ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΚΡΗΤΗΣ

# Φυσική (Ηλεκτρομαγνητισμός)

Ενότητα IX:  Αυτεπαγωγή - Αμοιβαία επαγωγή

# Λέξεις κλειδιά

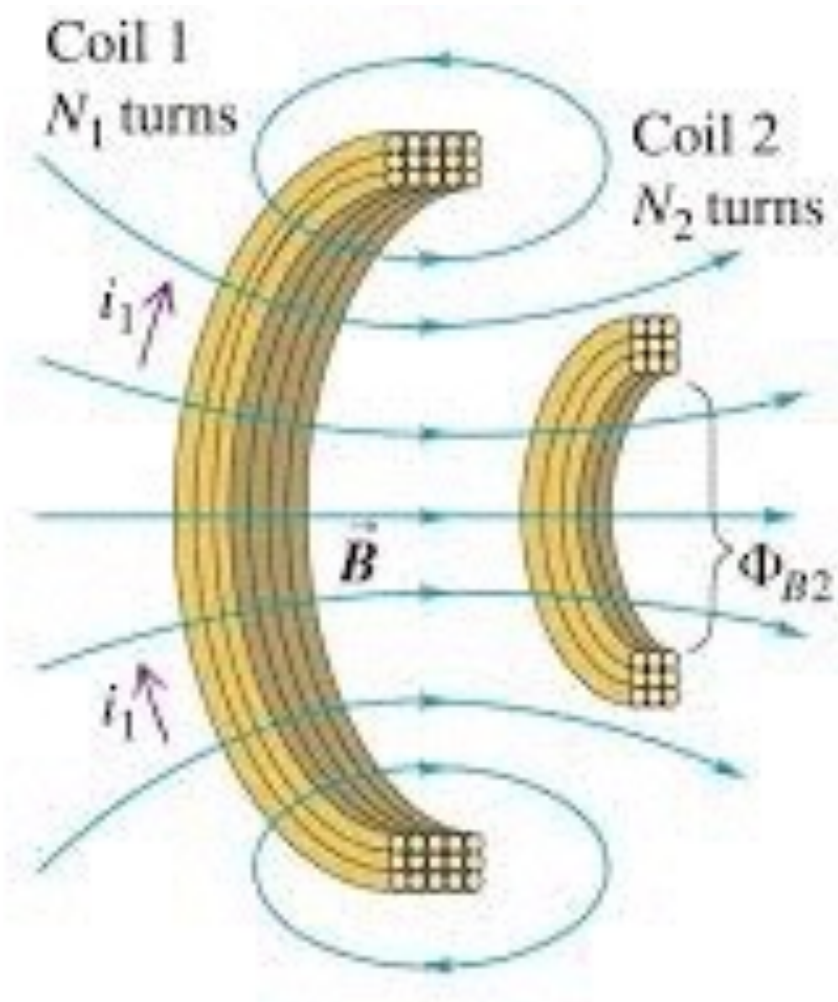
- Αμοιβαία επαγωγή, αυτεπαγωγή, πηνίο, ΗΕΔ αυτεπαγωγής, πυκνότητα ενέργειας, κύκλωμα R-L, κύκλωμα L-C, ηλεκτρική ταλάντωση

# Περιεχόμενα ενότητας

- Αμοιβαία επαγωγή
- Αυτεπαγωγή και πηνία
- Ενέργεια μαγνητικού πεδίου
- Κύκλωμα R-L
- Κύκλωμα L-C

# Αμοιβαία επαγωγή

Θεωρούμε δυο πηνία. Το πηνιο 1 τροφοδοτείται με ρεύμα $i_1$ και στο δεύτερο μετράμε την ΗΕΔ $\mathcal{E}_2$ στα άκρα του.




Μεταβαλλόμενο ρεύμα στο πηνίο 1 προκαλεί μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή στο πηνίο 2 η οποία επάγει μια ΗΕΔ:

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt}$$

Το ρεύμα $i_1$ δημιουργεί μαγνητικό πεδίο στο πηνίο 1. Ορισμένες μαγνητικές γραμμές διαπερνούν το πηνίο 2. Συμβολίζουμε με $\Phi_{B2}$ την μαγνητική ροή που περνά απο κάθε σπείρα του πηνίου 2. Η συνολική μαγνητική ροή είναι ανάλογη του ρεύματος $i_1$, οπότε ισχύει:

$$N_2 \Phi_{B2} = M_{21} i_1$$

Όπου $M_{21}$ μια σταθερά αναλογίας

# Αμοιβαία επαγωγή

Άρα: $$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{\Phi_{B2}}{dt} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

$$N_2 \Phi_{B2} = M_{21} i_1$$

Μπορούμε να επαναλάβουμε την ίδια διεργασία για την περίπτωση κατά την οποία οπου ένα μεταβαλλόμενο ρεύμα $i_2$ στο πηνίο 2 προξενεί μεταβαλλόμενη ροή $\Phi_{B1}$ και ΗΕΔ $\mathcal{E}_1$ στο πηνίο 1. Προκύπτει:

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{\Phi_{B1}}{dt} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

Ισχύει οτι: $M_{21} = M_{21} \equiv M$ , όπου **M** ορίζεται ως η **αμοιβαία επαγωγή** των πηνίων.

Επομένως: $$\mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt} \quad , \quad \mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt}$$

Η φορά της ΗΕΔ που επάγεται σε κάθε πηνίο είναι **αντίθετη** προς το ρυθμό μεταβολής του ρεύματος.

Η μονάδα αμοιβαίας επαγώγης στο SI ειναι το **1 henry** (ανρί)

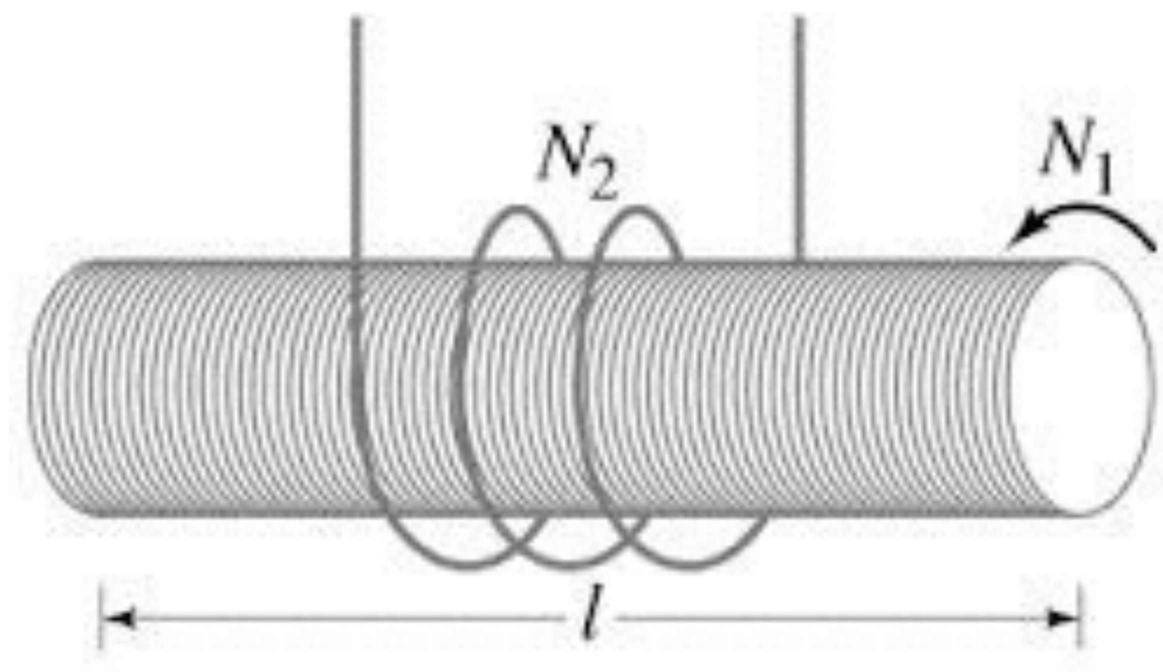
$$1H = 1Wb/A = 1V \cdot s/A = 1\Omega hm \cdot s$$

# Αμοιβαία επαγωγή

Σωληνοειδές μήκους L και εβαδού διατομής A αποτελείται απο $N_1$ σπείρες σύρματος. Ένα άλλο πηνίο με $N_2$ σπείρες περιβάλλει το πρώτο. Να βρείτε την αμοιβαία επαγωγή.

Έστω ρεύμα $i_1$ στο σωληνοειδές το οποίο δημιουργεί μαγνητικό πεδίο μέτρου $B_1$ στο κέντρο του:

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{L}$$




Η μαγνητική ροή στο κέντρο του σωληνοειδούς διέρχεται **και** απο το πηνίο. Η αμοιβαία επαγωγή M είναι:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_2 \left(B_1 A\right)}{i_1} = \frac{N_2}{i_1} \frac{\mu_0 N_1 i_1}{L} A = \boxed{\frac{\mu_0 A N_1 N_2}{L}}$$

# Αυτεπαγωγή και πηνία

Κάθε κύκλωμα που διαρρέεται απο μεταβαλλόμενο ρεύμα έχει μια επαγόμενη ΗΕΔ. Η ΗΕΔ αυτής της μορφής που οφείλεται στην μεταβολή του μαγνητικού πεδίου του ιδίου κυκλώματος ονομάζεται ΗΕΔ **αυτεπαγωγής**.

Έστω πηνίο με Ν σπείρες, που διαρρέεται απο ρεύμα i. Μαγνητική ροή $\Phi_B$ διαπερνά κάθε σπείρα. Ορίζουμε τον συντελεστή **αυτεπαγωγής L** του κυκλώματος (κατ' αναλογία με πριν):

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

ή

$$N\Phi_B = Li$$

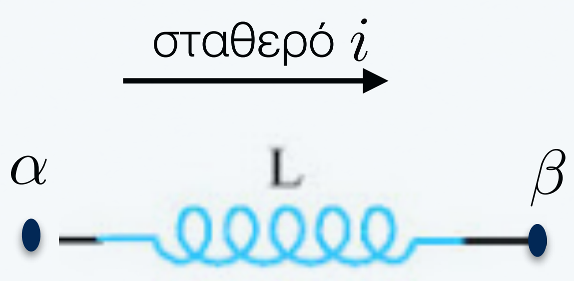
Στην περίπτωση όπου η μαγνητική ροή και το ρεύμα μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου:

$$N\frac{d\Phi_B}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

Άρα η αυτεπαγώμενη ΗΕΔ είναι:

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

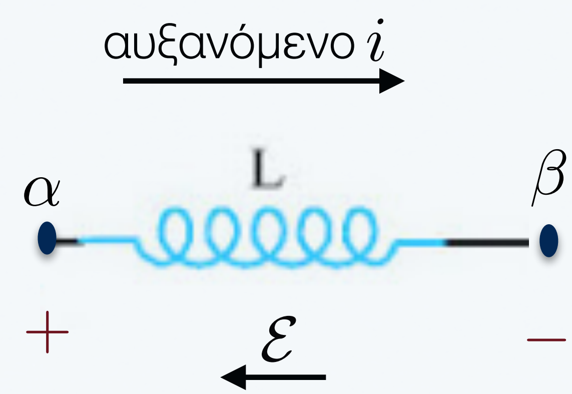
# Αυτεπαγωγή και πηνία




$$\mathcal{E} = 0$$

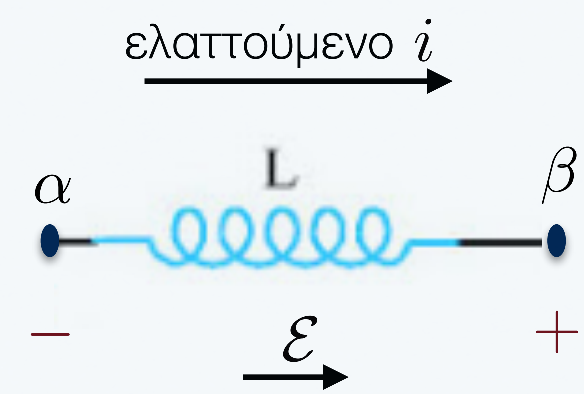
$$V_{\alpha\beta} = 0$$

$$\frac{di}{dt} = 0$$




$$V_{\alpha\beta} > 0$$

$$\frac{di}{dt} > 0$$




$$V_{\alpha\beta} < 0$$

$$\frac{di}{dt} < 0$$

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

# Αυτεπαγωγή και πηνία

Δακτυλιοειδές πηνίο, εμβαδού διατομής A και ακτίνας R φέρει N σπείρες. Το πηνίο διαρρέεται απο μεταβαλλόμενο ρεύμα i με θετικό ρυθμό μεταβολής. Προσδιορίστε τον συντελεστή αυτεπαγωγής του L και την επαγόμενη ΗΕΔ σε αυτο.

- Υποθέτουμε οτι το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται απο το ρεύμα i ειναί ομογενές σε όλη την επιφάνεια της διατομής του πηνίου. Έχουμε δείξει ότι το μέτρο του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικο του είναι:

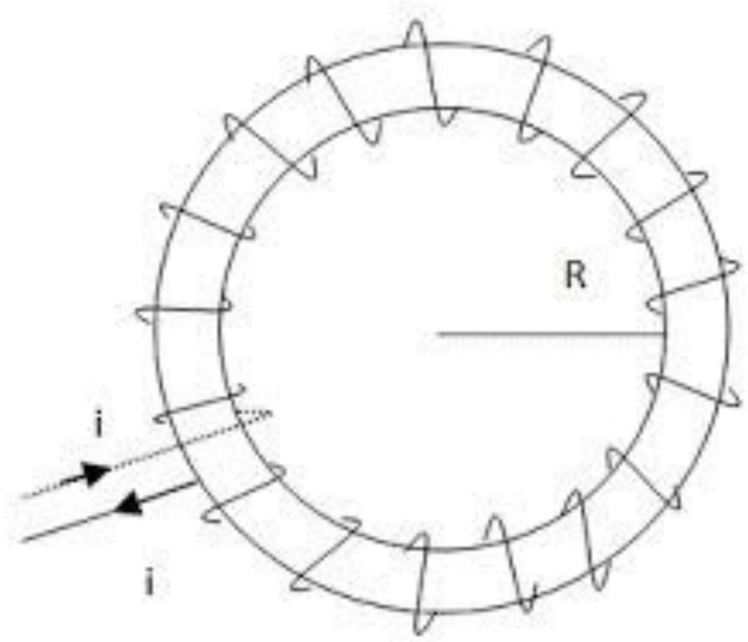
$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi R}$$

- Η ολική μαγνητική ροή σε όλη την έκταση της διατομής θα είναι:

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 N i A}{2\pi R}$$

- Η αυτεπαγωγή L είναι:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi R}$$

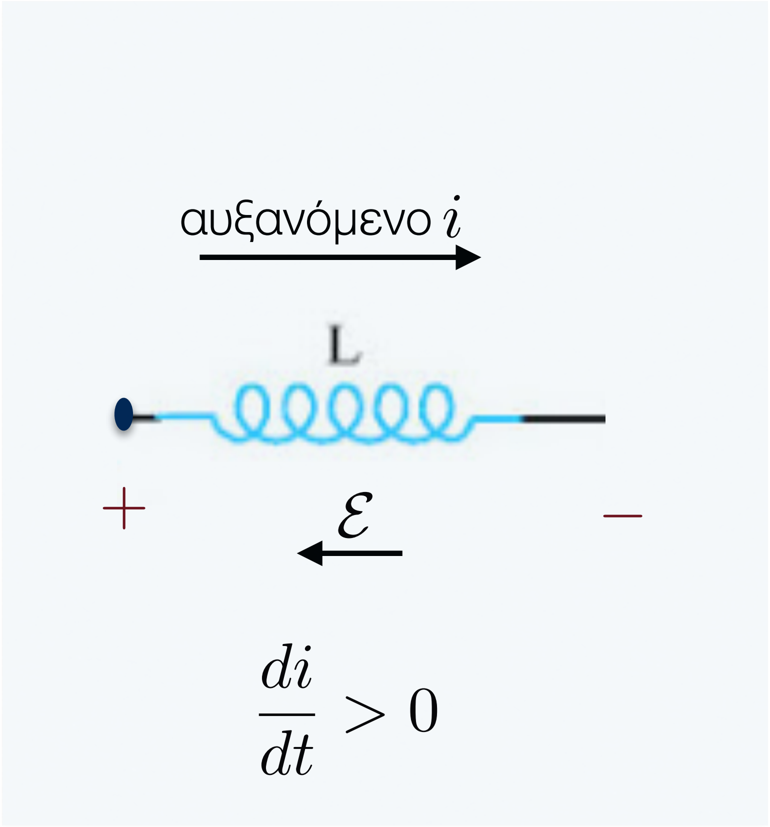


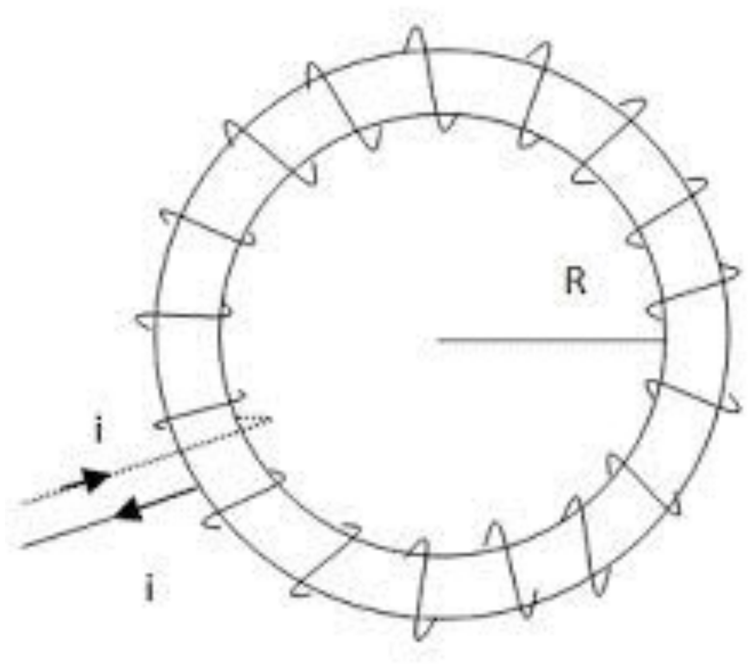

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \int dA = BA$$

# Αυτεπαγωγή και πηνία

Το ρεύμα αυξάνει οπότε σύμφωνα με τον νομο του Λεντζ , η φορά της ΗΕΔ ειναι αντίθετη προς αυτη του ρεύματος. Το μέτρο της ΗΕΔ είναι:

$$|\mathcal{E}| = |-L\frac{di}{dt}| = L\frac{di}{dt}$$

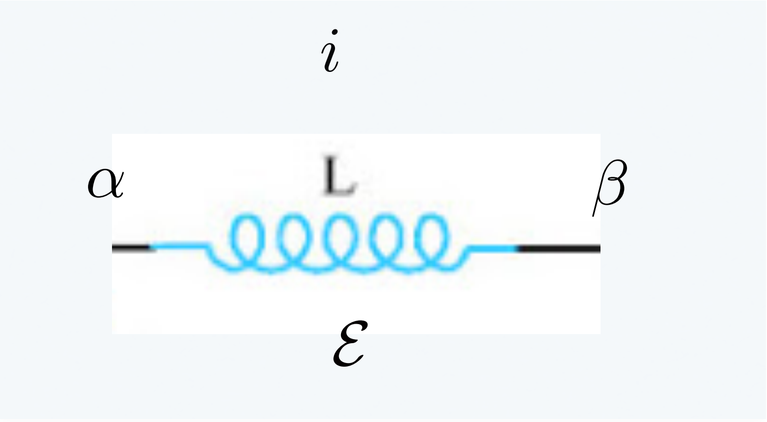


# Ενέργεια μαγνητικού πεδίου

Έστω i το ρεύμα που διαρρέει ένα πηνίο με ρυθμό μεταβολής $di/dt$. Η τάση στα άκρα του πηνίου είναι:

$$|V_{\alpha\beta}| = |\mathcal{E}| = L\frac{di}{dt}$$




Η στιγμιαία ισχύς P που παρέχεται στο κύκλωμα απο την πηγή ρεύματος θα είναι:

$$P = |V_{\alpha\beta}|i = Li\frac{di}{dt}$$

Η ενέργεια dU που παρέχεται στο πηνίο σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα dt είναι:

$$dU = Pdt = Lidi$$

Η ολική παρεχόμενη ενέργεια U καθώς το ρεύμα αυξάνει απο μηδενική εως την τελική του τιμή I υπολογίζεται ως:

$$U = \int dU = \int_0^I Lidi = L\int_0^I idi = \frac{1}{2}LI^2$$

# Πυκνότητα ενέργειας

Έστω δακτυλιοειδές πηνίο, εμβαδού διατομής A και ακτίνας R φέρει N σπείρες. Το πηνίο διαρρέεται απο μεταβαλλόμενο ρεύμα i με θετικό ρυθμό μεταβολής. Υποθέτουμε οτι το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται απο το ρεύμα i ειναί ομογενές σε όλη την επιφάνεια της διατομής του πηνίου.

- Ο όγκος V που περιβάλλεται απο τον δακτυλίο είναι: $V = 2\pi R A$

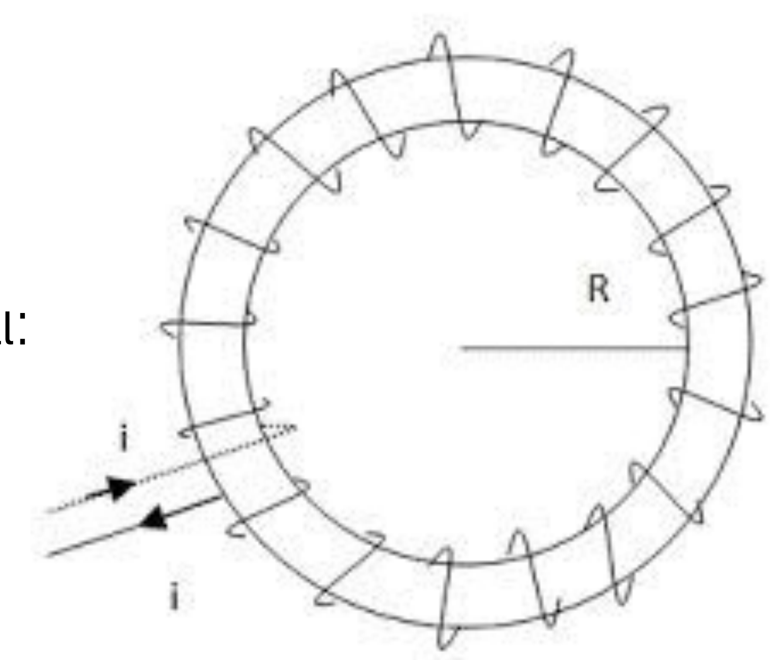
- Η αυτεπαγωγή του πηνίου έχει βρεθεί: $L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi R}$

- Η αποθηκευμένη ενέργεια U όταν το ρεύμα έχει την τιμή I είναι:

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi R} I^2$$

- Η ενέργεια ανα μονάδα όγκου (**πυκνότητα ενέργειας**) είναι:

$$u = U/V = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 I^2}{(2\pi R)^2}$$



# Πυκνότητα ενέργειας μαγνητικού πεδίου

Η πυκνότητα ενέργειας μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του μαγνητικού πεδίου B.

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R} \rightarrow \frac{N^2 I^2}{(2\pi R)^2} = \frac{B^2}{\mu_0^2}$$

Οπότε έχουμε:

$$\boxed{u = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

Στην περίπτωση όπου το υλικό εντός του πηνίου δεν είναι το κενό αλλά ένα υλικό μαγνητικής διαπερατότητας $\mu = K\mu_0$ η ενέργεια ανά μονάδα όγκου είναι:

$$u = \frac{B^2}{2\mu}$$

$$\boxed{u = U/V = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 I^2}{(2\pi R)^2}}$$

# Εφαρμογές

Να υπολογίσετε την αυτεπαγώγη L που θα έπρεπε να έχει πηνίο ικανό να αποθηκεύση ενέργεια 1,00 KWh όταν διαρρέεται από ρεύμα 200A ( για σύγκριση η ενέργεια ανα μονάδα όγκου απο την καύση βενζίνης είναι 3.5*10^10 J/m^3)

Έχουμε: $$U = 1,00KWh = 1,00 \times 10^3 W(3600s) = 3,6 \times 10^6 J$$

Η αποθηκευμένη ενέργεια στο πηνίο όταν αυτο διαρρέεται απο ρεύμα I είναι:

$$U = \frac{1}{2} L I^2 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad L = \frac{2U}{I^2} \quad L = \frac{2(3,6 \times 10^6 J)}{(200A)^2} = 180H$$

Ένα τέτοιο πηνίο κατασκευασμένο απο απο σύνηθες σύρμα (ικανό να μεταφέρει ρεύμα 200A) θα είχε μέγεθος δωματίου ενώ ένα υπεραγώγιμο πηνίο ίδιων χαρακτηριστικών θα είχε αρκετά μικρότερο μέγεθος.

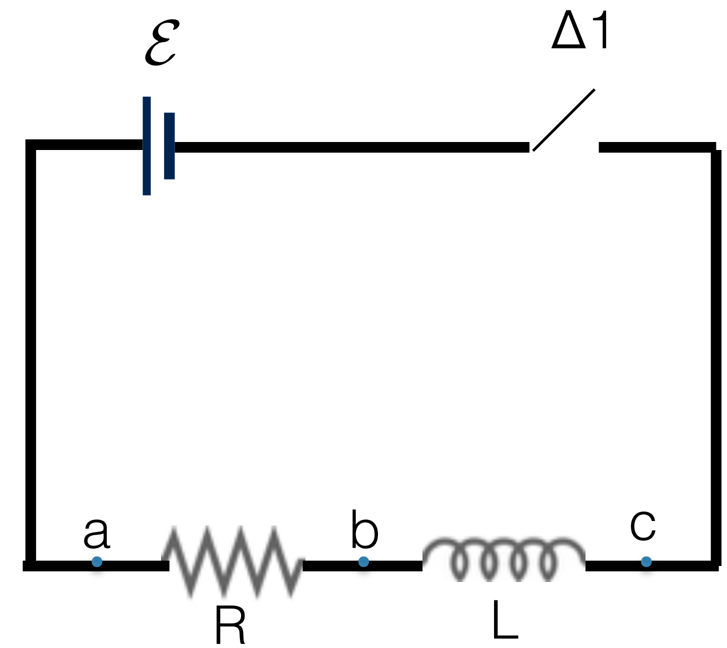
# Εφαρμογές

Ο υπεραγώγιμος υπερ-επιταχυντής συγκρουόμενων δεσμών σωματιδίων (superconducting supercollider) σχεδιάζονταν για να έχει ηλεκτρομαγνήτες κάμψεως δέσμης ικανούς να δημιουργήσουν μαγνητικό πεδιο 6,6T. Βρείτε ποιά θα πρέπει να είναι η πυκνότητα ενέργειας στο κενό του σωλήνα επιτάχυνσης ωστε να παραχθεί αυτο το μαγνητικό πεδιο.

Στο κενό ισχύει: $$u = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(6,6T)^2}{2(4\pi \times 10^{-7} T \cdot m/A)} = 1,73 \times 10^7 J/m^3$$

# Το κύκλωμα R-L

Θεωρούμε κύκλωμα R-L όπως στο σχήμα. Υποθέτουμε οτι αρχικά ο διακόπτης Δ1 ειναι ειναι ανοιχτός και οτι σε κάποια χρονικη στιγμή t=0 κλείνει.




Το ρεύμα i **δεν** μεταπηδά κατευθείαν σε μια τελική τιμή καθώς σε αυτή την περίπτωση η επαγώμενη ΗΕΔ θα ήταν άπειρη. Άρα το ρεύμα αρχίζει να αυξάνεται με κάποιο ορισμένο ρυθμό (εξαρτόμενο από το L).

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πηνίου κάποια χρονική στιγμή t είναι:

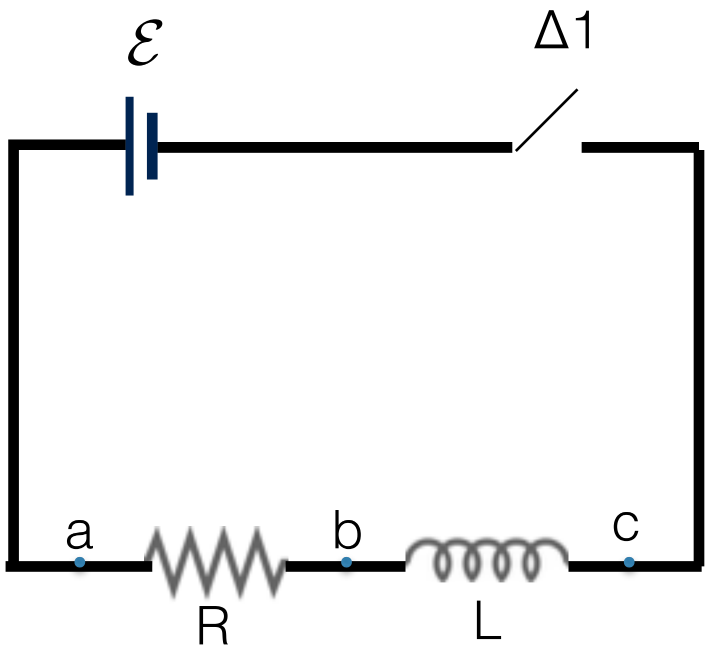
$$V_{bc} = L\frac{di}{dt}$$

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αντιστάτη R είναι:

$$V_{ab} = iR$$

# Το κύκλωμα R-L

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο κανόνα (τάσεων) του Kirchoff έχουμε:




$$\mathcal{E} - iR - L\frac{di}{dt} = 0 \;\rightarrow\; \boxed{\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E} - iR}{L} = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}i}$$

Την χρονική στιγμη t=0 όπου ο διακόπτης Δ1 κλείνει , i=0. Άρα ο αρχικός ρυθμός μεταβολής του ρεύματος είναι:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

Όταν το ρεύμα φθάσει στην τελική σταθερή τιμή του I , ο ρυθμός μεταβολής του μηδενίζεται:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{tf} = 0 = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}I \;\rightarrow\; I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

# Το κύκλωμα R-L

Για να βρούμε την εξίσωση του στιγμιαίου ρεύματος i συναρτήσει του χρόνου πρέπει να λύσουμε την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση. Αυτό το κάνουμε χωρίζοντας τις μεταβλητές στα δυο μέλη

$$\boxed{\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}i} \rightarrow \frac{di}{i - (\mathcal{E}/R)} = -\frac{R}{L}dt$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε:

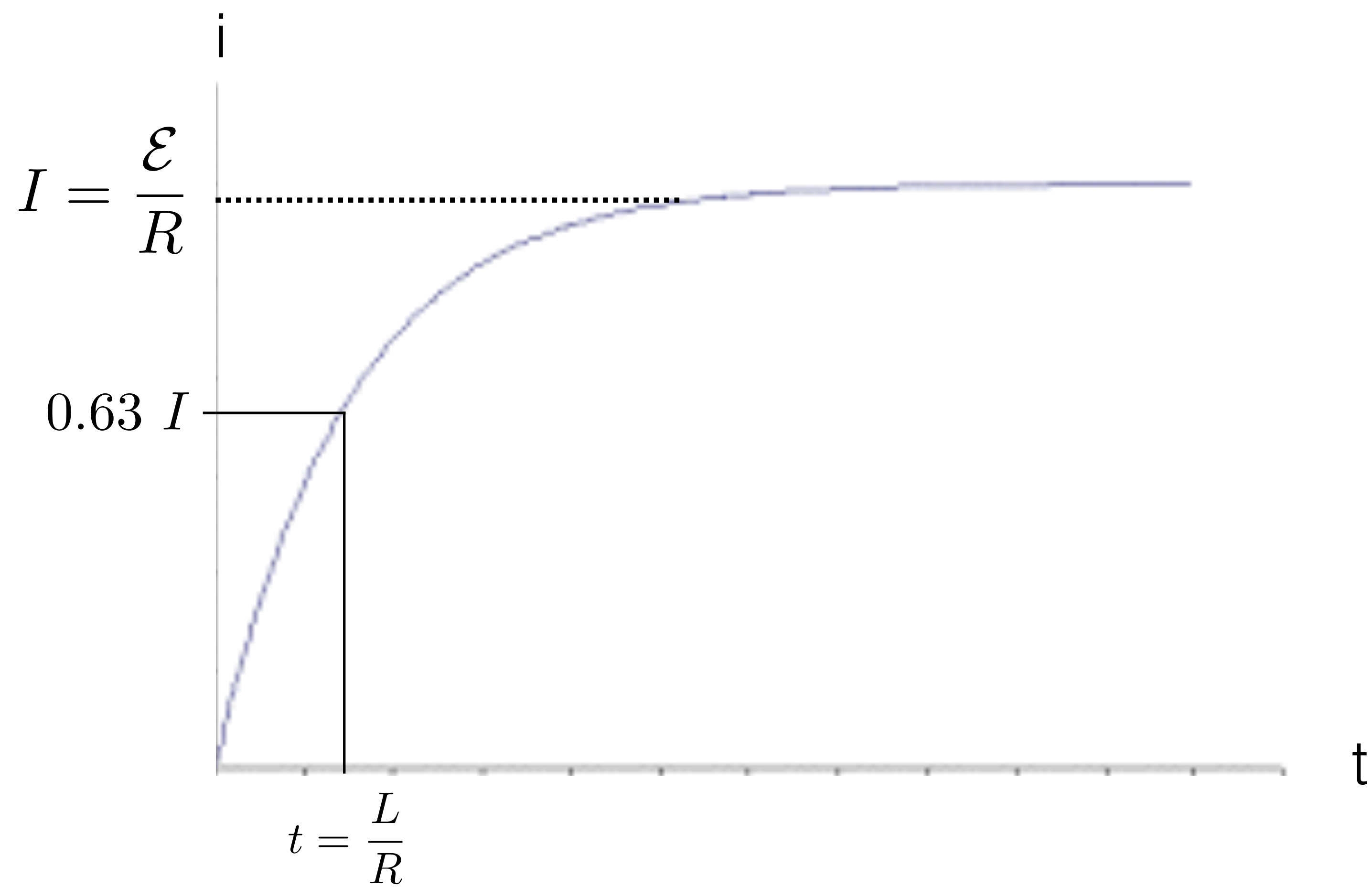
$$\int_0^i \frac{di'}{i' - (\mathcal{E}/R)} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt' \rightarrow ln\Big(\frac{i - \mathcal{E}/R}{-\mathcal{E}/R}\Big) = -\frac{R}{L}t$$

Η εκθετική μορφή της άνωθεν εξίσωσης είναι:

$$\boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1 - e^{-(R/L)t}\Big)}$$

# Το κύκλωμα R-L

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)$$




Σε χρόνο **τ=L/R** , το ρεύμα έχει αυξηθεί στο 0,63 της τελικής μέγιστης τιμής του. Ο χρόνος αυτός ονομάζεται **σταθερά χρόνου** του κυκλώματος.

# Το κύκλωμα R-L

Καθώς το ρεύμα μειώνεται σε κύκλωμα R-L να υπολογίσετε τι κλάσμα της αρχικής ενέργειας στο πηνίο έχει καταναλωθεί μετά απο 2,3 σταθερές χρόνου.

- Το στιγμιαίο ρεύμα i είναι: $i = I_0 e^{-(R/L)t}$ , όπου $I_0$ το αρχικό ρεύμα την χρονική στιγμη t=0

- Η στιγμιαία ενέργεια U στο πηνίο είναι: $U = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LI_0^2 e^{-2(R/L)t} = U_0 e^{-2(R/L)t}$

  Όπου $U_0$ η αρχική ενέργεια τη χρονική στιγμή t=0.

- Η ενέργεια στο πηνίο μετά απο 2,3 σταθερές χρόνου t=2,3τ=2,3(L/R) θα είναι:

$$U = U_0 e^{-2(2,3)} = U_0 e^{-4,6} = 0,010 U_0$$

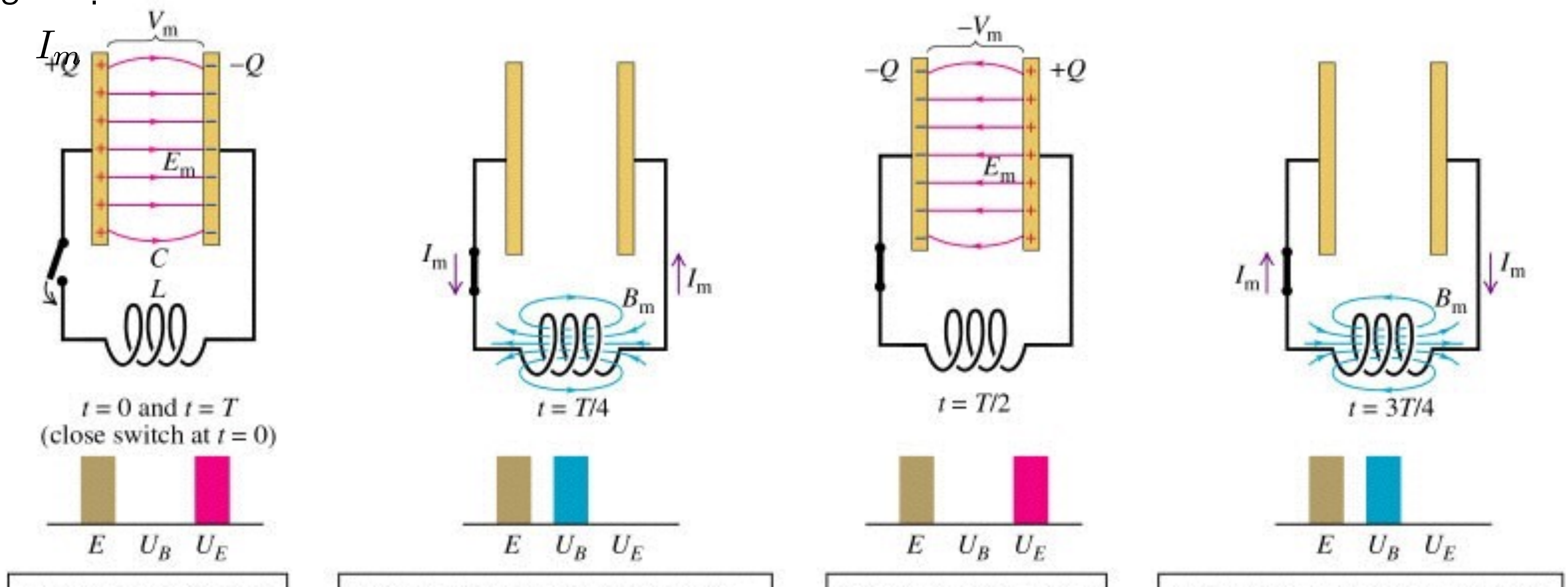
- Άρα μόνο το 1% της αρχικής ενέργειας παραμένει στο κύκλωμα.

# Το κύκλωμα L-C

Θεωρούμε κύκλωμα L-C όπως στο σχήμα. Αρχικά ο πυκνωτής ειναι φορτισμένος με διαφορά δυναμικού $V_m$ και αρχικό φορτίο $Q = CV_m$. Την χρονική στιγμή t=0 κλείνουμε τον διακόπτη.

Ο πυκνωτής αρχίζει να **εκφορτίζεται**. Το ρεύμα στο κύκλωμα αυξάνεται σταδιακά (εξαιτίας της επαγόμενης ΗΕΔ στο πηνίο).

Κάθε χρονική στιγμή η τάση στα άκρα του πυκνωτή ισούται με την επαγόμενη ΗΕΔ. Καθώς ο πυκνωτής εκφορτίζεται , ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος ελαττώνεται. Όταν η τάση στον πυκνωτή γίνει ίση με **μηδέν**, η επαγόμενη ΗΕΔ μηδενίζεται και το ρεύμα φτάνει στην **μέγιστη** τιμή του $I_m$.



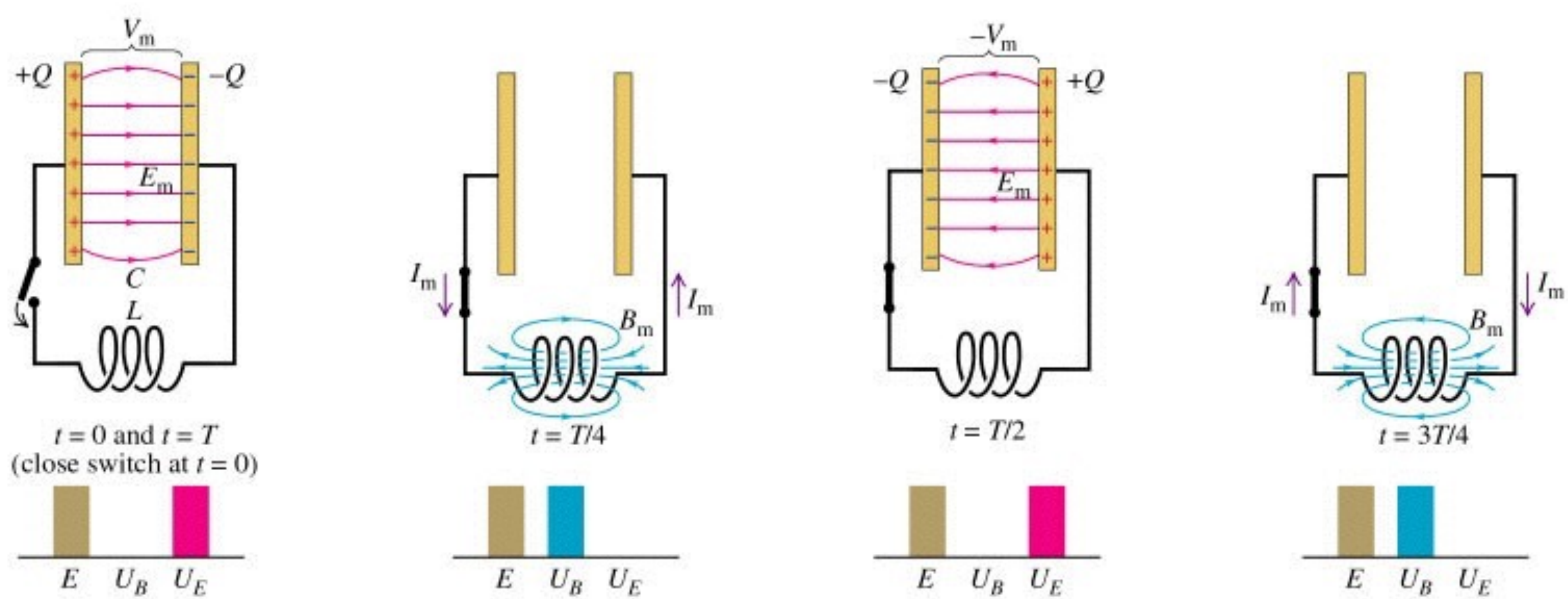
# Το κύκλωμα L-C

Κατά την εκφόρτιση του πυκνωτή το αυξανόμενο ρεύμα στο πηνίο δημιουργεί μαγνητικό πεδίο. Η ηλεκτρική ενέργεια που ήταν αρχικα αποθηκευμένη στον πυκνωτή **μεταφέρθηκε** στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου.

Το ρεύμα πλέον μειώνεται και φορτίζει τον πυκνωτή με αντίθετη πολικότητα. Καθώς το ρεύμα ελλατώνεται μειώνεται και το μαγνητικό πεδίο στο πηνίο επάγοντας ΗΕΔ ί**διας φορας** με αυτή του ρεύματος.

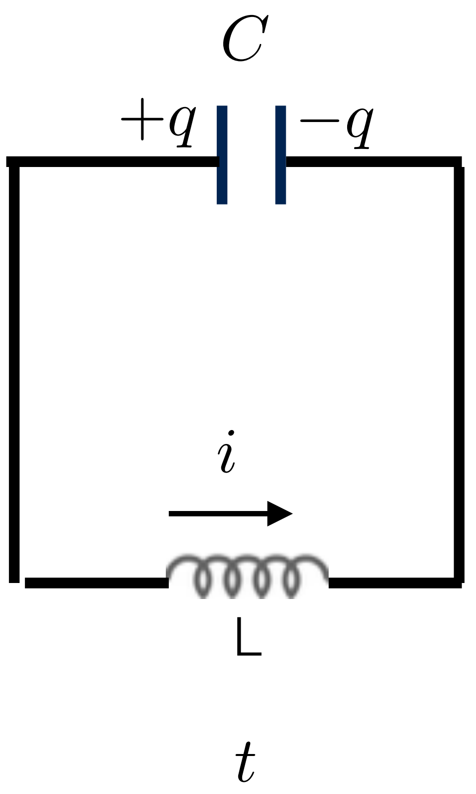
Το ρεύμα και το μαγνητικό πεδίο φθάνουν στο μηδέν και ο πυκνωτής ειναι **πλήρως φορτισμένος** (φορτίο Q) και με **αντιθέτη** πολικότητα.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται κατα την αντίθετη φορά. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται **ηλεκτρική ταλάντωση**.



# Ταλαντώσεις στο κύκλωμα L-C

Θεωρούμε πηνίο αυτεπαγωγής L συνδεδεμένο με φορτισμένο πυκνωτή χωρητικότητας C και μέγιστου φορτίου Q.




Εφαρμόζοντας τον δεύτερο κανόνα (τάσεων) του Kirchoff έχουμε:

$$-L\frac{di}{dt} - \frac{q}{c} = 0$$

Ισχύει: $i = \frac{dq}{dt}$ , $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$

Οπότε: $$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Λύνοντας προκύπτει: $q = Q\cos\left(\omega t + \phi\right)$ Όπου: $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Το στιγμαίο ρεύμα είναι: $$i = \frac{dq}{dt} = -\omega Q\sin(\omega t + \phi)$$

# Το κύκλωμα L-C

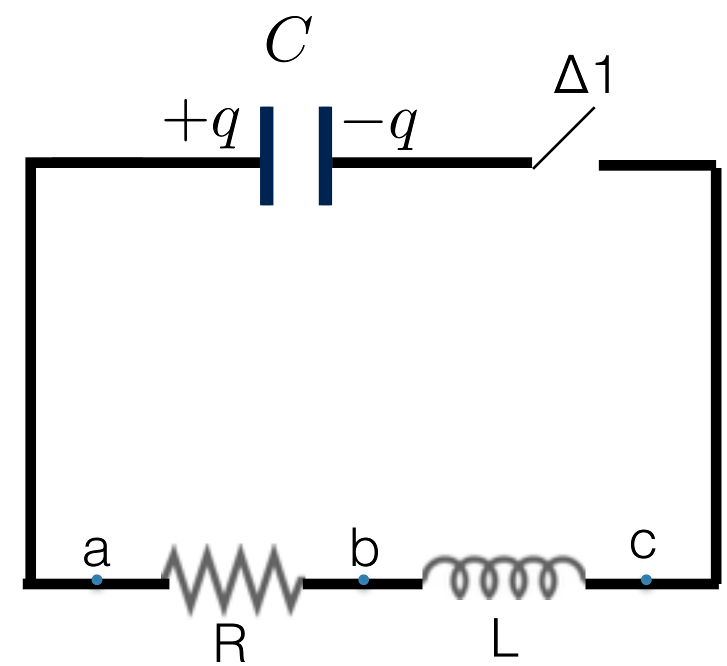
Κάθε χρονική στιγμή το άθροισμα της ενέργειας του πυκνωτή συν της ενέργειας του πηνίου παραμένει σταθερό και ίσο με την μέγιστη ενέργεια του πυκνωτή ή του πηνίου:

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}LI^2 \rightarrow$$

$$i = \pm\sqrt{\frac{1}{LC}\left(Q^2 - q^2\right)}$$

# Το κύκλωμα R-L-C

Υποθέτουμε πηνίο αυτεπαγωγής L και αντιστάτης R συνδέονται σε σειρά με φορτισμένο πυκνωτή χωρητικότητας C και μέγιστου φορτίου Q.




Κλείνουμε τον διακόπτη Δ1 και εφαρμόζουμε τον δεύτερο κανόνα (τάσεων) του Kirchoff :

$$-iR - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{c} = 0 \;\rightarrow\; \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης για την ειδική περίπτωση οπου $R^2 < \dfrac{4L}{C}$ είναι:

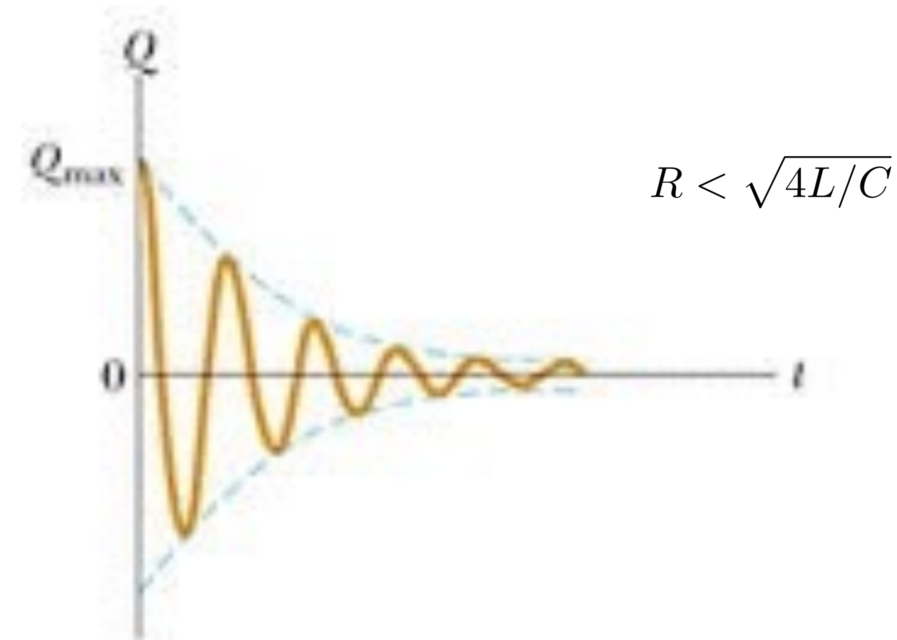
$$q = Qe^{-(R/2L)t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t + \phi\right)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει αποσβυνόμενη ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα:

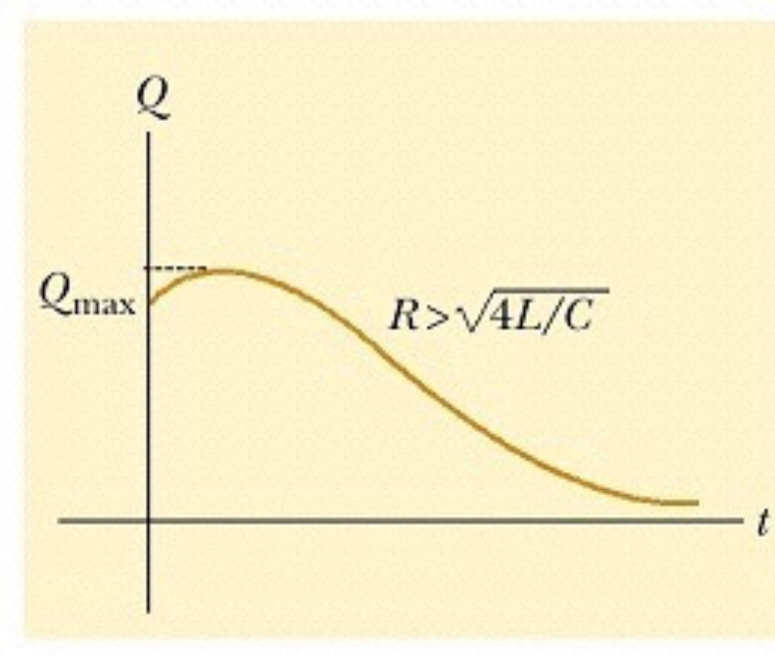
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

# Το κύκλωμα R-L-C

Εάν η αντίσταση R είναι σχετικά μικρή , το κύκλωμα εκτελεί φθίνουσα αρμονική ταλάντωση (υποκρίσιμα αποσβυνόμενο σύστημα). Εάν αυξήσουμε το R οι ταλαντώσεις τερματίζονται ταχύτερα.




Για μεγάλη τιμή του R το κύκλωμα δεν ολοκληρώνει ταλάντωση (κρίσιμα αποσβενόμενο).



# Το κύκλωμα R-L-C

Τι αντίσταση απαιτείται (συναρτήσει τών L και C) για να δώσει σε ένα κύκλωμα L-R-C συχνότητα που να ισούται με το μισό της μή-αποσβενόμενης συχνότητας.

- Θέλουμε η γωνιακή συχνότητα ω’ του κυκλώματος L-R-C να γίνει ίση με το μισό της μή αποσβενόμενης γωνιακής συχνότητας ω:

$$\omega' = \frac{1}{2}\omega \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{3L}{C}}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$