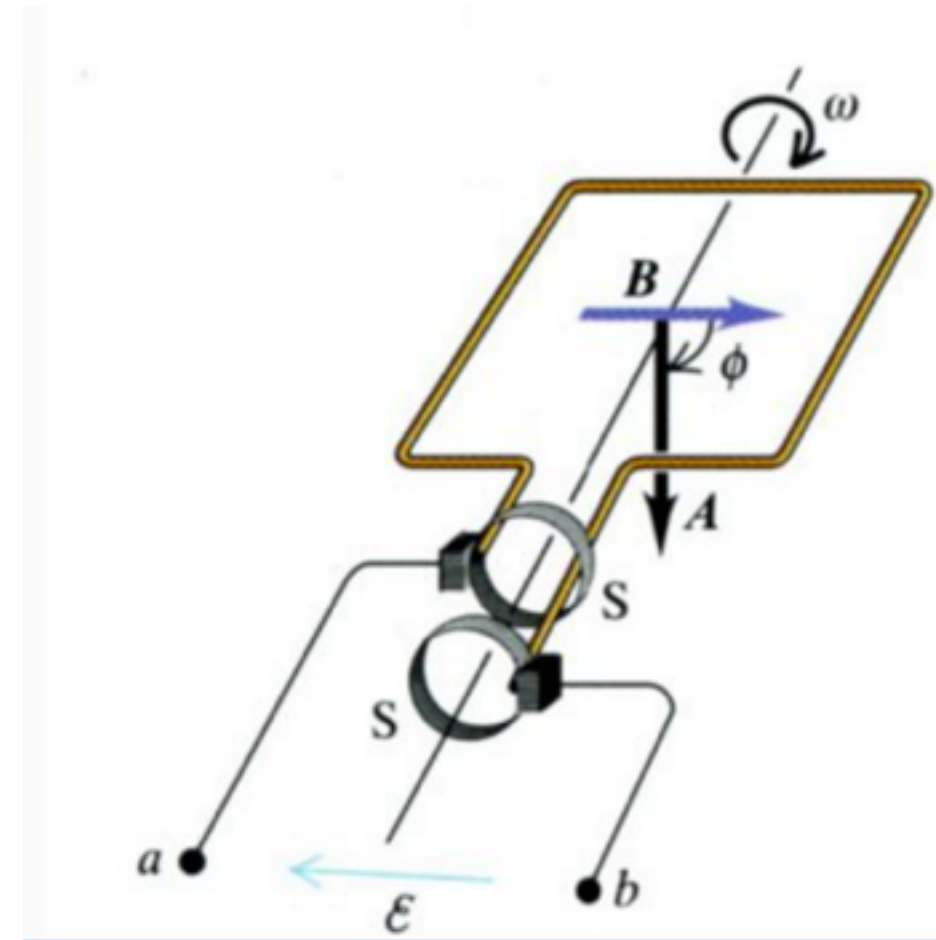
- Η μαγνητική ροή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι:

$$\Phi_B = BA \cos \phi = BA \cos \omega t$$

- Η επαγόμενη ΗΕΔ θα είναι:

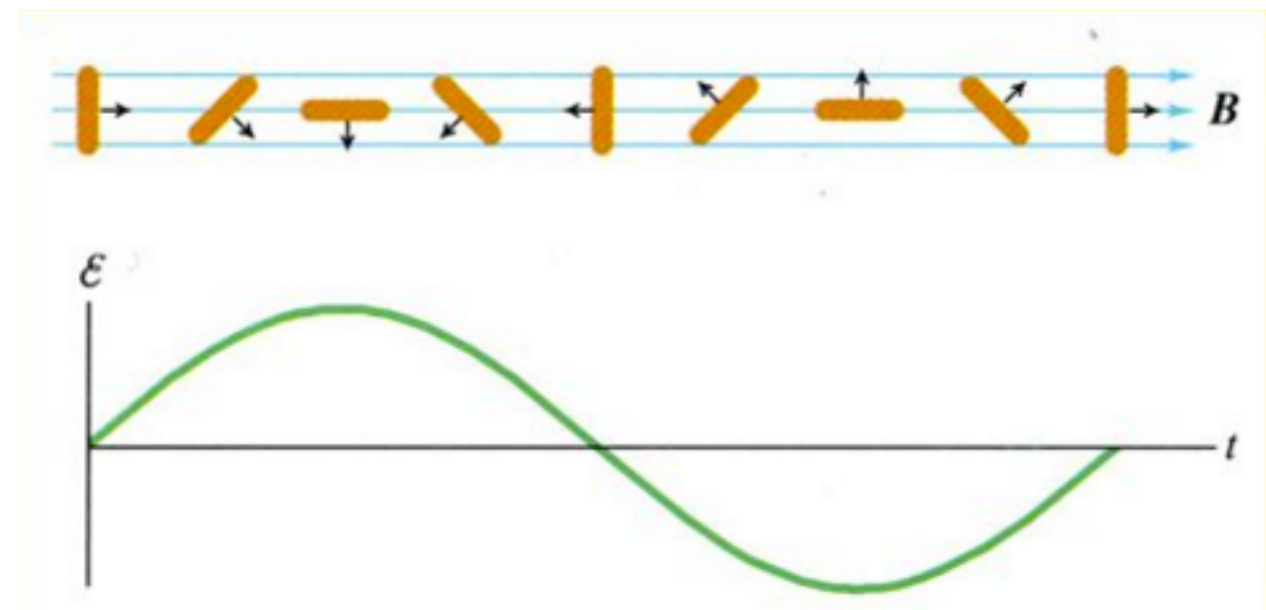
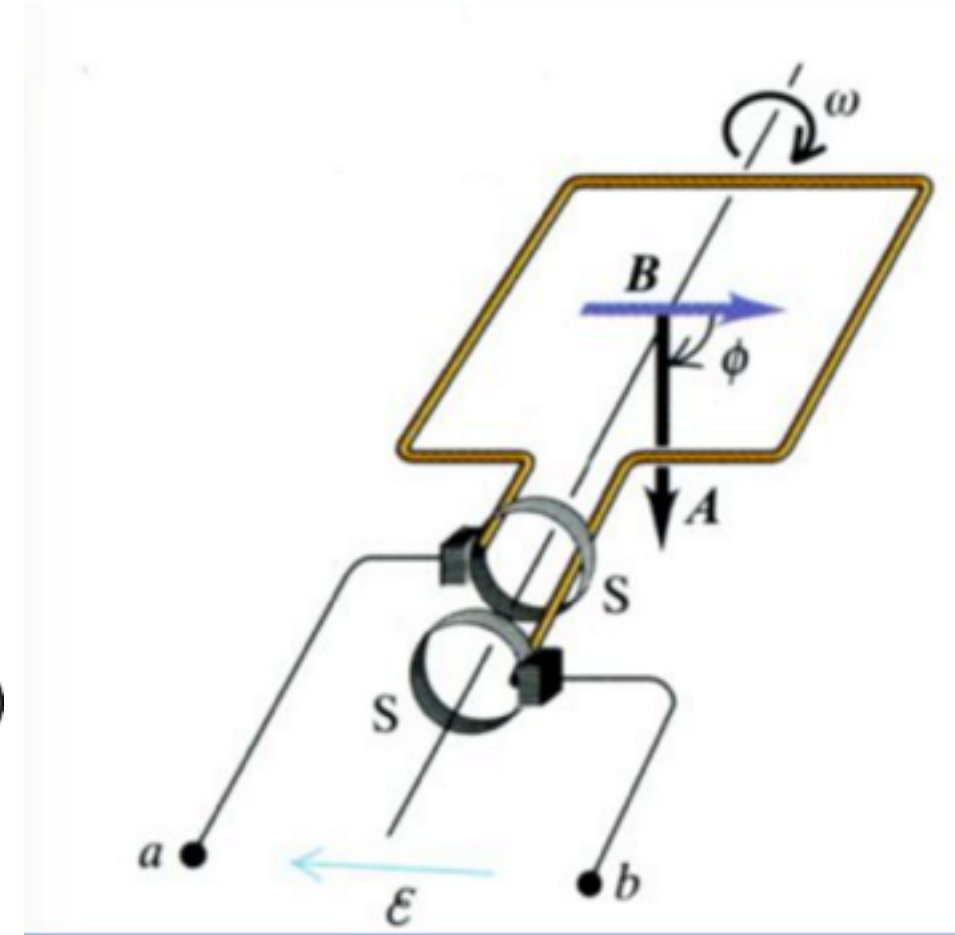
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega BA \sin \omega t$$

- Η επαγόμενη ΗΕΔ μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με τον χρόνο.
- Επειδή η ΗΕΔ είναι ανάλογη των ω και B μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ΗΕΔ περιστρεφόμενου πηνίου για να μετρήσουμε την ταχύτητα περιστροφής ή το μαγνητικό πεδίο.



Εναλλάκτης

- Όταν το επίπεδο του βρόχου είναι **κάθετο** στο μαγνητικό πεδίο ($\phi = 0^\circ, \phi = 180^\circ$). η μαγνητική ροή φτάνει στην μέγιστη απόλυτη τιμή της. Τότε ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της είναι μηδέν αρα και η ΗΕΔ είναι **μηδέν**.
- Η ΗΕΔ είναι μέγιστη όταν το επίπεδο του βρόχου είναι **παράλληλο** στο μαγνητικό πεδίο ($\phi = 90^\circ, \phi = 270^\circ$). ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής είναι μέγιστος άρα και η ΗΕΔ είναι **μέγιστη**.



Δίσκος Faraday

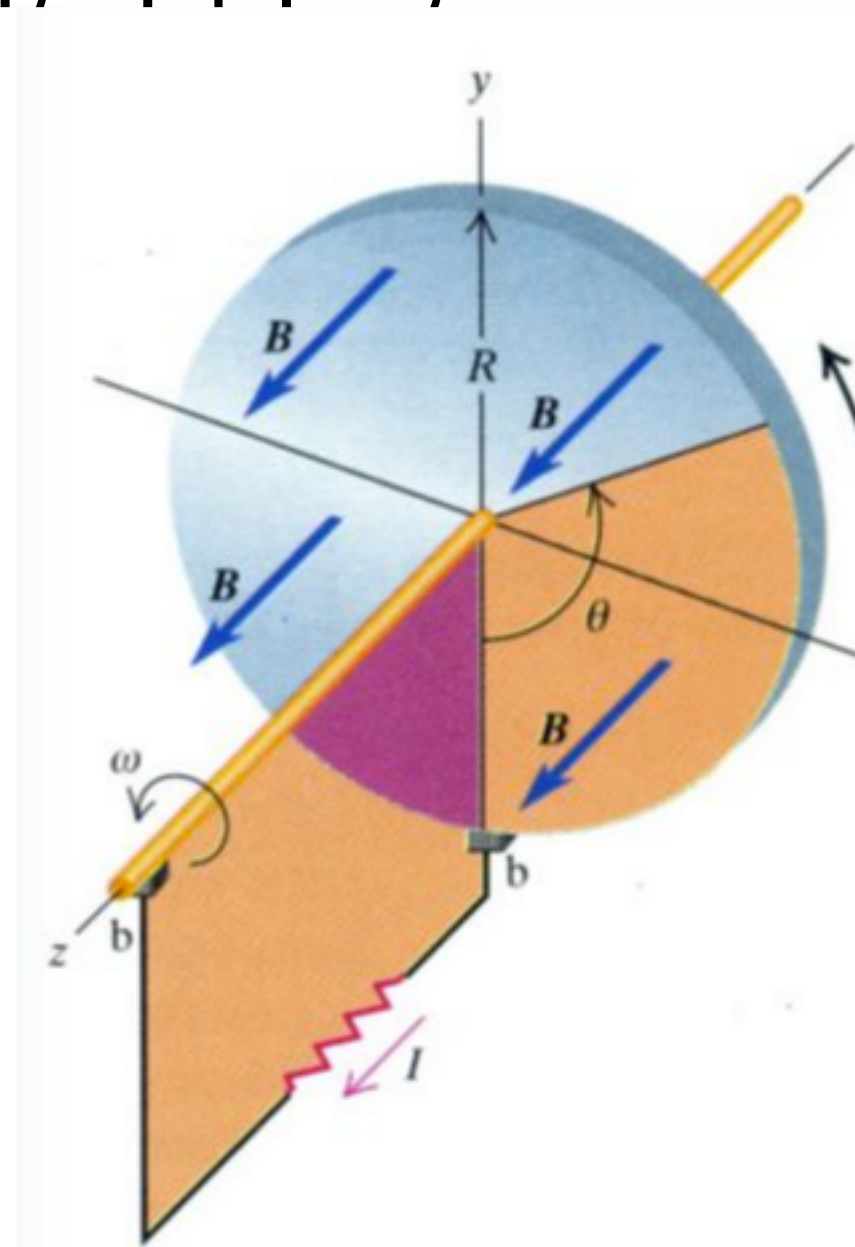
**Δίσκος ακτίνας R , περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω απο τον άξονα z . Ο δίσκος είναι τοποθετημένος σε ομογενές μαγνητικό πεδίο \vec{B} .
Να βρεθεί η επαγόμενη ΗΕΔ μεταξύ του κέντρου και της περιφέρειας του δίσκου.**

- Αρχικά θεωρούμε ως κύκλωμα το περίγραμμα της πορτοκαλί γραμμοσκιασμένης περιοχής. Το πορτοκαλί μέρος του δίσκου (τομέας) στο επίπεδο xy έχει εμβαδό:

$$A = \frac{1}{2} R^2 \theta$$

- Κατα την περιστροφή η ροή απο τον κυκλικό τομέα είναι:

$$\phi_B = BA = \frac{1}{2} BR^2 \theta$$



- Απο το επίπεδο yz δεν διέρχεται μαγνητική ροή.

Δίσκος Faraday

- Σε χρόνο dt η γωνία αυξάνεται κατά: $d\theta = \omega dt$

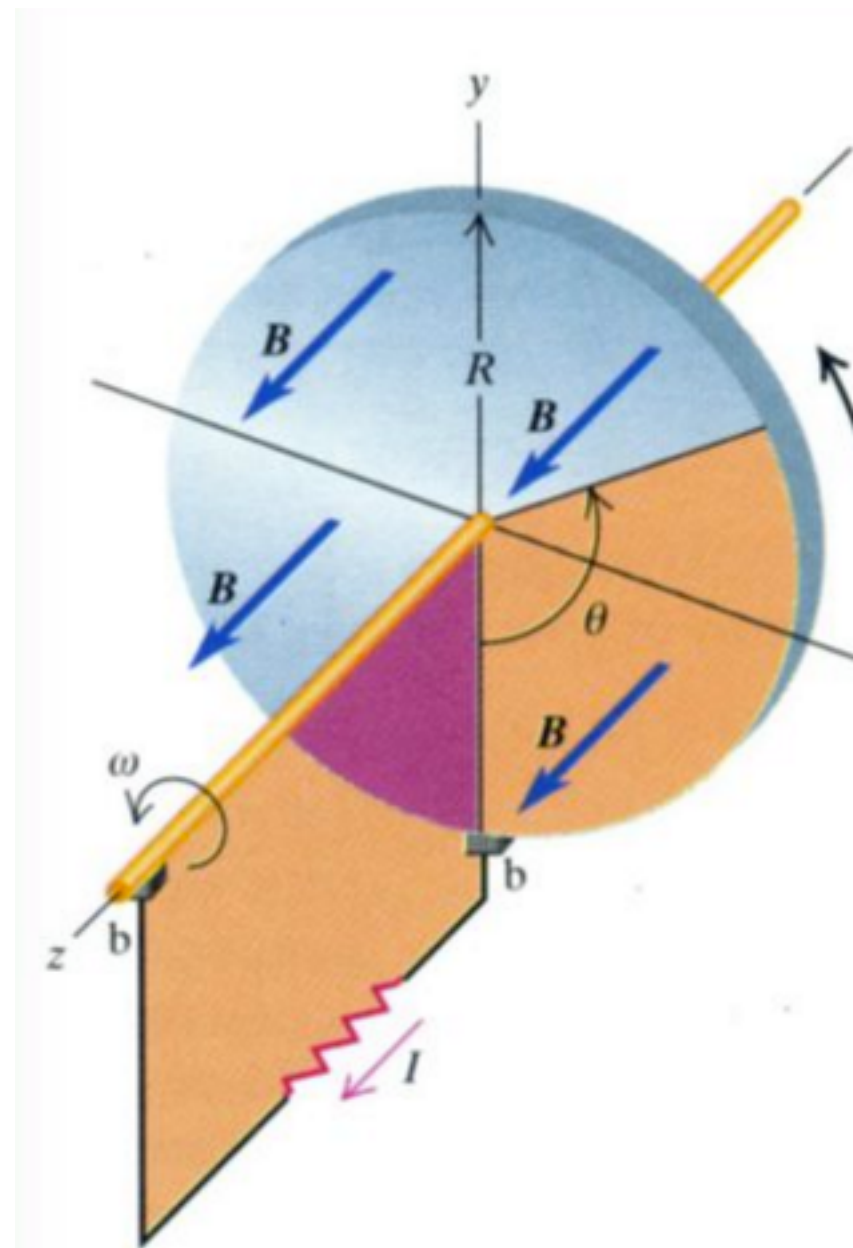
- και η ροή αυξάνεται κατά:

$$d\Phi_B = \frac{1}{2} B R^2 d\theta = \frac{1}{2} B R^2 \omega dt$$

- Η επαγόμενη ΗΕΔ είναι:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{1}{2} B R^2 \omega$$

- Αυτή η συσκευή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως **πηγή ΗΕΔ σε κύκλωμα**. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν ολισθαίνουσες επαφές ή ψύκτρες (b στο σχήμα).



Ηλεκτρεγερτική δύναμη λόγω κίνησης

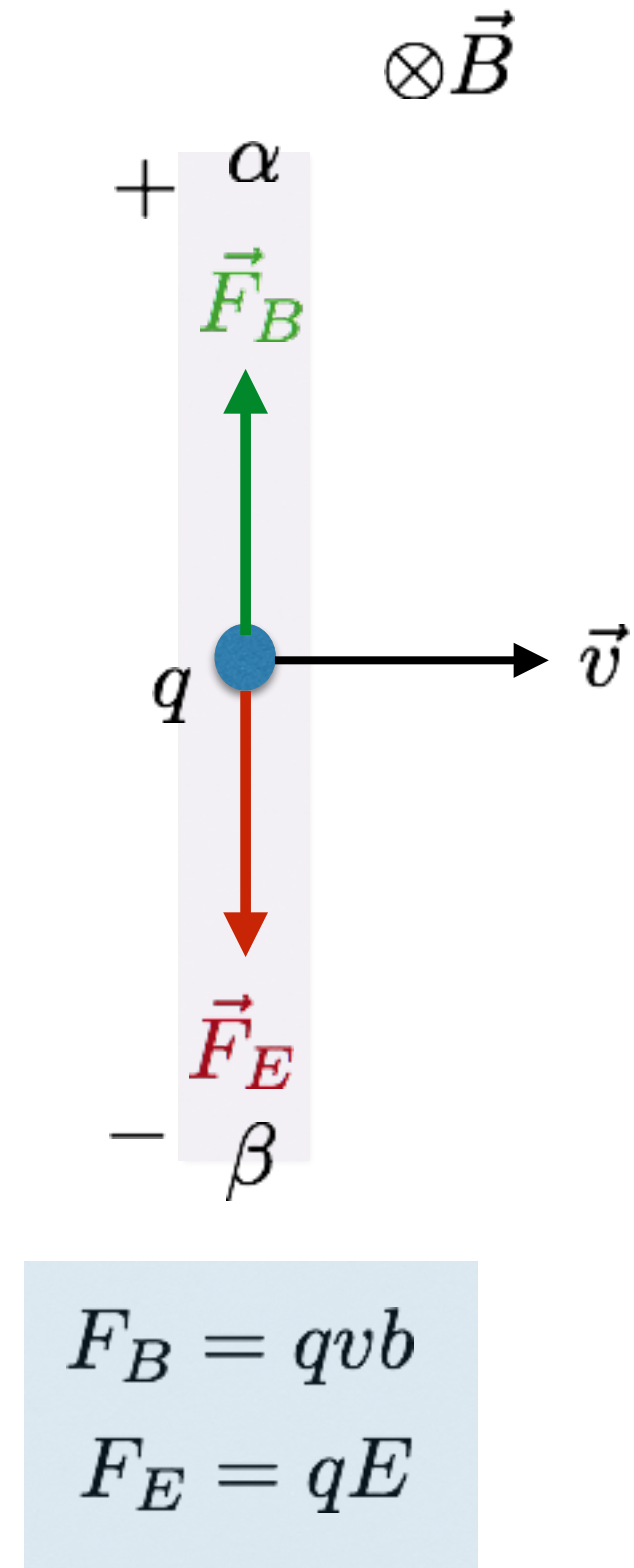
Αγωγός μήκους L , κινούμενος με ταχύτητα \vec{v} σε ομογενές μαγνητικό πεδίο \vec{B} .

- Σε ένα φορτίο $q > 0$ του αγωγού θα ασκηθεί μαγνητική δύναμη \vec{F}_B .
Η μαγνητική δύναμη προκαλεί κίνηση των φορτίων. Έτσι δημιουργείται συσσώρευση θετικού φορτίου στο πάνω μέρος της ράβδου και συσσώρευση αρνητικού φορτίου στο κάτω μέρος της ράβδου.
- Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται ασκεί ηλεκτρική δύναμη \vec{F}_E στα φορτία με κατεύθυνση προς τα κάτω.
- Η συσσώρευση φορτίων στα άκρα της ράβδου συνεχίζεται έως ότου το μέτρο της ηλεκτρικής και της μαγνητικής δύναμης γίνουν ίσα:

$$F_E = F_B \rightarrow qE = evB \rightarrow E = vB$$

- Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων α και β θα είναι:

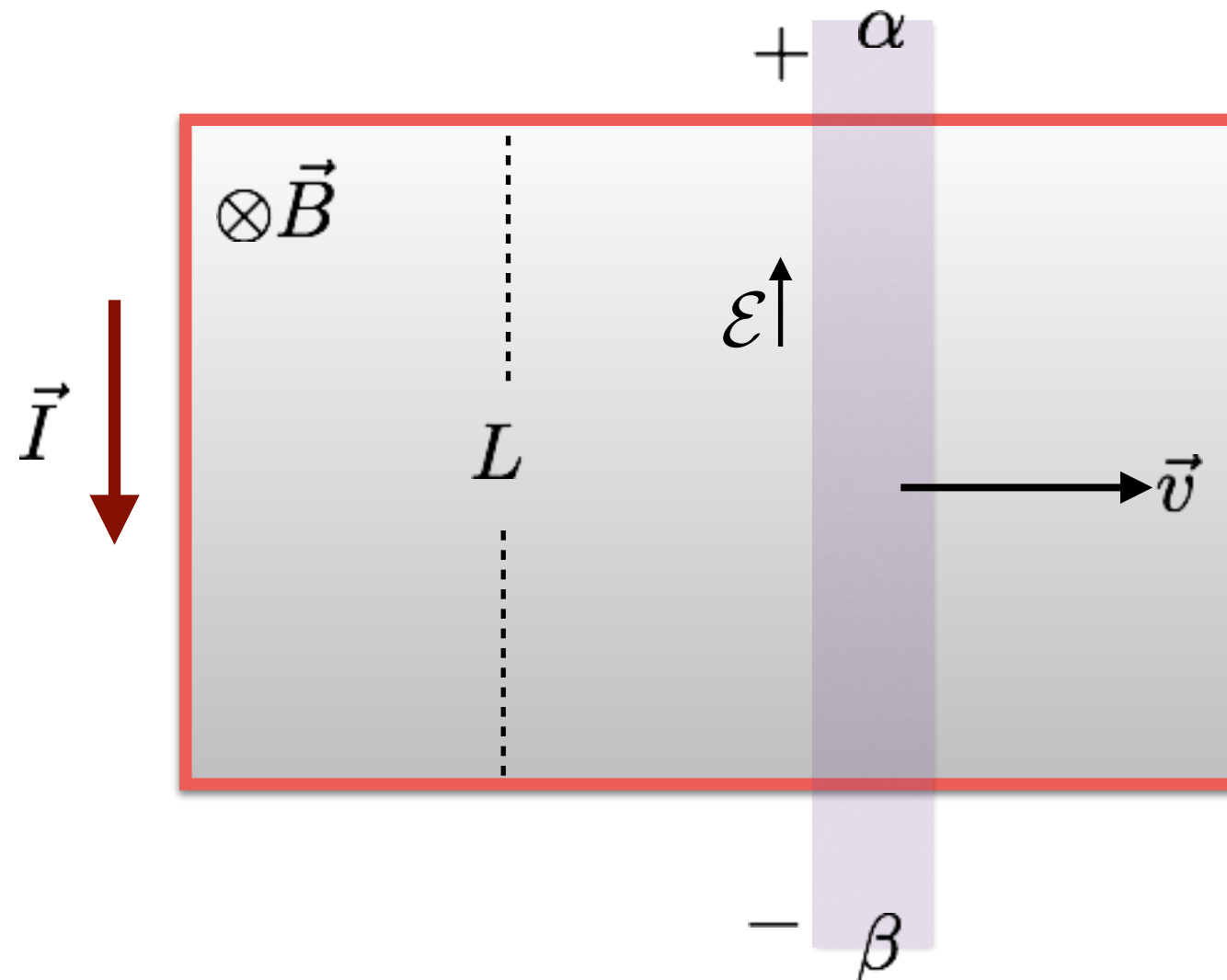
$$V_{\alpha\beta} = EL = vBL$$



Ηλεκτρεγερτική δύναμη λόγω κίνησης

- Έστω πως η ράβδος κινείται κατα μήκος συρμάτινου αγωγού.
- Η ράβδος πλέον αποτελεί πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης \mathcal{E} .

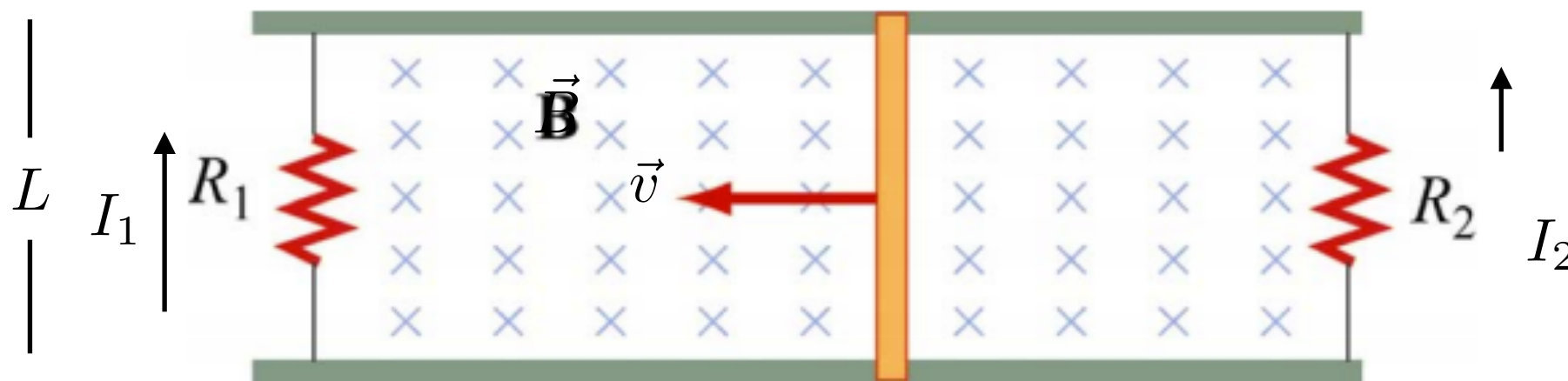
$$\mathcal{E} = V_{\alpha\beta} = vBL$$



Ηλεκτρεγερτική δύναμη λόγω κίνησης

Αγώγιμη ράβδος μήκους L κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα \vec{v} . Δυο αντιστάτες R_1 και R_2 βρίσκονται στα άκρα κυκλώματος επαπτόμενο στην ράβδο. Η διάταξη βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης \vec{B} . Υπολογίστε την μαγνητική δύναμη που δέχεται η ράβδος.

- Η ράβδος αποτελεί πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης \mathcal{E} :
$$|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi_B}{dt} = Blv$$
- Το ρεύμα που διαρρέει κάθε αντιστάτη είναι:
$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \quad , \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2}$$
- Σύμφωνα με τον κανόνα του Λεντζ: Η μαγνητική ροή στον αρ. βρόχο μειώνεται οπότε το I_1 έχει τέτοια φορά ώστε να δημιουργεί μαγνητικό πεδίο ομόρροπο με το \vec{B} . Στον δεξιό βρόχο η μαγνητική ροή αυξάνεται με αποτέλεσμα το ρεύμα που δημιουργείται να έχει τέτοια φορά ώστε να δημιουργεί μαγνητικό πεδίο αντίρροπο με το \vec{B} .



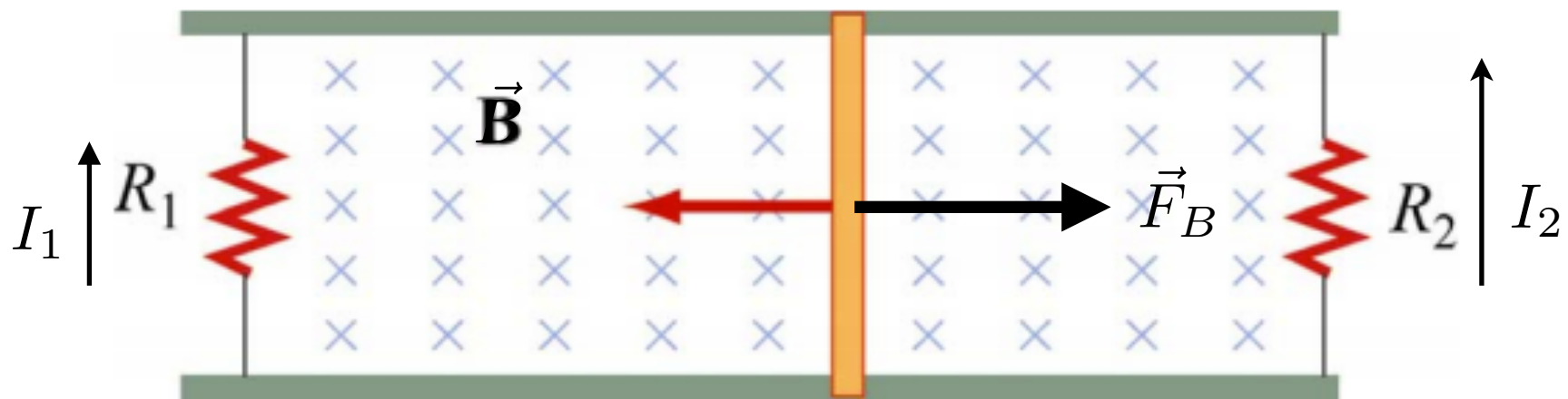
Ηλεκτρεγερτική δύναμη λόγω κίνησης

- Το συνολικό ρεύμα που διαρρέει την ράβδο είναι: $I = I_1 + I_2$

- Το μέτρο της μαγνητικής δύναμης που δέχεται η ράβδος είναι:

$$F_B = ILB = \frac{|\mathcal{E}|}{R_{tot}} LB = |\mathcal{E}| \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) LB = B^2 L^2 v \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Με κατεύθυνση προς τα δεξιά.



Ηλεκτρεγερτική δύναμη λόγω κίνησης

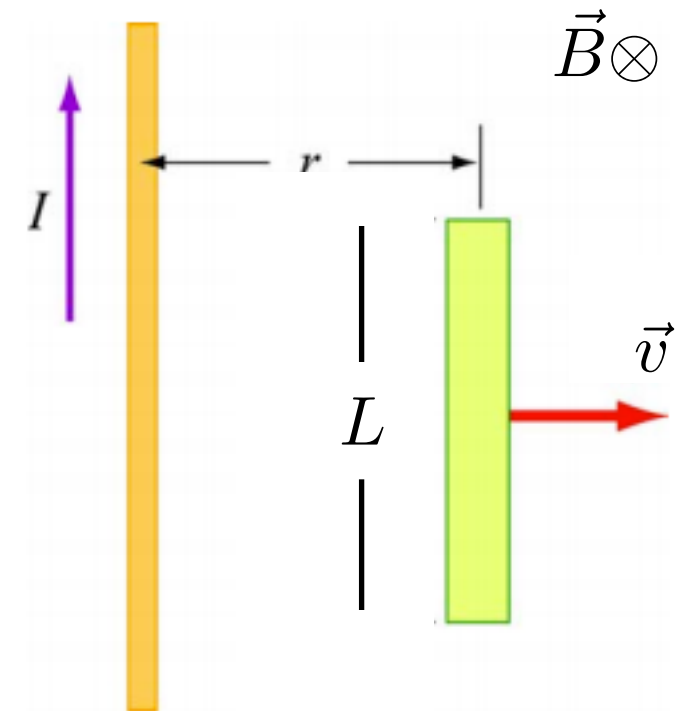
Αγώγιμη ράβδος (πράσινο) μήκους L κινείται με σταθερή ταχύτητα \vec{v} παράλληλα με ρευματοφόρο αγωγό απείρου μήκους, όπως στο σχήμα. Υπολογίστε την ΗΕΔ που αναπτύσσεται στην ράβδο.

- Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο αγωγός σε απόσταση r είναι:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- Η ράβδος αποτελεί πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης \mathcal{E} :

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi_B}{dt} = BLv = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right) Lv$$



Επαγόμενα ηλεκτρικά πεδία

Μακρύ σωληνοειδές με επιφάνεια διατομής A και n σπείρες ανά μονάδα μήκους περιβάλλεται από κυκλικό αγωγίμο βρόχο. Το γαλβανόμετρο G μετρά το ρεύμα στο βρόχο. Χρονικά μεταβαλλόμενο Ρεύμα I στις περιελίξεις του σωληνοειδούς δημιουργεί μαγνητικό πεδίο κατά μήκος του άξονα του.

- Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του σωληνοειδούς είναι:

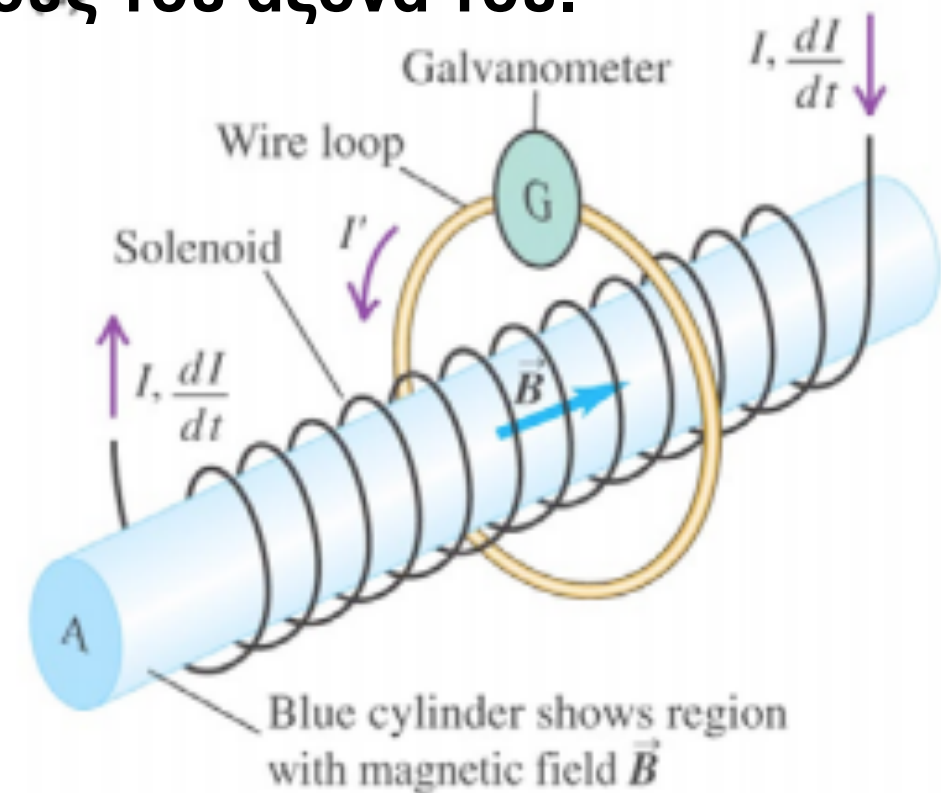
$$B = \mu_0 n I$$

- Η μαγνητική ροή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέσα από τον βρόχο είναι:

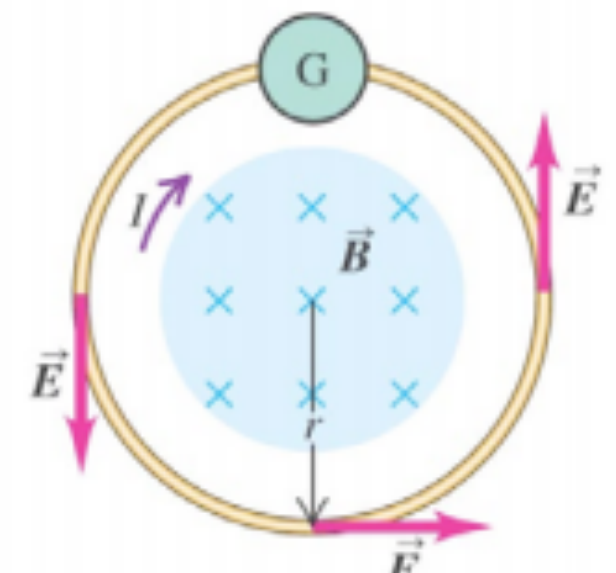
$$\Phi_B = B A = \mu_0 n I A$$

- Η επαγόμενη ΗΕΔ στον βρόχο θα είναι:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 n A \frac{dI}{dt}$$



(b)



Επαγόμενα ηλεκτρικά πεδία

- Αν η ολική αντίσταση του βρόχου είναι R , το επαγόμενο ρεύμα, I' , στον βρόχο είναι:

$$I' = \mathcal{E}/R$$

Ποια δύναμη κινεί τα ηλεκτρικά φορτία στον βρόχο;

- Αναγκαζόμαστε να θεωρήσουμε ένα **επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο** \vec{E} στον αγωγό. Αυτό προκαλείται από την **μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή**. Αυτό το ηλεκτρικό πεδίο είναι **μή-διατηρητικό**. Το έργο που παράγει το ηλεκτρικό πεδίο κατά την πλήρη περιστροφή ενός φορτίου q είναι μη-μηδενικό.
- Το έργο που παράγει το επαγόμενο πεδίο \vec{E} ανά μονάδα φορτίου στον αγωγό πρέπει να ισούται με την επαγόμενη ΗΕΔ:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}$$

- Επαναδιατυπώνουμε τον νόμο Faraday ως:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Εξισώσεις Maxwell

Οι εξισώσεις στον ηλεκτρομαγνητισμό δύναται να παρουσιαστούν με έναν ιδιαίτερο κομψό τρόπο. Οι 4 εξισώσεις Maxwell φέρουν όλη την απαιτούμενη πληροφορία και νόημα ώστε να περιγράφουν όλα τα φαινόμενα ηλεκτρομαγνητισμού.

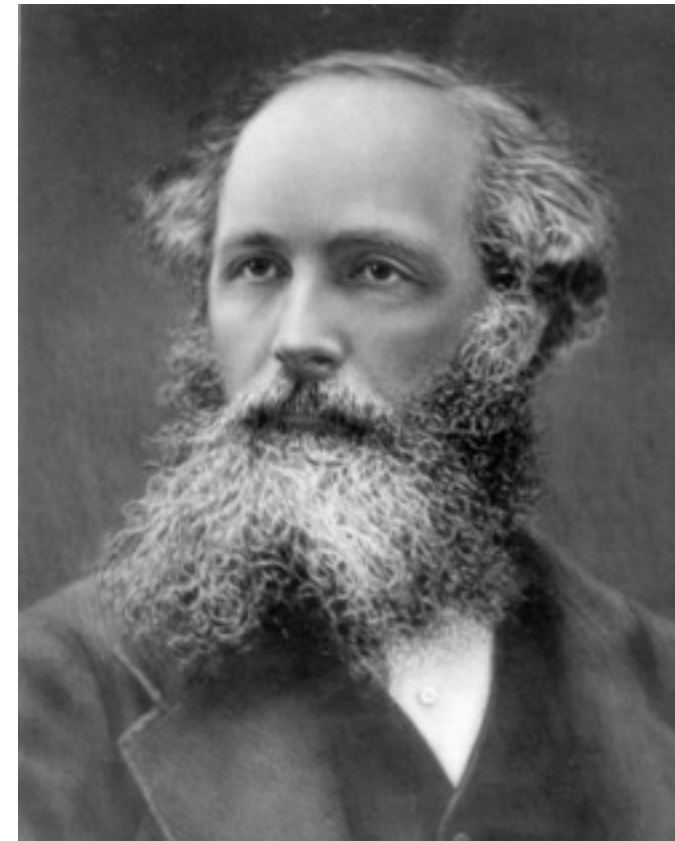
Ο Maxwell δεν ανακάλυψε αυτές τις εξισώσεις απλα τις διατύπωσε ως ένα ενιαίο σύνολο.

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$



James Clark Maxwell
(1858-1879)

... και εγένετο φώς!

Εξισώσεις Maxwell

Αυτές τις γραμμές τις έγραψε ο Θεός.

Ludwig Boltzmann

Η θεωρητική ανακάλυψη του ηλεκτρομαγνητικού κύματος, που διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός, είναι μια από τις μεγαλύτερες κατακτήσεις στην ιστορία της Επιστήμης.

Albert Einstein

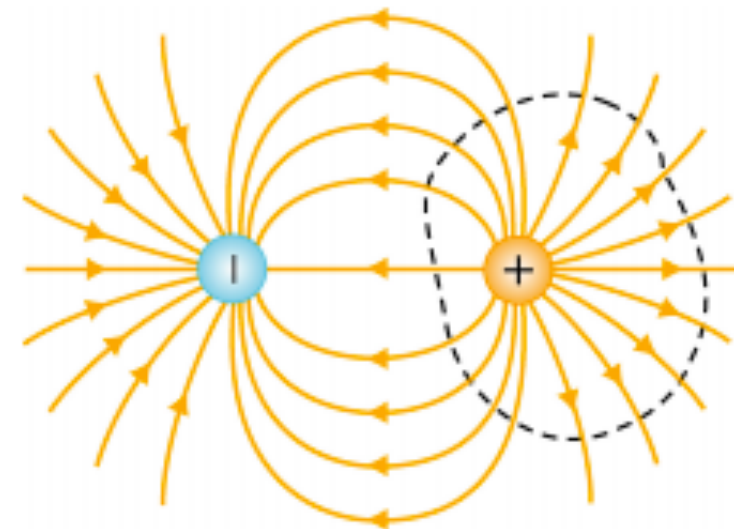
... οι εξισώσεις τού Maxwell συνθέτουν (και) το ωραιότερο ποίημα το οποίο έχει γραφτεί ποτέ στη μαθηματική γλώσσα.

Γ. Θ. Καλκάνης

Εξισώσεις Maxwell

Η πρώτη εξίσωση Maxwell αποτελεί επαναδιατύπωση του νόμου του Gauss: Το επιφανειακό ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής έντασης \vec{E} σε κλειστή επιφάνεια ισούται με το γινόμενο $\frac{1}{\epsilon_0}$ επί το ολικό φορτίο Q_{enc} που περικλείεται από την επιφάνεια.

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

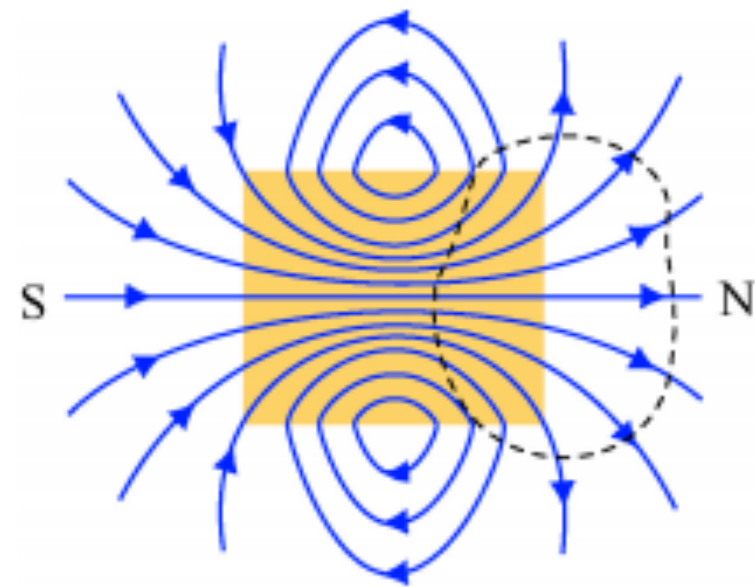


Στο κενό όπου δεν υπάρχει κάποιο φορτίο η εξίσωση γράφεται ως: $\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$

Εξισώσεις Maxwell

Η δεύτερη εξίσωση Maxwell αποτελεί τον νόμο του Gauss για τον μαγνητισμό: Το επιφανειακό ολοκλήρωμα της μαγνητικής έντασης \vec{B} σε κλειστή επιφάνεια ισούται με μηδέν. Σύμφωνα με την ποιοτική εξήγηση της εξίσωσης δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα στην φύση.

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



Εξισώσεις Maxwell

Η τρίτη εξίσωση Maxwell αποτελεί γενίκευση του νόμου του Ampere όπου έχει ληφθεί υπόψη και το ρεύμα μετατόπισης $\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ και το ρεύμα αγωγιμότητας I_C τα οποία δρούν ως πηγές μαγνητικού πεδίου.

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

Όπου Φ_E η ηλεκτρική ροή: $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$

Μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την εξίσωση για το κενό, όπου δεν υπάρχει ρεύμα αγωγιμότητας και δεν εσωκλείεται κάποιο φορτίο, με βάση τον ορισμό της ηλεκτρικής ροής ως:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Εξισώσεις Maxwell

Η τέταρτη εξίσωση Maxwell αποτελεί τον νόμο του Faraday σύμφωνα με τον οποίο μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή Φ_B επάγει ηλεκτρικό πεδίο.

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Όπου Φ_B η μαγνητική ροή: $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$

Μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την εξίσωση για το κενό ως:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Εξισώσεις Maxwell

Οι τέσσερις εξισώσεις Maxwell για το κενό:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Μεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία παράγουν ηλεκτρικά πεδία.

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία παράγουν μαγνητικά πεδία.

Από την στιγμή που παραχθούν ημιτονοειδή ηλεκτρομαγνητικά πεδία, τότε αυτά συνεχίζουν να **διαδίδονται** μόνα τους (αυτοσυντηρούνται). Το φώς είναι ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.