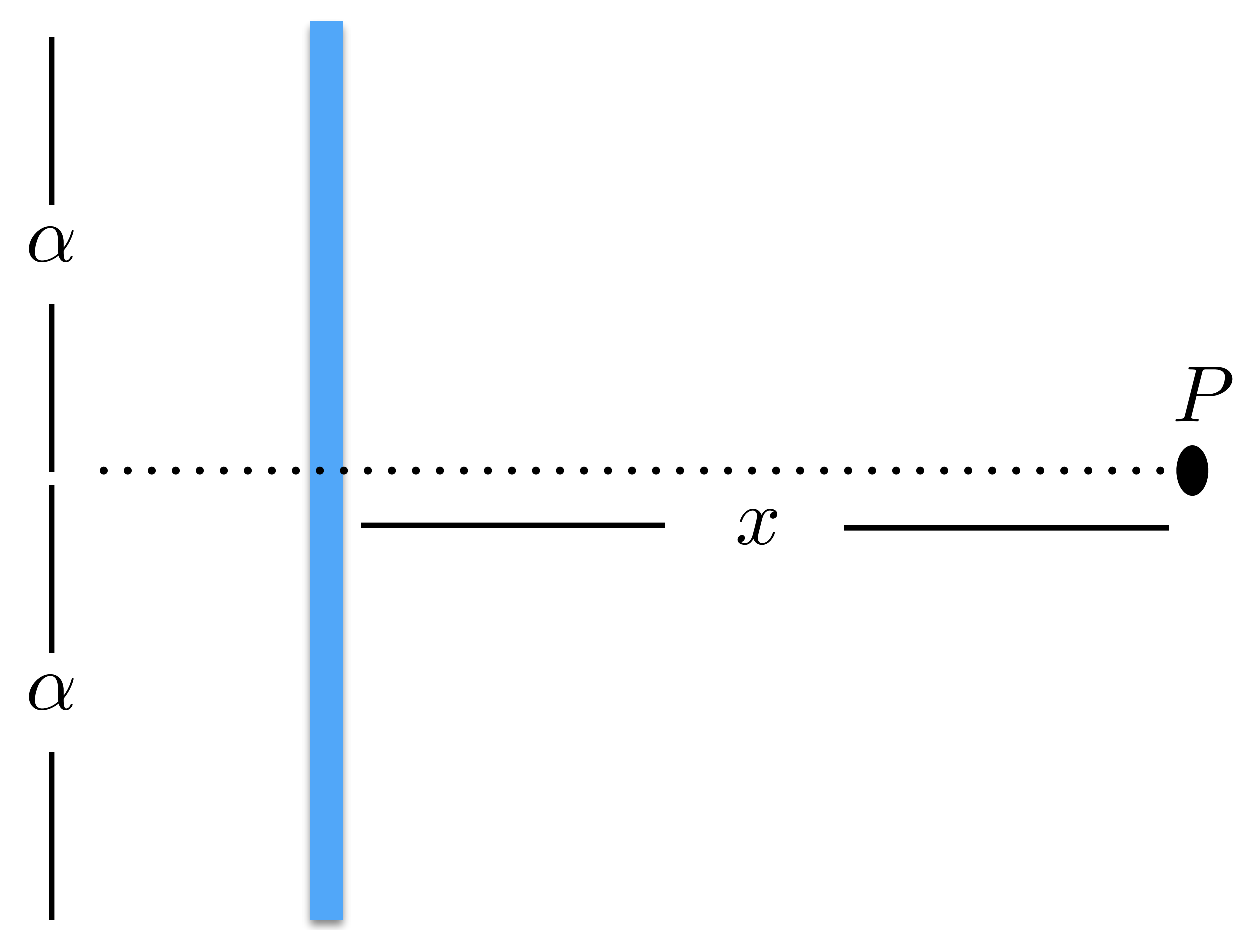
Ασκήσεις I

Άσκηση Ι: Πεδίο γραμμικής κατανομής φορτίου

Ηλεκτρικό φορτίο q κατανέμεται ομογενώς σε γραμμή με μήκος 2α που βρίσκεται πάνω στον άξονα y. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο P του άξονα x που απέχει απόσταση x απο την αρχή.



- Διαμερίζουμε τη γραμμή σε απειροστά (στοιχειώδεις) τμήματα μήκους dy τα οποία φέρουν φορτίο dq. Για να βρούμε το φορτίο, dq, καθε απειροστού τμήματος ορίζουμε την γραμμική πυκνότητα φορτίου ως:

$$\lambda \equiv \frac{dq}{dy} = \frac{q}{2\alpha} \rightarrow dq = \frac{q}{2\alpha}dy$$

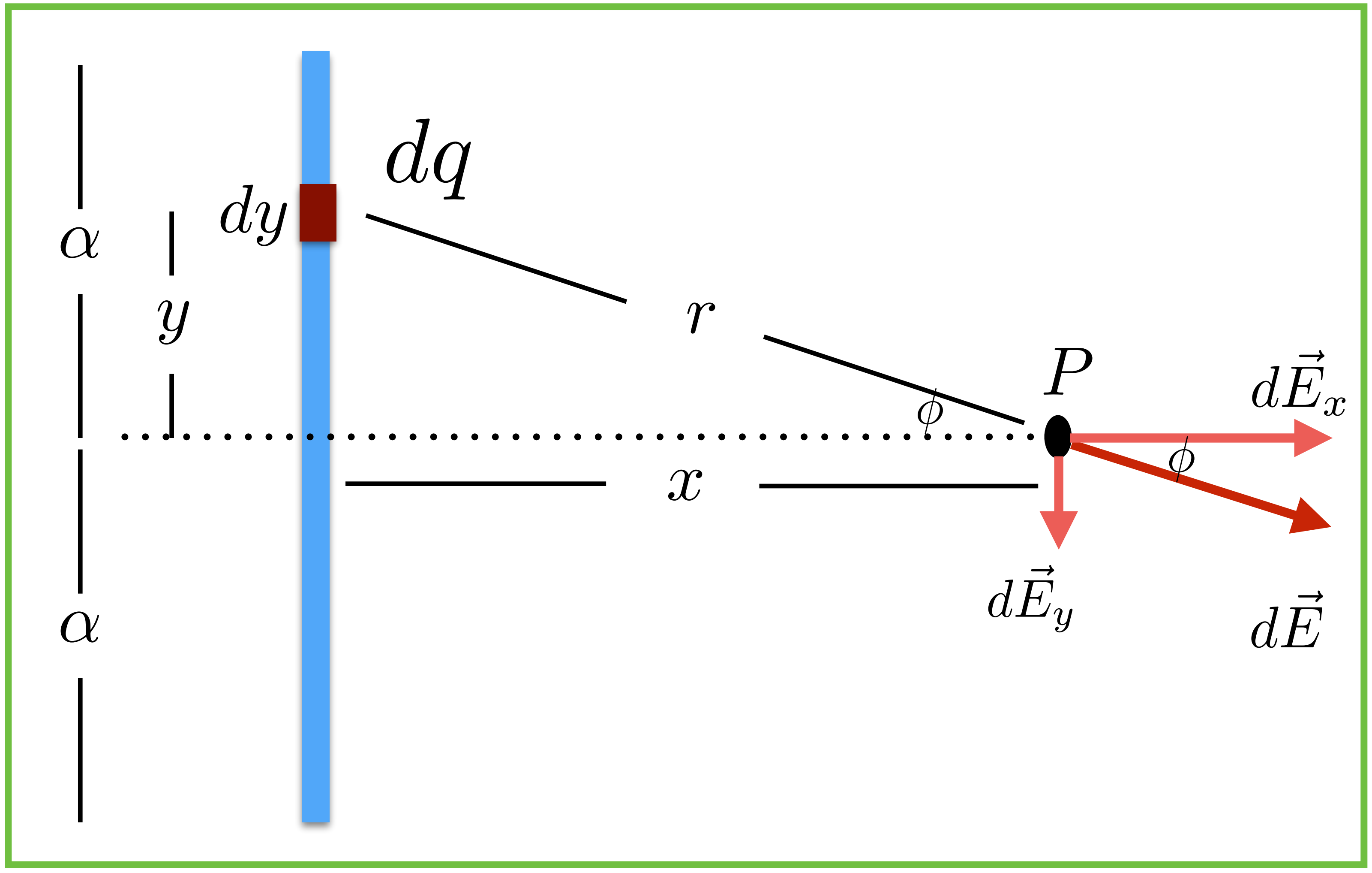
- Η απόσταση r του σημείου P απο ένα στοιχειώδες τμήμα μήκους dy και απόστασης y απο την αρχή ειναι:

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

- Το μέτρο, dE του πεδίου στο P, που οφείλεται στο στοιχειώδες τμήμα, είναι:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\ dy}{2\alpha(x^2+y^2)}$$



- Το πεδίο $d\vec{E}$ έχει συνιστώσες με μέτρο:

$$dEx = dE\cos\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\ dy}{2\alpha(x^2+y^2)}\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{xdy}{2\alpha(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dEy = dE\sin\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\ dy}{2\alpha(x^2+y^2)}\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{ydy}{2\alpha(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- Για να βρούμε τις συνιστώσες του ολικού πεδίου, ολοκληρώνουμε αυτές τις εκφράσεις:

$$E_x = \int dEx = \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\ dy}{2\alpha(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\ x}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x\sqrt{x^2+\alpha^2}}$$

$$E_y = \int dEy = \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y\ dy}{2\alpha(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{y\ dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

- Σε διανυσματική μορφή το πεδίο στο σημείο P είναι:

$$\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x\sqrt{x^2+\alpha^2}}\hat{i}$$

- Για x>>α, ισχύει:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x^2}\hat{i}$$

Άσκηση ΙΙ:

Δύο πανομοιότυπες, ηλεκτρικά απομονωμένες σφαίρες Α και Β βρίσκονται σε απόσταση α που είναι μεγάλη σε σύγκριση με τις σφαίρες. Η σφαίρα Α έχει θετικό φορτίο +Q και η σφαίρα Β είναι ηλεκτρικα ουδέτερη. Αρχικά, δεν υπάρχει ηλεκστροστατική δύναμη μεταξύ των σφαιρών.

(α) Υποθέστε οτι οι σφαίρες συνδέονται στιγμιαία με ένα αγώγιμο σύρμα. Το σύρμα είναι αρκετά λεπτό ώστε οποιοδήποτε συνολικό φορτίο σε αυτό να θεωρείται αμελητέο. Πόση είναι η ηλεκτροστατική δύναμη μεταξύ των σφαιρών αφού αφαιρεθεί το σύρμα;

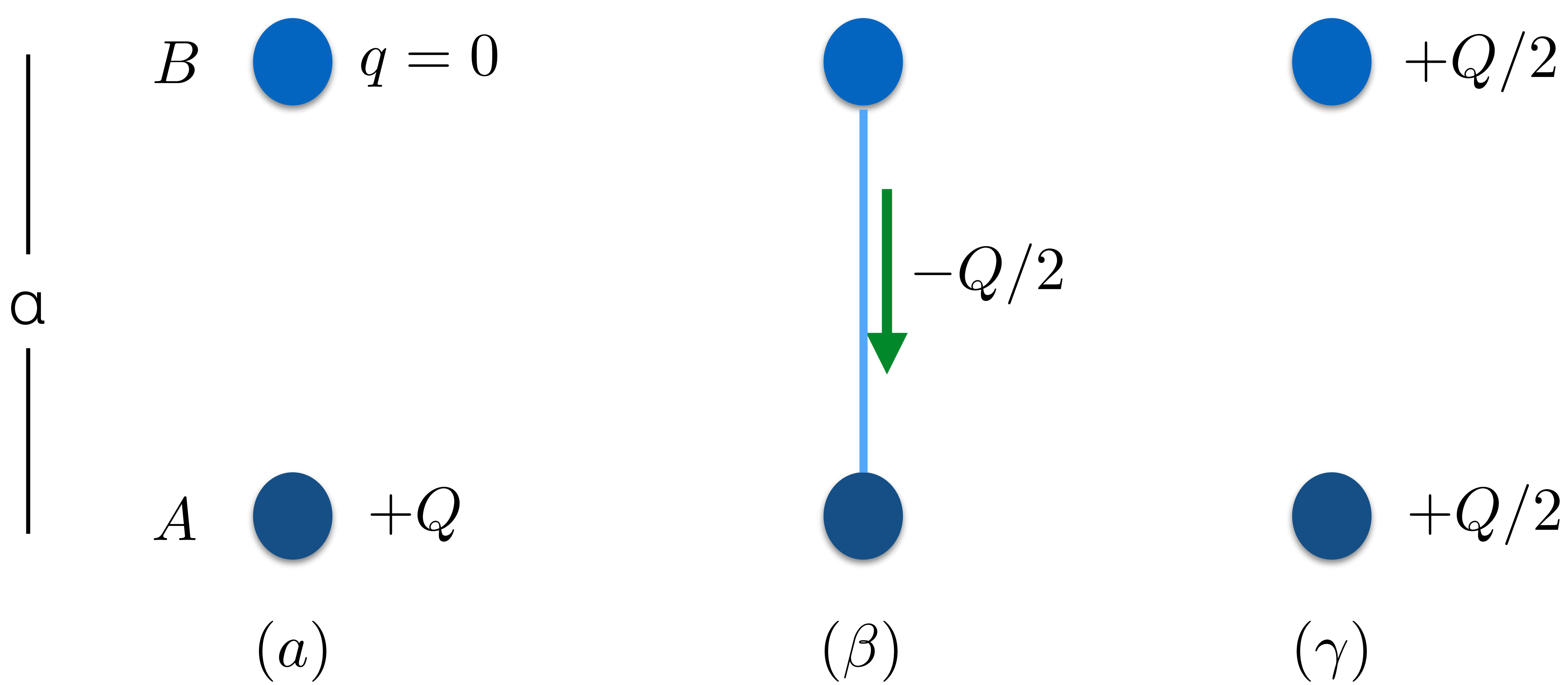
(β) Στη συνέχεια, υποθέστε ότι η σφαίρα Α γειώνεται στιγμιαία και κατόπιν η σύνδεση με το έδαφος αφαιρείται. Πόση ειναι τώρα η ηλεκτροστατική δύναμη μεταξύ των σφαιρών;

(α) Όταν οι σφαίρες ενώνονται με το σύρμα, τα ηλεκτρόνια στη σφαίρα B (τα οποία απωθούν το ένα το άλλο), έχουν μια διέξοδο ώστε να κινηθούν μακριά το ένα απο το άλλο (κατα μήκος του σύρματος προς την θετικά φορτισμένη σφαίρα A η οποία τα έλκει).

Καθώς η σφαίρα B χάνει αρνητικό φορτίο γίνεται θετικά φορτισμένη και καθώς η σφαίρα A κερδίζει αρνητικο φορτίο γίνεται λιγότερο θετικά φορτισμένη.

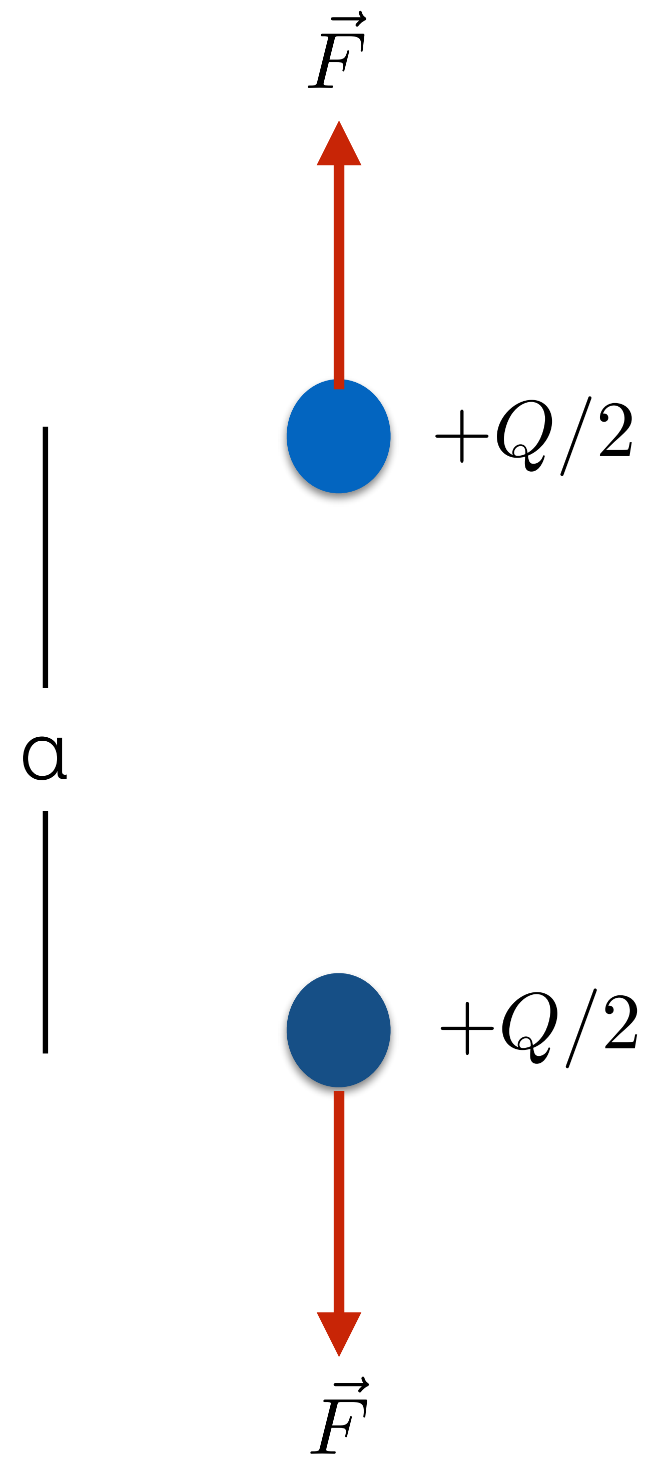
Η μεταφορά φορτίου σταματά όταν το φορτίο στη B αυξηθεί σε +Q/2 και το φορτίο στην A μειωθεί σε +Q/2, γεγονός που συμβαίνει όταν μετακινηθεί φορτίο -Q/2 απο τη B στην A (σχήμα, β).

Αφότου αφαιρεθεί το σύρμα, κάθε σφαίρα έχει φορτίο +Q/2 (σχήμα, γ)



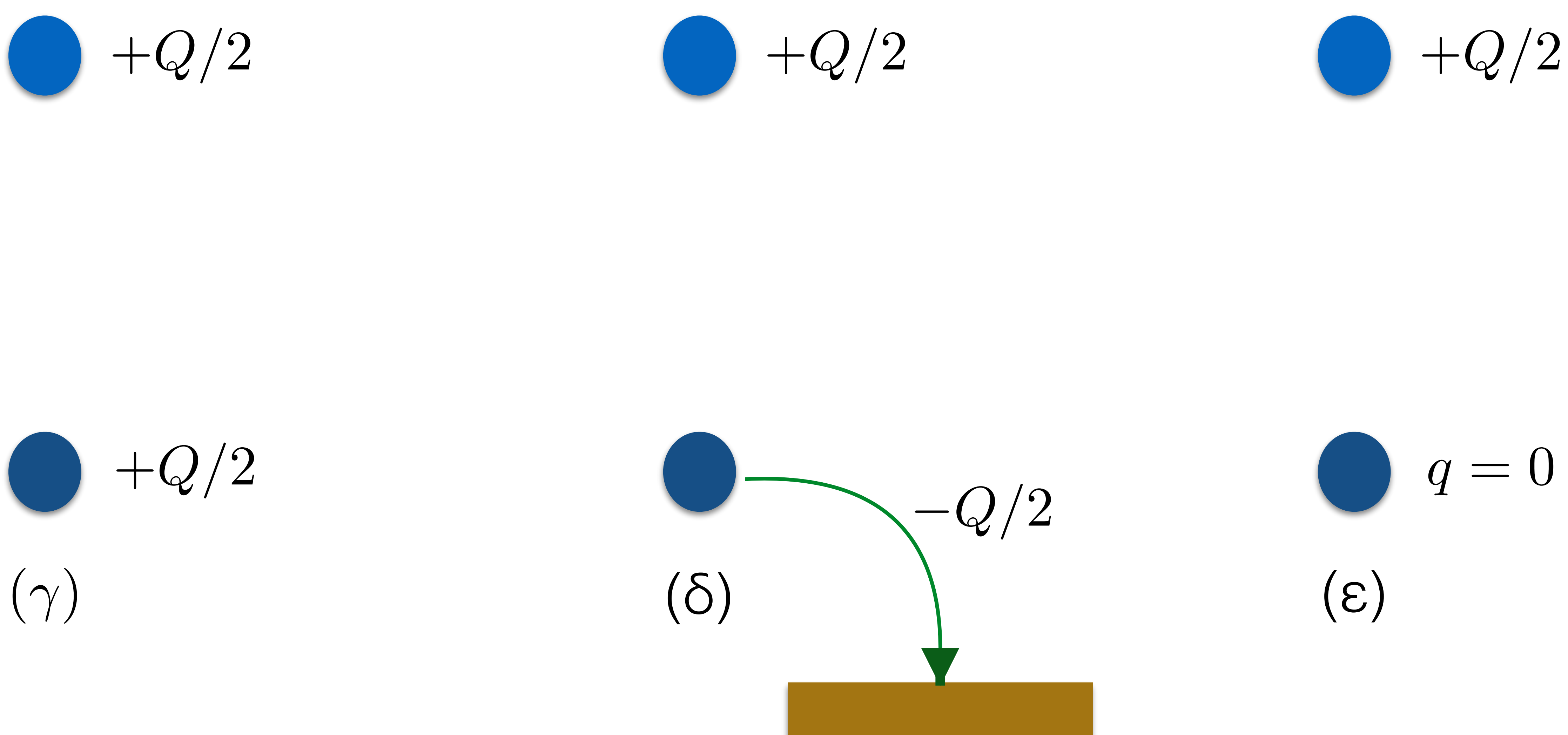
Η ηλεκτροστατική δύναμη μεταξύ των σφαιρών είναι απωστική με μέτρο, F:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(Q/2)(Q/2)}{\alpha^2} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{\alpha}\right)^2$$



(β) Όταν παρέχουμε μια αγώγιμη διαδρομή ανάμεσα σε ένα φορτισμένο αντικείμενο και το έδαφος (το οποίο θεωρείται ένας τεράστιος αγωγός), τοτε το αντικείμενο γίνεται ηλεκτρικά ουδέτερο. Επειδή η σφαίρα Α είναι θετικά φορτισμένη, ηλεκτρόνια με συνολικό φορτίο -Q/2 μετακινούνται απο το έδαφος στην σφαίρα (σχήμα, δ), αφήνοντας την σφαίρα Α με μηδενικό ηλεκτρικό φορτίο (σχήμα, ε).

Επομένως, δεν ασκείται ηλεκτροστατική δύναμη μεταξύ των σφαιρών.



Άσκηση ΙΙΙ:

Ο πυρήνας σε ένα άτομο σιδήρου έχει ακτίνα περίπου $4.0 \times 10^{-15} m$ και περιέχει 26 πρωτόνια.

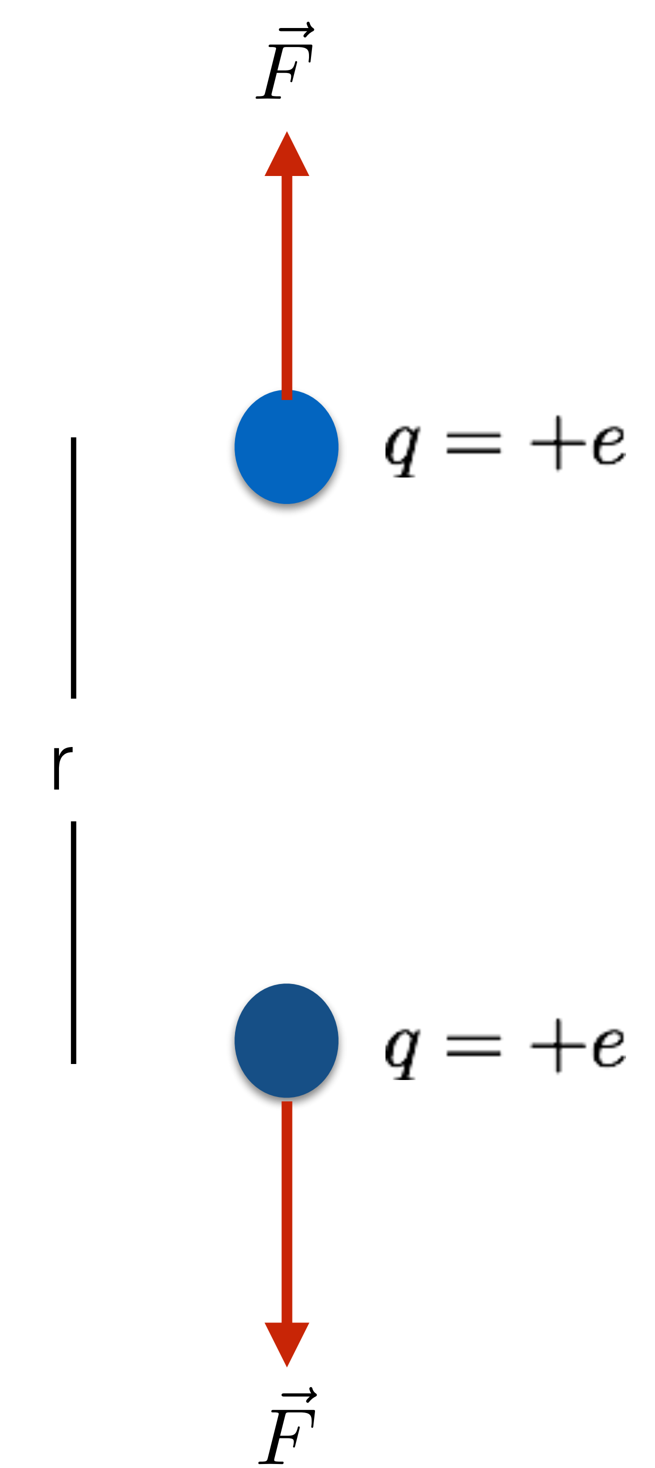
(α) Πόσο είναι το μέτρο της απωστικής ηλεκτροστατικής δύναμης μεταξύ δύο πρωτονίων που απέχουν $4.0 \times 10^{-15} m$;

(β) Πόσο είναι το μέτρο της βαρυτικής δύναμης ανάμεσα σε αυτα τα δύο ίδια πρωτόνια;

(α) Το μέτρο της ηλεκτροστατικής δύναμης μεταξύ των δύο πρωτονίων δίνεται απο τον νόμο του Coulomb:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} =$$

$$= \frac{\left(8.99 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2\right)\left(1.602 \times 10^{-19} C\right)^2}{\left(4.0 \times 10^{-15} m\right)^2} = 14N$$



Παρόλο που η F έχει μικρό μέτρο, είναι μια τεράστια δύναμη όταν ασκείται σε ένα πρωτόνιο. Τέτοιες δυνάμεις θα έπρεπε να προκαλούν σχάση του πυρήνα. Επομένως, πρέπει να υπάρχει κάποια ελκτική δύναμη που να αντισταθμίζει αυτή την τεράστια απωστική ηλεκτροστατική δύναμη.

(β) Το μέτρο της βαρυτικής δύναμης που ασκείται απο το ένα στο άλλο πρωτόνιο δίνεται απο την εξίσωση του Newton:

$$F = G\frac{m_p^2}{r^2} = \frac{\left(6.67 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2\right)\left(1.67 \times 10^{-27} kg\right)^2}{\left(4.0 \times 10^{-15} m^2\right)} = 1.2 \times 10^{-35} N$$

Η ελκτική βαρυτική δύναμη είναι υπερβολικά ασθενής ώστε να αντισταθμίσει τις απωστικές ηλεκτροστατικές δυνάμεις μεταξύ των πρωτονίων σε ένα πυρήνα.

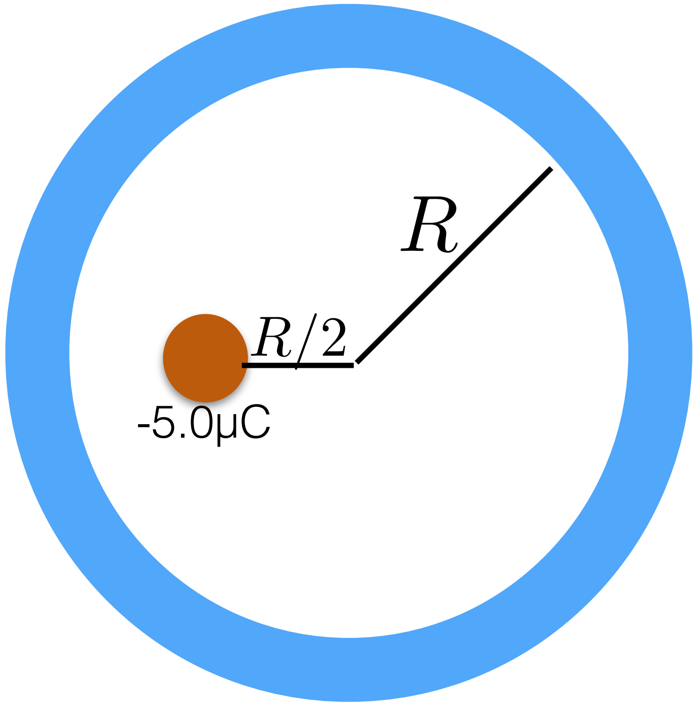
Τα πρωτόνια συγκρατούνται μαζί εξαιτίας μια τεράστιας δύναμης που ονομάζεται **ισχυρή πυρηνική δύναμη**.

Άσκηση IV:

Το σχήμα δείχνει μια διατομή ενός σφαιρικού μεταλλικού κελύφους εσωτερικής ακτίνας R. Ένα σημειακό φορτίο -5μC βρίσκεται σε απόσταση R/2 από το κέντρο του κελύφους. Αν το κέλυφος είναι ηλεκτρικά ουδέτερο:

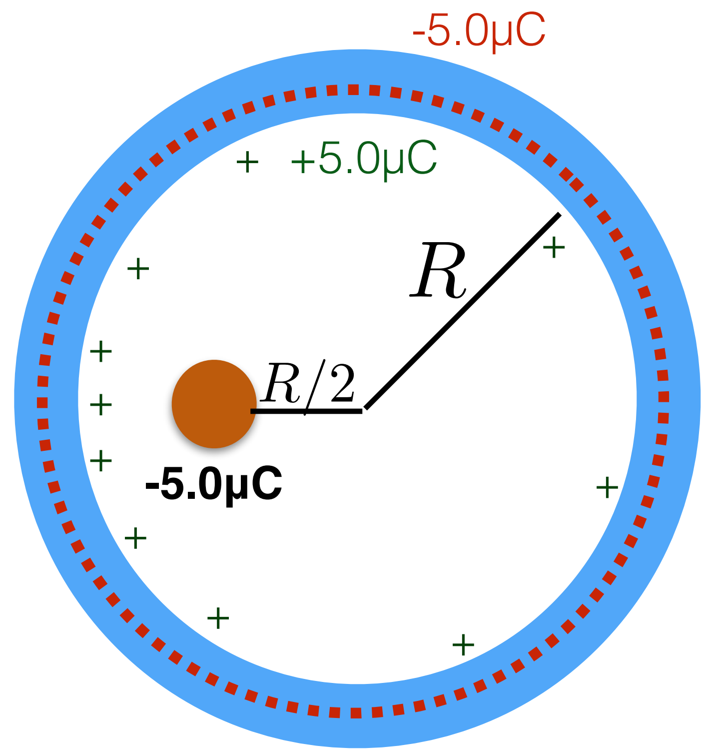
(α) Πόσο είναι το (επαγόμενο) φορτίο στην εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια του κελύφους;

(β) Αυτα τα φορτία ειναι ομοιόμορφα κατανεμημένα;



(α)

- Σε έναν αγωγό η περίσσεια ηλεκτρικού φορτίου κατανέμεται ισόποσα στην επιφάνεια του αγωγού. Στο εσωτερικό του, το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο ειναι μηδέν. Άρα το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να είναι μηδέν μέσα στο μεταλλικό κέλυφος.



- Με ένα σημειακό φορτίο **-5.0μC** μέσα στο κέλυφος, φορτίο +5.0μC πρέπει να βρίσκεται στο εσωτερικό τοίχωμα του κελύφους προκειμένου το συνολικό φορτίο που περικλείεται απο την επιφάνεια Gauss (κόκκινη γραμμή) να είναι μηδέν.

- Καθώς το σημειακό φορτίο δεν βρίσκεται στο κέντρο, η κατανομή του θετικού φορτίου στην εσωτερική επιφάνεια του κελύφους ειναι ασύμμετρη.

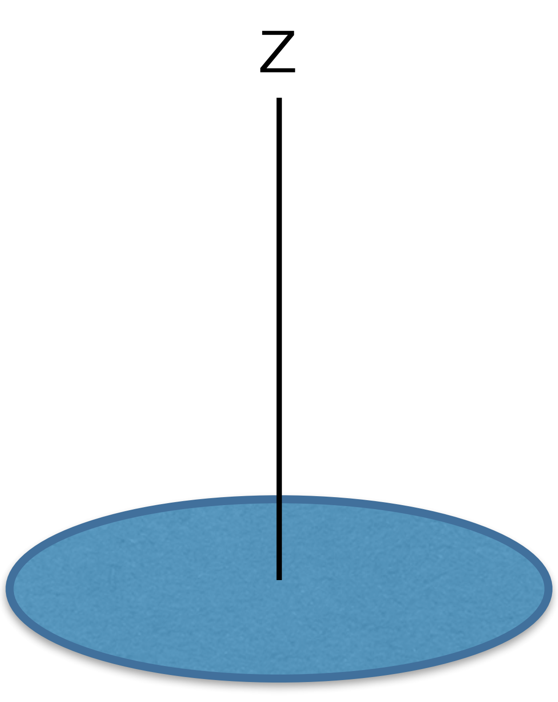
- Επειδή το κέλυφος είναι ηλεκτρικά ουδέτερο, το εσωτερικό του τοίχωμα μπορεί να έχει φορτίο +5.0μC μόνο αν φύγουν ηλεκτρόνια, με συνολικό φορτίο -5.0μC από το εσωτερικό τοίχωμα και μεταφερθούν στο εξωτερικό τοίχωμα. Εκεί τα ηλεκτρόνια κατανέμονται ομοιόμορφα επειδή το κέλυφος ειναι σφαιρικό και επειδή η ασύμμετρη κατανομή του θετικού φορτίου στο εσωτερικό τοίχωμα δεν μπορεί να δημιουργήσει ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο κέλυφος ώστε να επηρεάσει την κανατομή φορτίου στο εξωτερικό τοίχωμα.

Άσκηση V:

Το ηλεκτρικό δυναμικό σε οποιοδήποτε σημείο πάνω στον κεντρικό άξονα ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου δίνεται απο την εξίσωση:

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right)$$

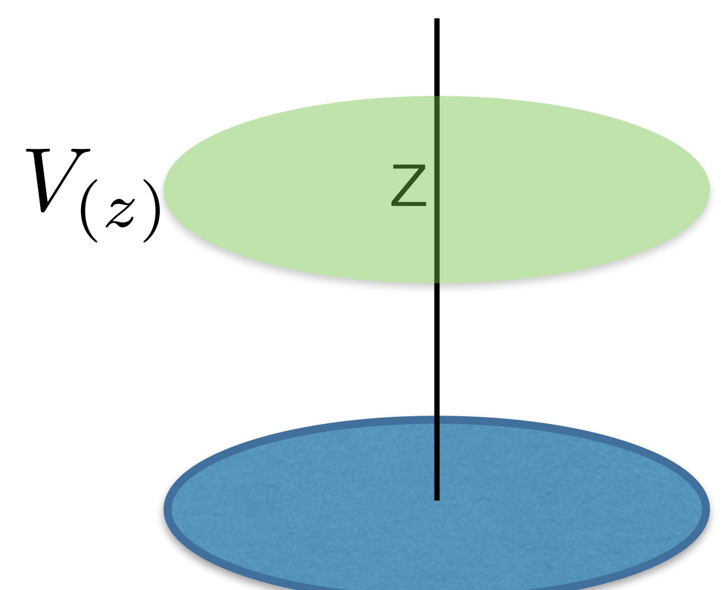
Ξεκινώντας απο αυτή την έκφραση, να βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο πάνω στον άξονα του δίσκου.



Θέλουμε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ σαν συνάρτηση της απόστασης z κατά μήκος του άξονα του δίσκου.

$$\vec{E} = -\nabla V = -0 - 0 - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} =$$

$$= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{z^2 + R^2} - z)\hat{k} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}})\hat{k}$$



$$\vec{E} = -\nabla V = -\Big(\underset{\substack{\uparrow \\ \vec{E}_x}}{\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{E}_y}}{\frac{\partial V}{\partial y}\hat{j}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{E}_z}}{\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}}\Big)$$

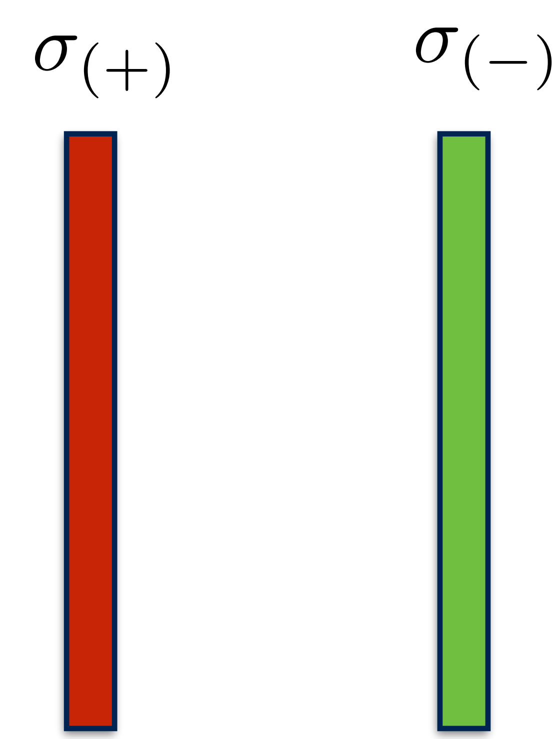
Άσκηση VI:

Το σχήμα δείχνει τμήματα δύο μεγάλων, παράλληλων μη αγώγιμων φύλλων, το καθένα με σταθερό ομοιόμορφο φορτίο στη μία του πλευρά. Τα μεγέθη των επιφανειακών πυκνοτήτων φορτίου ειναι $\sigma_{(+)} = 6.8\mu C/m^2$ για το θετικά φορτισμένο φύλλο και $\sigma_{(-)} = 4.3\mu C/m^2$ για το αρνητικά φορτισμένο φύλλο. Να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο:

(α) Στα αριστερά των φύλλων.

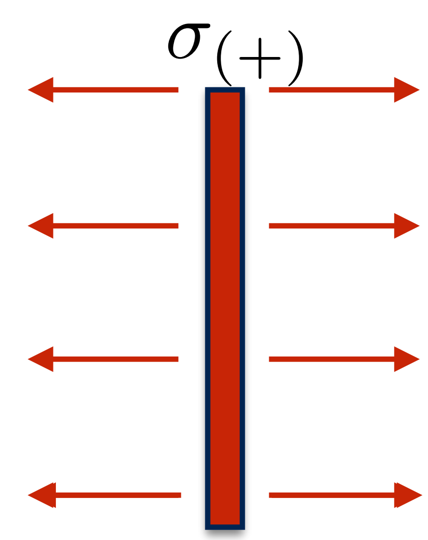
(β) Ανάμεσα από τα φύλλα.

(γ) Στα δεξιά των φύλλων.



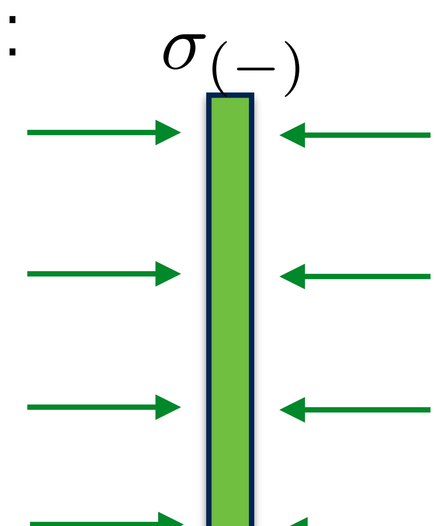
- Μπορούμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε περιοχή, βρίσκοντας το ηλεκτρικό πεδίο κάθε φύλλου ως εάν το φύλλο αυτό να ήταν μόνο του και προσθέντοντας αγλεβρικά τα πεδία των μεμονωμένων φύλλων χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας.

- Σε κάθε σημείο, το ηλεκτρικο πεδίο $\vec{E}_{(+)}$ που οφείλεται στο θετικά φορτισμένο φύλλο έχει κατεύθυνση απομακρυνόμενη απο το φύλλο και μέτρο:



$$E_{(+)} = \frac{\sigma(+)}{2\epsilon_0} = \frac{(6.8 \times 10^{-6} C/m^2)}{2(8.85 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m^2)} = 3.84 \times 10^5 N/C$$

- Σε κάθε σημείο, το ηλεκτρικο πεδίο $\vec{E}_{(-)}$ που οφείλεται στο αρνητικά φορτισμένο φύλλο έχει κατεύθυνση πρός το φύλλο και μέτρο:



$$E_{(-)} = \frac{\sigma(-)}{2\epsilon_0} = \frac{(4.3 \times 10^{-6} C/m^2)}{2(8.85 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m^2)} = 2.43 \times 10^5 N/C$$

(α) Στα αριστερά, το ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$\vec{E}_{(\alpha)} = -E_{(+)}\hat{i} + E_{(-)}\hat{i} = -3.84 \times 10^5 \hat{i} N/C + 2.43 \times 10^5 \hat{i} N/C = \\ = -1.4 \times 10^5 \hat{i} N/C$$

(β) Ανάμεσα από τα δύο φύλλα, το ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$\vec{E}_{(\beta)} = +E_{(+)}\hat{i} + E_{(-)}\hat{i} = +3.84 \times 10^5 \hat{i} N/C + 2.43 \times 10^5 \hat{i} N/C = \\ = 6.27 \times 10^5 \hat{i} N/C$$

(γ) Στα δεξιά, το ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$\vec{E}_{(\gamma)} = +E_{(+)}\hat{i} - E_{(-)}\hat{i} = \\ = +3.84 \times 10^5 \hat{i} N/C - 2.43 \times 10^5 \hat{i} N/C = \\ = 1.41 \times 10^5 \hat{i} N/C$$