ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Φυσική (Ηλεκτρομαγνητισμός)

Ενότητα IV: Ηλεκτρικό δυναμικό

Διδάσκων: Αναπλ. Καθηγητής, Δ. Γ. Αγγελάκης

Επιμέλεια σημειώσεων: Υ.Δ. Ν. Σχετάκης

Σκοποί ενότητας

- Εισαγωγή στην έννοια του ηλεκτρικού δυναμικού, της διαφοράς δυναμικού και της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας.

Λέξεις κλειδιά

- Ηλεκτρικό δυναμικό, ηλεκτρική δυναμική ενέργεια, διαφορά δυναμικού, ισοδυναμικές επιφάνειες, συντηρητικά πεδία, αστρόβιλα πεδία, ηλεκτρικό δίπολο, βαθμίδα δυναμικού.

Περιεχόμενα ενότητας

- Έργο ηλεκτρικής δύναμης
- Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια
- Ηλεκτρικό δυναμικό
- Διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού
- Βαθμίδα δυναμικού
- Ισοδυναμικές επιφάνειες
- Δυναμικό απο ηλεκτρικό δίπολο
- Αγώγιμος φορτισμένος κύλινδρος
- Αγώγιμος φορτισμένος κυκλικός δακτύλιος
- Λεπτή φορτισμένη ράβδος

Έργο ηλεκτρικής δύναμης

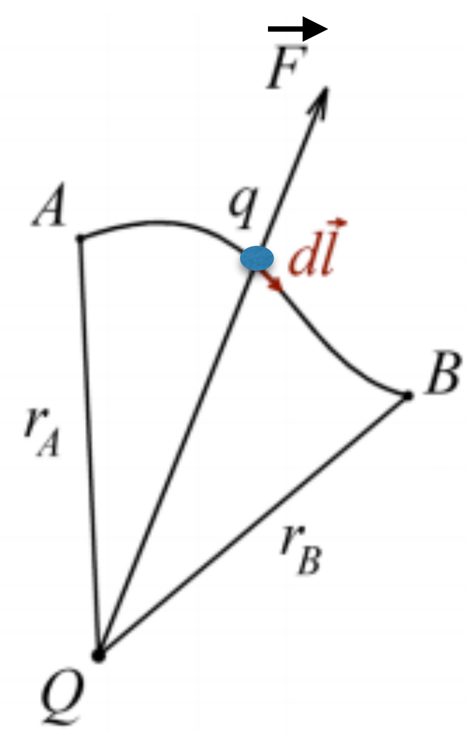
- Δοκιμαστικό φορτίο q μεσα σε ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται απο φορτιο Q δέχεται ηλεκτρική δύναμη:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

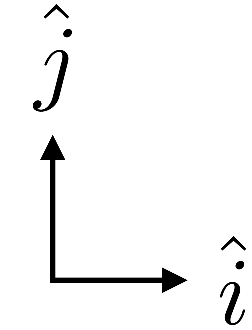
- Η ηλεκτρική δύναμη ειναι συντηρητική.

- Το έργο που παράγεται απο το πεδίο κατα την μετατόπιση του δοκιμαστικού φορτίου q μεταξύ των σημείων A και B είναι:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l}$$



Παραδείγματα υπολογισμού έργου με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα



#1

Δύναμη $\vec{F} = F_0\hat{i}$ ασκείται πάνω σε αντικείμενο το οποίο ακολουθεί την διαδρομή ΑΒΓΔΑ, τετράγωνο πλευράς α, να βρεθεί το έργο που παράγει.

- Το έργο που ασκεί η δύναμη κατα μήκος της διαδρομής ΑΒΓΔ είναι:

$$W_{AB\Gamma\Delta A} = \int \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_B^\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_\Gamma^\Delta \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_\Delta^A \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$AB \rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{s} = F_0\hat{i}\cdot dy\hat{j} = (F_0 dy)\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$$

$$B\Gamma \rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{s} = F_0\hat{i}\cdot dx\hat{i} = (F_0 dx)\hat{i}\cdot\hat{i} = F_0 dx$$

$$\Gamma\Delta \rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{s} = F_0\hat{i}\cdot(-dy\hat{j}) = -(F_0 dy)\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$$

$$\Delta A \rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{s} = F_0\hat{i}\cdot(-dx\hat{i}) = -(F_0 dx)\hat{i}\cdot\hat{i} = -F_0 dx$$

- Για τις διαδρομες ΑΒ και ΓΔ, τα διανύσματα $\vec{F}$ και $d\vec{s}$ είναι **κάθετα** μεταξύ τους και άρα το εσωτερικό τους γινόμενο κατα μήκος της διαδρομής ισούται με μηδέν. Έτσι:

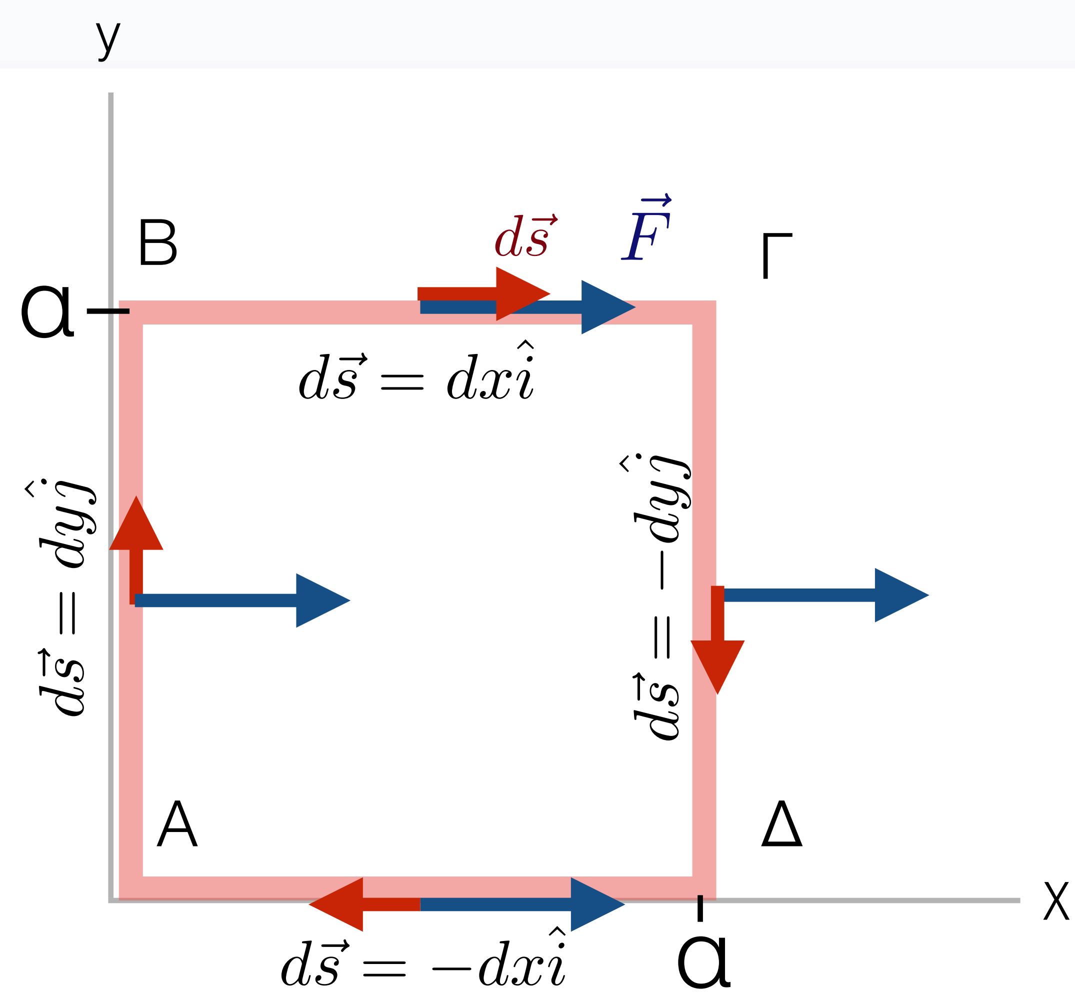
$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0\ ,\ W_{\Gamma\Delta} = \int_\Gamma^\Delta \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$$

- Για τις διαδρομες ΒΓ και ΔΑ, τα διανύσματα $\vec{F}$ και $d\vec{s}$ είναι **παράλληλα** μεταξύ τους (ομόρροπα και αντίρροπα αντίστοιχα). Έτσι:

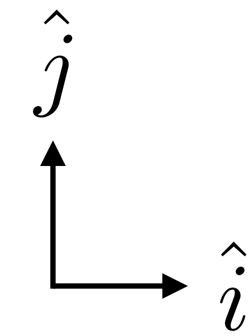
$$W_{B\Gamma} = \int_B^\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_B^\Gamma F ds = F_0 a$$

$$W_{\Delta A} = \int_\Delta^A \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_B^\Gamma F ds = -F_0 a$$

- Το συνολικό έργο της δύναμης για την κλειστή διαδρομή ισούται με μηδεν.



#2 **Δύναμη** $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$ **ασκείται πάνω σε σώμα το οποίο ακολουθεί την διαδρομή ΑΒΓΔΑ, τετράγωνο πλευράς α.**



- Το έργο που ασκεί η δύναμη κατα μήκος της διαδρομής ΑΒΓΔΑ είναι:

$$W_{AB\Gamma\Delta A} = \int \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_B^\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_\Gamma^\Delta \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_\Delta^A \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

- Για την διαδρομή ΑΒ ισχύει:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B \left(F_x\hat{i} + F_y\hat{j}\right)\cdot\left(ds\hat{j}\right) =$$

$$= \int_A^B F_y ds = F_y a$$

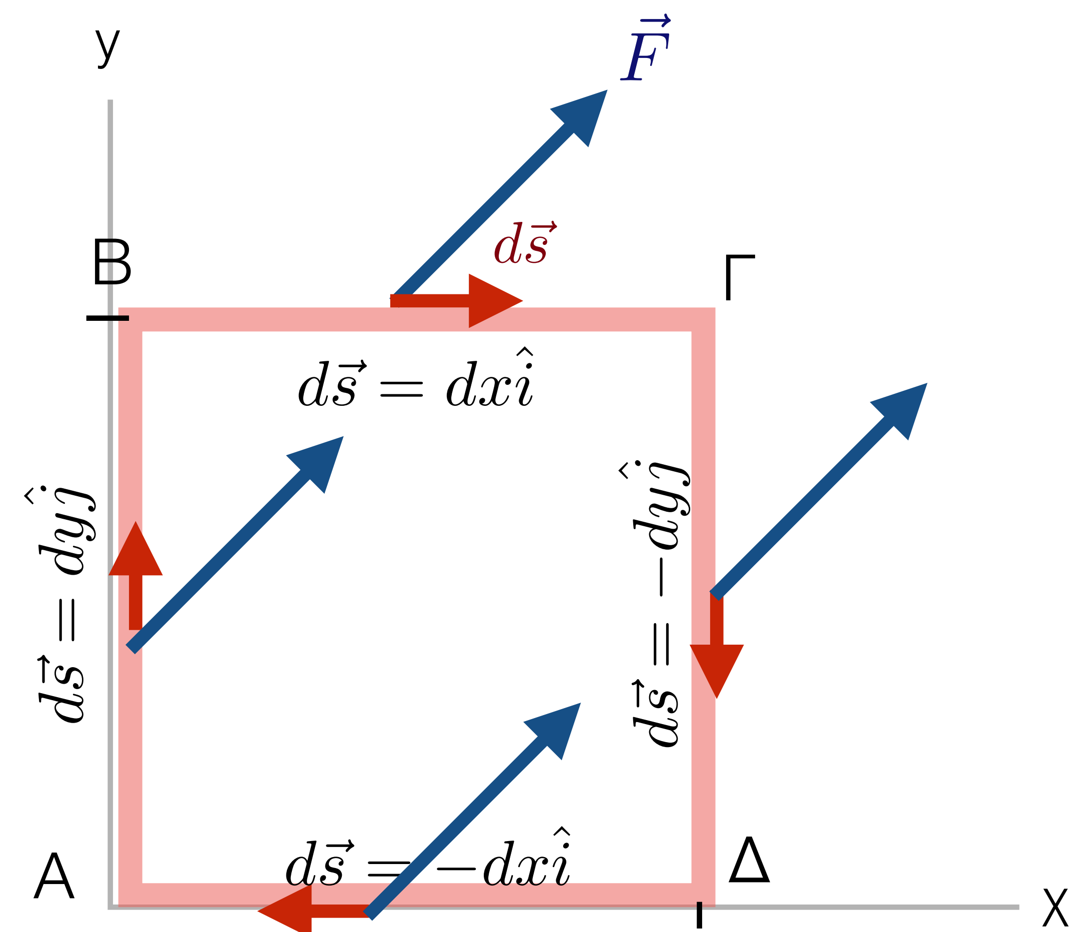
$$F_x\hat{i}\cdot ds\hat{j} = \left(F_x ds\right)\,\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$$

$$F_y\hat{j}\cdot ds\hat{j} = \left(F_y ds\right)\,\hat{j}\cdot\hat{j} = F_y ds$$

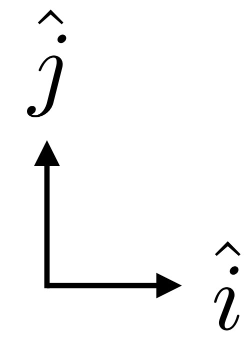
- Για την διαδρομή ΒΓ ισχύει:

$$W_{B\Gamma} = \int_B^\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_B^\Gamma \left(F_x\hat{i} + F_y\hat{j}\right)\cdot\left(ds\hat{i}\right) =$$

$$= \int_B^\Gamma F_x ds = F_x a$$



- Για την διαδρομή ΓΔ ισχύει:



$$W_{\Gamma\Delta} = \int_{\Gamma}^{\Delta} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\Gamma}^{\Delta} (F_x\hat{i} + F_y\hat{j}) \cdot (-ds\hat{j}) =$$

$$= -\int_{\Gamma}^{\Delta} F_y ds = -F_y a$$

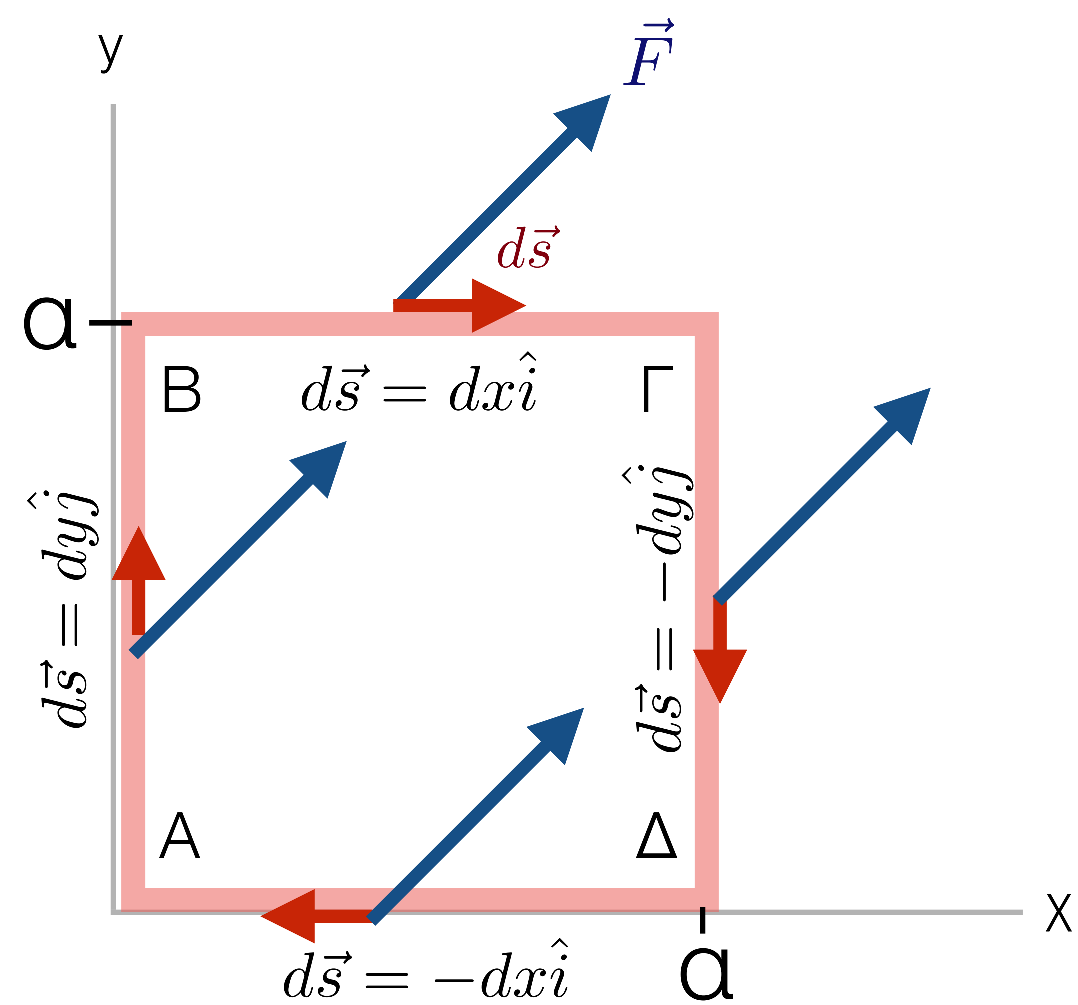
- Για την διαδρομή ΔΑ ισχύει:

$$W_{B\Gamma} = \int_{B}^{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{B}^{\Gamma} (F_x\hat{i} + F_y\hat{j}) \cdot (-ds\hat{i}) =$$

$$= -\int_{B}^{\Gamma} F_x ds = -F_x a$$

- Το συνολικό έργο της δύναμης είναι:

$$W_{AB\Gamma\Delta A} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_y a + F_x a - F_y a - F_x a = 0$$



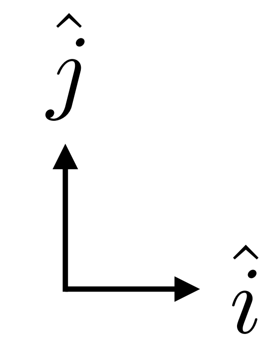
Συντηρητική ή **διατηρητική δύναμη** στη φυσική ονομάζεται μια δύναμη που έχει την ιδιότητα το έργο το οποίο παράγει κινώντας ένα σωματίδιο ανάμεσα σε δύο σημεία να είναι **ανεξάρτητο από τη διαδρομή**.

Το έργο μιας συντηρητικής δύναμής σε κλειστή διαδρομή ισούται πάντα με **μηδέν**.

#3 Έργο δύναμης $\vec{F} = F_0 x\hat{i} + F_0\hat{j}$ πάνω σε αντικείμενο το οποίο ακολουθεί την διαδρομή ΑΒΓ.

- Για την διαδρομή ΑΒ ισχύει:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B (F_0 x\hat{i} + F_0\hat{j})\cdot(dy\hat{j}) = \int_A^B F_0 dy = F_0\int_{y=0}^{y=a} F_0 dy = F_0 a$$

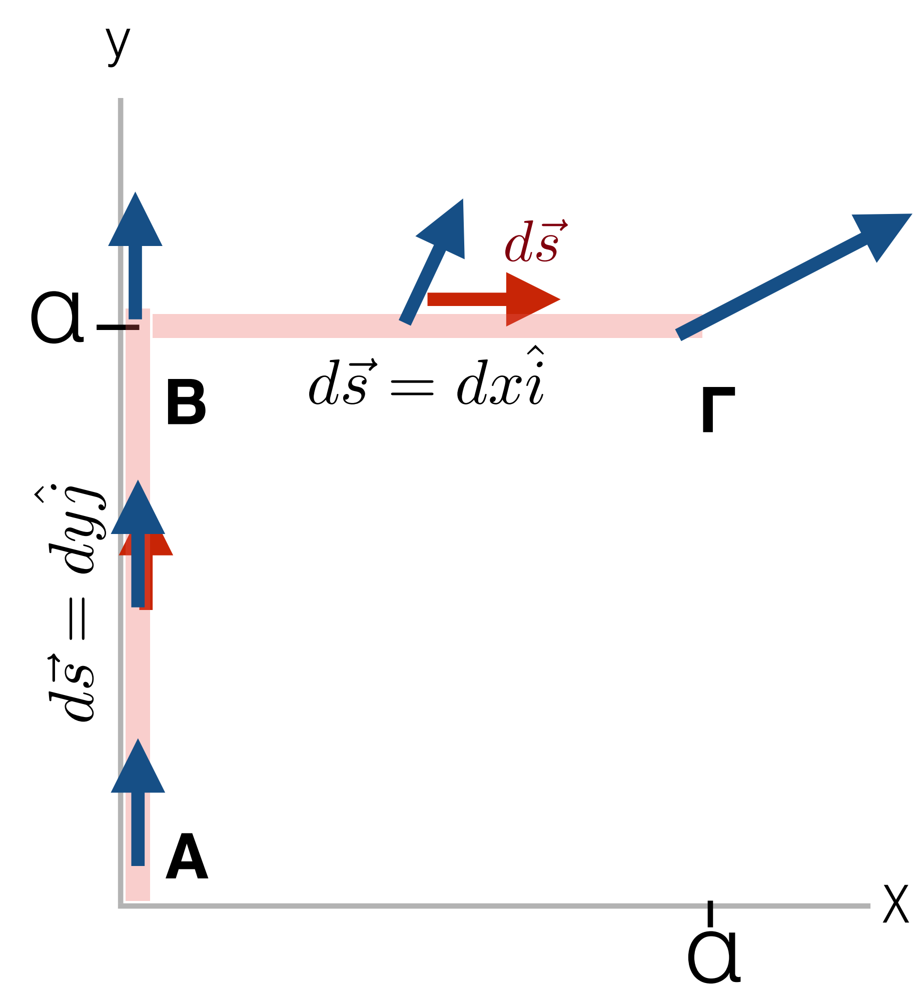


- Για την διαδρομή ΒΓ ισχύει:

$$W_{B\Gamma} = \int_B^\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_B^\Gamma (F_0\, x\hat{i} + F_0\hat{j})\cdot(dx\hat{i}) = \int_B^\Gamma F_0\, x dx = F_0\int_{x=0}^{x=a} x\, dx = F_0\frac{a^2}{2}$$

- Το έργο που ασκεί η δύναμη κατα μήκος της διαδρομής ΑΒΓ είναι:

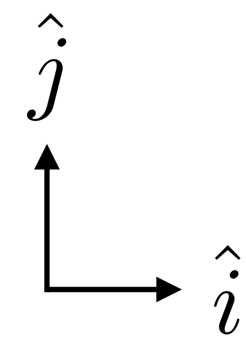
$$W_{AB\Gamma} = \int_A^\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = F_0 a + F_0\frac{a^2}{2} = F_0\frac{2a+a^2}{2}$$



#4 Εργο δύναμης $\vec{F}(x,y) = x^2\hat{i} + y^2\hat{j}$ πάνω σε αντικείμενο στην διαδρομή ΑΒΓ.

- Για την διαδρομή ΑΒ ισχύει:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B \left(x^2\hat{i} + y^2\hat{j}\right)\cdot\left(dy\hat{j}\right) = \int_A^B y^2 dy = \frac{a^3}{3}$$

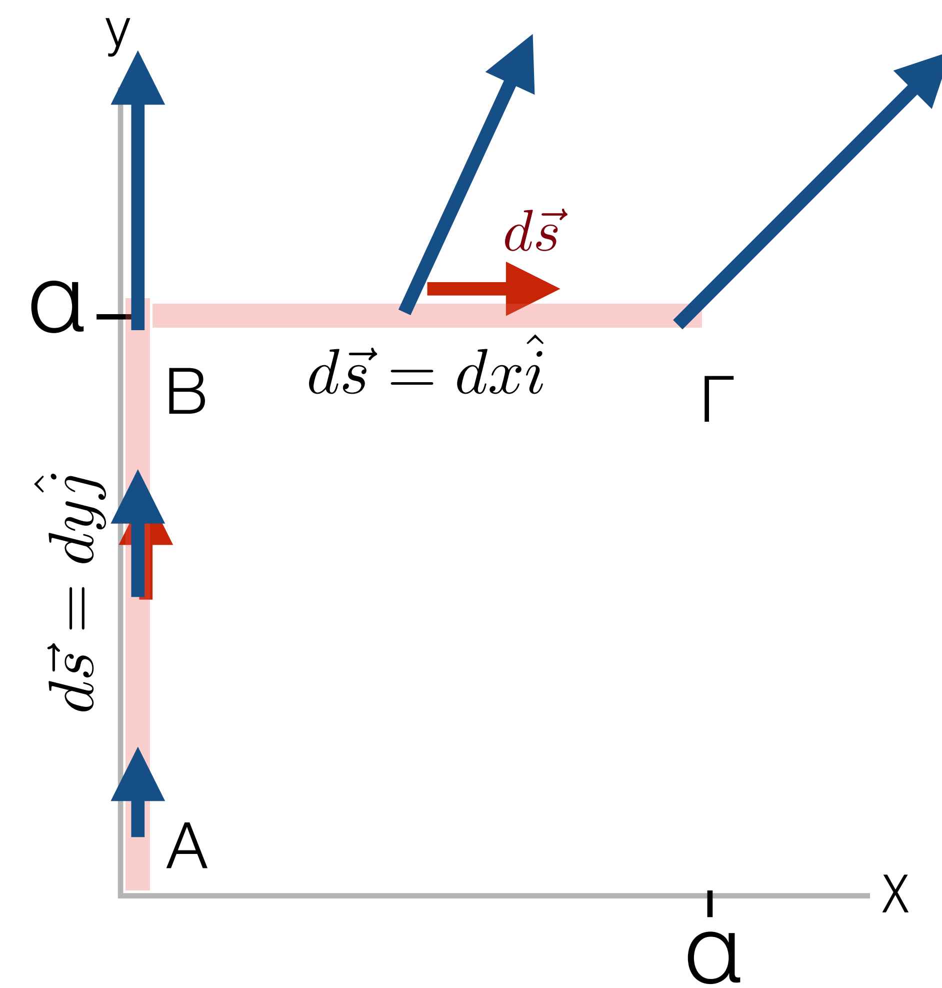


- Για την διαδρομή ΒΓ ισχύει:

$$W_{B\Gamma} = \int_B^\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_B^\Gamma \left(x^2\hat{i} + y^2\hat{j}\right)\cdot\left(dx\hat{i}\right) = \int_B^\Gamma x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

- Το έργο που ασκεί η δύναμη κατα μήκος της διαδρομής ΑΒΓ είναι:

$$W_{AB\Gamma} = \int \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_B^\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3}a^3$$



#5 Έστω $\vec{E}$ το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται απο σημειακό φορτιο +Q.

- Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της έντασης για την διαδρομή ΑΒΓ είναι:

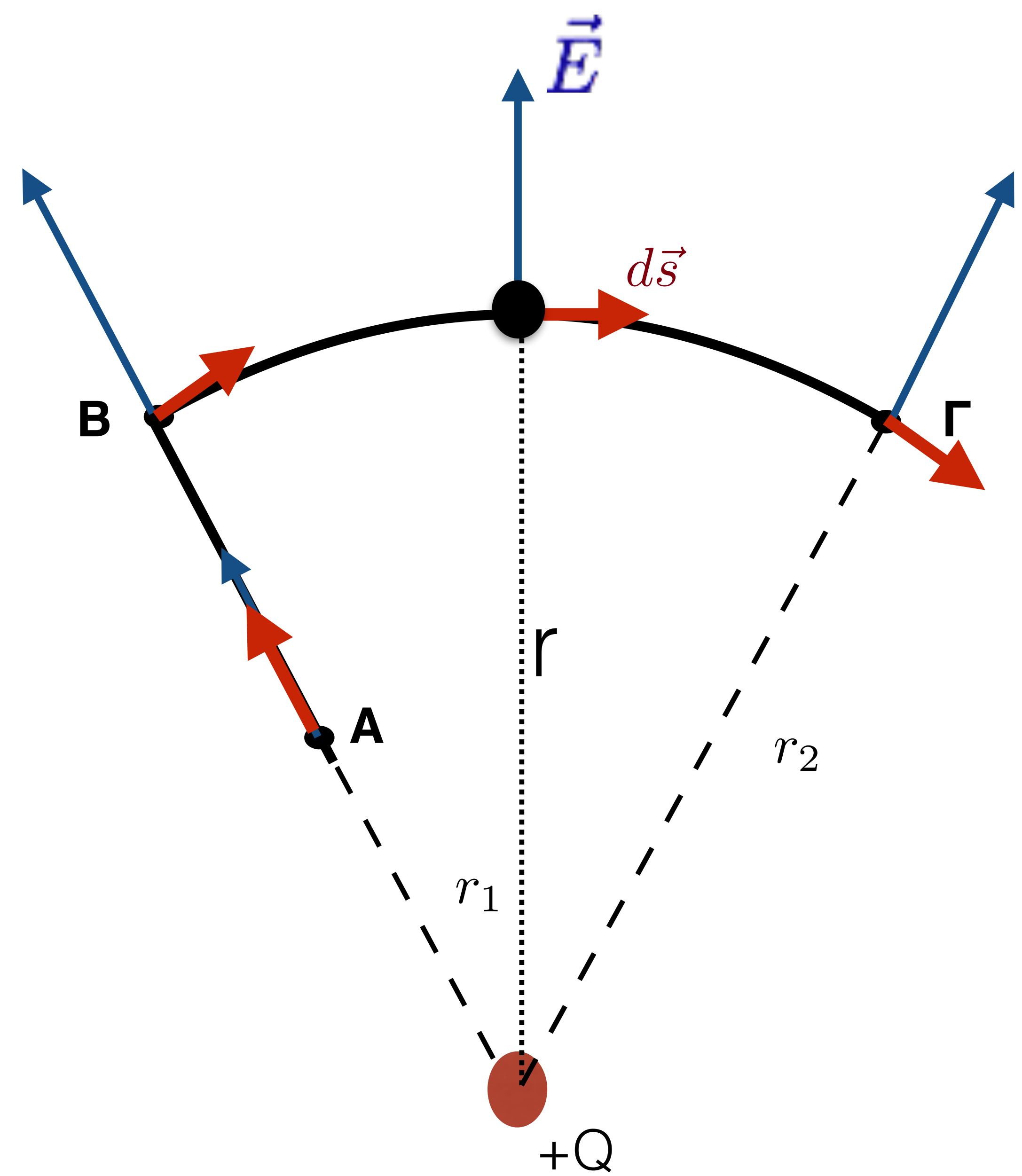
$$\int_A^\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_B^\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

- Για την διαδρομή ΑΒ, τα διανύσματα $\vec{E}$ και $d\vec{s}$ είναι **παράλληλα** μεταξύ τους και αρα το εσωτερικό τους γινόμενο κατα μήκος της διαδρομής είναι: $\vec{E}\cdot d\vec{s} = Eds$

  Αρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της έντασης για την διαδρομή ΑΒ είναι:

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} Eds =$$
$$= \int_{r_2}^{r_3} k\frac{Q}{r^2}\cdot ds = kQ(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$



- Για την διαδρομή ΒΓ, τα διανύσματα $\vec{E}$ και $d\vec{s}$ είναι **κάθετα** μεταξύ τους και άρα το εσωτερικό τους γινόμενο κατα μήκος της διαδρομής ισούται με μηδέν. Έτσι:

$$\int_B^\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$$

- Συνολικά για την διαδρομή ΑΒΓ ισχύει:

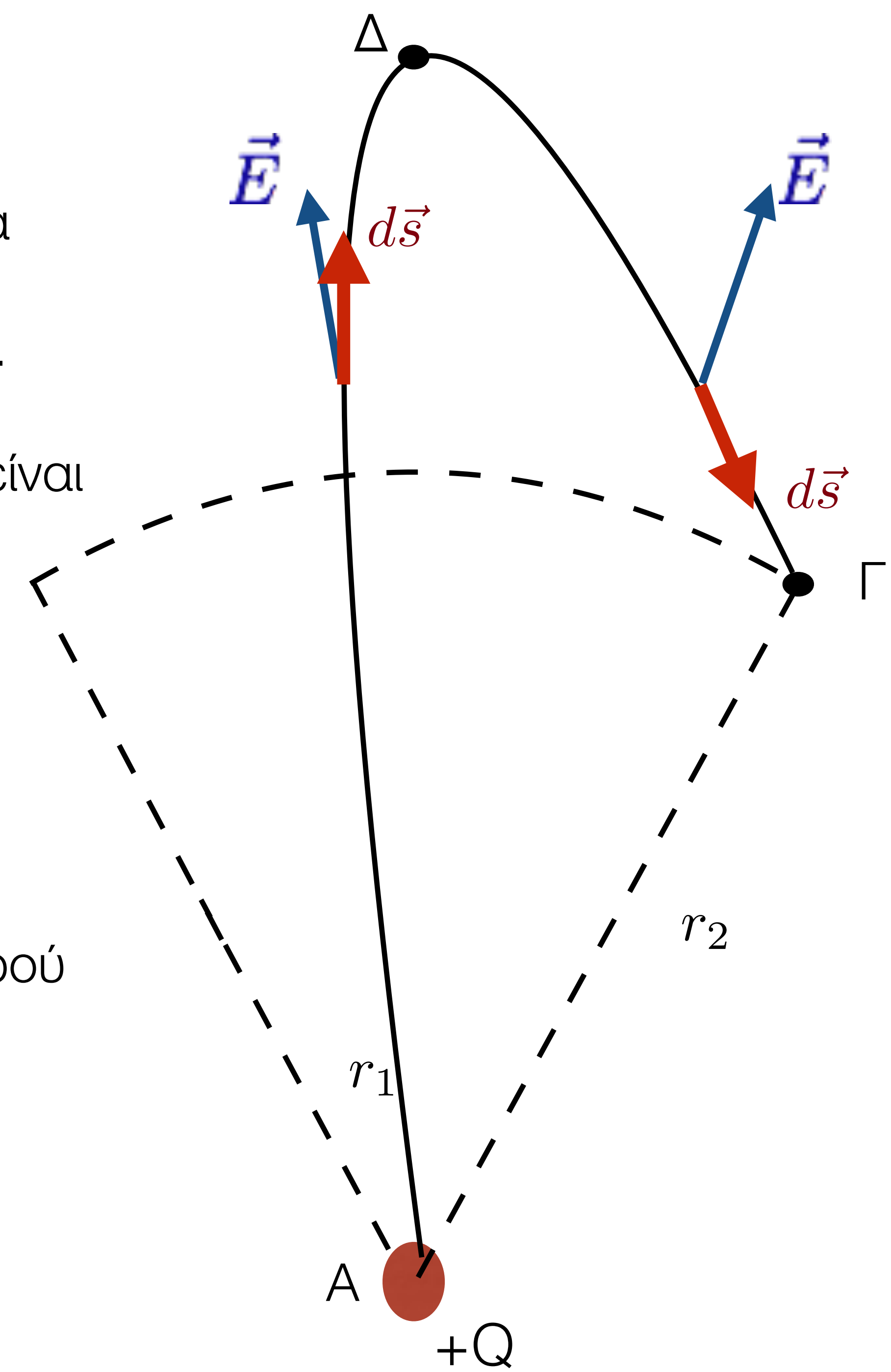
$$\int_A^\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_B^\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{s} = kQ(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

- Εάν επιλέγαμε την νέα διαδρομή ΑΔΓ το ολοκλήρωμα της έντασης θα μας έδινε το **ίδιο αποτέλεσμα**. Αυτό συμβαίνει διότι:

1. Τα οριζόντια τμήματα της διαδρομής ΑΔΓ δέν συνεισφέρουν στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα καθώς τα διανυσματα $\vec{E}$ και $d\vec{s}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.
2. Τα κάθετα τμήματα της διαδρομής ΑΔ συνεισφέρουν θετικά στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα καθώς τα διανύσματα $\vec{E}$ και $d\vec{s}$ ειναι ομόρροπα
3. Τα κάθετα τμήματα της διαδρομής ΔΓ συνεισφέρουν αρνητικά στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα καθώς τα διανύσματα $\vec{E}$ και $d\vec{s}$ ειναι αντίρροπα

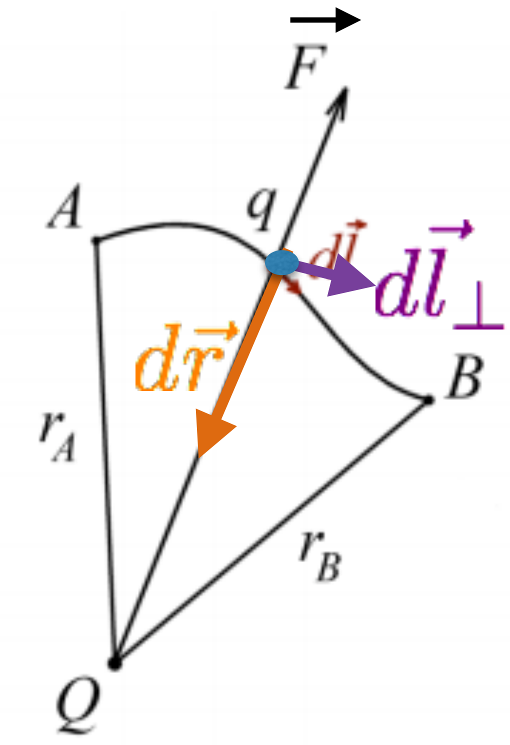
- Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_A^\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{s}$ έχει την ίδια τιμή για κάθε διαδρομή με αφετηρία το σημείο Α και κατάληξη στο σημείο Γ.

  Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως το συγκεκριμένο ηλεκτρικό πεδίο είναι **ηλεκτροστατικό ηλεκτρικό πεδίο** (έχει μόνο ακτινική συνιστώσα).



- Κάθε ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται απο σημειακή πηγή σταθερού φορτίου ειναι ηλεκτροστατικό.

Έργο ηλεκτρικής δύναμης



- Για τον υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος, θα αναλύσουμε την στοιχειώδη μετατόπιση $d\vec{l}$ σε μια συνιστώσα $d\vec{r}$ παράλληλη με την ηλεκτρική δύναμη $\vec{F}$ και σε μια συνιστώσα $d\vec{l}_\perp$ κάθετη στην ηλεκτρική δύναμη . Άρα:

$$d\vec{l} = d\vec{r} + d\vec{l}_\perp$$

- Για τον υπολογισμό του έργου ισχύει:

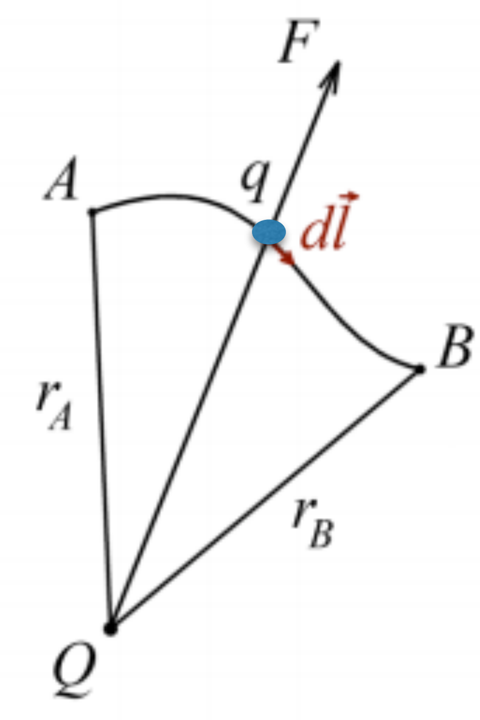
$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{F}\cdot(d\vec{r} + d\vec{l}_\perp) = q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = q\int_A^B E dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}qQ\int_A^B \frac{dr}{r^2}$$

$$W_{A\to B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}qQ\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

- Προκύπτει λοιπόν οτι το έργο ειναι ανεξάρτητο της διαδρομής. Χαρακτηριστικό των συντηρητικών πεδίων (αστρόβιλα πεδία).

Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια

- Η μεταβολή στην ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ΔU :



$$\Delta U = U_B - U_A = -W_{A\to B}$$
$$W_{A\to B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qQ\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

- Ισχύει: $W_{A\to B} = -W_{B\to A}$. Άρα το έργο ηλεκτρικής δύναμης κατα μήκος μιας κλειστής τροχίας C είναι μηδέν .

$$W_{A\to B\to A} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$$

- Όπου $\oint_c$ το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Ηλεκτρικό δυναμικό

- Το ηλεκτρικό δυναμικο είναι ενα βαθμωτό (μονόμετρο) μέγεθος, απο το οποίο δύναται να εξαχθεί η ένταση ενός ηλεκτρικού πεδίου.

- Το ηλ. δυναμικό V_A στο σημείο A ενός ηλεκτρικού πεδίου ορίζεται ως το πηλίκο του έργου (W) που παράγεται ή δαπανάται κατα την μετακίνηση ενός δοκιμαστικού ηλ. φορτίου q απο το σημείο A έως ένα σημείο αναφοράς B , διά το φορτίο q. (Ως σημείο αναφοράς B συνήθως λαμβάνεται το άπειρο)

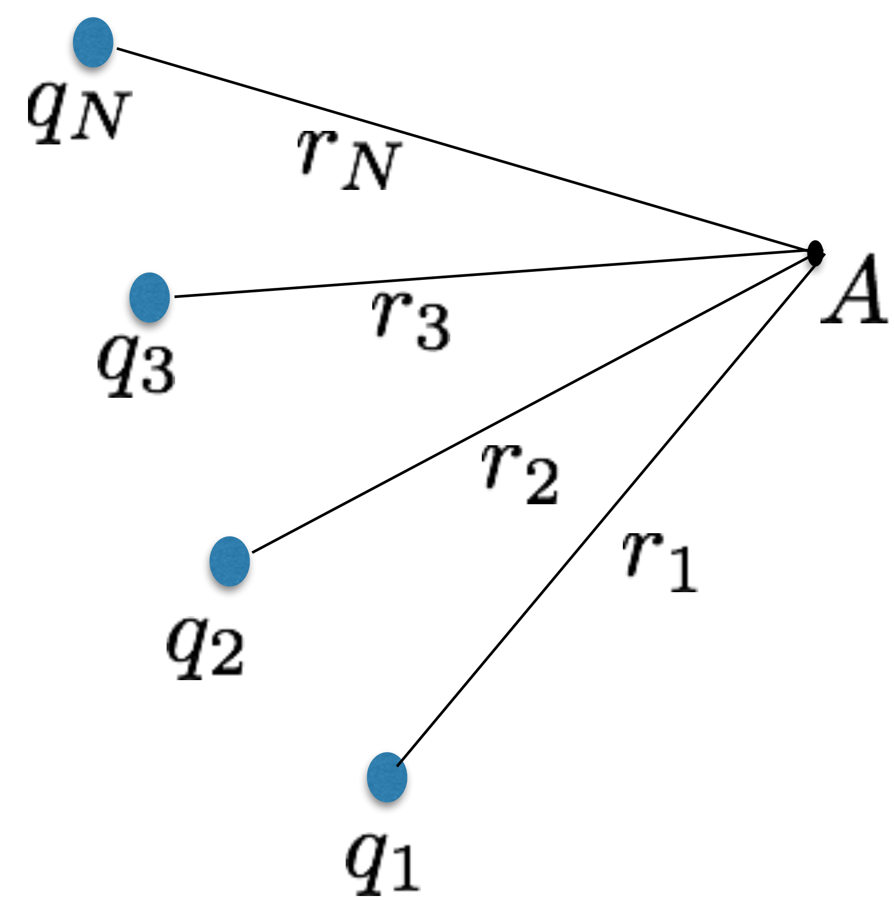
$$V_A = \frac{W_{A\to B}}{q} = \frac{W_{A\to\infty}}{q} = \frac{1}{q}\int_A^\infty \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

- Το ηλ. δυναμικό ειναι μονόμετρο μέγεθος.
- Μονάδα δυναμικού στο S.I. είναι το 1Volt. $\left(1V = 1\frac{J}{C}\right)$
- Το ηλ. δυναμικό αποτελεί ένα εναλλακτικό τρόπο περιγραφής/υπολογισμού του ηλεκτρικού πεδίου.

Ηλεκτρικό δυναμικό

- Ηλεκτρικό δυναμικό συστήματος Ν σημειακών φορτίων.
- Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας ισχύει:

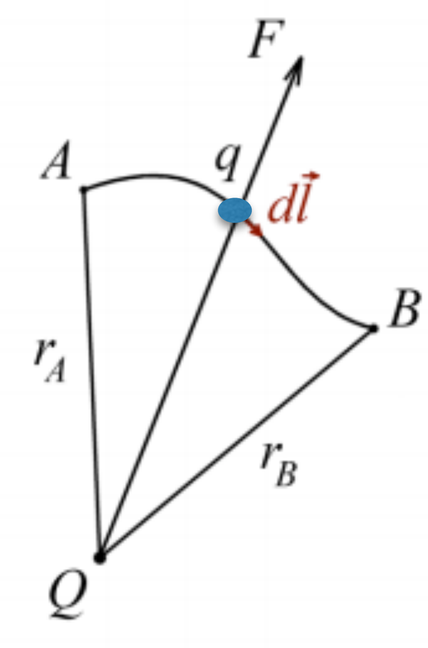
$$V_A = \sum_{i=1}^{N} V_{A,i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}$$



Διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού

- Ως διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού μεταξύ δύο σημείων *A* και *B* σε ένα ηλεκτρικό πεδίο έντασης *E* ορίζεται το έργο, ανά μονάδα φορτίου, που πρέπει να παραχθεί για να μεταφερθεί ένα θετικό δοκιμαστικό φορτίο *q* από το *A* στο *B*.

$$V_{AB} = \frac{W_{A\to B}}{q} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$



- Ισχύει:

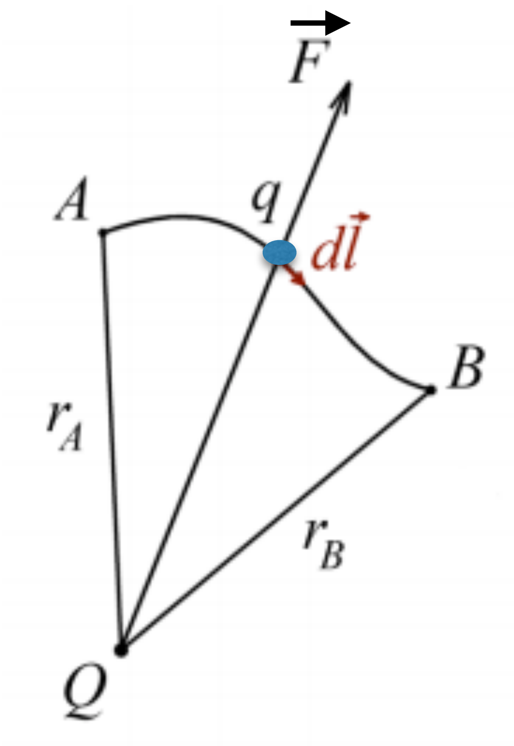
$$V_{AB} = \frac{W_{A\to B}}{q} = \frac{W_{A\to\infty} + W_{\infty\to B}}{q} = \frac{W_{A\to\infty}}{q} - \frac{W_{B\to\infty}}{q} = V_A - V_B$$

- Η διαφορά δυναμικού ειναι ανεξάρτητη του δοκιμαστικού φορτίου q όπως και ανεξάρτητη της τροχιάς που θα ακολουθήσει το q.

Βαθμίδα δυναμικού

- Το ηλεκτρικό πεδίο και το δυναμικό συνδέονται άμεσα:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



- Η άνωθεν σχέση δύναται να γραφτεί ώς:

$$\vec{E} = -\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\Big) = -\Big(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\Big)V$$

- Για συντομία:

$$\vec{E} = -\bigtriangledown V$$

- Όπου η ακόλουθη διανυσματική πράξη ονομάζεται βαθμίδα (gradient) της συνάρτησης f .

$$\bigtriangledown f = \Big(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\Big)f$$

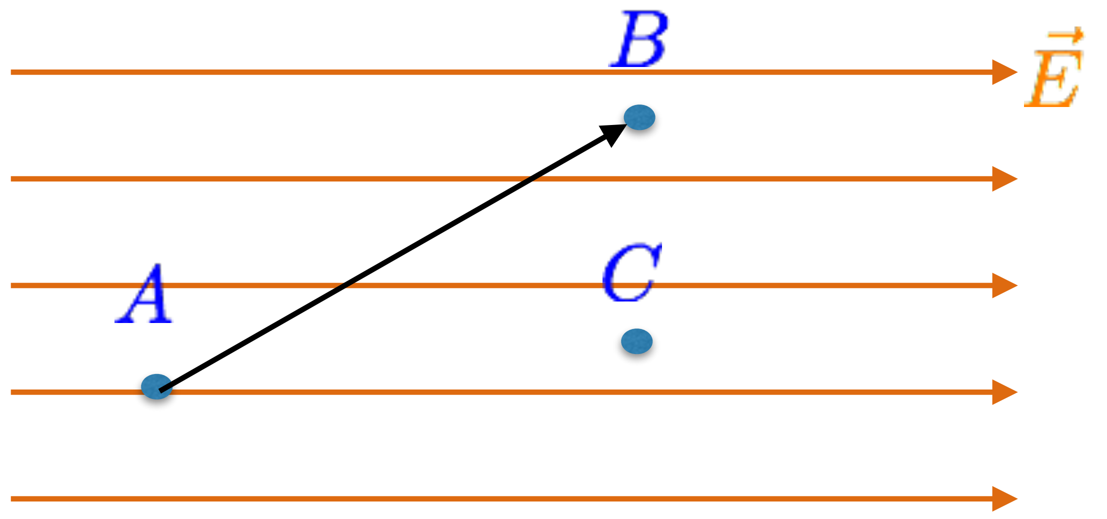
Ισοδυναμικές επιφάνειες

- Έστω σύστημα αποτελούμενο απο ένα θετικό ηλεκτρικό φορτίο και ενα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος **μείωνεται** καθώς το φορτίο κινείται ομόρροπα με το ηλεκτρικό πεδίο. (Το ηλεκτρικό πεδίο παράγει έργο στο φορτίο αυξάνοντας την κινητική του ενέργεια)

- Έστω σύστημα αποτελούμενο απο ένα αρνητικο ηλεκτρικό φορτίο και ενα ηλεκτρικό πεδίο.

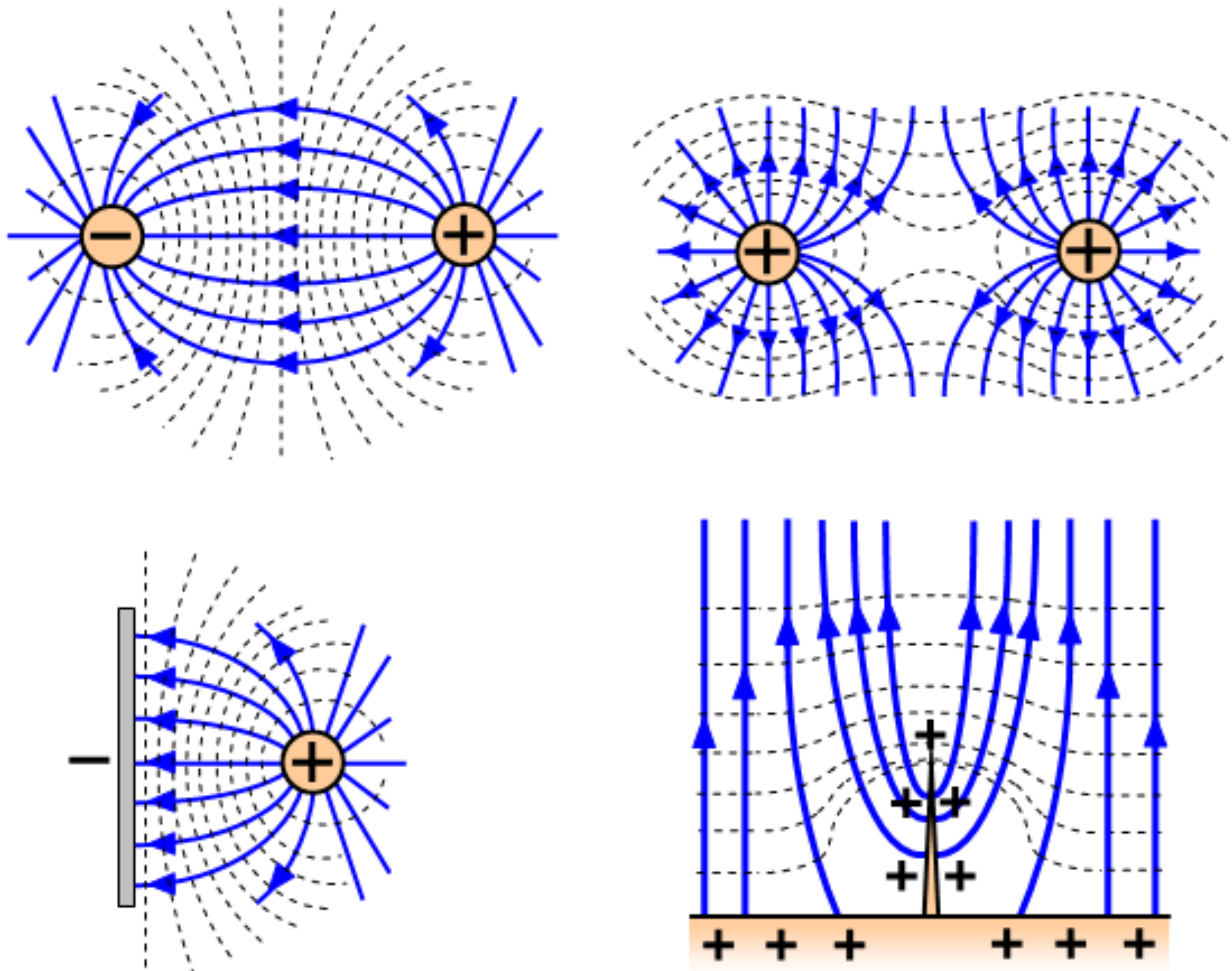
Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος **αυξάνεται** καθώς το φορτίο κινείται ομόρροπα με το ηλεκτρικό πεδίο. (Το ηλεκτρικό πεδίο καταναλώνει έργο μειώνοντας την κινητικη ενέργεια του φορτίου)

- Το σημείο B έχει χαμηλότερο ηλεκτρικό δυναμικό απο ότι το A.
- Τα σημεία B και C έχουν το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό.
- Κάθε επιφάνεια η οποια αποτελείται απο σημεία που έχουν το ίδιο δυναμικό ονομάζεται **ισοδυναμική επιφάνεια**.



Ισοδυναμικές επιφάνειες

Ισοδυναμικές επιφάνειες (μαύρες γραμμές) και ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές (μπλέ γραμμές),



(resourcefulphysics.org)

- Ηλεκτρικό δίπολο: Δυο ίσα και αντίθετα φορτία ηλεκτρικά φορτία σε απόσταση 2α μεταξύ τους.

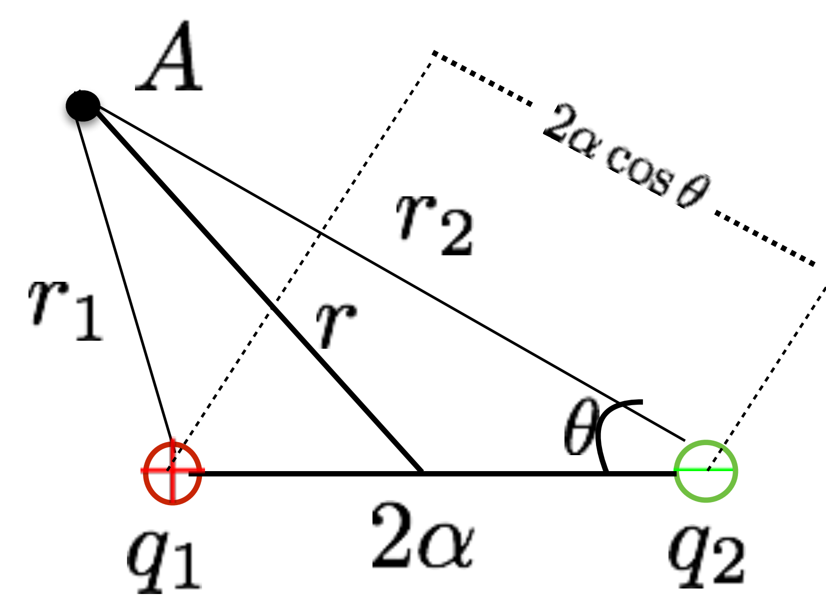
$$V_A = \sum_{i=1}^{2} V_{A,i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{2}\frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_1}-\frac{q}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_2-r_1}{r_1 r_2}$$

$$q_1 = +q$$
$$q_2 = -q$$

- Για $r >> 2\alpha$ ισχύει: $r_2 - r_1 \simeq 2\alpha\cos\theta$, $r_1 r_2 \simeq r^2$

- Άρα: $V_A = \dfrac{2\alpha q\cos\theta}{r^2}$



Φορτισμένος σφαιρικός αγωγός

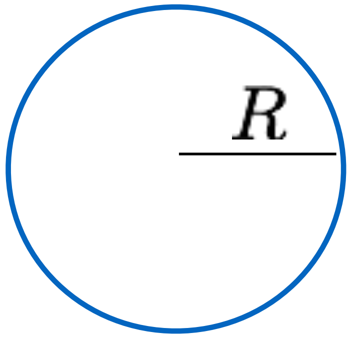
Στερεή αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R φέρει συνολικό φορτίο q . Να υπολογιστεί το δυναμικό μέσα και έξω απο την σφαίρα.

- Θεωρούμε το δυναμικο στο άπειρο ίσο με μηδέν.

- Για σημείο εκτός της σφαίρας και σε απόσταση r απο το κέντρο της

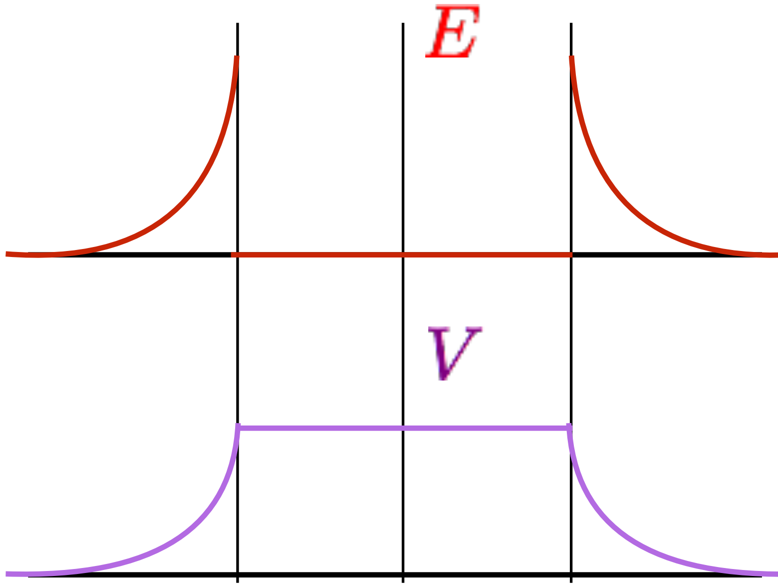
  ισχύει:

$$V_{r\geq R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$



- Εντός της σφαίρας το ηλεκτρικό πεδίο ειναι μηδέν. Ως εκ τούτου δεν παράγεται έργο κατά την μετακίνηση ενος φορτίου εντος της σφαίρας. Συμπεραίνουμε λοιπόν οτι το ηλεκτρικό δυναμικό εντός της σφαίρας ειναι σταθερό και ίσο με την τιμή του δυναμικού στην επιφάνεια της σφαίρας.

$$V_{r\leq R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}$$



Αγώγιμος φορτισμένος κύλινδρος

Να υπολογιστεί το δυναμικό σε απόσταση r απο απο κύλινδρο ακτίνας R γραμμικής κατανομή φορτίου πυκνότητας λ (φορτίο ανα μονάδα μήκους)

- Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται σε σημείο που απέχει r > R απο τον αγωγό έχει υπολογιστεί:

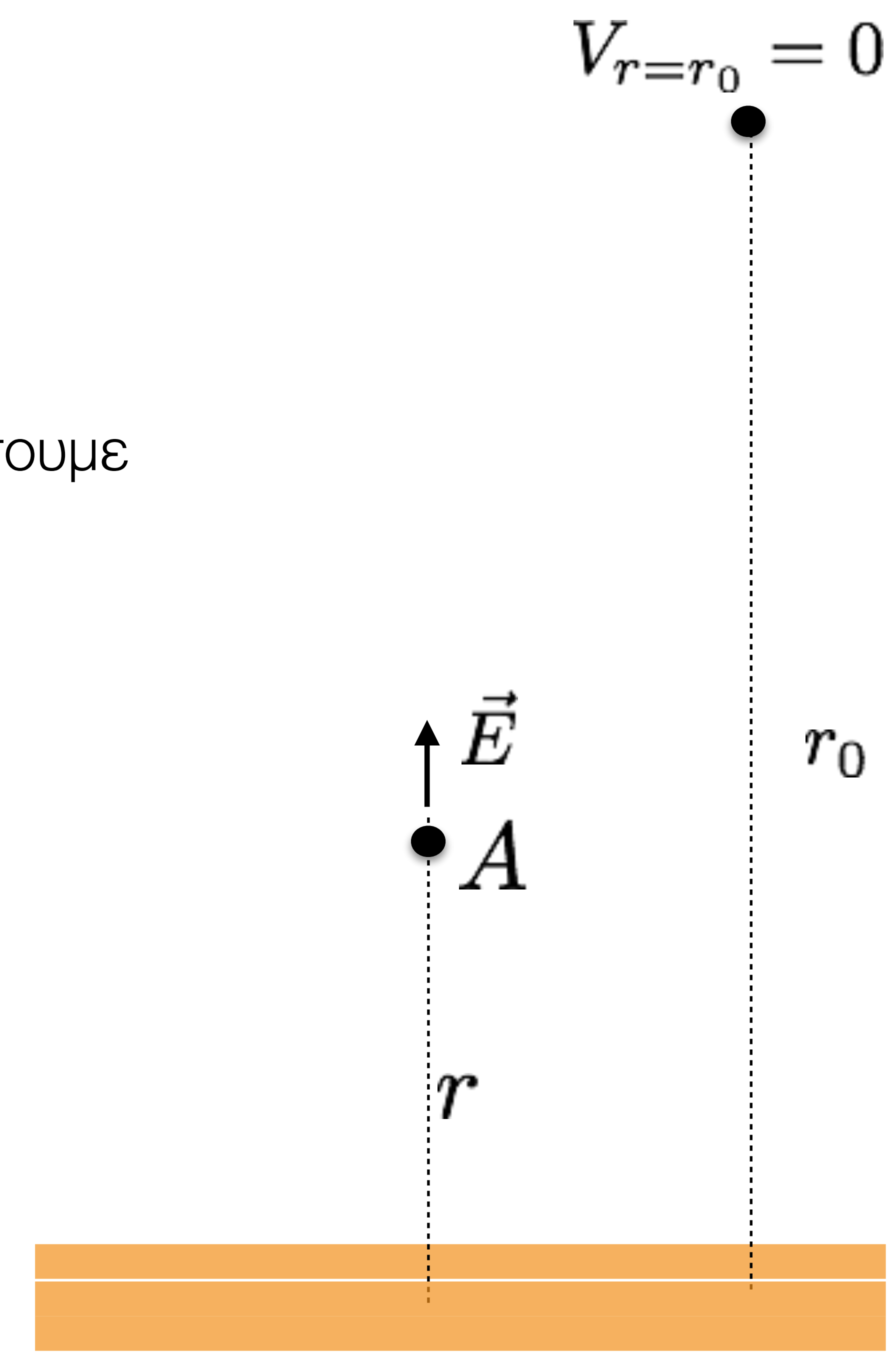
$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

- Επειδή η κατανομή του φορτίου εκτείνεται η ίδια εως το άπειρο δεν μπορούμε να θέσουμε το δυναμικό στο άπειρο ισο με το μηδέν. Θέτουμε λοιπόν ως μηδενικό το δυναμικό στα σημεία που απέχουν ακτινικη αποσταση r_0 απο τον αγωγό:

$$V_{r=r_0} = 0$$

- Για το σημείο Α που απέχει απόσταση r > R απο τον αγωγό ισχύει:

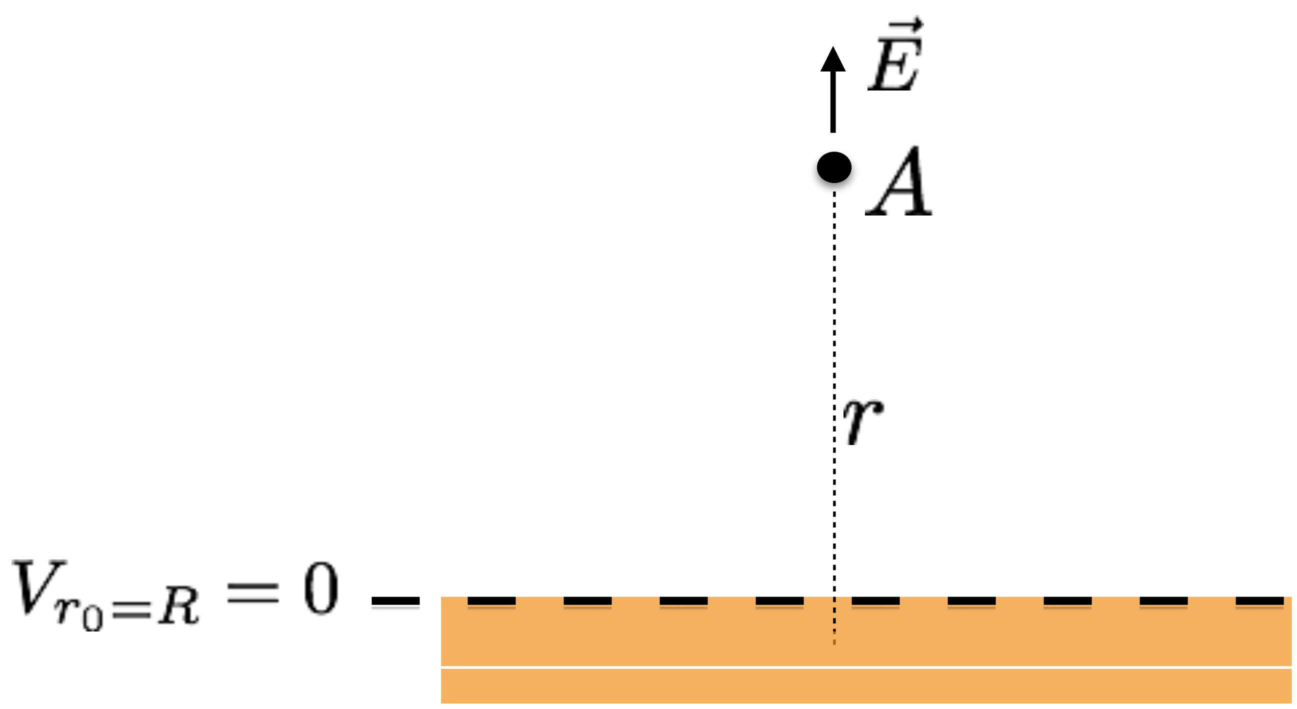
$$V_A = \int_r^{r_0} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^{r_0} E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_r^{r_0}\frac{dr}{r} =$$
$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} ln\frac{r_0}{r}$$



Αγώγιμος φορτισμένος κύλινδρος

- Εάν επιλέξουμε το r_0 να είναι η ακτίνα του κυλίνδρου , ώστε $V_{r_0=R} = 0$ τότε για r>R:

$$V_A = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} ln\frac{R}{r}$$



Αγώγιμος φορτισμένος κυκλικός δακτύλιος

Έστω λεπτός δακτύλιος ακτίνας α , με ολικό φορτιο Q. Να υπολογιστεί το δυναμικό σε σημείο A του άξονα του δακτυλίου σε απόσταση χ απο το κέντρο του.

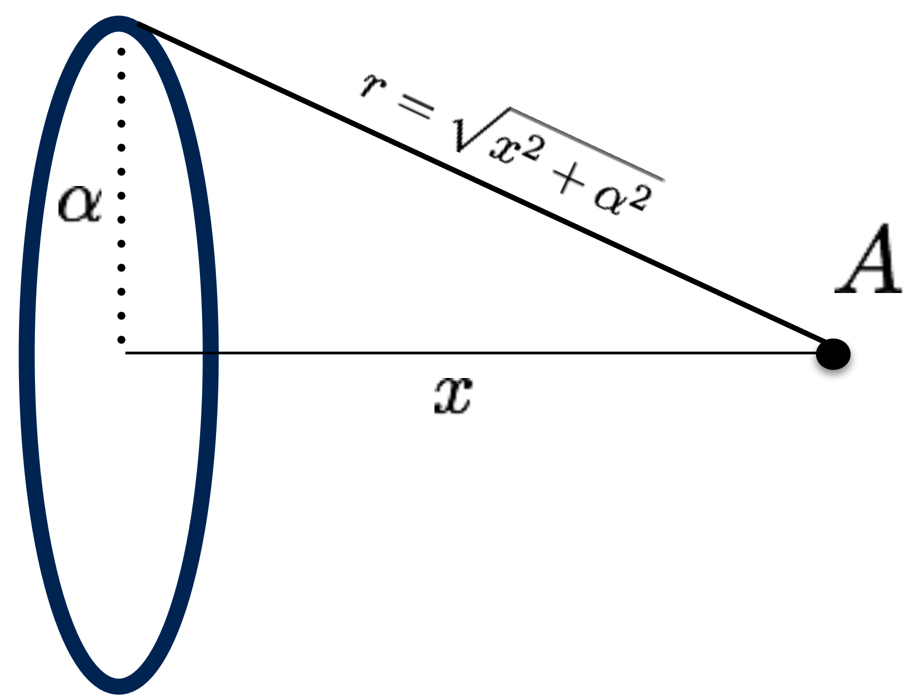
Το δυναμικό στο σημείο A είναι είναι το αθροισμα των δυναμικών από ολα τα dq. Επειδή όλα τα dq βρίσκονται στην ίδια απόσταση r, το συνολικό δυναμικό θα είναι

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}$$

όπου Q το αθροισμα όλων των dq

- Στην περίπτωση οπου x >> α :

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x}$$



- Το ηλ. δυναμικό ειναι μονόμετρο μέγεθος ώς εκ τούτου ο υπολογισμός του είναι πολύ απλούστερος απο τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου.

Λεπτή φορτισμένη ράβδος

Έστω λεπτή ράβδος μήκους 2α, με ολικό φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο. Να υπολογιστεί το δυναμικό σε σημείο Α κατά μήκος της μεσοκαθέτου της ράβδου και σε απόσταση χ απο το κέντρο της.

- Έστω σημειακό φορτίο dq που αντιστοιχεί σε στοιχείο μήκους dy της ράβδου. Εάν λ ο συντελεστής γραμμικής πυκνότητας φορτίου ισχύει:

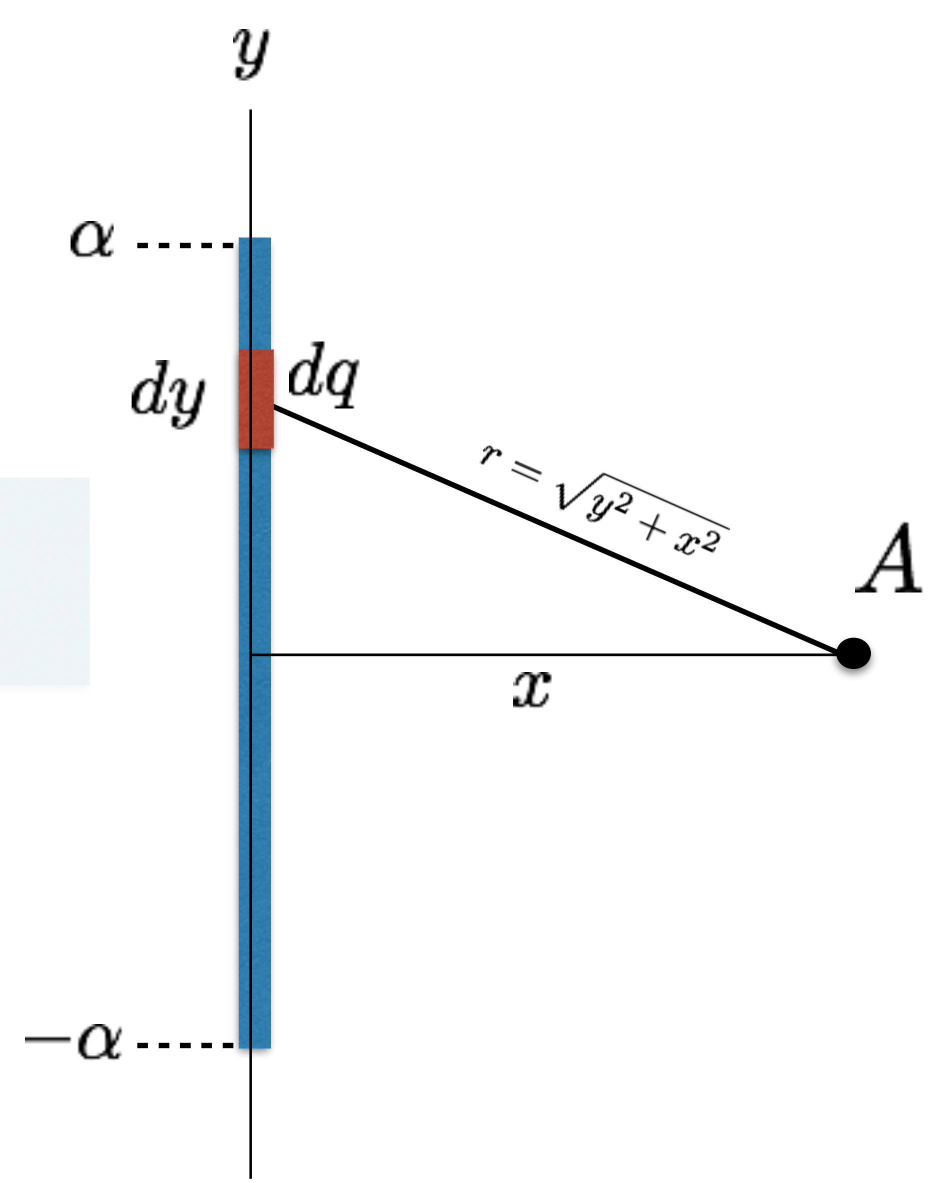
$$\lambda \equiv \frac{dq}{dy} \rightarrow \boxed{dq = \lambda dy}$$

- Ολοκληρώνοντας την άνωθεν σχέση:

$$dq = \lambda dy \rightarrow \int_0^Q dq = \int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda dy \rightarrow Q = \lambda 2\alpha \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{Q}{2\alpha}}$$

- Το ηλ. δυναμικό που προκαλείται απο το στοιχειώδες φορτίο dq στο σημείο Α είναι:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2\alpha}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

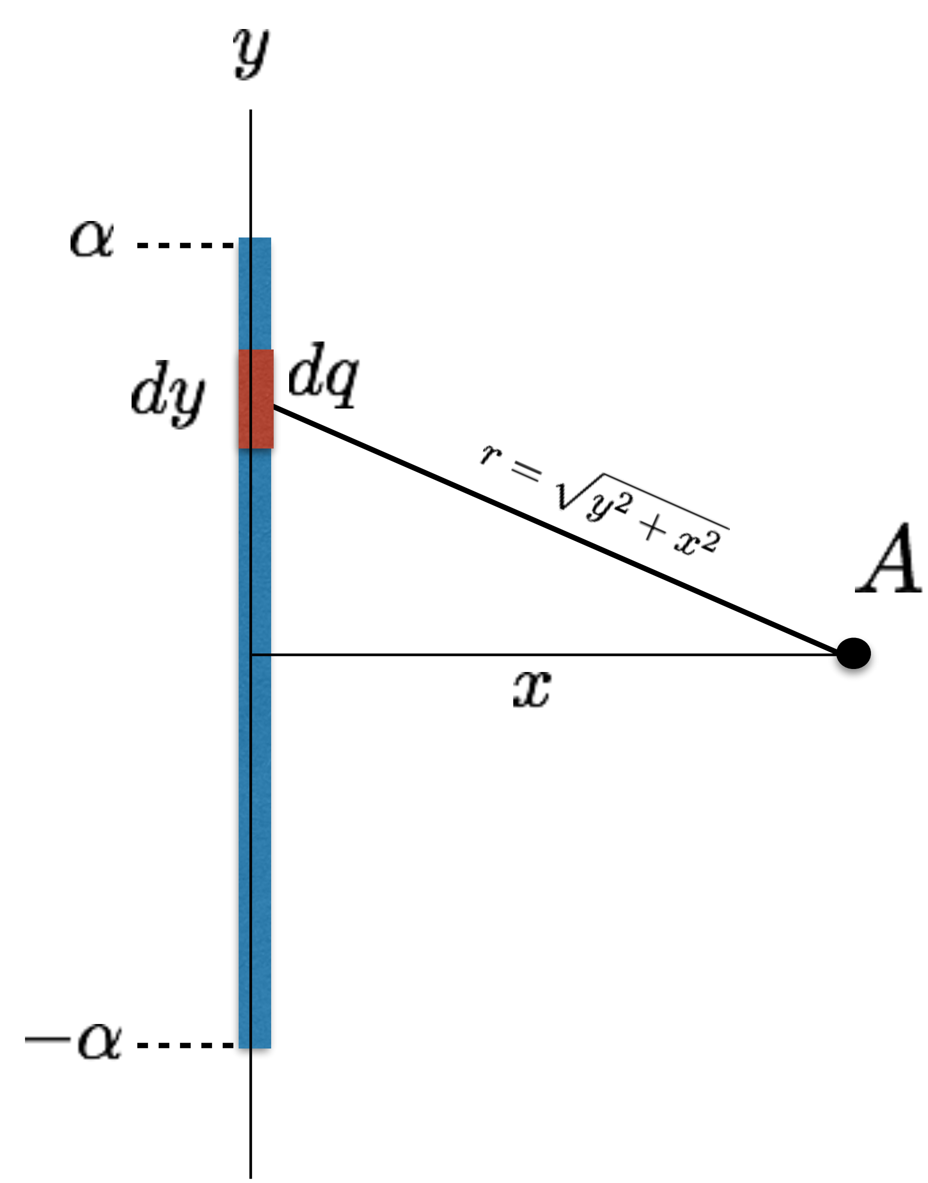


Λεπτή φορτισμένη ράβδος

- Για να βρούμε το δυναμικό στο Α, ολοκληρώνουμε την προηγούμενη σχέση για όλο το μήκος της ράβδου

$$V_A = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2\alpha} ln\frac{\sqrt{\alpha^2+x^2}+a}{\sqrt{\alpha^2+x^2}-a}$$



- Για χ >> α , το δυναμικό τείνει στο μηδέν.

Βιβλιογραφία

- Serway R. A., Jewett J. W., 2013, Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς : ηλεκτρισμός και μαγνητισμός, φώς και οπτική, σύγχρονη φυσική, Κλειδάριθμος , Αθήνα
- Halliday D., Resnick R, 2009, Φυσική: μέρος B, 4η εκδ., Γ. & Α. Πνευματικός, Αθήνα
- Young H.D., Freedman R.A., 2010, Πανεπιστημιακή φυσική με σύγχρονη φυσική, τ. 2: Ηλεκτρομαγνητισμός- Οπτική , 2η έκδ., Παπαζήσης , Αθήνα
- Pollack G.L., Stump D. R., 2002, Electromagnetism, Addison Wesley, San Francisco
- Hecht E.P., 1975, Schaum's outline of theory and problems of optics, McGraw-Hill Book Company, New York