



Saura Nathaniel - 5A Polytech Mécanique - Master MEGA

Filière Mécanique
Année 2016-2017

DYNAMIQUE DES GAZ

Générations d'ondes dans un tube à chocs

Enseignant :

Mr. BUFFAT



Introduction

La thématique de l'étude du tube à chocs consiste en l'étude des chocs instationnaires. Les ondes de chocs font partie des solutions des équations de la mécanique des fluides compressibles : les équations d'Euler. Ces équations traduisent la conservation de la quantité de mouvement dans un fluide parfait c'est-à-dire un fluide dont on considère que les effets visqueux sont nuls. Dans la réalité cette hypothèse est valide dès lors que les effets de viscosité sont négligeables devant les termes inertiels : les termes d'accélération. Ces termes d'inertie se retrouvent dans la dérivée particulaire de la vitesse :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$$

Pour une particule fluide choisie, la dérivée particulaire d'une grandeur χ traduit de manière générale, la variation de χ le long de la trajectoire de cette particule fluide. Elle fait apparaître alors une variation temporelle et les effets d'advection par le fluide autour de cette particule. Notre problème en plus d'être instationnaire est non linéaire..

L'expérience du tube à chocs consiste en la mise en contact de deux gaz (les mêmes ou différents) ayant des pressions, vitesse et masse volumique initiales différentes (voir figure (1)). Lors de cette mise en contact, sont générés plusieurs types d'ondes. Dans ce rapport, nous allons tenter de retrouver ces ondes à partir des résultats d'un code écrit pour cette étude. Le code python est joint à ce rapport.

1 Description du problème et calculs préliminaires

Nous cherchons à étudier la propagation d'ondes dans un tube à choc représenté figure (1). Les deux milieux sont séparés par une membrane et sont supposés être au repos au temps $t = t_0 = 0$. Les deux milieux sont dans certaines conditions de vitesse, de pression et de masse volumique. Le milieu à gauche de la membrane est caractérisé par les valeurs initiales :

$$\vec{W}_g = \begin{pmatrix} \rho_g = 1 \text{ kg/m}^3 \\ u_g = 0 \text{ m/s}^{-1} \\ p_g = 100 \text{ kN.m}^{-2} \end{pmatrix}$$

L'indice utilisé $_g$ spécifie que nous parlons du côté *gauche* du tube vis-à-vis de la membrane. Nous écrivons également les valeurs de conditions initiales pour le fluide à droite de la membrane :

$$\vec{W}_d = \begin{pmatrix} \rho_d = 0.125 \text{ kg/m}^3 \\ u_d = 0 \text{ m/s}^{-1} \\ p_d = 10 \text{ kN.m}^{-2} \end{pmatrix}$$

Puisque les deux gaz sont au repos, nous pouvons calculer les vitesses du son c_g et c_d à partir de

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad (1)$$

Une application numérique nous donne avec $\gamma = 1.4$ et la pression exprimée en Pascal :

$$c_g \approx 374.2 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{et} \quad c_d \approx 334.7 \text{ m.s}^{-1}$$



FIGURE 1 – Présentation du problème : un tube séparé pour $t < 0$ en deux parties marquées par des conditions de masse volumique et de pression différentes

Le début de notre simulation commence lorsque nous retirons cette membrane (représentée en rouge sur la figure précédente) et que les deux milieux se rencontrent, c'est à ce moment là que sont générées

trois ondes.

Les molécules étant initialement dans la partie gauche sont 10 fois plus comprimées que celle de la partie droite, lorsque l'on enlève la membrane de séparation, les molécules de gauche vont se "relaxer" vers la partie droite ; l'onde induite alors est appelée **onde de détente** et "remonte" l'écoulement (qui se fait alors de gauche à droite).

Dans un même temps, l'hypothèse de non-mélange entre les particules des deux milieux implique la génération d'une **onde de discontinuité de contact**, marquée par une masse volumique locale proche de la masse volumique moyenne des deux masses volumiques.

Enfin, puisque les molécules de gauche vont se propager dans la partie droite, les molécules locales vont s'entrechoquer : c'est l'**onde de choc** (marqué par un pic en masse volumique, vitesse et pression).

Ces trois phénomènes sont simultanés mais se propagent dans des directions différentes. Nous allons écrire les équations régissant la dynamique du problème.

2 Équations du problème

Dans le tube à chocs, les chocs sont instationnaires. Nous écrivons nos équations de conservation non-stationnaires :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2)}{\partial t} + \frac{\partial [(\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 + P) u]}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

Dans l'ordre, l'équation (2) est l'expression du principe de conservation de la masse écrite en 1D. Puis l'équation (3) traduit le principe de la conservation de la quantité de mouvement. Enfin, la dernière équation est celle de la conservation de l'énergie totale $\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2$, que l'on peut imaginer par la phrase de Lavoisier : "*rien ne se perd tout se transforme*".

Nous avons ici quatre inconnues : ρ , u , p et e , nous avons donc 3 équations pour 4 inconnus. La solution d'un tel problème n'est pas unique puisque pour le résoudre, il faudrait imposer arbitrairement à une de ces quatre inconnues une valeur elle aussi arbitraire. On aurait alors une solution vraie pour cette valeur imposée uniquement. En reproduisant ce procédé une infinité de fois, on aurait en fait une infinité de solutions. Et cela ne nous intéresse pas, ou du moins pas dans ce projet.

On complète alors ces trois équations avec l'équation des gaz parfaits reliant l'énergie interne e avec la pression et la masse volumique :

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (5)$$

Pour réécrire ce système d'équations, on introduit un vecteur de paramètres \vec{W} et un vecteur de flux \vec{F} tel qu'on puisse condenser les 4 équations précédentes comme suit :

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

Par identification :

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ [\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 + p] u \end{pmatrix}$$

3 Stratégie Numérique

Nous allons utiliser le schéma de Richtmyer ; c'est un schéma en deux étapes. Voici l'écriture générale du schéma :

$$1^{\text{ère}} \text{ étape : } \underline{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\underline{u}_{i+1}^n + \underline{u}_i^n) - \frac{r}{2} (\underline{f}_{i+1}^n - \underline{f}_i^n) \quad (7)$$

$$2^{\text{ème}} \text{ étape : } \underline{u}_i^{n+1} = \underline{u}_i^n - r \left(\underline{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \underline{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (8)$$

L'écriture $\underline{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ par exemple, exprime l'évaluation du flux sur le point de maillage $(i - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ signifie implicitement $\underline{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \underline{f}\left(\underline{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)$, appliqué à la grandeur u . Voici un schéma (dont la qualité n'est pas extraordinaire) représentant les deux étapes du schéma sur le maillage adapté.

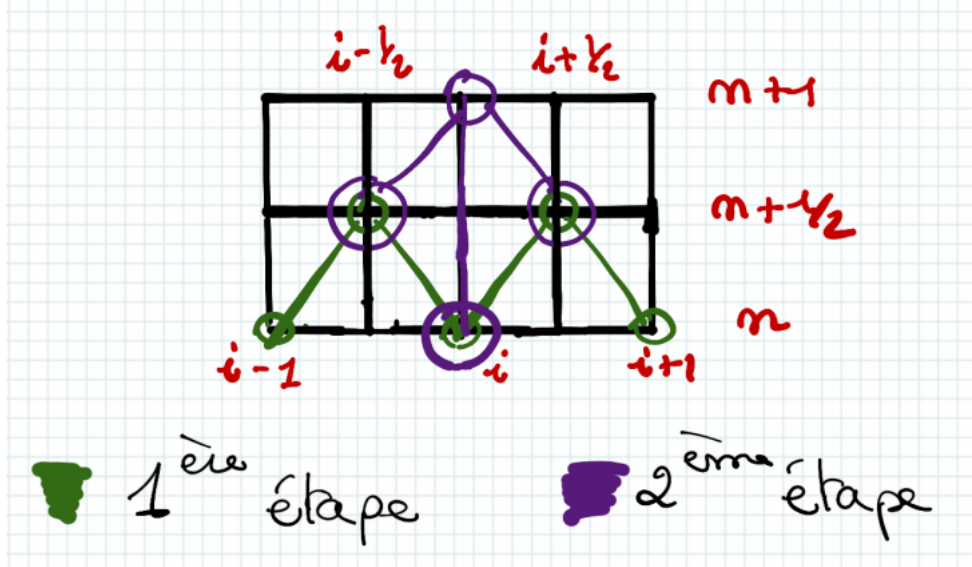


FIGURE 2 – Représentation des étapes sur le maillage adapté pour le schéma de Richtmyer.

La première étape consiste à évaluer les composantes de W au nœud $(i + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$, ainsi qu'au nœud $(i - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ en ne faisant intervenir que les valeurs au temps n pour W et F .

La deuxième étape consiste à calculer les W à l'étape suivante. Cette étape nécessite le calcul des flux $\underline{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $\underline{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, rendu possible grâce à la première étape justement.

Nous allons maintenant écrire les coordonnées de \vec{F} en fonction de celle de \vec{W} uniquement.

La première composante de \vec{F} , correspond en fait à la deuxième de \vec{W} . C'est-à-dire

$$F_1 = W_2$$

Puis, la deuxième composante de \vec{F} : $\rho u^2 + p$ nécessite un peu plus de travail car elle fait apparaître la pression et la vitesse au carré qui ne sont ni l'une ni l'autre des composantes directes de \vec{W} .

En ce qui concerne la vitesse, on remarque que ρ , soit W_1 , ne s'annule jamais. Cela nous permet alors d'exprimer u en fonction de W_1 et de W_2 :

$$u = \frac{\rho u}{\rho} = \frac{W_2}{W_1}$$

Cette écriture est très importante car elle permet de connaître la vitesse à partir des coordonnées de \vec{W} , la vitesse étant un paramètre récurrent dans les expressions des flux F_i , elle va nous être très utile pour la prochaine étape. Nous essayons de même de trouver une expression pour la pression P , ne faisant intervenir que W_1 , W_2 et W_3 .

Nous utilisons l'équation (5) que nous réécrivons en fonction des composantes de W :

$$W_3 = \rho e + \frac{1}{2}\rho u^2 = \frac{1}{\gamma - 1}P + \frac{1}{2}\frac{W_2^2}{W_1}$$

On a alors directement

$$P = W_3(\gamma - 1) - \frac{1}{2}(\gamma - 1)\frac{W_2^2}{W_1} \quad (9)$$

Ainsi, on écrit

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} W_2 \\ \frac{W_2^2}{W_1} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}\right) + (\gamma-1)W_3 \\ \left[W_3\gamma - \frac{W_2^2}{W_1}\frac{\gamma-1}{2}\right] \frac{W_2}{W_1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Cette façon de procéder permet de gérer les composantes de \vec{W} et implicitement celle de \vec{F} . Cette étape est capitale pour l'écriture du code. En effet, si nous avions choisi d'enregistrer à chaque pas de temps, les valeurs de toutes nos inconnues, le code aurait été trop long et lourd, surtout que nous aurions également dû calculer les flux et donc garder en mémoire les valeurs de chaque variables aux nœuds intermédiaires $(i - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ et $(i + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ de notre maillage.

Lors de la première étape de ce schéma, nous calculons les composantes de \vec{W} sur les nœuds intermédiaires des mailles, ainsi que les flux intermédiaires évalués à partir de ces composantes. Dans la deuxième étape, nous construisons les composantes de \vec{W} au temps $n + 1$, grâce aux flux calculés dans la première étape.

À la sortie de chaque boucle nous prenons soin d'enregistrer les valeurs de la deuxième étape dans un vecteur qui contient deux cases de plus (une au début et une à la fin) pour les conditions aux limites de bord du tube dont on va parler dans un instant. Le vecteur alors rempli servira de conditions initiales (temporelles) pour l'incrément suivant.

Comme tout système numérique (ou réel), il nous faut préciser les conditions aux limites. Ici, nous initialisons les pressions, la masse volumique (directement écrite comme W_1) et la vitesse au temps 0, et à chaque temps nous précisons les conditions aux limites spatiales¹ de \vec{W} pour les points extrêmes de notre tube à choc ; nous utilisons des conditions de continuité : les valeurs de \vec{W} du bord gauche sont égales à celle du point juste après le bord, idem pour le bord gauche pour laquelle on prendra les valeurs du point juste avant le bord. Au niveau du code, on les écrit à la fin de la boucle spatiale en précisant à notre code de commencer la boucle sur le deuxième nœud spatial et de la finir au point $N - 1$. Nous écrivons le remplissage des composantes W_i ainsi que les conditions aux limites :

```

1      # On enregistre les tableaux tampons dans les wi
2      w1[1:sx-1] = w1_tp
3      w2[1:sx-1] = w2_tp
4      w3[1:sx-1] = w3_tp
5
6      # Conditions aux limites
7      w1[0] = w1[1] ; w1[-1] = w1[sx-1] # sx = np.size(np.arange(-L/2.,L/2.+dx,dx))
8      w2[0] = w2[1] ; w2[-1] = w2[sx-1]
9      w3[0] = w3[1] ; w3[-1] = w3[sx-1]
10
11     # Re-initialisation des tableaux tampons
12     w1_tp = []
13     w2_tp = []
14     w3_tp = []

```

Code 1 – Gestion des listes "tampons" et conditions aux limites

Après vous avoir présenté la stratégie numérique que nous avons utilisé pour l'écriture du code, nous allons discuter des résultats du code dans la partie suivante.

Pour plus d'informations sur le code ou sur l'implémentation du schéma de Richtmyer, je vous invite à consulter le code que je préfère joindre au mail d'envoi de ce rapport plutôt que de le citer en annexe.

1. En vérité, des conditions aux limites spatiales ne sont pas indispensables si nous supposons que les ondes n'atteignent pas le bout du tube, ce qui est le cas dans notre simulation, mais dans le doute nous avons quand même défini un certain des CL spatiales.

4 Résultats pour le problème du tube à choc

Nous partons d'un tube de longueur $L = 20 \text{ m}$; dans la région $x \in [-L/2, 0[$, le tube contient un gaz avec les conditions W_g , alors que dans la région $x \in]0, L/2]$, le gaz contenu dans cette partie du tube est au condition W_d . Nous traçons les grandeurs ρ , u et P afin de valider l'initialisation :

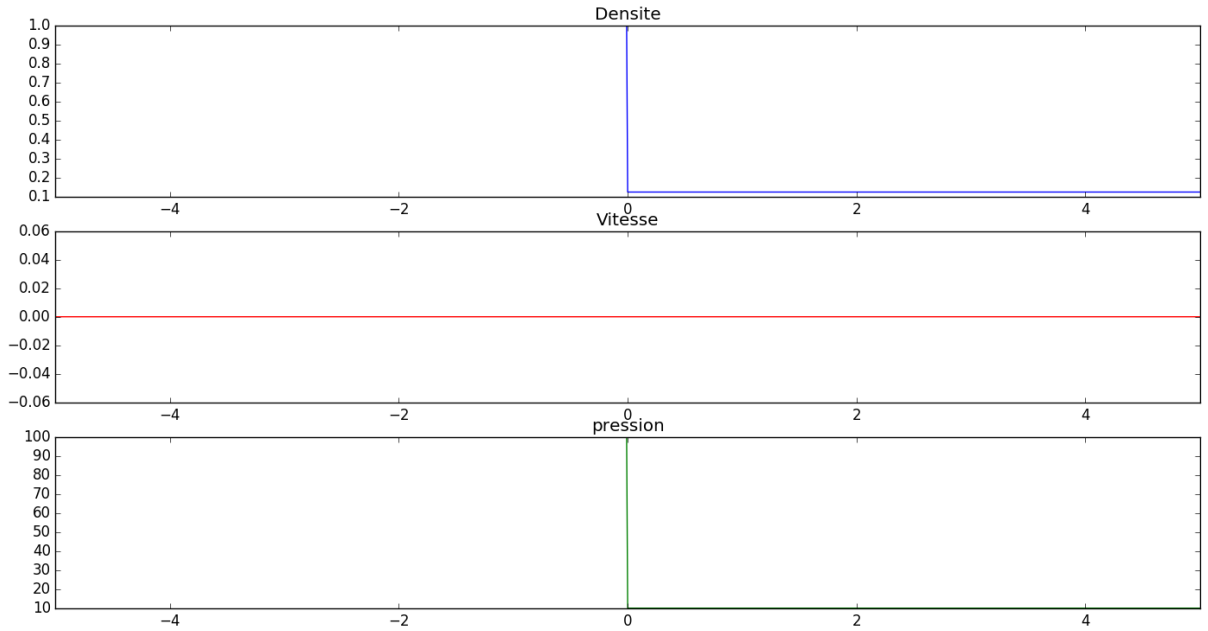


FIGURE 3 – Tracé des courbes (zoomées) de masse volumique, vitesse et pression initiales. De gauche à droite, la masse volumique passe de $\rho = 1\text{kg/m}^3$ à $\rho = 0.125\text{kg/m}^3$, la vitesse est nulle i.e. les milieux sont au repos. Enfin, la pression varie de $P = 100\text{kN}$ à $P = 10\text{kN}$.

L'initialisation fait bien apparaître les conditions dans les milieux, on peut donc continuer notre analyse. Les calculs préliminaires pour ces valeurs de pression et masse volumique nous donnent les valeurs des vitesses du son dans ces milieux voir équation (1).

Après un temps $t_f = 0.01$ secondes, voici les résultats que notre code donne :

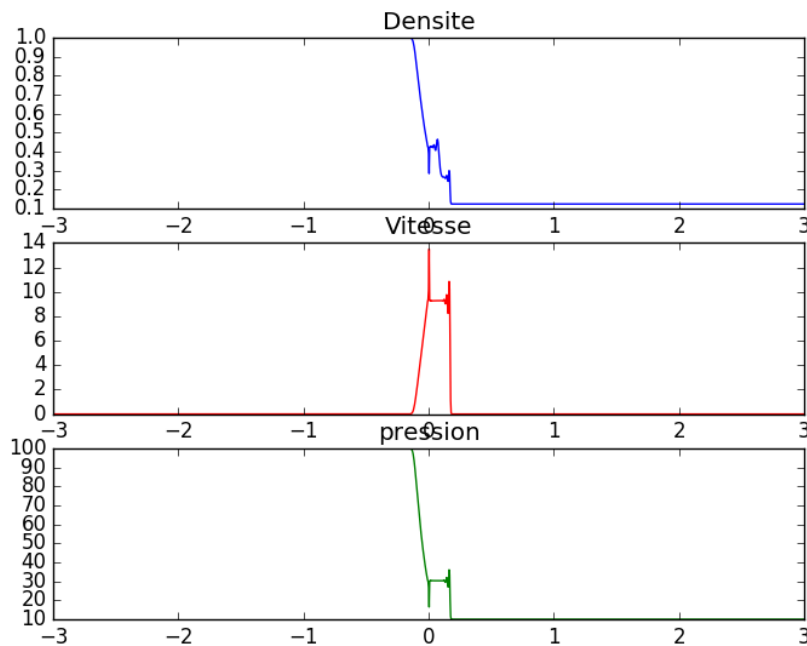


FIGURE 4 – Solution numérique du problème du tube à chocs pour $t = t_f$. La figure a été tronquée pour zoomer artificiellement sur la zone où les chocs se développent. Les résultats sont écrasés par les pics de dispersion numérique.

Dans la figure précédente, nous avons tracé l'évolution de la masse volumique, de la vitesse et de la pression le long du tube au temps $t_f = 0.01 \text{ s}$. Nous distinguons trois zones particulières : deux que l'on retrouve dans les trois courbes et une que l'on ne peut visualiser que pour la masse volumique. Nous allons identifier ces tendances et tenter de donner une explication vis-à-vis des ondes dont nous avons discuté dans la première section.

Regardons de gauche à droite les courbes de masse volumique, de vitesse et de pression. Loin de la zone de contact, les valeurs de ces trois grandeurs sont les mêmes que pour l'état initial.

Lorsque nous nous approchons de l'ancienne position de la membrane ($x = 0$), nous observons une diminution abrupte mais *continue* de la pression ainsi que la masse volumique, alors qu'au même moment, la vitesse augmente (de manière *continue* également).

Initialement, les molécules qui étaient présentes à cet endroit précis avaient les caractéristiques W_g et étaient donc 10 fois plus pressurisées et également approximativement 10 fois plus denses que les molécules de l'autre côté de la membrane.

Forcément, lorsque nous retirons la membrane, les molécules plus pressurisées donc plus énergétiques vont avoir tendance à se décaler vers la droite, poussant au passage les molécules présentes à cet endroit. Ainsi, la diminution de pression du côté gauche de la membrane va être suivie par une diminution de la masse volumique dans cette même zone, et se traduit également par une augmentation de la vitesse (conservation de l'énergie implique qu'une perte de pression est suivie d'un gain de vitesse par gain d'énergie cinétique).

Les profils de masse volumique, de pression et de vitesse dans cette zone sont typiques de la propagation d'une **onde de détente** remontant l'écoulement des molécules. Notons enfin que cette onde se propage à une vitesse $u_{détente} = u - c_{choc}$ avec u et c_{choc} que l'on va définir et calculer plus tard dans ce rapport.

Très proche de $x = 0$, la pression, la masse volumique et la vitesse se stabilisent. Si nous continuons à aller vers la droite dans notre graphique, nous observons alors un choc au niveau de la masse volumique dont nous n'avons aucune trace dans les deux autres courbes. Ce choc est en fait la marque qu'une autre onde se propage : c'est une onde de discontinuité de contact. L'origine de cette onde est une hypothèse de simplification lorsque nous avons écrit nos équations ; nous avons en effet utilisé les équations d'Euler (équation (3)) qui ne prennent pas en compte la diffusion moléculaire.

Les gaz ne vont alors pas se mélanger mais plutôt avancer en front. La confrontation des fronts donne une onde se propageant à la vitesse avec laquelle les molécules de gauche se déplacent. Cette vitesse est notée u et contrairement à ce que l'on pourrait croire en voyant la figure (4), la vitesse de la discontinuité de contact n'est pas 9.25 m.s^{-1} . En fait, la vitesse affichée ici ne tient pas compte du fait que la pression est en kilo-pascal. Nous calculons avec les pressions en pascal c_d et c_g qui donnent respectivement 10.58 et 11.83 m.s^{-1} . Lorsque l'on utilise la formule avec les kilo-pascal, nous obtenons les résultats (1) soit : $c_d \approx 334.7$ et $c_g \approx 374.2 \text{ m.s}^{-1}$ ² on définit un facteur "d'échelle" pour ramener la vitesse de discontinuité dans les vraies unités, on test :

$$u_{echelle} = \frac{9.21 \cdot 334.7}{10.58} \approx 291.4 \text{ m.s}^{-1}$$

$$u_{echelle} = \frac{9.21 \cdot 374.2}{11.83} \approx 291.3 \text{ m.s}^{-1}$$

On en conclut que la vitesse de propagation de l'onde de discontinuité est autour de $u_{disc} = 291.4 \text{ m.s}^{-1}$. Cette vitesse sera appelée par la suite u tout simplement.

Si l'on fait abstraction de cette dernière onde, nous observons que la pression, et la vitesse présentent toutes deux un plateau. Cette zone correspond à la propagation de l'**onde de choc** générée par le contact des molécules des deux milieux différents lorsque la membrane a été retirée. Cette onde se propage jusqu'à $x \approx 0.2 \text{ m}$ et est marquée par un retour brutal aux conditions initiales c'est-à-dire le choc en lui-même. Cette onde de choc se propage alors à la vitesse $u_{choc} = u + c_{choc}$.

Dans cette zone, la masse volumique présente deux plateaux séparés par le choc de discontinuité. Après

2. Je n'avais pas fait attention à transformer les kilo-pascals en pascals directement et lorsque j'ai modifié cette pression, mon ordinateur n'a pas apprécié et m'a affiché à peu près n'importe quoi.

le choc de discontinuité, la masse volumique présente un plateau de masse volumique un peu plus élevée que l'état tout initial droite ($\approx 0.27 \text{kg.m}^{-3}$), de même que la pression ($\approx 30 \text{kN.m}^{-2}$). C'est une zone dans laquelle les molécules qui étaient initialement proche de la membrane (du côté droit) ont été poussées, ce qui crée une onde de compression caractérisée par une pression et une masse volumique plus grandes qu'initialement.

On va maintenant calculer la vitesse du son dans cette zone à partir de la formule (1) :

$$c_{choc} = \sqrt{1.4 \frac{30\,000}{0.27}} \approx 394.4 \text{m.s}^{-1}$$

Ainsi, la vitesse de propagation de l'onde de choc est $u + c_{choc} \approx 685 \text{m.s}^{-1}$.

Ces graphes des différentes évolutions dans le tube présentent néanmoins des pics qui ne sont pas physiques. Ces pics sont dus à un phénomène numérique appelé dispersion numérique. Cette dispersion est sûrement induite par la différence centrée pour l'évaluation du flux en i , au niveau de la première étape (voir (7)). Pour s'en débarrasser, il faut introduire un coefficient de diffusion numérique qui aura pour rôle d'amortir les effets de dispersion en revanche, on perdra en précision des résultats sur la vitesse notamment.

Dans la globalité les courbes obtenues ressemblent à celle que Sod avait obtenues. Dans le papier de Sod³, le schéma de Richtmyer est désigné comme étant le schéma de Lax Wendroff à deux pas.

Dans son cas, les pressions varient de 1 (unité non précisée) à 0.1, le rapport des deux pressions est similaire au notre. Et il semblerait que sa longueur de tube soit 1.

Voici les résultats qu'il obtenu :

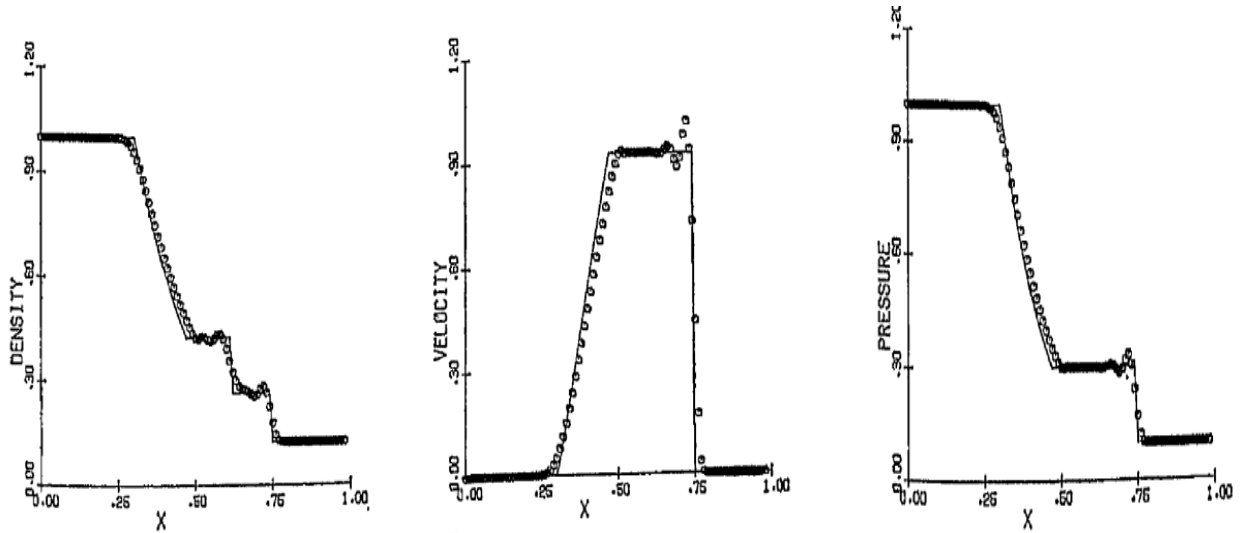


FIGURE 5 – Tracés de la pression, masse volumique et vitesse obtenue par Sod pour le schéma de Richtmyer (Lax-Wendroff selon Sod) dans le tube à chocs.

Ses pics ne sont pas aussi conséquents que les notre et altèrent peut être moins l'interprétation des résultats néanmoins, nous retrouvons chez Sod toutes les caractéristiques des courbes en pression, en masse volumique et en vitesse dont nous avons parlé plus haut.

Nous finissons avec les relations de Rankine-Hugoniot pour essayer de vérifier nos résultats. Nous nous plaçons donc dans le choc de célérité $u + c$. On calcule le nombre de Mach associé à cette zone :

$$M_g = \frac{u}{c_{choc}} \approx 0.7378$$

Où l'indice g indique que l'on calcule la valeur du Mach en amont (ou à gauche) du choc.

Puis nous calculons la masse volumique de l'autre côté du choc :

$$\rho_d = \rho_g \left(\frac{(\gamma + 1) M_g^2}{(\gamma - 1) M_g^2 + 2} \right) \approx 0.16 \text{ kg.m}^{-3}$$

3. Gary A. Sod écrivit un article en 1978 dans lequel il comparait les méthodes basées sur des schéma DF pour la résolution de système d'équations non-linéaires

Avec $\rho_g \approx 0.27 \text{ kg.m}^{-3}$.

La valeur attendue était $\rho_d = 0.125 \text{ kg.m}^{-3}$, l'erreur est quand même notable ici. On calcule à présent le saut de pression :

$$P_d = P_g \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_g^2 - 1) \right) \approx 14.1 \text{ kN.m}^{-2}$$

Avec cette $P_g \approx 30 \text{ kN.m}^{-2}$.

La valeur attendue était $P_d = 10 \text{ kN.m}^{-2}$ ici aussi les résultats ne sont pas très loin de la théorie.

Néanmoins, nous notons des imprécisions dans les résultats qui peuvent provenir de plusieurs éléments : dans un premier temps, les mesures des pressions, des masses volumiques et des vitesses ont été faites à la main, puis tester pour quelques valeurs de pression, de masse volumique ou de vitesse, tout en essayant de ne pas tomber dans des points proche des instabilités numériques.

Une autre source d'erreur possible peut provenir de notre échelle de vitesse utilisée pour pouvoir exprimer la *vraie* vitesse de discontinuité de contact en fonction de celle affichée sur les figures.

Les résultats avec les relations de Rankine-Hugoniot nous indiquent que nos vitesses de propagation du choc et de la discontinuité de contact ne sont pas loin de la réalité.

Nous avons essayé d'observer les différentes propagations ; pour cela, nous avons tracé ces mêmes résultats mais pour un temps plus long : $t_f = 0.1 \text{ s}$. Voici les courbes obtenus :

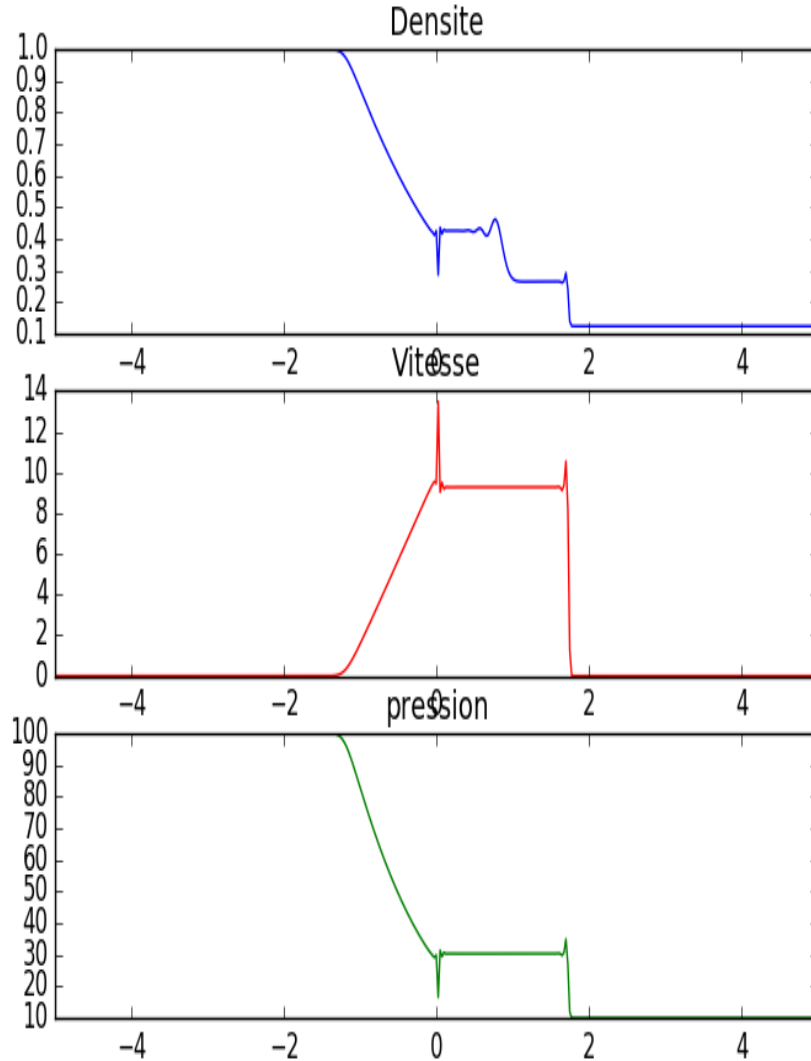


FIGURE 6 – Tracé des masse volumique, vitesse et pression dans le tube pour un temps final $t_f = 0.1 \text{ s}$. On observe les propagations des ondes dont nous avons parlé au-dessus dans le tube. Les courbes sont moins localisées et aplatissent moins les courbes ; les plateaux sont également plus marqués.

Il est intéressant de voir que les ondes se propagent réellement dans le tube et que les équations que nous avons implémentées marchent également pour des temps plus long. Nous retrouvons notre vitesse de choc u qui est toujours localisée aux $u \approx 9.21 \text{ m.s}^{-1}$. C'est le cas pour toutes les valeurs de masse volumique et de pression dont nous avons parlé.

Si nous avions voulu étudier la réflexion de ces ondes par les parois (symbolisées ici par les bords du tube), il aurait fallu augmenter encore le temps final t_f de notre simulation et changer les conditions aux limites : en effet, comme présentées ici (1), ces conditions aux limites sont des conditions d'*outflow* c'est-à-dire qu'on fait propager les ondes artificiellement au delà du tube.

On pourrait essayer des conditions de réflexions que l'on écrirait comme cela :

```

1      # Conditions aux limites modifiees
2      w1[0] = -w1[1] ; w1[-1] = -w1[sx-1] # sx = np.size(np.arange(-L/2.,L/2.+dx,dx))
3      w2[0] = -w2[1] ; w2[-1] = -w2[sx-1]
4      w3[0] = -w3[1] ; w3[-1] = -w3[sx-1]

```

Code 2 – Conditions de reflexion totale

Dans ce cas là, la réflexion serait totale puisque nous considérons aucune transmission ni absorption de l'énergie des ondes. Nous pourrions également complexifier encore un peu en considérant que les bords du tube possèdent une certaine impédance qui se traduirait comme une réflexion partielle de l'onde, l'autre partie étant absorbée ou transmise par les parois. On imagine alors que l'on pourrait tester l'isolation acoustique de certains matériaux lorsque des chocs instationnaires et parfois violents se développent à l'intérieur.

D'un point de vue plus numérique, nous pouvons nous inspirer de l'article de Gary Sod et tester l'implémentation de méthodes comme l'injection d'une diffusion numérique pour supprimer les pic de dispersion numérique et également celles d'anti diffusion pour réduire l'altération des résultats induit par les méthodes de diffusion tout en supprimant les pics de dispersion. Ou bien, toujours basé sur cet article, tester les méthodes de Godunov, MacCormack ou d'autres et discuter de la méthode la plus précise, la plus rapide etc.

Toutefois, pour des raisons de manque de temps, nous ne faisons que recenser les différentes évolutions de ce code sans pour autant les implémenter.

Conclusion

Ce projet s'est découpé en deux étapes capitales : la première était la compréhension du schéma et l'établissement d'une stratégie numérique afin de pouvoir implémenter la méthode de Richtmyer dans l'étude des chocs instationnaires se développant dans un tube à chocs. La deuxième était de réfléchir sur les résultats et de faire des parallèles d'une part avec le cours et d'autre part avec les résultats obtenus par Sod en 1978 afin de conclure sur la justesse des résultats, étape capitale dans une simulation numérique.

Dans cette deuxième étape nous avons réussi à mettre en évidence le système d'ondes qui se développe dans un problème de tube à chocs. Système d'ondes qui était attendu tant au niveau du cours que des courbes de Sod voir figure (5).

Enfin, nous avons tenté de tester nos résultats avec les relations de Rankine Hugoniot en se plaçant à l'endroit du choc se propageant par l'onde de choc. Nous sommes partis de l'idée qu'à l'endroit du choc les trois courbes passent subitement des valeurs du choc se propageant, aux valeurs initiales W_d . Ainsi, en utilisant les conditions de choc calculées par notre code, les relations de saut devraient nous donner des valeurs proches de W_d à droite du choc (voir figure (4) ainsi que la discussion ici (5)).

Enfin comme on l'a vu figure (6), en augmentant le temps final, les pics sont toujours présents mais les ondes sont bien marquées.