

# Zero to Hero: WiMo

Niels Savvides

2024/10/30

## 1 Analyse in 1 veranderlijke: enkele aspecten

### 1.1 Continuiteitseigenschappen van functies

Functie  $f(x)$  is continue over  $]a, b[$  als:

1.  $f(x)$  bestaat in elk punt
2. de limiet van  $f(x)$  bestaat in elk punt

**Continue afgeleide:**  $f(x)$  is continue (zie hierboven) en  $f'(x)$  bestaat in elk punt. Dit kan:

1. gladde functies zijn: elk afgeleide is continue
2. stuksgewijs:  $f(x)$  heeft een singulariteit, maar het bestaat in deel intervallen  $]a, c[$   $]c, b[$

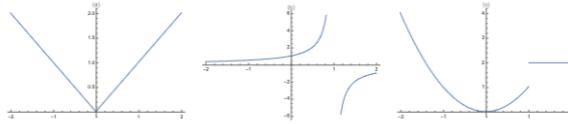


Figure 1: a) Continue functie, stuksgewijs continue afgeleide (als je afleid krijg je een singulairiteit) b) Heeft een singulairiteit, dus stuksgewijs continu, stuksgewijs glad continu afleidbaar c) Deze is glad stuksgewijs continu afleidbaar, is ook stuksgewijs continu

### 1.2 Taylorontwikkeling

We willen zaken gaan benaderen. Hiervoor gebruiken we:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

waarbij  $a$  het **werkpunt** is.

Veel voorkomende Taylorontwikkelingen:

See Figure 2.

### Storingsrekening

Zie Figuur 4.

Of Maple solution 3.

### 1.3 Twee eenvoudige differentiaalvergelijkingen

#### 1.3.1 Eerste orde differentiaalvergelijking

$$y'(x) = \lambda y(x)$$

$$\begin{aligned}
 - e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \\
 - \sin x &= 0 + x + \frac{x^2}{2} \cdot (\sin(0)) - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{k+1} \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 - \tan x &= \left( -\frac{1}{1-x} \right)^{\infty} \\
 - \frac{1}{1-x} &= 1 + x + \dots + x^n \quad \text{convergent voor } x \in ]-1, 1[ \\
 \hookrightarrow \text{propositie: de afgeleide van } \frac{1}{1-x} \text{ maakt negatief}\\
 \text{van door } -x \text{ daarin wordt het positief.} \\
 - \ln(1-x) &\approx - \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} \right) \quad \text{van } x \in ]-1, 1[
 \end{aligned}$$

Figure 2: Simply use the formulas

Als we dit uitwerken krijgen we:

$$\ln(y(x)) = \lambda x + C$$

$$y(x) = e^{\lambda x + C} = e^C e^{\lambda x} = C e^{\lambda x} \text{ met } C = y(0)$$

$$y(x) = y(0) e^{\lambda x}$$

### Radioactief verval

Zie Figuur 5.

### 1.3.2 Tweede orde differentiaalvergelijking

$$y''(x) = \lambda y(x)$$

Hierbij heb je 3 gevallen:

1.  $\lambda > 0$ :  $y(t) = A e^{\sqrt{\lambda}t} + B e^{-\sqrt{\lambda}t}$
2.  $\lambda = 0$ :  $y(t) = A + Bt$
3.  $\lambda < 0$ :  $y(t) = A \cos(\sqrt{-\lambda}t) + B \sin(\sqrt{-\lambda}t)$

### 1.3.3 Complexe getallen

Algemene vorm:  $z = a + bi$

waarbij  $a$  reeel,  $b$  imaginair en  $i^2 = -1$

$$\text{inverse: } (a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

$$\text{complement: } z = a + bi \rightarrow z^* = a - bi$$

$$\text{modulus: } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

in polaire vorm:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (\text{Dit kan via Taylor bewezen worden (zie oefeningen)})$$

Okey, nu nog een paar goniometrische formules:

```

> # x^3 + epsilon · x = 1
> f := x → x^3 + epsilon · x = 1
f := x → x^3 + e · x = 1 (1)
> # When epsilon is null, we get x = 1
> g := 1 + u · epsilon + v · epsilon^2
g := v e^2 + u e + 1 (2)
> f_subs := subs(x = g, f(x))
f_subs := (v e^2 + u e + 1)^3 + e (v e^2 + u e + 1) = 1 (3)
> f_expand := expand(f_subs)
f_expand := e^6 v^3 + 3 e^5 u v^2 + 3 e^4 u^2 v + 3 e^4 v^2 + e^3 u^3 + 6 e^3 u v + e^3 v + 3 e^2 u^2
+ e^2 u + 3 v e^2 + 3 u e + e + 1 (4)
> # First keep the left hand side
> left_hand_side := lhs(f_expand)
left_hand_side := e^6 v^3 + 3 e^5 u v^2 + 3 e^4 u^2 v + 3 e^4 v^2 + e^3 u^3 + 6 e^3 u v + e^3 v
+ 3 e^2 u^2 + e^2 u + 3 v e^2 + 3 u e + e + 1 (5)
> # Extract coeff 1 and 2
> coeff_1 := coeff(left_hand_side, epsilon, 1)
coeff_1 := 3 u + 1 (6)
> coeff_2 := coeff(left_hand_side, epsilon, 2)
coeff_2 := 3 u^2 + u + 3 v (7)
> solve({coeff_1 = 0, coeff_2 = 0}, {u, v})
{u = -1/3, v = 0} (8)
> # Final result
> result := subs({u = -1/3, v = 0}, g)
result := -e/3 + 1 (9)

```

Figure 3: Maple solution

### Storingreeksing

$$\alpha^3 + \varepsilon u = 1$$

1) if  $\varepsilon = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

$$\rightarrow \alpha_0 = 1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2$$

Vul in:  $(1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2)^3 + \varepsilon(1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2) \approx 1$

$(1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2)^3 \approx 1$

1) 1.

2)  $3\alpha_1 \varepsilon$  (fint en dan)

$\Rightarrow 3\alpha_1 \varepsilon^2 + 3\alpha_2 \varepsilon$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

~~$\rightarrow 3\alpha_1 \varepsilon + \varepsilon^2(2\alpha_1^2 + 3\alpha_1) + \varepsilon(1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2) \approx 1$~~

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 3\alpha_1 + 1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{3}\varepsilon$$

Figure 4: 1. Merk op dat als epsilon 0 is, dan is  $x = 1$ . Dus we benaderen value 1:  $1 + \varepsilon.u + \varepsilon^2.v$ . Vul dit in the main equation. Gebruik maple om dit op te lossen en vul  $u$  en  $v$  in  $x_1$

## Radioactie

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda$$

$$\Leftrightarrow \ln(N(t)) = -\lambda t + C$$

$$\Leftrightarrow N(t) = e^{-\lambda t} \cdot e^C = N_0(t)$$

$$\Leftrightarrow N(t) = N_0(t) \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\text{halveringstijd: } \frac{N_0}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{N_0(0)}{2} = N_0(t) \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda t_{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(2) = \lambda t_{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\lambda} = t_{1/2}$$

Figure 5: Vindt eerst de differentiaalvergelijking (zie eerste differentiaalvergelijking). Dan kunnen we de oplossing gelijkstellen aan  $N_0/2$ . Werk dit uit en je hebt  $t_{1/2}$  gevonden

$$\begin{aligned}\sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ \cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\end{aligned}$$

### 1.3.4 Hoofdstelling van de algebra

Als we een kwadratisch veelterm hebben:  $ax^2 + bx + c = 0$

Dan vinden we de nulpunten (oplossingen) met:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

met  $b = -4 * a * c$  vinden we de discriminant.

## 2 Lineare Algebra

### 2.1 Lineare onafhankelijkheid

**Lineare onafhankelijkheid** betekent dat de vectoren niet op een lijn liggen. Dit betekent dat de determinant van de matrix niet 0 is. Maar ook dat de vectoren niet een lineaire combinatie van elkaar zijn.

---

**Voorbeeld:** beschouw de drie vectoren (we gebruiken hier al de kolom-notatie voor vectoren)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad (2.1.3)$$

Figure 6: 1. Merk op dat als epsilon 0 is, dan is  $x = 1$ . Dus we benaderen value 1:  $1 + \epsilon.u + \epsilon^2.v$ . Vul dit in the main equation. Gebruik maple om dit op te lossen en vul  $u$  en  $v$  in  $x_1$

$v_1, v_2, v_3$  zijn lineair onafhankelijk. Maar  $v_1$  en  $v_2$  bijvoorbeeld, vormen een lineaire combinatie van  $v_3$

### 2.2 Inproduct, Norm, Orthogonaliteit

- **Inproduct:**  $uv = \sum_{i=1}^n u_i v_i$

- **Norm:**  $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

Side note: om de **hoek** tussen 2 vectoren te vinden,  $\frac{uv}{\|u\|\|v\|} = \cos(\theta)$

### 2.3 Gramm-Schmidt

Dit gaat ons toelaten om een basis te vinden van vectoren.

$$v_1 = u_1 / \|u_1\|$$

$$v_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1$$

$$v_x = \dots$$

Ook definieerd het dat een vector  $v = v^{\parallel} + v^{\perp}$

Waarbij  $v^{\parallel}$  de projectie is van  $v$  op  $u$  en  $v^{\perp}$  de projectie op de orthogonale basis.

$$v^{\parallel} = (u_1 \dot{y})u_1 + (u_2 \dot{y})u_2 + \dots$$

### 2.3.1 Voorbeeld Gramm-Schmidt

Zie Figuur 7.

```

> with(LinearAlgebra):
> v_1 := Vector([1, 1, 0])
      v_1 := 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (1)

> v_2 := Vector([0, 1, 1])
      v_2 := 
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
 (2)

> v_3 := Vector([1, 0, 1])
      v_3 := 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
 (3)

> u_1 :=  $\frac{v_1}{\text{Norm}(v_1, 2)}$ 
      u_1 := 
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (4)

> u_2 :=  $\frac{(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1)}{\text{Norm}(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1, 2)}$ 
      u_2 := 
$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$
 (5)

> u_3 :=  $(v_3 - ((u_2 \cdot v_3) \cdot u_2) - ((u_1 \cdot v_3) \cdot u_1)) / \text{Norm}(v_3 - ((u_2 \cdot v_3) \cdot u_2) - ((u_1 \cdot v_3) \cdot u_1), 2)$ ;
      (6)

```

Figure 7: Hier gebruiken we dus de iteratieve formule om de basis te vinden.

**Note:** Dit kan uitgebreid worden naar functieruimtes. Hiervoor gaan we een oefening zien in het werkcollege.

## 2.4 Matrices

Typische vorm:  $y = Ax$

Het **getransponeerde** is  $A^T$ , de rijen worden kolommen en omgekeerd.

Hier geldt dan dat:  $(AB)^T = B^T A^T$ , dus je draait de matrices om

## 2.5 Kolomruimte, rijruimte, nulruimte

- **Kolomruimte:** alle mogelijke lineaire combinaties van de kolommen ( $K(A)$ )
- **Rijruimte:** alle mogelijke lineaire combinaties van de rijen ( $K(A^T)$ )
- **Nulruimte:** alle vectoren die op 0 worden afgebeeld ( $N(A)$  of  $N(A^T)$ )

Zeer belangrijk is dat:

$N(A)$  complementair is aan  $K(A^T)$  en  $N(A^T)$  is complementair aan  $K(A)$

Bij de representatie van het vlak heb je een **rang**. Dit is basically de hoeveelheid kolommen van  $Q$  niet nul zijn.

### 2.5.1 Voorbeeld definities

Zie Figuur 8.

## 2.6 Matrix Inverse

$$x = A^{-1}y$$

Typisch gezien is dit gedaan via:  $\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$

Wat heel nuttig is is dat  $AA^{-1} = I$  en  $A^{-1}A = I$ . Dit kan heel wat schrijfwerk vermijden

Weer zoals bij transponeren geldt dat  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

## 2.7 Projectie en kleinste kwadraten benadering

Zoals we eerder hebben gezien bij Gramm-Schmidt, kunnen we  $v = v^{\parallel} + v^{\perp}$  schrijven.

We kunnen er iets abstracter boven plakken en werken met een **Projector**.

Deze is gedefinieerd als:  $P = A(A^T A)^{-1} A^T$  (deze vorm is niet al te belangrijk).

Met de nieuwe definitie  $P$  kunnen we nu zeggen dat  $v = Pv + (I - P)v$

The following properties hold:

1.  $P^2 = P$
2.  $P^T = P$

### 2.7.1 Voorbeeld Projectie

Zie Figuur 9.

## 2.8 Kleinste kwadraten fit

$$x = (A^T A)^{-1} A^T y$$

Dit gaat ons toelaten om te fitten op data.

In Maple wordt dit gedaan via `LinearAlgebra:-LeastSquares`.

Vorlesung 5:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

max m:  
2 a 4:

Endlich linear aufg.  
holomorph!

$$K(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad d=2$$

$$N(A^T) = \overline{0}$$

$$K(A^T) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$N(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{durch rechnen darf man nur:} \quad A\alpha = 0$$

$$A\vec{\alpha} = \vec{b}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = b_1 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = b_2 \end{cases}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{b_1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{b_2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

linear Rcm:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_p + \vec{\alpha}_o$$

orthogonale Vektoren  $\Delta = \cdot N(A)$

Figure 8:

```

[> with(LinearAlgebra):
=> A := Matrix([[1, 0], [0, 1], [0, c]])
      A := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$
 (1)
=> p := A.(Transpose(A).A)-1.Transpose(A)
      p := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2+1} & \frac{c}{c^2+1} \\ 0 & \frac{c}{c^2+1} & \frac{c^2}{c^2+1} \end{bmatrix}$$
 (2)
=> subs(c = 0, p)
      
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 (3)

```

Figure 9:

## 2.9 Vierkante matrices

### 2.9.1 Determinant

De determinant is super handig. Hoe berekenen we deze?

Let  $\mathbf{A}$  be a  $3 \times 3$  matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

The determinant of  $\mathbf{A}$ , denoted as  $\det(\mathbf{A})$  or  $|\mathbf{A}|$ , is calculated as:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Expanding the terms, we have:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Properties:

1.  $\det(A) = \det(A^T)$
2.  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3.  $\det(A) = 0 \rightarrow \text{linear dependent}$

## 2.10 Basic rotation matrix

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

So a typical transformation equation looks like:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ with the middle matrix being **inverse**.}$$

### 2.10.1 Example

See Figure 10 and 11.

**Voorbeeld: geroteerde basis.** Beschouw de basis  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_x = (1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_y = (0, 1)$  en de geroteerde basis  $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{e}'_x = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{e}'_y = (-\sin \theta, \cos \theta)$ . Wat is de transformatie, die voor een vector de componenten  $\mathbf{x}' = (x', y')$  t.o.v. de geroteerde basis geeft, in functie van de originele componenten  $\mathbf{x} = (x, y)$ .

Figure 10: Rotation opgave

## 2.11 Eigenvectoren, eigenwaarden, diagonalisatie en de Jordan-decompositie

$v_i$  is een eigenvector van  $A$  als  $Av_i = \lambda_i v_i$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

- geometrische multipliciteit: aantal lineair onafhankelijke eigenvectoren (je moet de eigenvalue invullen en row echelon reduced form verkrijgen. Dan zie je hoeveel eigenvectoren er degelijk zijn)

Figuur 12 toont een voorbeeld van de multipliciteit.

- algebraïsche multipliciteit: aantal keer dat de eigenwaarde voorkomt in de determinant

Indien alle geometrische multipliciteiten gelijk zijn aan de algebraïsche multipliciteiten, dan is de matrix diagonaliseerbaar.  $A = MDM^{-1}$

met  $D$  een diagonale matrix met de eigenwaarden op de diagonaal. en  $M$  een matrix met de eigenvectoren.

```

> restart: with(LinearAlgebra):
>
> M := Matrix([[cos(theta), -sin(theta)], [sin(theta), cos(theta)]])
M := 
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$
 (1)

> inv := MatrixInverse(M)
inv := 
$$\begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} & \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \\ -\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} & \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \end{bmatrix}$$
 (2)

> v := Vector([x, y])
v := 
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
 (3)

> inv . v

$$\begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta)x}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} + \frac{\sin(\theta)y}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \\ -\frac{\sin(\theta)x}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} + \frac{\cos(\theta)y}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \end{bmatrix}$$
 (4)

```

Figure 11: Rotation antwoord

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{det}} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 = -\lambda(\lambda - 1) - 1(-\lambda - \lambda) + 1(1 + \lambda) \\ & = -\lambda^3 + \lambda + \lambda + 1 + \lambda \\ & = -\lambda^3 + 3\lambda + 1 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$  calculate eigenvalues:

$$\lambda = -1, -1, 2$$

$$\text{Eigen } \lambda_1 = -1$$

$$\xrightarrow{\text{det}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{row reduction}} \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 = -x_2 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{det}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{if } n=1, t=1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{eigen vectors} \rightarrow \text{geometric mult.} = 2$$

Figure 12: Een voorbeeld van de multipliciteit

## 2.12 Jordan Form

$A = M J M^{-1}$  met  $J$  een Jordan matrix. Dit is nodig indien de dimensie van de eigenruimte (geometrische multiplicitet) kleiner is dan de algebraische multiplicitet. Aka, de matrix is niet diagonaliseerbaar.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \ddots & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Figure 13: Jordan matrix

This gives us:

### 2.12.1 Example

See Figure 16.

## 2.13 Matrixmachten en iteratieve matrixvergelijkingen

$A^k = MD^kM^{-1}$  voor diagonaliseerbare matrices

$A^k = MJ^kM^{-1}$  voor niet-diagonaliseerbare matrices

met diagonaal matrix:

**iteratieve matrixvergelijking:**  $x_k = MD^kM^{-1}x_0$  Op deze manier kun je telkens de  $k$ de stap berekenen.

Dit is enkel voor de diagonaliseerbare matrices. ( $A^k = MD^kM^{-1}$ )

**asymptotisch gedrag:**  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lambda^k(v_L * u_0)v_1$

$v_1$  is een fixed point in het asymptotisch gedrag.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Figure 14: Jordan matrix example

Vinden we:

$$A = \left[ \begin{array}{c|cc|cc} 0 & -1 & 1/2+i & 1/2-i \\ 0 & 0 & 3/2+i/2 & 3/2-i/2 \\ 0 & 0 & 1/2+i & 1/2-i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+i \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2/5+i/5 & -1/5-3i/5 \\ 0 & 2/5-i/5 & -1/5+3i/5 \end{array} \right]$$

Hieruit lezen we de eigenwaarden af:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1 - i, \lambda_4 = 1 + i$  en corresponderende (rechter)-eigenvectoren:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/2+i \\ 3/2+i/2 \\ 1/2+i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1/2-i \\ 3/2-i/2 \\ 1/2-i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3.120)$$

en linker-eigenvectoren:

$$\mathbf{v}_{L1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{L2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{L3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/5+i/5 \\ -1/5-3i/5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{L4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/5-i/5 \\ -1/5+3i/5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Figure 15: Jordan matrix solution

**Voorbeeld 2:** Geef voor de matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.3.122)$$

de eigenwaarden, en eigenvectoren. We vinden (opnieuw met Maple):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Jordan-vorm}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Jordan-vorm}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3.123)$$

Uit de Jordan-vorm (middenste matrix) zien we dat er twee verschillende eigenwaarden zijn:  $\lambda_1 = 1$  en  $\lambda_2 = 2$ , waarbij de algebraische multipliciteit van  $\lambda_2$  gelijk is aan drie en de geometrische multipliciteit gelijk aan twee. De eigenvector  $\mathbf{v}_1$  horende bij  $\lambda_1$  lezen we af in de eerste kolom van de eerste matrix ( $\mathbf{M}$ ), de twee eigenvectoren  $\mathbf{v}_2$  en  $\mathbf{v}_3$  horende bij  $\lambda_2$  lezen we af in kolom twee en kolom vier:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.124)$$

(Uit de structuur van de Jordan-vorm volgt dat de derde kolomvector geen eigenvector is.)

Figure 16: Jordan matrix example 2

$$\mathbf{D}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Figure 17: Diagonaal matrix

### 2.13.1 Voorbeeld

Zie Figuur 18.

**Toepassing: De Fibonacci rij:**  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ , is een bekende recursieve rij die blijkbaar terug te vinden is in allerhande processen in de natuur. Ze wordt bepaald door de recursie-relatie  $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$ , met als startvoorwaarden  $x_0 = 0, x_1 = 1$ . We kunnen hier als volgt een iteratieve matrixvergelijking aan associëren. Stellen we  $\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix}$ , dan hebben we  $\mathbf{u}_k = \mathbf{A}\mathbf{u}_{k-1}$  met

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} (= \mathbf{MDM}^{-1}), \quad (2.3.132)$$

waarbij we de matrix in de laatste gelijkheid, bvb. via  $\text{Maple JordanForm}$  diagonaliseerden. Vervolgens vinden we uit (2.3.128):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k = \mathbf{MD}^k \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u}_0 &= \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad (2.3.133) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix} \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

waarbij de laatste gelijkheid benaderend geldt voor grote  $k$ . We vinden dus de uitdrukking

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \right) \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \quad (2.3.134)$$

voor de Fibonacci-getallen, alsook de asymptotische ratio  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1}/x_k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  wat de beroemde gulden snede is.

Het asymptotisch gedrag (grote  $k$ ) kunnen we ook rechtstreeks uit de dominante eigenvectoren en corresponderende eigenwaarde halen. Uit (2.3.132) lezen we af dat:

$$\text{fixed point} \quad \mathbf{v}_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right) \quad \mathbf{v}_{L1} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \quad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \quad (2.3.135)$$

Uit (2.3.131) vinden we dan onmiddellijk het asymptotisch gedrag

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix} \approx \lambda_1^k (\mathbf{v}_{L1} \cdot \mathbf{u}_0) \mathbf{v}_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix}, \quad (2.3.136)$$

wat precies overeenkomt met de laatste benaderde gelijkheid in (2.3.134). Wat de asymptotische ratio  $x_{k+1}/x_k$  betreft, vinden we ook onmiddellijk  $\mathbf{u}_k \approx \lambda_1 \mathbf{u}_{k-1}$ , waaruit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1}/x_k = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , consistent met het eerdere resultaat.

Figure 18: Fibonacci voorbeeld

In het bovenstaande zien we dat  $\lambda_1$  de dominante eigenwaarde is. Daardoor kunnen we de fixed point berekenen met:

$$\lambda_1^k (v_{L1} \cdot u_0) v_1$$

Omdat  $\lambda_1$  dominant is, nemen we voor  $v_1$  de eerste kolom van  $M$  en voor  $v_{L1}$  de eerste rij van  $M^{-1}$

Dit kan toegepast worden in de zogezegde **Markov proces**

algemene vorm:  $u_k = P u_{k-1}$  waarbij  $P$  een matrix is die de overgangen tussen de verschillende states aangeeft met probabilitet.  $\sum p_{ij} = 1$

Ook goed om te weten is dat wanneer de matrix strikt positieve getallen heeft, dat matrix  $P$  een uniek dominante eigenwaarde  $\lambda_1 = 1$  heeft met  $v_1$  een positieve eigenvector. Deze  $v_1$  is dan ook een fixed point.

### 2.13.2 Voorbeeld Markov proces

Zie Figuur 19 and 20.

**Voorbeeld.** Neem volgend eenvoudig weermodel met 3 toestanden: zonnig, bewolkt en regen. En wanneer het zonnig is, een kans van 70% dat het de volgende dag ook zonnig is, 10% kans dat het bewolkt is, en 20% kans dat het regent. Wanneer het bewolkt is, 40% kans dat het zonnig wordt, 20% kans dat het bewolkt blijft, en 40% kans dat het de volgende dag regent. En wanneer het regent, 20% kans dat het de volgende dag zonnig wordt, 30% dat het bewolkt wordt, en 50% kans dat het zal regenen. Dit geeft de volgende Markov matrix:

Figure 19: Markov proces

## 2.14 Matrixexponent en lineaire differentiaalvergelijkingen

Hier gaan we een matrix plaatsen de exponent.

$e^{At} = M e^{Dt} M^{-1}$  -*j* concreet voorbeeld

**Algemeen:**

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

of

$$e^A = M e^{D} M^{-1} \quad e^A = M e^J M^{-1} \text{ (niet-diagonaliseerbare matrices)}$$

In matrix vorm zie je het volgende: 21

Note: Maple geeft de functie ‘MatrixExponential(A, t)’ om  $e^{At}$  te berekenen.

### 2.14.1 eerste-orde differentiaalvergelijking

$$y'(t) = Ay(t)$$

$$y(t) = e^{At} y(0)$$

### 2.14.2 n-de differentiaalvergelijkin

Hetzelfde als hierboven

### 2.14.3 Herschrijf de tweede-orde differentiaalvergelijking $y''(t) + w^2 y(t) = 0$

Zie Figuur 22.

## 2.15 Symmetrische matrices

-  $A = A^T$  -  $A$  heeft enkel reele eigenwaarden -  $A$  heeft orthogonale eigenvectoren -  $A = ODO^T$  met  $O$  een orthogonale matrix en  $D$  een diagonale matrix

Omdat  $O^T = O^{-1}$ , kunnen we zeggen dat  $O^T O = I$

Ook is het zo dat geometrische multipliciteit = algebraïsche multipliciteit. -*j*  $A$  is diagonaliseerbaar.

```

restart;
with(LinearAlgebra):
A := Matrix([[0.7, 0.4, 0.2], [0.1, 0.2, 0.3], [0.2, 0.4, 0.5]])
A := 
$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$
 (1)

A := convert(A, rational)
A := 
$$\begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
 (2)

J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])
J, Q := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{5}}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{5}}{10} \end{bmatrix},$$
 (3)


$$\left[ \left[ \frac{28\sqrt{5}}{(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, \frac{-71+31\sqrt{5}}{2(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, \right. \right.$$


$$\left. \left. \frac{7+3\sqrt{5}}{2(-5+8\sqrt{5})} \right],$$


$$\left[ \frac{11\sqrt{5}}{(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, -\frac{-29+11\sqrt{5}}{2(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2(-5+8\sqrt{5})} \right]$$


$$\left. \left. \right],$$


$$\left[ \frac{20\sqrt{5}}{(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, -\frac{-21+10\sqrt{5}}{(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, -\frac{2+\sqrt{5}}{-5+8\sqrt{5}} \right]$$


evalf(Q)

```

(4)

Figure 20: Markov proces solution

$$e^{t\mathbf{J}_n(\lambda)} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^{t\lambda} \\ 0 & 0 & e^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}e^{t\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda} \end{bmatrix}$$

Figure 21: Matrix exponent

**Voorbeeld.** Herschrijf de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0, \quad (2.3.154)$$

als een lineair stelsel van eerste orde vergelijkingen, en los deze vervolgens op.

*Oplossing:* Met  $\mathbf{y}(t) = (y'(t), y(t))$ , kunnen we (2.3.154) herschrijven als:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{bmatrix}. \quad (2.3.155)$$

Verder vinden we:

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\omega \sin \omega t \\ \frac{1}{\omega} \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}, \quad (2.3.156)$$

waaruit we de oplossing kunnen aflezen als tweede component van  $\mathbf{y} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{y}_0$ :

$$y(t) = y(0) \cos \omega t + \frac{y'(0)}{\omega} \sin \omega t, \quad (2.3.157)$$

wat inderdaad overeenkomt met de oplossing (1.3.23) die we in het vorige hoofdstuk poneerden.

Figure 22: Tweede-orde differentiaalvergelijking

## 2.16 SVD (Singular Value Decomposition)

$$A = U\Sigma V^T$$

of

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$$

met  $U$  en  $V$  orthogonale matrices en  $\Sigma$  een diagonale matrix met singular values

$U$  is mxm,  $V$  is nxn en  $\Sigma$  is mxn

### 2.16.1 Example SVD

Als we compressie willen uitvoeren moeten we essentially SVD uitvoeren, maar onze som wordt beperkt door een rang  $r'$

$$A = \sum_{i=1}^{r'} \sigma_i u_i v_i^T$$

## 3 Hoofdstuk 3: Integratie en afleiding in $R^n$

### 3.1 Partiele afgeleiden

$$D_i f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

#### 3.1.1 Example

---

**Voorbeeld.** Beschouw de functie  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$ . Bepaal hiervoor  $\partial_x f(x, y)$  en  $\partial_y f(x, y)$ .

Figure 23: Partial derivatives example

```

> f:= x->sqrt(x^2 + y)          f:= x-> $\sqrt{x^2 + y}$            (1)
=
> diff(f(x), x)                 $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y}}$            (2)
=
> diff(f(x), y)                 $\frac{1}{2\sqrt{x^2 + y}}$          (3)
=

```

Figure 24: Partial derivatives example

#### Higher order partial derivatives:

Basically hetzelfde, doe het gewoon na elkaar, van binnen naar buiten

---

**Voorbeeld.** Beschouw dezelfde functie  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$  als hierboven. Bepaal nu de tweede orde partieel afgeleiden  $\partial_x \partial_x f(x, y) = \partial_x^2 f(x, y)$ ,  $\partial_x \partial_y f(x, y)$ ,  $\partial_y \partial_x f(x, y)$  en  $\partial_y \partial_y f(x, y) = \partial_y^2 f(x, y)$ . (Het is nuttig van dergelijke afgeleiden met de hand te kunnen berekenen. ©Maple kan dit natuurlijk ook, zie het diff commando.)

Figure 25: Partial derivatives example

```

> f:= x->sqrt(x^2 + y)          (1)
=
> diff(f(x), x)                 (2)
=                                     x
=                                     -----
> diff(f(x), y)                 (3)
=                                     1
=                                     -----
> diff(diff(f(x), x), x)        (4)
=                                     - x^2
=                                     -----
=                                     (x^2 + y)^3/2 + 1
=                                     -----
> diff(diff(f(x), y), y)        (5)
=                                     - 1
=                                     -----
=                                     4 (x^2 + y)^3/2
=>

```

Figure 26: Partial derivatives example

### 3.2 Kettingregel

When deriving, make sure to derive the respected variable as well.

### **3.3 Coördinaten transformaties**

Hier gaan we de coördinaten transformeren naar een andere coördinatenstelsel. (om het probleem zo gemakkelijk mogelijk te maken)



### 3.3.1 Example

**Voorbeeld.** (Een grotere oefening) Bij 2D golfproblemen, zoals de trilling van een drum, verschijnt de 2D Laplacian:

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (3.1.14)$$

In het geval van een cirkelvormige drum is het aangewezen van poolcoördinaten  $(\rho, \theta)$  te gebruiken, bepaald door  $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ . Druk deze 2D Laplacian uit in termen van deze polaire coördinaten.

*Oplossing:* Laat ons vooreerst de coördinatentransformatie inverteren. We vinden:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan(y/x). \quad (3.1.15)$$

Hieruit halen we de partieel afgeleiden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \cos \theta & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-y/x^2}{1 + (y/x)^2} = -\frac{\sin \theta}{\rho} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \sin \theta & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{\cos \theta}{\rho}. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Toepassing van de kettingregel (3.1.13) levert dan:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (3.1.17)$$

en hieruit krijgen we dan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= (\cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta})(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ &\quad - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \rho} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

$$\begin{aligned} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \rho} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Analoog vind je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \rho} \\ &\quad + \frac{\cos^2 \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Tellen we deze twee uitdrukkingen op dan daalt de rook neer en vinden we:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (3.1.21)$$

of dus

1. Calculeer de  $\rho$  en  $\theta$  naar  $x$  en  $y$
2. vorm de chain rule:  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}$
3. doe hetzelfde voor met respect tot  $y$ .
4. Vermenigvuldig twee maal met elkaar door de dubbele afgeleide
5. som met elkaar
6. Je hebt nu de laplacian ( $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ )

### 3.4 Gradient en de differentiaal

**gradient operator:**  $\nabla = \sum_{i=1}^n e_i \partial_i$

Via deze gradient kunnen we de richtingsafgeleide berekenen (variatie van een functie langs een kromme)

$$\nabla f \cdot \frac{dx}{dt}$$

#### 3.4.1 Example

---

**Voorbeeld:** Bepaal voor het veld  $f(x, y) = x + y$  de gradient. Integreer vervolgens de richtingsafgeleide:  $df/dt = \nabla f \cdot \frac{dx}{dt}$  voor de kromme  $(x(t), y(t)) = (x_0 t, y_0 t)$ , van  $t = 0$

tot  $t = 1$  en toon expliciet aan dat je voor deze integraal inderdaad de uitdrukking  $f(x(1), y(1)) - f(x(0), y(0)) = x_0 + y_0$  krijgt.

Figure 28: Gradient example

Hier zien we dat de gradient  $\nabla = (\partial_x, \partial_y) = (1, 1)$  (want  $f(x, y) = x + y$ )

de richtingsafgeleide is dan  $\nabla f \cdot \frac{dx}{dt} = (1, 1) \cdot (x_0, y_0) = x_0 + y_0$

Als je de integraal pakt van  $t = 0$  naar  $t = 1$ :  $\int_0^1 x_0 + y_0 dt = x_0 + y_0$

De gradient operator en richtingsafgeleide wordt gebruikt bij zaken zoals stochastic gradient descent, waar we proberen de lokale minima te vinden.

### 3.4.2 Example

**Voorbeeld.** Bereken de gradient en toon expliciet aan dat deze orthogonaal staat op de veldlijnen voor  $f(x, y) = xy$ .

*Oplossing:* We vinden:

$$\nabla f(x, y) = (y, x). \quad (3.1.32)$$

Verder hebben we voor de veldlijnen  $xy = c$  voor een bepaalde constante  $c$ , ofwel  $y = c/x$ . Voor een infinitesimale verplaatsing langs een veldlijn hebben we dus  $dy = -\frac{c}{x^2}dx$ . De corresponderende vector  $d\mathbf{x}$  leest dan:

$$d\mathbf{x} = dx(1, -c/x^2) = dx(1, -y/x) \quad (3.1.33)$$

waar we voor de laatste uitdrukking  $c = xy$  invullen. Deze vector staat inderdaad orthogonaal op de gradient,  $d\mathbf{x} \cdot \nabla f = 0$ .

Figure 29: Gradient example

1. Calculate the gradient

$$\nabla f = (\partial_x, \partial_y) = (y, x)$$

onze veldlijn:  $c = xy$  Note: We willen uiteindelijk kunnen zeggen dat onze richtingsafgeleide = 0, we hebben dus  $d\mathbf{x}$  nodig

$$y = \frac{c}{x}$$

$$dy = -\frac{c}{x^2}dx$$

We weten ook dat onze displacement along the kromme  $dx = (dx, dy)$

We weten nu wel  $dy$  dus we vullen dit in:  $dx = (dx, -\frac{c}{x^2}dx) = dx(1, -\frac{c}{x^2})$

We weten ook wat  $c$  is:  $dx(1, -\frac{xy}{x^2}) = dx(1, -\frac{y}{x})$

Nu dat we de displacement hebben, vinden we de richtingsafgeleide:

$$\nabla f \cdot dx = (y, x) \cdot dx(1, -\frac{y}{x}) = ydx - ydx = 0$$

Dus hebben we bewezen dat de gradient  $\nabla f$  loodrecht staat op de kromme.

## 3.5 Taylorreeks

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \Delta x_i \Delta x_j + \dots \\ &\quad + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \left( \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \right) (\Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_k}) + \dots , \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

waarbij  $\Delta x_i = (x_i - x_{0i})$  en de partieel afgeleiden worden genomen in het punt  $\mathbf{x}_0$  waarrond ontwikkeld wordt.

Figure 30: Taylorreeks bij afgeleiden

Als  $\Delta x_i$  (tweede term van taylorreeks), we  $\nabla f \cdot \Delta x_i$

Dit is een **stationair punt** wanneer  $\nabla f = 0$

Er zijn hierbij 3 gevallen voor 1 variable:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} > 0$  (minimum)
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} < 0$  (maximum)
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$  (saddle point (stationair buigpunt))

Voor meerdere variabelen, maken we gebruik van de **Hessiaan** dat voorkomt in de tweede orde term van de taylorreeks:

- Hessiaan is symmetrisch, dus  $H = ODO^T$

Voor meerdere variabelen is het mogelijke kwalitatieve gedrag rijker. In dat geval wordt het gedrag rond een stationair punt  $\mathbf{x}_0$  gevatt door de **Hessiaan**  $H_{ij}$  de matrix die optreedt in de tweede orde term van (3.1.34):

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \Delta x_i \Delta x_j = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \Delta x_i H_{ij} \Delta x_j. \quad (3.1.36)$$

Deze matrix  $\mathbf{H}$  is symmetrisch,  $H_{ij} = H_{ji} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ , wegens de commutatie van de partiële afgeleiden. Uit het vorig hoofdstuk weten we dan dat die wordt gediagonaleerd door een orthogonale transformatie  $\mathbf{H} = \mathbf{O} \mathbf{D} \mathbf{O}^T$ . Zo krijgen we:

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{ijl} \Delta x_i O_{il} \lambda_l O_{jl} \Delta x_j = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_l \lambda_l \Delta x_l'^2, \quad (3.1.37)$$

met  $O_{ij}$  de orthogonale matrixcomponenten,  $\lambda_l$  de (reële) eigenwaarden en  $\Delta x_l' = \sum_i O_{il} \Delta x_i$ . Dit leidt dan tot de volgende mogelijke kwalitatieve gedragingen (zie ook fig. 3.1):

Figure 31: Hessiaan

- als alle  $\lambda_i > 0$  (minimum)
- als alle  $\lambda_i < 0$  (maximum)
- als er zowel positieve als negatieve  $\lambda_i$  zijn (saddle point)
- als er eigenwaarden zijn die = 0, dan krijg je in sommige richtingen een stationair buigpunt gedefinieerd door de derde orde vorm van taylorreeks

### 3.5.1 Example

---

**Voorbeeld.** Bepaal de stationaire punten voor de functie  $f(x, y) = x^3 e^{-(x^2+y^2)}$ , en onderzoek hun karakter (minimum, maximum, ...) met behulp van de Hessiaan.

Figure 32: Hessiaan

$$e^A = \zeta A^B$$

$$f(x,y) = x^3 \cdot e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 \cdot e^{-(x^2+y^2)} + x^3 \cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot -2x$$

$$\Leftrightarrow e^{-(x^2+y^2)} \cdot (3x^2 - 2x^4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}/2, 0)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 + x^3 \cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y) \Leftrightarrow -2y x^3 \cdot e^{-(x^2+y^2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\sqrt{3}/2, 0)$$

■ stationaire punten  
we kijken naar 3 tweede orde afleiden:

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (4x^5 - 16x^3 + 6x) e^{-(x^2+y^2)}$$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^3 (4y^2 - 2) e^{-(x^2+y^2)}$$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x^2 y (2x^3 - 3) e^{-(x^2+y^2)}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

high maar eigenwaarden van de stationaire punten en die hoeven niet.

Figure 33: Hessiaan

```

[> restart: with(LinearAlgebra):
[> # Define the function
=> f := (x,y) ->x^3·exp(-(x^2 + y^2));
f := (x, y) ->x^3·e^-y^2-x^2
(1)

[> df_dx := diff(f(x,y),x);
df_dy := diff(f(x,y),y);

df_dx := 3x^2 e^-x^2-y^2 - 2x^4 e^-x^2-y^2
df_dy := -2x^3 y e^-x^2-y^2
(2)

[> stationary_points := solve({df_dx = 0, df_dy = 0}, {x,y});
stationary_points := {x = 0, y = y}, {x = RootOf(2_Z^2 - 3), y = 0}
(3)

[> d2f_dx2 := diff(f(x,y),x,x);
d2f_dy2 := diff(f(x,y),y,y);
d2f_dxdy := diff(f(x,y),x,y);
Hessian := Matrix([[d2f_dx2, d2f_dxdy], [d2f_dxdy, d2f_dy2]]);

d2f_dx2 := 6x e^-x^2-y^2 - 14x^3 e^-x^2-y^2 + 4x^5 e^-x^2-y^2
d2f_dy2 := -2x^3 e^-x^2-y^2 + 4x^3 y^2 e^-x^2-y^2
d2f_dxdy := -6x^2 y e^-x^2-y^2 + 4x^4 y e^-x^2-y^2
Hessian :=

$$\begin{bmatrix} 6x e^{-x^2-y^2} - 14x^3 e^{-x^2-y^2} + 4x^5 e^{-x^2-y^2} & -6x^2 y e^{-x^2-y^2} + 4x^4 y e^{-x^2-y^2} \\ -6x^2 y e^{-x^2-y^2} + 4x^4 y e^{-x^2-y^2} & -2x^3 e^{-x^2-y^2} + 4x^3 y^2 e^{-x^2-y^2} \end{bmatrix}$$

(4)

[> Hessian_at_points := subs(stationary_points, Hessian);
Hessian_at_points :=  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 
(5)

[> eigenvalues := LinearAlgebra:-Eigenvalues(Hessian_at_points);
eigenvalues :=  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 
(6)

[> # Analyse the behaviour along the y-axis if needed
[> df_dx_at_x0 := subs(x = 0, df_dx);
df_dy_at_x0 := subs(x = 0, df_dy);
df_dx_at_x0 := 0
df_dy_at_x0 := 0
(7)

```

Figure 34: Hessiaan

## 3.6 Integratie

### 3.6.1 De riemanniaanse integraal

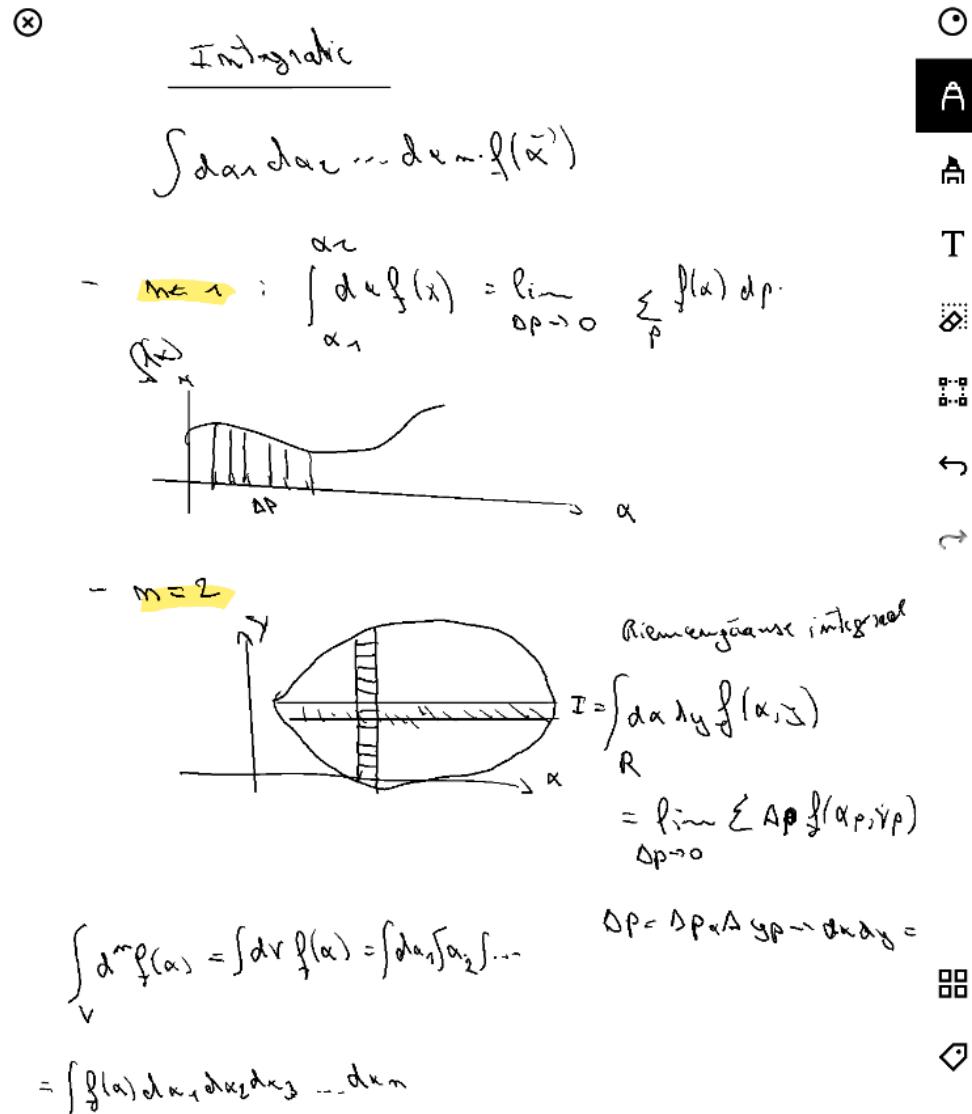


Figure 35: Integratie uitleg

### 3.6.2 Voorbeeld

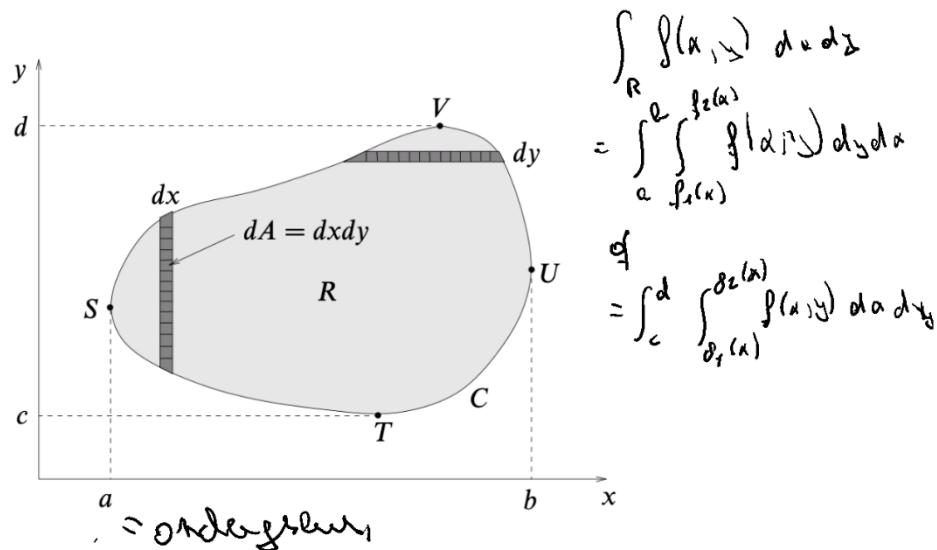


Figure 36: Integraal oppervlak

### 3.6.3 Voorbeeld

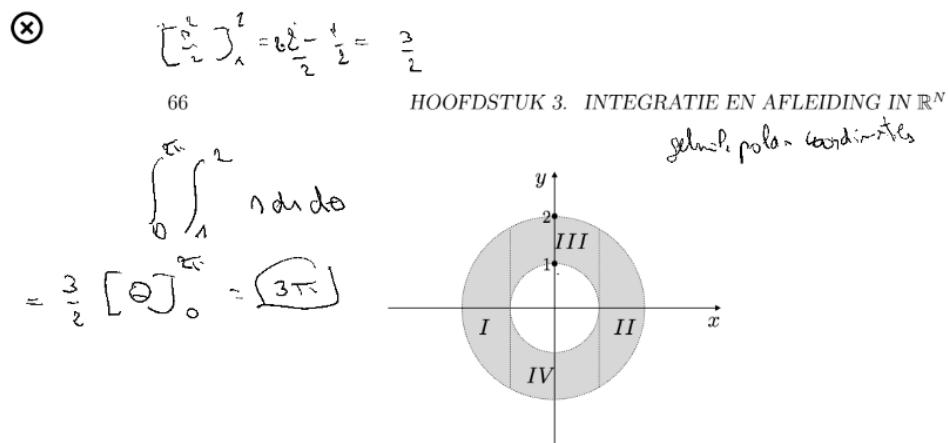
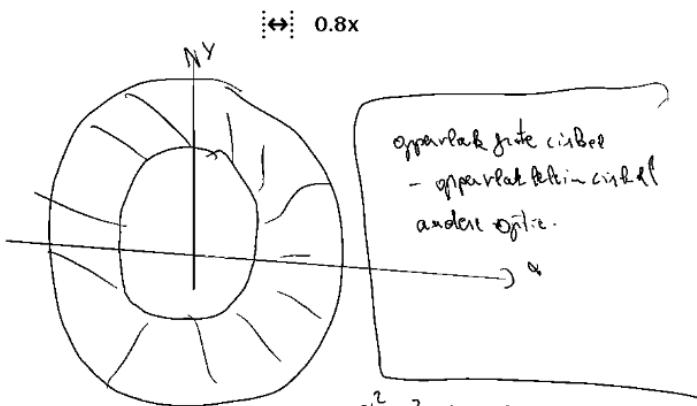


Figure 37: Cirkel oppervlak

Dit kan ook via de  $(x, y)$  coördinaten, waarbij de cirkel wordt voorgesteld door:  $x^2 + y^2 = r^2$ , dan krijg je:



$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$\alpha^2 + \gamma^2 = 4 \rightarrow \text{buiten}$$

$$\alpha^2 + \gamma^2 = 1 \rightarrow \text{binnen}$$

$$I_1 = \int_{-1}^1 d\alpha \int_{-\sqrt{4-\alpha^2}}^{\sqrt{4-\alpha^2}} dy = \int_{-1}^1 2\sqrt{4-\alpha^2} d\alpha$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 d\alpha \int_{-\sqrt{1-\alpha^2}}^{\sqrt{1-\alpha^2}} dy = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} &\text{Oppervlak cirkel } (\pi \cdot r^2) \\ &= \pi(4-1) = 3\pi \end{aligned}$$

$$I = 2I_1 + 2I_2 = 3\pi$$

Figure 38: Oppervlak cirkel x, y

We kunnen ook volumes berekenen, is basically een triple integraal...

### 3.6.4 Voorbeeld

---

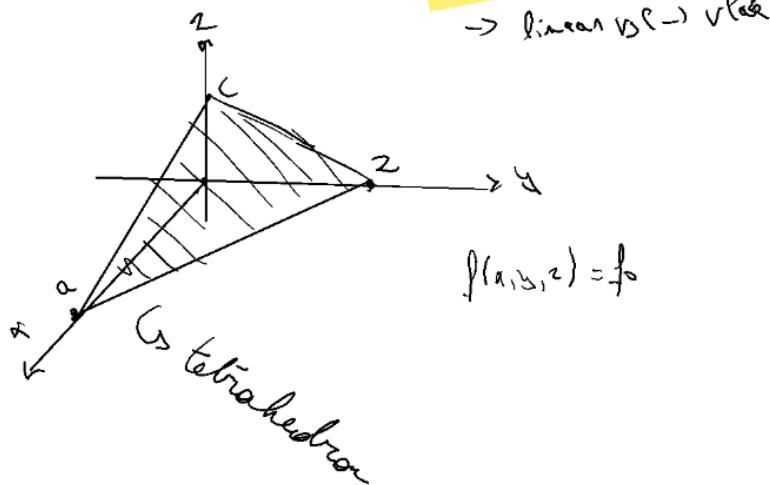
**Voorbeeld, volume-integraal.** Bepaal de massa  $M$  van de tetraedron  $R$ , begrenst door de coördinaatvlakken  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  en door het vlak  $x/a + y/b + z/c = 1$ , waarbij de dichtheid gegeven wordt door  $\rho(x, y, z) = \rho_0(1 + x/a)$ .

Figure 39: Volume vraag

Volume:

$$\alpha=0, y=0, z=0, \frac{\alpha}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

→ linear  $\rightarrow V_{\text{Plat}}$



$$f(\alpha, y, z) = f_0 \left(1 + \frac{\alpha}{a}\right)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{\alpha}{a})} \int_0^{(1-\frac{\alpha}{a}-\frac{y}{b})c} f_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right) dx dy dz \\ &= f_0 \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{\alpha}{a})} \int_0^{(1-\frac{\alpha}{a}-\frac{y}{b})c} dz dy d\alpha = \frac{f_0 \cdot abc}{24} \end{aligned}$$

Figure 40: Volume solution

Een paar typische toepassingen zijn:

- Berekening oppervlakte of volume

$$A = \int_R dx dy \quad V = \int_R dx dy dz \quad (3.2.60)$$

- Berekening massa door de integratie van de oppervlakte- of volume dichtheid:

$$M = \int_R dx dy \rho(x, y) \quad M = \int_R dx dy dz \rho(x, y, z) \quad (3.2.61)$$

- Berekening massmiddelpunt  $\mathbf{x}_{mm}$ :

$$\begin{aligned} (x_{mm}, y_{mm}) &= \frac{1}{M} \int_R dx dy \rho(x, y) (x, y) \\ (x_{mm}, y_{mm}, z_{mm}) &= \frac{1}{M} \int_R dx dy dz \rho(x, y, z) (x, y, z). \end{aligned} \quad (3.2.62)$$

(De totale impuls van een star lichaam is dan  $M\dot{\mathbf{x}}_{mm} = M\mathbf{v}_{mm}$ . )

- Berekening inertiaal moment tensor  $I_{ij}$  (met  $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ ):

$$I_{ij} = \int_R dx dy \rho(x, y) x_i x_j \quad I_{ij} = \int_R dx dy dz \rho(x, y, z) x_i x_j \quad (3.2.63)$$

(Voor het draaimoment  $\vec{L}$  van een star lichaam dat roteert rond de oorsprong, rond een draaias met eenheidsvector  $\vec{n}$  en met hoeksnelheid  $\omega$  hebben we dan  $L_i = \omega \sum_j I_{ij} n_j$ . Gegeven een krachtmoment (*torque*)  $m$  in de richting van  $\mathbf{n}$ , hebben we verder  $m = \dot{\omega}(\sum_{ij} n_i n_j I_{ij})$ )

Figure 41: Typische integralen

### 3.7 Verandering integratievariabelen

Basically we willen de integraal veranderen van coördinatenstelsel. Dit kan via de Jacobiaan.

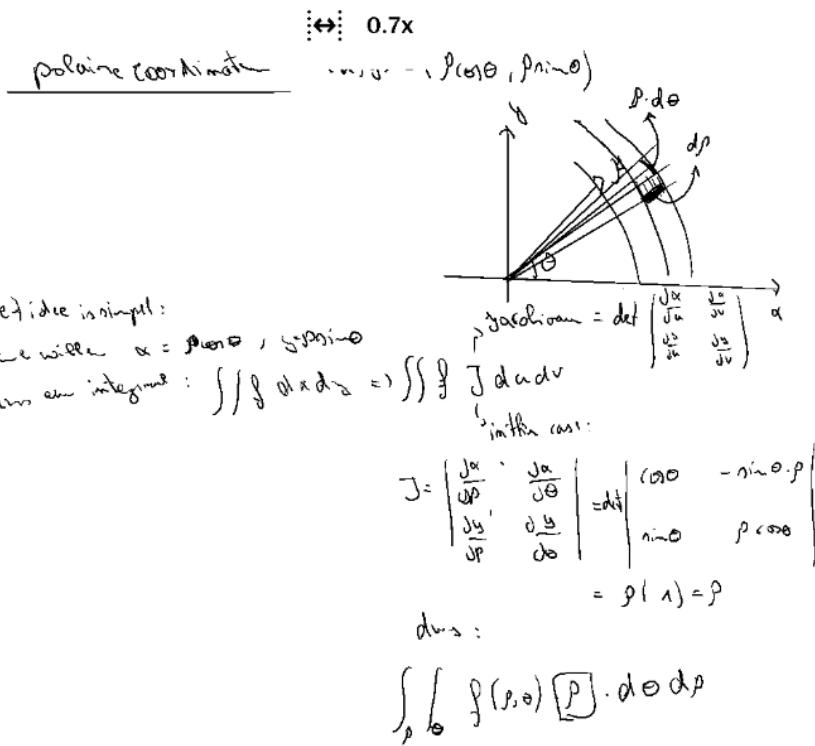


Figure 42: Voorbeeld coördinaten transformatie

## 3.8 Pool-, cilinder- en bolcoordinaten

- **Poolcoördinaten**

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad dA = r dr d\theta \quad (3.2.69)$$

Het coördinaatgebied  $\{0 < r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi\}$  beschrijft heel de Euclidische 2D ruimte op de oorsprong  $(x, y) = (0, 0)$  na, waarvoor  $\theta$  onbepaald is. Voor de radiële coördinaat  $r$  hebben we  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  (= afstand tot de oorsprong). Soms wordt ook nog  $\rho$  i.p.v.  $r$  gebruikt.

- **Cilindercoördinaten**

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \quad dV = r dr d\theta dz \quad (3.2.70)$$

Het coördinaatgebied  $\{0 < r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < z < +\infty\}$  beschrijft heel de Euclidische 3D ruimte op de  $z$ -as na,  $(x, y, z) = (0, 0, z)$ , waarvoor  $\theta$  onbepaald is. Voor de radiële coördinaat  $r$  hebben we opnieuw  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  (= afstand tot de  $z$ -as). Soms wordt ook nog  $\rho$  i.p.v.  $r$  gebruikt.

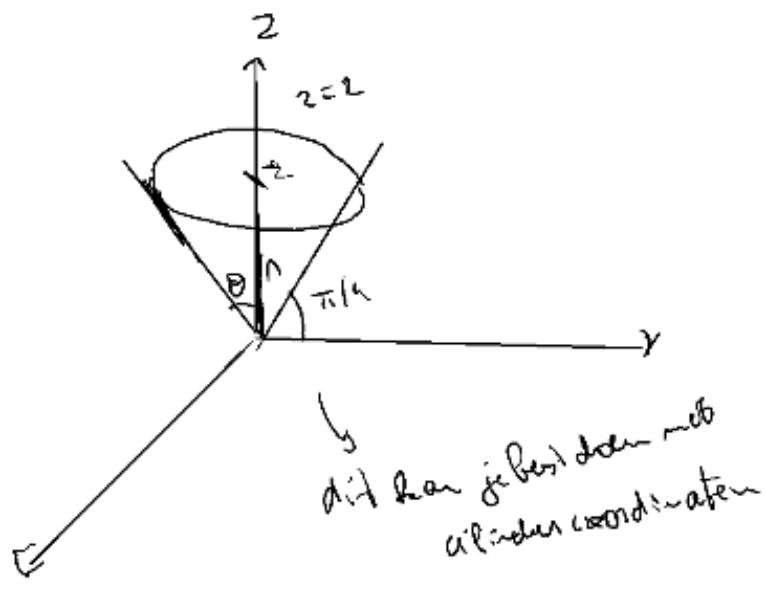
- **Bolcoördinaten**

$$(x, y, z) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \quad dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (3.2.71)$$

Het coördinaatgebied  $\{0 < r < \infty, 0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$  beschrijft heel de Euclidische 3D ruimte op de  $z$ -as na,  $(x, y, z) = (0, 0, z)$ , waarvoor  $\varphi$  onbepaald is. Nu hebben we voor de radiële coördinaat  $r$  dat  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  (=afstand tot de oorsprong).

Figure 43: Pool, cilinder en bol coordinaten

### 3.8.1 Voorbeeld



1) cilindercoördinaten

$$\int_R r \cdot dr \cdot dz \cdot d\phi$$

$$\int_0^2 dz \cdot \int_0^2 r dr \cdot \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\begin{aligned} = 2\pi \int_0^2 dz \int_0^2 r dr &= 2\pi \int_0^2 dz \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^2 \\ &= 2\pi \cdot \int_0^2 \frac{2^2}{2} dz \\ &= \frac{1}{2} \pi \cdot 8 = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

Figure 44: Voorbeeld pool coördinaten

# Formularium

## Taylorontwikkeling

- $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$
- $\sin(x) = x$  voor kleine  $x$

## Differentiaalvergelijkingen

- $y'(x) = \lambda y(x)$
- $y''(x) = \lambda y(x)$  (hier werden 3 gevallen besproken)

## Complexe getallen

- $z = a + bi$  (algemene vorm)
- $i^2 = -1$
- **inverse:**  $(a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$
- **complement:**  $z = a + bi \rightarrow z^* = a - bi$
- **modulus:**  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

## Hoofdstelling van de algebra

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

met  $b = -4 * a * c$

## Lineare Algebra

$$\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \cos(\theta) \text{ // Hoek tussen twee vectoren}$$

$$v^{\parallel} = (u_1 \cdot v) u_1 + (u_2 \cdot v) u_2 + \dots \text{ // Projectie van } v$$

## Matrixen

- Jacobiaan:  $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$

## Oefeningen

### Huis 1

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> t := taylor(sqrt(x+4)^3,x=0,3);
v := sqrt(y+4)^3;

$$t := 8 + 3x + \frac{3}{16}x^2 + O(x^3)$$


$$v := (y+4)^{3/2} \tag{1}$$


> # voor  $5^{3/2}$  nemen we x = 1
> x_1 := evalf( $8 + 3 + \frac{3}{16}$ )

$$x_1 := 11.18750000 \tag{2}$$


> # Wat is de fout? Wel, dat zal de derde term zijn ( $O(x^3)$ )
> error_1 := abs( $\frac{x^3}{6} \cdot \text{diff}(v, y\$3)$ );
error_1 := evalf(subs(y=0, x=1, error_1))

$$\text{error}_1 := \frac{|x|^3}{16|y+4|^{3/2}}$$


$$\text{error}_1 := 0.007812500000 \tag{3}$$


> # voor  $6^{3/2}$  nemen we x = 2
> x_2 := evalf( $8 + 3 \cdot 2 + \frac{3}{16} \cdot 2^2$ )

$$x_2 := 14.75000000 \tag{4}$$


> error_2 := abs( $\frac{x^3}{6} \cdot \text{diff}(v, y\$3)$ )

$$\text{error}_2 := \frac{|x|^3}{16|y+4|^{3/2}} \tag{5}$$


> error_2 := evalf(subs(x=2, y=0, error_2))

$$\text{error}_2 := 0.0625000000 \tag{6}$$


> # Waarom nemen we y = 0? Omdat dit de grootste fout zou maken, we
nemen altijd max. Dus fout \element{0, 1, 2}

```

Figure 45: Exercise 1

```

> restart:
> # i
> limit( sin(3·x) / sinh(x), x = 0 )           3
(1)
> # ii
> limit( (tan(x) - tanh(x)) / (sinh(x) - x), x = 0 )   4
(2)
> # iii
> limit( (sqrt(1 - a·x) - sqrt(1 + a·x)) / x, x = 0 ) -a
(3)
> # IV
> limit( (ln(1 + x) + ln(1 - x)) / x^2, x = 0 ) -1
(4)

```

Figure 46: Exercise 2

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta \quad B:$$

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightarrow e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\
 &= 1 + i\theta - \frac{i\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^4}{24} + \dots \\
 &= \underbrace{i\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots\right)}_{\cos\theta} + \underbrace{-\frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + \dots}_{i\sin\theta} \\
 &= \cos\theta + i\sin\theta
 \end{aligned}$$

Figure 47: Exercise 3

$$\begin{aligned}
 a &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 a \cdot b &= 1 \cdot (-1) + (1 \cdot 1) + (-1 \cdot 0) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A < ab^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Figure 48: Exercise 4

## WC 1

```

> p := x→x·(x - 1) - a
      p := x→x·(x - 1) - a
                                         (1)

> # i
> p_i := subs(a = 0, p(x))
      p_i := x(x - 1)
                                         (2)

> solve(p_i = 0)
      0, 1
                                         (3)

> # Dus lambda = 0, en lambda = 1
> # Benader naar x = 0
> x_0 := 0 + u·a + v·a2
      x_0 := v a2 + u a
                                         (4)

> p_subs_0 := subs(x = x_0, p(x))
      p_subs_0 := (v a2 + u a) (v a2 + u a - 1) - a
                                         (5)

> p_expand_0 := expand(p_subs_0)
      p_expand_0 := a4 v2 + 2 a3 u v + a2 u2 - v a2 - u a - a
                                         (6)

> coeff_1_0 := coeff(p_expand_0, a, 1)
      coeff_1_0 := -u - 1
                                         (7)

> coeff_2_0 := coeff(p_expand_0, a, 2)
      coeff_2_0 := u2 - v
                                         (8)

> solve_0 := solve({coeff_1_0 = 0, coeff_2_0 = 0}, {u, v})
      solve_0 := {u = -1, v = 1}
                                         (9)

> result_0 := subs(u = rhs(solve_0[1]), v = rhs(solve_0[2]), x_0)
      result_0 := a2 - a
                                         (10)

>
> # Benader 1
> x_1 := 1 + u·a + v·a2
      x_1 := v a2 + u a + 1
                                         (11)

> p_subs_1 := subs(x = x_1, p(x))
      p_subs_1 := (v a2 + u a + 1) (v a2 + u a) - a
                                         (12)

> p_expand_1 := expand(p_subs_1)
      p_expand_1 := a4 v2 + 2 a3 u v + a2 u2 + v a2 + u a - a
                                         (13)

> coeff_1_1 := coeff(p_expand_1, a, 1)
      coeff_1_1 := u - 1
                                         (14)

> coeff_1_2 := coeff(p_expand_1, a, 2)
      coeff_1_2 := u2 + v
                                         (15)

> solve_1 := solve({coeff_1_1 = 0, coeff_1_2 = 0}, {u, v})
      solve_1 := {u = 1, v = -1}
                                         (16)

> result_1 := subs(u = rhs(solve_1[1]), v = rhs(solve_1[2]), x_1)

```

Figure 49: Exercise 1

```

> # Define the Taylor expansion for a forward approximation
Taylor_y := (h,t) → y(t) + h*diff(y(t),t) + (1/2)*h^2*diff(y(t),t$2) + (1/6)
    *h^3*diff(y(t),t$3) + (1/24)*h^4*diff(y(t),t$4):

# Define the Taylor expansion for a backward approximation
Taylor_g := (h,t) → y(t) - h*diff(y(t),t) + (1/2)*h^2*diff(y(t),t$2) - (1/6)
    *h^3*diff(y(t),t$3) + (1/24)*h^4*diff(y(t),t$4):

# Define the result expression
result := (h,t) → (Taylor_y(h,t) + Taylor_g(h,t) - 2*y(t)) / h^2:

# Simplify the result
simplified_result := simplify(result(h,t));


$$\text{simplified\_result} := \frac{h^2 \left( \frac{d^4}{dt^4} y(t) \right)}{12} + \frac{d^2}{dt^2} y(t) \quad (1)$$


>
> #i) kwadratisch
> #ii
> restart;
with(plots):
with(plottools):

t_val := evalf( $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ );

# Define the function y and its 2nd derivative
y := t → -cos(t);

# Define the error function as a function of h for a specific t
err := (h) → abs( $y(t_{\text{val}})$ 
    -  $\frac{(\cos(h+t_{\text{val}}) + \cos(h-t_{\text{val}}) - 2\cos(t_{\text{val}}))}{h^2}$ );

# Plot the error as a function of h with log-log scale
loglogplot(err(h), h = 10^{-8} .. 10^3);
t_val := 1.047197551
y := t → -cos(t)
err := h →  $|y(t_{\text{val}}) - \frac{\cos(h+t_{\text{val}}) + \cos(h-t_{\text{val}}) - 2\cos(t_{\text{val}})}{h^2}|$ 

```

Figure 50: Exercise 2

$$3) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{(2i, -1, 0, i)^T}{\sqrt{(2i)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2i \cdot (-1) + 1}} \cdot (2i, -1, 0, i)^T$$

$$= \left( \frac{2i}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, 0 \right)^T$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 =$$

$$v_3 = v_3 - \sum_{k=1}^{n-1} \langle v_k \cdot v_1 \rangle \cdot v_k$$

⋮  
⋮

$$2) \quad \text{open } \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\omega'' = (v_1 \cdot v_2) v_1 + (v_2 \cdot v_1) v_2$$

$$\text{Remember: } \omega = \omega'' + \omega^\perp$$

Figure 51: Exercise 3

```

#ii)
with(LinearAlgebra):
> v_1 := Vector([2·I, -1, 0, 0])

```

$$v_1 := \begin{bmatrix} 2I \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```

> v_2 := Vector([I, 0, 3, 1])

```

$$v_2 := \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

```

> u_1 := v_1 / Norm(v_1, 2)

```

$$u_1 := \begin{bmatrix} \frac{2I}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

```

> u_2 := (v_2 - (u_1 · v_2) · u_1) / Norm(v_2 - (u_1 · v_2) · u_1, 2)

```

$$u_2 := \begin{bmatrix} \frac{I}{255} \sqrt{255} \\ \frac{2\sqrt{255}}{255} \\ \frac{\sqrt{255}}{17} \\ \frac{\sqrt{255}}{51} \end{bmatrix} \quad (4)$$

```

> w := Vector([3, 1 - I, 2 + I, 1])

```

$$(5)$$

Figure 52: Exercise 3

## Bord 1

```

> p := x→x·(x - 1)·(x - 2)·(x - 4) - a
      p := x→x·(x - 1)·(x - 2)·(x - 4) - a
                                         (1)
> x_0 := u·a + v·a2
      x_0 := v a2 + u a
                                         (2)
> p_subs := subs(x = x_0, p(x))
      p_subs := (v a2 + u a) (v a2 + u a - 1) (v a2 + u a - 2) (v a2 + u a - 4) - a
                                         (3)
> p_expand := expand(p_subs)
      p_expand := a8 v4 + 4 a7 u v3 + 6 a6 u2 v2 - 7 a6 v3 + 4 a5 u3 v - 21 a5 u v2 + a4 u4
      - 21 a4 u2 v + 14 a4 v2 - 7 a3 u3 + 28 a3 u v + 14 a2 u2 - 8 v a2 - 8 u a - a
                                         (4)
> # Only keep the 1st order and second order
>
> coeff_1 := coeff(p_expand, a, 1)
      coeff_1 := -8 u - 1
                                         (5)
> coeff_2 := coeff(p_expand, a, 2)
      coeff_2 := 14 u2 - 8 v
                                         (6)
> solve({coeff_1 = 0, coeff_2 = 0}, {u, v})
      {u = -1/8, v = 7/256}
                                         (7)
>

```

Figure 53: Exercise 1

$$2) \text{ i) } y'(t_n) \approx v_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

$$\begin{cases} c = t_n \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h \cdot y'(t_n) + \frac{h^2}{2} \tilde{y}''(f) \quad f \in [t_n, t_{n+1}]$$

$$\Rightarrow v_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{y(t_n) + h \cdot y'(t_n) + \frac{h^2}{2} \tilde{y}''(f) - y(t_n)}{h} \\ = y'(t_n) + \frac{h}{2} \tilde{y}''(f)$$

found:  $|y'(t_n) - v_n| = \frac{h}{2} \tilde{y}''(f) = \frac{h}{2} c \rightarrow \text{linear.}$   
↳ each division  $\leq 2$

ii)

$$y'(t_n) = v_n = \frac{y_{n+1} - y_n - 1}{2h}$$

$$- y(t_{n+1}) = y(t_n) + h \cdot y'(t_n) + \frac{h^2}{2} \tilde{y}''(t_n) + \frac{h^3}{6} \tilde{y}'''(f) \quad f \in [t_n, t_{n+1}]$$

$$- y(t_{n-1}) = y(t_n) - h \cdot y'(t_n) + \frac{h^2}{2} \tilde{y}''(t_n) - \frac{h^3}{6} \tilde{y}'''(f) \quad f \in [t_{n-1}, t_n]$$

$$y'(t_n) = v_n = y(t_n) + h \cancel{y'(t_n)} + \frac{h^2}{2} \cancel{\tilde{y}''(t_n)} + \frac{h^3}{6} \tilde{y}'''(f) \\ - (y(t_n) - h \cancel{y'(t_n)} + \frac{h^2}{2} \cancel{\tilde{y}''(t_n)} - \frac{h^3}{6} \tilde{y}'''(f))$$

$$= y'(t_n) + \frac{h^2}{12} (2h \tilde{y}'''(f_+) + \tilde{y}'''(f_-))$$

$$|y'(t_n) - v_n| = \frac{h^2}{6} |\tilde{y}'''(f)| \leq \frac{h^2}{6} c \rightarrow \text{using maple you can see this.}$$

Figure 54: Exercise 2

```

> restart;
> with(plots):
>
> y := t->cos(t)
y := t-> cos(t)                                (1)
> exact_speed := t->-sin(t)
exact_speed := t-> -sin(t)                      (2)
> t_val := evalf( $\frac{\pi}{2}$ )
t_val := 1.570796327                            (3)
>
> forward_difference := (t, h)-> $\frac{y(t+h) - y(t)}{h}$ 
forward_difference := (t, h) ->  $\frac{y(t+h) - y(t)}{h}$           (4)
> central_difference := (t, h)-> $\frac{y(t+h) - y(t-h)}{2 \cdot h}$ 
central_difference := (t, h) ->  $\frac{y(t+h) - y(t-h)}{2 \cdot h}$       (5)
>
> forward_error := h->abs(exact_speed(t_val) - forward_difference(t_val, h))
forward_error := h -> |exact_speed(t_val) - forward_difference(t_val, h)| (6)
> central_error := h->abs(exact_speed(t_val) - central_difference(t_val, h))
central_error := h -> |exact_speed(t_val) - central_difference(t_val, h)| (7)
> loglogplot([central_error(h), forward_error(h)], h = 10-8 .. 1, color = [red, blue])

```

Figure 55: Exercise 2 part 2 Maple

$$3) \vec{v}_1 = (2, 3, 0) \text{ und } \vec{v}_2 = (1, -2, 3) \quad \text{inner product} = \text{dot product}$$

$$\text{i)} \vec{u}_1 = \vec{v}_1$$

$$2) \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \cdot \vec{u}_1$$

$$3) \vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \cdot \vec{u}_1 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_2\|^2} \cdot \vec{u}_2$$

$\left\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right\rangle = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \rightarrow \text{daarvan verder doen}$

$$\boxed{\vec{u}_k = \vec{v}_k - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{v}_k, \vec{u}_l \rangle}{\|\vec{u}_l\|^2} \cdot \vec{u}_l}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{(2, 3, 0)}{\sqrt{13}} = \left( \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, 0 \right) = \left( \frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, 0 \right)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1}{\| \vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 \|}, \text{ in maple:}$$

$$\left( \frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, 0 \right) \cdot (1, -2, 3)$$

$$= \left( \frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{6\sqrt{13}}{13}, 0 \right) \cdot \left( \frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, 0 \right)$$

$$= \left( \frac{52}{169}, -\frac{18 \cdot 13}{169}, 0 \right)$$

ii) zit maple

iii) Rangzijn  $\vec{u}_1$  en  $\vec{u}_2$  dazu für Vektor mit  
gespannen als  $\vec{v}_1$  von  $\vec{v}_2$  kennen we:

$$\vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_2$$

$$\text{dann } \vec{y}^\perp = \vec{y} - \vec{y}^{\parallel 52} \Rightarrow \vec{y} = \vec{y}^{\parallel} + \vec{y}^{\perp}$$

Figure 56: Exercise 3

```

restart;
with(plots): with(plottools);
{annulus, arc, arrow, circle, cone, cuboid, curve, cutout, cylinder, disk, dodecahedron, ellipse, ellipticArc, exportplot, extrude, getdata, hemisphere, hexahedron, homothety, hyperbola, icosahedron, importplot, line, octahedron, parallelepiped, pieSlice, point, polygon, polyhedronByName,
prism, project, rectangle, reflect, rotate, scale, sector, semitorus, sphere, stellate, tetrahedron, torus, transform, translate, triangulate}

v1 := (2|3|0)
v2 := (1, -2, 3)
v1 := [ 2 3 0 ]
v2 := [ 1
         -2
         3 ]
u1 := ( 2*sqrt(13) | 3*sqrt(13) | 0 )
u1 := [ 2*sqrt(13) 3*sqrt(13) 0 ]
u2 := ( 52 | -18*sqrt(13) | 0 )
u2 := [ 4
         -18
         sqrt(13) 0 ]
origin := (0|0|0);

line_v1 := line(origin, v1, color=blue);
line_v2 := line(origin, v2, color=red);
line_u1 := line(origin, u1, color=green);
line_u2 := line(origin, u2, color=yellow);

# Display the lines together
display(line_v1, line_v2, line_u1, line_u2, axes=normal, scaling=constrained);

origin := [ 0 0 0 ]
line_v1 := CURVES([ [ 0. 0. 0. ], [ 2. 3. 0. ] ], COLOUR(RGB, 0, 0, 1.0000000))
line_v2 := CURVES([ [ 0. 0. 0. ], [ 1. -2. 3. ] ], COLOUR(RGB, 1.0000000, 0, 0.))
line_u1 := CURVES([ [ 0. 0. 0. ], [ 0.554700196225229 0.832050294337844 0. ], COLOUR(RGB, 0, 1.0000000, 0. ) ])
line_u2 := CURVES([ [ 0. 0. 0. ], [ 0.307692307692308 -1.38461538461538 0. ], COLOUR(RGB, 1.0000000, 1.0000000, 0. ) ])

```

Figure 57: Exercise 3 - plot

## Huis 2

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt$$

met definitie  $w_m = \text{span} \{ \cos(kt), \sin(kt), k=0, 1, \dots, n \}$

1) voor orthogonale we met gram-schmidt:

$$\text{stand: } \cos(0 \cdot t) = 1$$

→ we applying gram-schmidt to sequence of  
 $\cos(kt)$  and  $\sin(kt)$

initial set of functions:

$$f_0 = 1, f_1 = \cos(t), f_2 = \sin(t), f_3 = \cos(2t), f_4 = \sin(2t), \dots$$

dan nu  $f_0 = 1$ . We orthogonalise we met  $\cos(kt)$

$$w_1 = f_1 - (f_0 \cdot f_1) w_0 = f_1 - (1 \cdot \cos(t)) = \cos(t)$$

$\rightarrow$  we ontdek sin en cos orthogonal op een plane

$$w_2 = f_2 - (w_0 \cdot f_2) w_0 - (w_1 \cdot f_2) w_1 = \sin(t)$$

; gekend rekenen in basissen vinden.

$$\text{Als we de norm tellen dan } \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{w_k(t)^2}{\pi} dt}$$

$$\text{Basis opne } \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(t)}{\pi} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1$$

```

> restart;
> with(LinearAlgebra): with(plottools): with(plots):
> #i
v_1 := Vector([2, 3, 0])
v_1 := 
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (1)

> v_2 := Vector([1, -2, 3])
v_2 := 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
 (2)

> u_1 :=  $\frac{v_1}{\text{Norm}(v_1, 2)}$ 
u_1 := 
$$\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (3)

> u_2 :=  $\frac{(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1)}{\text{Norm}(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1, 2)}$ 
u_2 := 
$$\begin{bmatrix} \frac{21\sqrt{2158}}{2158} \\ -\frac{7\sqrt{2158}}{1079} \\ \frac{3\sqrt{2158}}{166} \end{bmatrix}$$
 (4)

> # ii
> null_vector := Vector([0, 0, 0])
null_vector := 
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (5)

> line_v1 := line(null_vector, v_1, color = purple)
line_v1 := CURVES $\left(\begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 2. & 3. & 0. \end{bmatrix}, \text{COLOUR(RGB, 0.50196078, 0.,}\right.$  (6)

```

Figure 58: Exercise 3

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x + y + z = b_1} \\ \underline{2x - y + z = b_2} \\ \underline{3x + 2z = b_3} \end{array} \right.$$

Naar,  $b_3$  is lineair comb van  $b_1$  en  $b_2$

Figure 59: Huis 2 Exercise 1

- 2) - moet voldoende zijn en rijen/colommen moeten  
lineair onafhankelijk zijn. Wanneer determinaat nog  
niet een  $0^{2 \times 2}$ .

Figure 60: Huis 2 Exercise 2

3)

$$i) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \bullet$$

ii)  $\det(AB) = 0 \neq \det(A) \cdot \det(B) = 0$   
dus A moet niet alleen  $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ , of B.

Figure 61: Huis 2 Exercise 3

$$4) A\vec{\alpha} = \vec{y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(0) & \cos(0) \\ \cos(1) & \cos(1) \\ \cos(2) & \cos(2) \\ \cos(3) & \cos(3) \\ \cos(4) & \cos(4) \\ \cos(5) & \cos(5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,04 \\ 1,05 \\ -0,2 \\ -2 \\ -0,2 \\ 1,41 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\alpha} = (\Delta^T \cdot A)^{-1} \cdot \vec{b}^T = \begin{pmatrix} 1,04 \\ -0,34 \end{pmatrix}$$

draw using maple:

1) pointplot

2) plot(f1)

should be quite close

Figure 62: Huis 2 Exercise 4

```

# First define the data
> x := [0.04, 1.05, -0.2, -2, -0.2, 1.11];
x := [0.04, 1.05, -0.2, -2, -0.2, 1.11]

> t := [0, 1, 2, 3, 4, 5]
t := [0, 1, 2, 3, 4, 5]

> # Construct the matrix A
> A := Matrix([[cos(0), cos(0)], [cos(1), cos(2)], [cos(2), cos(4)], [cos(3), cos(6)], [cos(4), cos(8)], [cos(5), cos(10)]])
A := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \cos(1) & \cos(2) \\ \cos(2) & \cos(4) \\ \cos(3) & \cos(6) \\ \cos(4) & \cos(8) \\ \cos(5) & \cos(10) \end{bmatrix}$$


> # Perform kleinste kwadraten fit: x = (A'A)^{-1}A^T
> c := LeastSquares(A, Vector(x))
c := 
$$\begin{bmatrix} 1.040593609 \\ -0.9362867375 \end{bmatrix}$$


> x_function := t->c[1]*cos(t) + c[2]*cos(2*t);
x_function := t → c1·cos(t) + c2·cos(2·t)

> plot_points := pointplot([seq([t[i], x[i]], i=1..6)], color=red):
plot_fit := plot(x_function(t_), t_=0..5, color=blue):
display(plot_points, plot_fit)

```

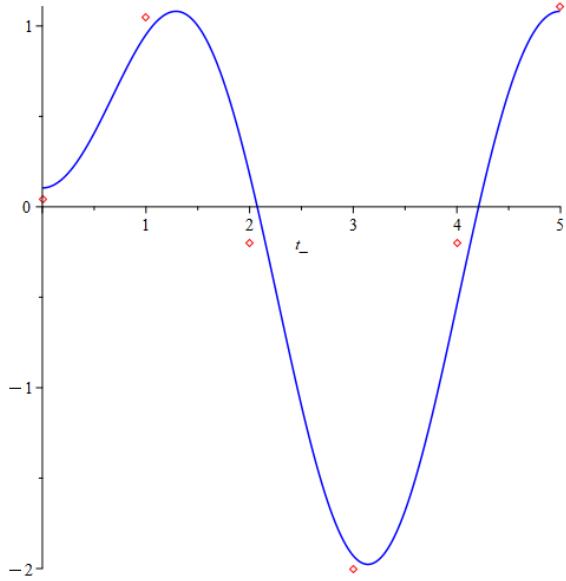


Figure 63: Huis 2 Exercise 4 Maple

```

> with(LinearAlgebra):
> p := Matrix([ [ 5/6, 1/6, 1/3 ], [ 1/6, 5/6, -1/3 ], [ 1/3, -1/3, 1/3 ] ])
      
$$p := \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(p, output = ['J', 'Q'])
      
$$J, Q := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{17}{6} & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$


```

Figure 64: Huis 2 Exercise 5: We zien dat de projector op het YZ vlak projecteert.

b) Hier moeten we matrix A vinden waervan twee vectoren

$v_1 = (1, 0, 1)$ ,  $v_2 = (1, 2, 0)$  in de rijruimte liggen,  
waarbij de nullruimte orthogonaal is (relatief) van de  
rijruimte.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ , we moeten aantonen dat  
 $\{k_1, k_2\}$  lineaire combinatie is  
van  $K(A)$ . Als dit het geval is is  
dit deel van rijruimte.

Wat is  $b$ ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ b = 2c_2 \rightarrow b = -4 \\ 2 = c_1 \end{cases}$$

$k_3$  in lineaire combinatie dan behoort niet tot  
nullruimte

Figure 65: Huis 2 Exercise 6: Uit de cursus weten we dat er geen basis kan gevonden worden voor  $K(A^T)$  en  $N(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) einsetzen:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ 4 & 2-\lambda & 4 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(2-\lambda)((2-\lambda)(2-\lambda) - 4) - 1 \cdot (4(2-\lambda) - 8) + 2(4 - 2(2-\lambda)) = (2-\lambda)(\cancel{4} - \cancel{4}\lambda^2 - 2\lambda + \cancel{\lambda^2} - \cancel{4}) - (\cancel{8} - \cancel{4}\lambda \cancel{+ 8}) + 2(\cancel{4} - \cancel{4}\lambda + \cancel{4}) = (2-\lambda)(-4\lambda + \lambda^2) + 4\lambda - 4\lambda = 0 = 1 \Rightarrow -8\lambda + 2\lambda^2 + 4\lambda - 4\lambda = \lambda^2 - 4\lambda = 0 \Rightarrow -\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4$$

$\Rightarrow$  Schreibe hinne die Eigenvektoren.

Figure 66: Huis 2 Exercise 7

```

[> with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[2, 1, 2], [4, 2, 4], [2, 1, 2]])
      A := 
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
 (1)

[> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])
      J, Q := 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$
 (2)

```

Figure 67: Huis 2 Exercise 7 Maple

$$8) \begin{array}{ll} v_1 = 0 & v \\ v_2 = 3 & v \\ v_3 = 5 & w \end{array}$$

i) Basis voor ruimte is span  $\{w\}$  omdat  $Aw = 0$ .  
Kernruimte is dan  $\{v, w\}$

ii) Oplijning:  $Ax = b$   
 $\rightarrow x = \frac{1}{3}v + \frac{1}{5}w$ , elke oplijning is + veelvoud  
 van matrix:  $x = \frac{1}{3}v + \frac{1}{5}w + k \cdot u$  met  $k \in \mathbb{R}$

iii)  $x = \alpha u + \beta v + \gamma w$   
 $= 3v + 5w$ ,  $w$  is niet in de vergelijkingen dus  
 kan niet berdekt worden.

Figure 68: Huis 2 Exercise 8

$$\begin{aligned} 2) f_0'' &= \langle f(t), c_0 \rangle + \langle f(t), c_1 \rangle + \dots + \langle f(t), c_k \rangle \\ \langle f(t), c_0 \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^2}{\sqrt{\pi}} \cdot dt = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi^{5/2} \\ \langle f(t), c_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} t^k \cos(kt) \cdot dt = i \sqrt{\pi} \frac{(-1)^k}{k^2} \\ \langle f(t), s_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} t^k \sin(kt) \cdot dt = 0 \\ \Rightarrow f_0 &= \frac{\sqrt{2}}{3} \pi^{5/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left\{ i \sqrt{\pi} \frac{(-1)^k}{k^2} \cdot \sin(kt) \right\} + 0 \end{aligned}$$

Figure 80: Bord 2 Exercise 5 Part 2

[Door de hash te 'ondertekenen' met een privé-sleutel, kan de identiteit van het geverifieerd en kan de afzender niet ontkennen dat hij de data heeft

identificeert de bron van de data.

**Authenticiteit:** De data zelf wordt niet verborgen.  
**Identiteit:** Het heeft geen invloed op het verbergen van communicatie.

(action Code)

**Verzekert dat de data niet is gewijzigd.**  
**Authenticiteit:** Verzekert dat het bericht van een specifieke entiteit komt (degene die).

n. Zowel zender als ontvanger hebben toegang tot de sleutel, dus het kan niet  
het bericht heeft verzonden.  
**Confidentialiteit of Traffic-flow confidentiality:** Verborgt de inhoud of het bestaan  
van het bericht.

**Confidentialiteit:** Versleutelt de data om deze privé te houden.

**Data-origin authentication, Entity authentication:** Omdat de sleutel gedeeld  
wordt door beide partijen.

**Confidentialiteit:** Verborgt niet het feit dat communicatie plaatsvindt.

**Integritatiescherming:** Op zichzelf biedt het geen integritatiescherming, maar het kan worden  
gebruikt in combinatie met andere methoden (zoals een MAC) voor integritatiescherming.

zie

**Identiteit:** Wanneer iets met de publieke sleutel wordt versleuteld, kan alleen de  
private sleutel het ontcijferen.

**Confidentialiteit:** Verborgt niet het feit dat communicatie plaatsvindt.  
Zoek: De eigenaar van de private sleutel kan geïdentificeerd worden als de enige  
die handtekening kan hebben getekend.

**Confidentialiteit:** Verborgt niet het feit dat communicatie plaatsvindt.

$$L_1 = 0, L_2 = 3, L_3 = 5$$

1)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Basis voor } N(A) = \{p \in \mathbb{C}^3 \mid p \leq u\} \rightarrow \text{dim is oneindig} \\ \text{Basis voor } K(A) = \{p \in \mathbb{C}^3 \mid A \cdot p = 0\} \end{array} \right.$

2)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{oplossing: } x = \frac{1}{3}v + \frac{1}{5}w \\ \text{alle: } x = \frac{1}{3}v + \frac{1}{5}w + k \cdot u, k \in \mathbb{R} \end{array} \right.$

3)  $\left\{ \begin{array}{l} A \cdot x = u \rightarrow \text{voorm nullruimte} \rightarrow \text{geen oplossing} \end{array} \right.$

Figure 69: Huis 2 Exercise 8 second version

g)  $A = UV^T$

i) rang 1 matrix omdat  $A = UV^T$ , dan alle kolommen van  $A$  zijn lineaire combinaties van elkaar.

ii)  $Au = \underbrace{d_u}_{\text{pijuwante}}$

$$Au = (UV^T)u = u(V^Tu) = (V^Tu)u$$

$Au$  is een rechte vermenigvuldiging van  $u$  dus en dus is  $u$  een eigenvector

iii)  $l_1 = V^Tu$

$d_2 = 0 \rightarrow$  eigenschap van rang 1 - matrizen.

iv)

$\text{trace}(A) = \text{sum van diagonale elementen}$

$$\text{trace}(A) = a_{11} + a_{22} = \underbrace{V^T}_{l_1} \underbrace{u}_{l_1}$$

Figure 70: Huis 2 Exercise 9

```

> with(LinearAlgebra):
> u := Vector([u1, u2])

$$u := \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> v := Transpose(Vector([v1, v2]))

$$v := \begin{bmatrix} v1 & v2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

> A := u * v

$$A := \begin{bmatrix} u1 \ v1 & u1 \ v2 \\ u2 \ v1 & u2 \ v2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])

$$J, Q := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u1 \ v1 + u2 \ v2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{u2 \ v2}{u1 \ v1 + u2 \ v2} & \frac{u1 \ v1}{u1 \ v1 + u2 \ v2} \\ -\frac{u2 \ v1}{u1 \ v1 + u2 \ v2} & \frac{u2 \ v1}{u1 \ v1 + u2 \ v2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

> # Hier kunnen we zien dat de rang = 1
> Eigenvalues(A)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ u1 \ v1 + u2 \ v2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

> # We zien dus dat  $\lambda = u \cdot v^T$ 
> #  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = u1.v1 + u2.v2$ 
> Eigenvectors(A)

$$\begin{bmatrix} u1 \ v1 + u2 \ v2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{u1}{u2} & -\frac{v2}{v1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

> # We zien hier dat u een eigenvector is!
>
> # Als laatste, de trace is simpel, onze  $\lambda_2 = u1.v1 + u2.v2$ . Als je kijkt
    naar A, en je telt de diagonaal op, dan zie je hetzelfde uitkomen ;)
```

Figure 71: Huis 2 Exercise 9 Maple

$$(t_1, b_1) = (10, 10, 1)$$

$$(t_2, b_2) = (21, 7, 4)$$

$$(t_3, b_3) = (31, -5, 2)$$

1)  $y(t) = \sqrt{t} - \frac{3}{2} t^2 \quad | A \propto = 3$

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 10 & 1 \\ 7 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

→ check in maple

2) proof:  $A^T (\tilde{y} - \tilde{y}) = 0$

$$\Leftrightarrow A^T \tilde{y} - A^T \tilde{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T \tilde{y} - A^T A (A^T A)^{-1} A^T \tilde{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T \tilde{y} - \underbrace{A^T A}_{A^T A^{-1}} A^T \tilde{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T \tilde{y} - \underbrace{A^T}_{A^T A^{-1}} A^T \tilde{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \quad \square$$

Figure 72: Bord 2 Exercise 1

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(plots): with(plottools):
> # i)
> A := Matrix([[1, 1], [2, 4], [3, 9]])
A := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$
 (1)

> y := Vector([10.1, 7.4, -5.2])
y := 
$$\begin{bmatrix} 10.1 \\ 7.4 \\ -5.2 \end{bmatrix}$$
 (2)

> result := LeastSquares(A, y)
result := 
$$\begin{bmatrix} 15.3552631578947 \\ -5.71315789473684 \end{bmatrix}$$
 (3)

> v_0 := result[1]
v_0 := 15.3552631578947 (4)

> g := result[2] · (-1) · (2)
g := 11.4263157894737 (5)

#ii) zie notes
#iii)
> y_tilde := A . result;
y_tilde := 
$$\begin{bmatrix} 9.64210526315789 \\ 7.85789473684210 \\ -5.35263157894737 \end{bmatrix}$$
 (6)

> column_space_vector := Column(A, 2);
column_space_vector := 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$
 (7)

> # Define line representing the column space K(A)
K_A := plot([t → column_space_vector[1]*t, t → column_space_vector[2]*t,
            t = -1 .. 3], color = blue, thickness = 2, title = "Column Space K(A)");
Error, (in plot) expected a range but received t = -1 .. 3

> # Plot the original data points y
data_points := plot([seq([i, y[i]], i = 1 .. 3)], style = point, symbol = circle, color
                    = black, title = "Data Points and Column Space");

```

Figure 73: Bord 2 Exercise 1 Maple

# Wiskundige modellering in de ingenieurswetenschappen: Bordoefeningenles 2

## Oefening 1

```
[> restart: with(plots):with(LinearAlgebra):with(plottools):  
oorsprong := <0,0,0>;
```

Constructie matrix A en vector y:

```
[> K1 := <1,2,3>;  
K2 := <1,4,9>;  
A := <K1|K2>;  
y := <10.1,7.4,-5.2>;
```

$$\begin{aligned} K1 &:= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ K2 &:= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \\ A &:= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \\ y &:= \begin{bmatrix} 10.1 \\ 7.4 \\ -5.2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Heeft dit stelsel een oplossing?

```
[> solve(A.<v0, -g/2>)=y, {v0,g});  
> Determinant(<K1|K2|y>);
```

5.8

(1.2)

We bepalen de kleinste kwadraten benadering en fit:

De onbekenden x bepalen kan op 2 manieren:

- met een stelsel (meest efficiënt)

```
[> solve((A^%T.A).(<v0,-g/2>)=A^%T.y,{v0,g});  
{g = 11.42631579, v0 = 15.35526316}
```

(1.3)

- met behulp van de matrix inverse

```
[> x := MatrixInverse(A^%T.A).A^%T.y;
```

Figure 74: Bord 2 Exercise 1 Maple Version 2: Warning, pdf is not fully loaded, go look in my files

$$\begin{array}{l}
 \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = 2 \\
 m_1 = 1 = 1 \quad m_2 = 1 \quad m_3 = 2 \\
 m_4 = 1 \quad m_5 = 1 \quad m_6 = 1
 \end{array}
 \rightarrow \text{dit is omdat we w-gorden}\newline
 \text{vorm halverwege}\newline
 \text{niet diagonaliseerbaar} \rightarrow m < m^2$$

Lijsevectoren:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow m < m^2$$

Figure 75: Bord 2 Exercise 2

(3) Uit de orthonormaliteit van de basis volgt dat

$$\begin{aligned}
 \|f(t) - f_0\|^2 &= \langle t^2 - f_0, t^2 - f_0 \rangle \\
 &= \langle t^2, t^2 \rangle - 2\langle f_0, t^2 \rangle + \langle f_0, f_0 \rangle \\
 &= \frac{2\pi^5}{5} - 2 \left( \frac{\pi^2}{3} \langle 1, t^2 \rangle + 4 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} \langle \cos(kt), t^2 \rangle \right) \\
 &\quad + \frac{2\pi^5}{9} + 16 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \langle \cos(kt), \cos(kt) \rangle \\
 &= \frac{8\pi^5}{45} - 32\pi \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} + 16\pi \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \\
 &= 16\pi \left( \frac{\pi^4}{90} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \right)
 \end{aligned}$$

Als  $n \rightarrow +\infty$ , dan  $\|f(t) - f_0\| \rightarrow 0$ , want

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Figure 81: Bord 2 Exercise 5 Part 3

```

[> with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[0, -1, 3, 0], [1, 0, 0, 1], [0, 0, 3, -1], [0, 0, 1, 1]])
      A := 
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
 (1)

=> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])
      J, Q := 
$$\begin{bmatrix} -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{I}{2} & \frac{I}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
 (2)
]

```

Figure 76: Bord 2 Exercise 2 Maple

$$3) \quad A = V_1 V_1^T + V_3 V_3^T$$

1)  $K(A) = \text{span} \{ V_1, V_3 \}$

2)  $K(A^T) = \text{span} \{ V_2, V_1 \}$

3)  $N(A) : A\alpha = (V_1 V_1^T + V_3 V_3^T) \alpha = 0$

$$= V_1 (V_1^T \alpha) + V_3 (V_3^T \alpha) = 0$$

These need to be null, no look in direction on  $V_3$ , thus

$$N(A) = \text{span} \{ V_3 \}$$

4)  $N(A^T) : \text{we want to solve:}$

$$A^T y = (V_2 V_1^T + V_1 V_3^T) y = 0$$

$$= V_2 (V_1^T y) + V_1 (V_3^T y) = 0$$

$$\Rightarrow N(A^T) = \{ V_2 \}$$

Figure 77: Bord 2 Exercise 3

4)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T)$$

a. Is A symmetrisch?

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) ; A^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_2 e_1^T + e_1 e_2^T) \quad \checkmark$$

b.  $A^L = A^R$ ?

$$\begin{aligned} A^L &= \frac{1}{2} \cdot (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T)^2 \\ &= \frac{1}{2} (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) \\ &= \frac{1}{2} (e_1 e_2^T e_1 e_2^T + e_1 e_2^T \cdot e_2 e_1^T + e_2 e_1^T e_1 e_2^T \\ &\quad + \underbrace{e_2 e_1^T \cdot e_2 e_1^T}_{= 0}) \\ &= \frac{1}{2} (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) \neq A \rightarrow \text{green projection} \end{aligned}$$

Figure 78: Bord 2 Exercise 4

$$l_m(u(t)) = l_m(a) - ct^L - bt$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^L \\ 1 & t_2 & t_2^L \\ 1 & t_3 & t_3^L \\ 1 & t_4 & t_4^L \\ 1 & t_5 & t_5^L \end{pmatrix} \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} l_m(a) \\ -c \\ -b \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} l_m(y_1) \\ l_m(y_2) \\ l_m(y_3) \\ l_m(y_4) \\ l_m(y_5) \end{pmatrix}$$

Stoch im Graph:  $\vec{\alpha} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y}$

$\therefore a = 5, 20, b = 0, 35, c = 0, 32$

plot same as homework.

Figure 82: WC 2 Exercise 1

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> inproduct := (f, g) → integrate(f*g, t = -infinity ..infinity);
NORM   := f → sqrt(inproduct(f, f)):

inproduct := (f, g) → integrate(g·f, t = -∞ ..∞)          (1)
> f0 := exp(-t^2/2)/NORM(exp(-t^2/2)):

> w1 := t*exp(-t^2/2)-f0*inproduct(f0, t*exp(-t^2/2));
f1 := w1/NORM(w1):
w1 :=  $t e^{-\frac{t^2}{2}}$                                          (2)

> w2 := t^2*exp(-t^2/2)-f1*inproduct(t^2*exp(-t^2/2), f1)-f0
      *inproduct(t^2*exp(-t^2/2), f0);
f2 := w2/NORM(w2):
w2 :=  $t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{2}$            (3)

> w3 := t^3*exp(-t^2/2)-f2*inproduct(t^3*exp(-t^2/2), f2)-f1
      *inproduct(t^3*exp(-t^2/2), f1)-f0*inproduct(t^3*exp(-t^2/2),
      f0);
f3 := w3/NORM(w3):
w3 :=  $t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{3 t e^{-\frac{t^2}{2}}}{2}$            (4)

> w4 := t^4*exp(-t^2/2)-f3*inproduct(t^4*exp(-t^2/2), f3)-f2
      *inproduct(t^4*exp(-t^2/2), f2)-f1*inproduct(t^4*exp(-t^2/2),
      f1)-f0*inproduct(t^4*exp(-t^2/2), f0);
f4 := w4/NORM(w4):
w4 :=  $t^4 e^{-\frac{t^2}{2}} - 3 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{3 e^{-\frac{t^2}{2}}}{4}$      (5)

> # i: de orthonormale basis is dus de span van <f_0, w_1, w_2, w_3, w_4, ...>
> # ii: zie notes

```

Figure 83: WC 2 Exercise 2

### Lange oplossing

```
> g0 := fn(0)*inproduct(fn(0),g);
g1 := fn(0)*inproduct(fn(0),g)+fn(1)*inproduct(fn(1),g);
g2 := fn(0)*inproduct(fn(0),g)+fn(1)*inproduct(fn(1),g)+fn(2)*inproduct(fn(2),g);
g3 := fn(0)*inproduct(fn(0),g)+fn(1)*inproduct(fn(1),g)+fn(2)*inproduct(fn(2),g)+fn(3)*inproduct(fn(3),g);
g4 := fn(0)*inproduct(fn(0),g)+fn(1)*inproduct(fn(1),g)+fn(2)*inproduct(fn(2),g)+fn(3)*inproduct(fn(3),g)+fn(4)*inproduct(fn(4),g);
```

### Korte oplossing (niet te kennen)

```
> g_n := n -> add(fn(i)*inproduct(fn(i),g),i=0..n);
Warning, (in g_n) `i` is implicitly declared local
```

Visualisatie

```
> app0 := plot(g_n(1), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=blue, legend="projectie op W[0]");
app1 := plot(g_n(1), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=black, linestyle="dot", legend="projectie op W[1]", thickness=3);
app2 := plot(g_n(2), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=red, legend="projectie op W[2]");
app3 := plot(g_n(3), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=purple, linestyle="dot", legend="projectie op W[3]", thickness=3);
app4 := plot(g_n(4), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=coral, legend="projectie op W[4]");
> gplot := plot(g, t=-5..5, thickness=1, color=black, legend="g(t)", thickness=2);
> display(gplot,app0, app1, app2, app3, app4);
```

Figure 84: WC 2 Exercise 2 Maple

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> e_1 := Vector([1, 0, 0])

$$e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> e_2 := Vector([0, 1, 0])

$$e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

> A :=  $\frac{1}{2} \cdot (e_1 \cdot \text{Transpose}(e_1) + e_2 \cdot \text{Transpose}(e_2) + e_1 \cdot \text{Transpose}(e_2)$ 

$$+ e_2 \cdot \text{Transpose}(e_1))$$


$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

> # Is A = Transpose(A)?
> Transpose(A)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

> # YES!
> # Is A = A^2?
> A^2

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

> # YEHAAAHHH
> # The subspace is thus e_1 + e_2

```

Figure 85: WC 2 Exercise 3 Maple

## Huis 3

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[3, 4], [1, 0]])

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = [J'|Q'])

$$J, Q := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad (2)$$

> recursie_relatie := Q . MatrixPower(J, n) . Q-1 . Vector([1, 1])

$$\text{recursie\_relatie} := \begin{bmatrix} \frac{-3(-1)^n}{5} + \frac{84^n}{5} \\ \frac{3(-1)^n}{5} + \frac{24^n}{5} \end{bmatrix} \quad (3)$$

> limit_eq := recursie_relatie[1]

$$\text{limit\_eq} := \frac{-3(-1)^n}{5} + \frac{84^n}{5} \quad (4)$$

> limit(limit_eq, n = infinity)
4
> 
```

Figure 86: Huis 3 Exercise 1

$$y_{n+1} = 3y_n + 4y_{n-1}$$

$$y_0 = y_1 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n}$$

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{via maple}} \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

↓

via maple

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De recursieve relatie zegt:  $\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} = Q D^{n-1} Q^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$

(via maple)

$$\begin{matrix} \text{maple}, \\ = \dots \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{---}} \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \right) = q$$

Figure 87: Huis 3 Exercise 1

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{pmatrix} a & b & e & f \\ c & d & g & h \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & k & l \end{pmatrix} \\
 &= a \cdot \begin{pmatrix} d & g & h \\ 0 & i & j \\ 0 & k & l \end{pmatrix} - c \cdot \begin{pmatrix} b & e & f \\ 0 & i & j \\ 0 & k & l \end{pmatrix} \\
 &= ad \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} - cd \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
 &= (ad - cd) \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \det(a) \det(c) = \det(ac)
 \end{aligned}$$

Figure 88: Huis 3 Exercise 2

```

> with(LinearAlgebra):
> # First express the matrix ( N=2)
> A := Matrix([[a,b,e,f],[c,d,g,h],[0,0,i,j],[0,0,k,l]])
      
$$A := \begin{bmatrix} a & b & e & f \\ c & d & g & h \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & k & l \end{bmatrix}$$
 (1)

> Determinant(A)           
$$adil - adjk - bcil + bcjk$$
 (2)
> # This is the answer, the only thing now is to identify the result
> det_a := a·d - c·b       
$$det_a := ad - cb$$
 (3)
> det_b := e·h - g·f       
$$det_b := eh - gf$$
 (4)
> det_c := i·l - k·j       
$$det_c := il - kj$$
 (5)
> expand(det_a · det_c)    
$$adil - adjk - bcil + bcjk$$
 (6)
> # Look, same answer, thus it can be done like this.

```

Figure 89: Huis 3 Exercise 2

// Exercise 3

> # De recursie relatie is:  $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$

> # Als we dit schrijven in matrix vorm krijgen we:

> restart: with(LinearAlgebra):

> A := Matrix([[1, 1], [1, 0]])

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])

$$J, Q := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (2)$$

> JK := Matrix( $\left[ \left[ \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k, 0 \right], \left[ 0, \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k \right] \right]$ )

$$JK := \begin{bmatrix} \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k & 0 \\ 0 & \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k \end{bmatrix} \quad (3)$$

> Q\_inverse := MatrixInverse(Q)

$$Q_{\text{inverse}} := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{(-5+\sqrt{5})\sqrt{5}}{10} \end{bmatrix} \quad (4)$$

> x\_0 := 1

$$x_0 := 1 \quad (5)$$

> x\_1 :=  $\frac{(1-\sqrt{5})}{2}$

$$x_1 := -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \quad (6)$$

> v\_1 := Vector([x\_1, x\_0])

$$v_1 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

> result := Q • JK • Q\_inverse • v\_1

$$\begin{aligned}
result := & \left[ \left[ \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k + \frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{5} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k}{10} \right) \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right) \right. \right. \\
& - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \Big) + \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
& \left. \left. - \frac{(\sqrt{5}+1) \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k (-5+\sqrt{5})}{20} \right] , \right. \\
& \left[ \left( -\frac{\sqrt{5} \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k}{5} + \frac{\sqrt{5} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k}{5} \right) \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right) \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sqrt{5} \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right)}{5} - \frac{\left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k (-5+\sqrt{5})}{10} \right] \right]
\end{aligned} \tag{8}$$

```

> # calculate the limit
> limit(result[1], k = infinity)

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \tag{9}$$


```

```

> # Et voila ;)
>
> # Ok but for b) we need to add a small epsilon to this shit
> epsilon :=
> x_0 := 1 + e

$$x_0 := 1 + e \tag{10}$$


```

```

> x_1 :=  $\frac{(1 - \text{sqrt}(5))}{2} + e$ 

$$x_1 := \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + e \tag{11}$$


```

```

> v_1 := Vector([x_1, x_0])

$$v_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + e \\ 1 + e \end{bmatrix} \tag{12}$$


```

```

> result := Q . JK . Q_inverse . v_1

$$result := \left[ \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k + \frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{5} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k}{10} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \right] \tag{13}$$


```

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sqrt{5}}{2} + e \Big) + \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{(\sqrt{5} + 1) \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k (-5 + \sqrt{5})}{20} \right) (1 + e), \\
& \left[ \left( -\frac{\sqrt{5} \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k}{5} + \frac{\sqrt{5} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k}{5} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + e \right) + \right. \\
& \left. - \frac{\sqrt{5} \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right)}{5} - \frac{\left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k (-5 + \sqrt{5})}{10} \right] (1 \\
& + e)
\end{aligned}$$

> # calculate the limit

>  $result := limit(result[1], result[2], k = infinity)$

$$result := \frac{3\sqrt{5} + 5}{5 + \sqrt{5}} \quad (14)$$

> evala(result)

$$\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \quad (15)$$

> # Hupa, correct bitches

```

> # We doen de uitdagende bijvraag niet aangezien dit wordt geskipped door
   professor.
> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([ [ 8/10, 3/10 ], [ 2/10, 7/10 ] ])

$$A := \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = [ 'J', 'Q' ])

$$J, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad (2)$$

> # Lambda_1 = 1, lam_2 =  $\frac{1}{2}$ ,
   obviously gaat lambda_1 domineren wanneer we exponentiële vorm
   nemen.
> # Aka,  $v_1 = \left[ \frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right]$  is het asymptotische vector. Let's proof this shit
> JK := Matrix([ [ 1, 0 ], [ 0, (1/2)^k ] ])

$$JK := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix} \quad (3)$$

> result := Q * JK * MatrixInverse(Q)

$$result := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^k}{5} & \frac{3}{5} - \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^k}{5} \\ \frac{2}{5} - \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^k}{5} & \frac{2}{5} + \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^k}{5} \end{bmatrix} \quad (4)$$

> # In this form, we can see if k -> infinity, then we get the answer we were
   looking for. Prove accepted.

```

Figure 90: Huis 3 Exercise 4

```

> restart : with(LinearAlgebra) :
> A := Matrix([ [ 98/100, 0, 0 ], [ 2/100, 97/100, 0 ], [ 0, 3/100, 1 ] ])
      
$$A := \begin{pmatrix} \frac{49}{50} & 0 & 0 \\ \frac{1}{50} & \frac{97}{100} & 0 \\ 0 & \frac{3}{100} & 1 \end{pmatrix}$$

> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])
      
$$J, Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{49}{50} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{97}{100} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

> MatrixPower(J, n)
      
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{49}{50}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{97}{100}\right)^n \end{pmatrix}$$

> # Here we see that Lambda_1 is dominant, so eigenvector 1 is dominant
> v_1 := Vector([0, 0, 1])
      
$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

> # everyone will die.
>

```

Figure 91: Exercise 5

6. Voor een Markov matrix is de som van de componenten van een vector  $\mathbf{x}$  gelijk aan de som van de componenten van  $\mathbf{Ax}$ . Bewijs dat voor eigenvectoren  $\mathbf{Av}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k$ , met  $\lambda_k \neq 1$  de som van de componenten verdwijnt.

Verifieer ook voor de matrix  $A$  uit vraag 4.

**Oplossing:**

$$\sum_i (\mathbf{v}_k)_i = \sum_i (A\mathbf{v}_k)_i = \lambda_k \sum_i (\mathbf{v}_k)_i$$

$$(1 - \lambda_k) \sum_i (\mathbf{v}_k)_i = 0 \iff \lambda_k = 1 \text{ of } \sum_i (\mathbf{v}_k)_i = 0$$

Figure 92: Exercise 6

7. a) Schrijf de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0, \quad \text{met } y(t), a, b \in \mathbb{R} \quad (2)$$

als een eerste-orde matrix differentiaalvergelijking  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ , met  $\mathbf{y} = (\dot{y}, y)$ , en los deze vergelijking vervolgens op.

Je vindt drie types kwalitatief verschillend gedrag van de oplossing, voor  $a^2 > 4b$ ,  $a^2 = 4b$  en  $a^2 < 4b$ . Verklaar dit gedrag vanuit de Jordan-vorm van  $\mathbf{A}$ .

Oplossing:

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= -a\dot{y} - by \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- $a^2 > 4b$ :

We krijgen een diagonale Jordan vorm met 2 verschillende eigenwaarden. De basisoplossingen zijn  $e^{\lambda_1 t}$  en  $e^{\lambda_2 t}$ .

- $a^2 = 4b$ : In dit geval krijgen we een niet-diagonale Jordan vorm met  $\lambda_1 = \lambda_2 = -a/2$ . De basisoplossingen zijn  $e^{\lambda_1 t}$  en  $te^{\lambda_1 t}$ .

- $a^2 < 4b$ : De Jordanvorm is opnieuw diagonaal. We krijgen 2 complexe eigenwaarden. De basisoplossingen zijn gedempte oscillaties.

Figure 93: Exercise 7

```

> # A) is basically gwn Jordan Form en kijken wat je eigenwaarden
   eigenvectoren zijn lolz.
> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[-2, 2, 2], [-5, 4, 3], [0, 0, 2]])

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = [J,Q])

$$J, Q := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-I & 0 \\ 0 & 0 & 1+I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} - \frac{2I}{5} & -\frac{1}{5} + \frac{2I}{5} \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

> # Hierboven is a)
> # Ok nu b) Het idee is simpel, we willen alpha_1, alpha_2 en y(t)
y0 := Vector([1, 1, 1]):
> constants := solve(Q.Vector([alpha1, alpha2, conjugate(alpha2)]) = y0,
   [alpha1, alpha2]);

$$\text{constants} := [[\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0]] \quad (3)$$

> # nu nog y(t). y(t) = Q · exp(D) · Q⁻¹ · y₀
> D_exp := Matrix([[exp(2·t), 0, 0], [0, exp((1-I)·t), 0], [0, 0, exp((1+I)·t)]])

$$D_{\text{exp}} := \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1-I)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(1+I)t} \end{bmatrix} \quad (4)$$

> y := Q · D_exp · MatrixInverse(Q) · y0

$$y := \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \quad (5)$$

> # Et voila.

```

Figure 94: Exercise 8

// Exercise 9

> *restart: with(LinearAlgebra):*

>  $A := \text{Matrix}([[0, -1, 0, -1], [1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0]])$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

>  $J, Q := \text{JordanForm}(A, \text{output} = [\text{'J}', \text{'Q'}])$

$$J, Q := \left[ \begin{array}{cccc} -\frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{3}}{2} \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -\frac{1}{-3 + I\sqrt{3}}, \frac{\frac{I}{3}\sqrt{3}}{-1 + I\sqrt{3}}, -\frac{1 + I\sqrt{3}}{(-3 + I\sqrt{3})(-1 + I\sqrt{3})}, -\frac{1}{-3 + I\sqrt{3}} \\ -\frac{-1 + I\sqrt{3}}{2(-3 + I\sqrt{3})}, \frac{1}{-3 + I\sqrt{3}}, -\frac{1}{-3 + I\sqrt{3}}, \frac{-1 + I\sqrt{3}}{2(-3 + I\sqrt{3})} \\ -\frac{2}{(-3 + I\sqrt{3})(-1 + I\sqrt{3})}, \frac{2}{(-3 + I\sqrt{3})(-1 + I\sqrt{3})}, \\ -\frac{2}{(-3 + I\sqrt{3})(-1 + I\sqrt{3})}, \frac{1 + I\sqrt{3}}{2(-3 + I\sqrt{3})} \\ -\frac{1}{-3 + I\sqrt{3}}, -\frac{1 + I\sqrt{3}}{(-3 + I\sqrt{3})(-1 + I\sqrt{3})}, \frac{1 + I\sqrt{3}}{(-3 + I\sqrt{3})(-1 + I\sqrt{3})}, \\ \frac{1}{-3 + I\sqrt{3}} \end{array} \right] \quad (2)$$

>  $v := \text{Vector}([1, 0, 2, 1])$

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

>  $result\_1 := simplify(MatrixExponential(t \cdot A) \cdot v)[4]$

$$result\_1 := \frac{2 \left( e^{-\frac{t}{2}} + \frac{3 e^{\frac{t}{2}}}{2} \right) \sqrt{3} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)}{3} + e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \quad (4)$$

=>

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[2, 3], [1, 0]])

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])

$$J, Q := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (2)$$

> # Dit is i) lambda_1 = -1, lambda_2 = 3
> # ii)
> v_1 := Q[ .., 1]

$$v_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (3)$$

> v_2 := Q[ .., 2]

$$v_2 := \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (4)$$

> v_3 := Vector([1, 2])

$$v_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

> eq := <1, 2> = c1 * v_1 + c2 * v_2;

$$eq := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c1}{4} + \frac{3c2}{4} \\ -\frac{c1}{4} + \frac{c2}{4} \end{bmatrix} \quad (6)$$

> solve(eq, {c1, c2})

$$\{c1 = -5, c2 = 3\} \quad (7)$$


```

Figure 95: Exercise 1

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> # Oefening 2 vind ik maar brol, wordt nooit gevraagd
> # i)
> # Leer gwn matrixExponential te gebruiken
> A := Matrix([[1, 1], [1, 1]])
      A := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
 (1)
> MatrixExponential(A)
      
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} & \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} \end{bmatrix}$$
 (2)

```

Figure 96: Exercise 2

// Exercise 3

```
[> restart: with(LinearAlgebra): with(plots): with(plottools):  
[> #i)
```

```
[> P := Matrix([ [0, 0, 1, 0, 0], [1/2, 0, 0, 0, 0], [1/2, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1/2, 0], [0, 0, 0, 1/2, 1] ]])
```

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
[> T := 1/5 Matrix([[1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1]])
```

$$T := \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad (2)$$

```
[> G := a→a·P + (1 - a)·T  
G := a ↪ a·P + (1 - a)·T
```

(3)

```
[> #ii)  
[> J, Q := JordanForm(G(a), output = [ 'J', 'Q' ])
```

(4)

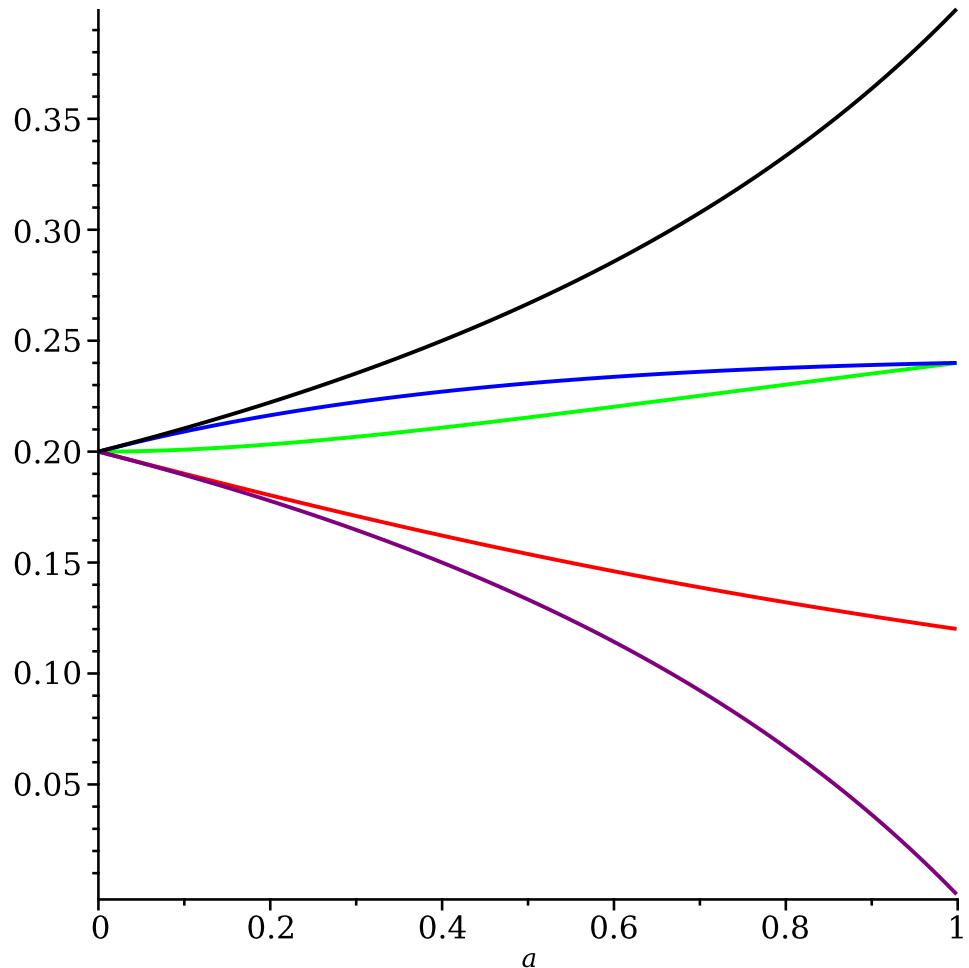
$$\boxed{J, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2} - \frac{I}{2}\right)a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2} + \frac{I}{2}\right)a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \left[\frac{2(a^2 + a + 1)}{5(a^2 + 2a + 2)}, \frac{4}{25}, \right. \\ \left. \frac{3Ia + 10 + 2I + 5a}{10(2Ia + 3 + I + a)}, \frac{-\frac{I}{50}(11Ia^2 + 32Ia - 7a^2 - 4 + 32I - 14a)}{a^2 + 2a + 2}, 0 \right], \\ \left[ \frac{a+2}{5(a^2 + 2a + 2)}, \frac{2}{25}, \frac{Ia - 6 + 4I - 4a}{10(2Ia + 3 + I + a)}, \right. \\ \left. \frac{\frac{I}{50}(2Ia^2 + 9Ia - 9a^2 - 18 + 14I - 23a)}{a^2 + 2a + 2}, 0 \right], \\ \left[ \frac{a^2 + 3a + 2}{5(a^2 + 2a + 2)}, \frac{4}{25}, -\frac{4Ia + 4 + 6I + a}{10(2Ia + 3 + I + a)}, \right. \\ \left. \frac{\frac{I}{50}(9Ia^2 + 23Ia + 2a^2 + 14 + 18I + 9a)}{a^2 + 2a + 2}, 0 \right], \\ \left[ \frac{2(-1+a)}{5(a-2)}, 0, 0, 0, -\frac{2(-1+a)}{5(a-2)} \right], \\ \left[ -\frac{2}{5(a-2)}, -\frac{2}{5}, 0, 0, \frac{2(-1+a)}{5(a-2)} \right] \end{bmatrix}}$$

> # Hier zien we alvast dat lambda 1 dominant is, dus eigenvector 1 is sexy  
 > sol := Q[ .., 1]

(5)

$$sol := \begin{bmatrix} \frac{2(a^2 + a + 1)}{5(a^2 + 2a + 2)} \\ \frac{a + 2}{5(a^2 + 2a + 2)} \\ \frac{a^2 + 3a + 2}{5(a^2 + 2a + 2)} \\ \frac{2(-1 + a)}{5(a - 2)} \\ -\frac{2}{5(a - 2)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

> `plot(sol, a = 0..1, color = [green, red, blue, purple, black]);`  
`evalf(subs({a = 1}, sol));`



(6)

$$\begin{bmatrix} 0.2400000000 \\ 0.1200000000 \\ 0.2400000000 \\ 0. \\ 0.4000000000 \end{bmatrix} \quad (6)$$

> # we zien dus dat website 5 het meest zal worden bezocht

> #iii)

>  $J, Q := JordanForm(G(1), output = ['J', 'Q'])$

$$J, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{I}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{I}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{10} - \frac{I}{10} & \frac{3}{10} + \frac{I}{10} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{10} + \frac{I}{5} & -\frac{1}{10} - \frac{I}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} - \frac{I}{10} & -\frac{1}{5} + \frac{I}{10} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> # antwoord is dan ofcourse v\_1 en v\_5 letsgo

> #iv)

>  $state\_n := (n, x0) \rightarrow Q \cdot J^n \cdot MatrixInverse(Q) \cdot x0 :$

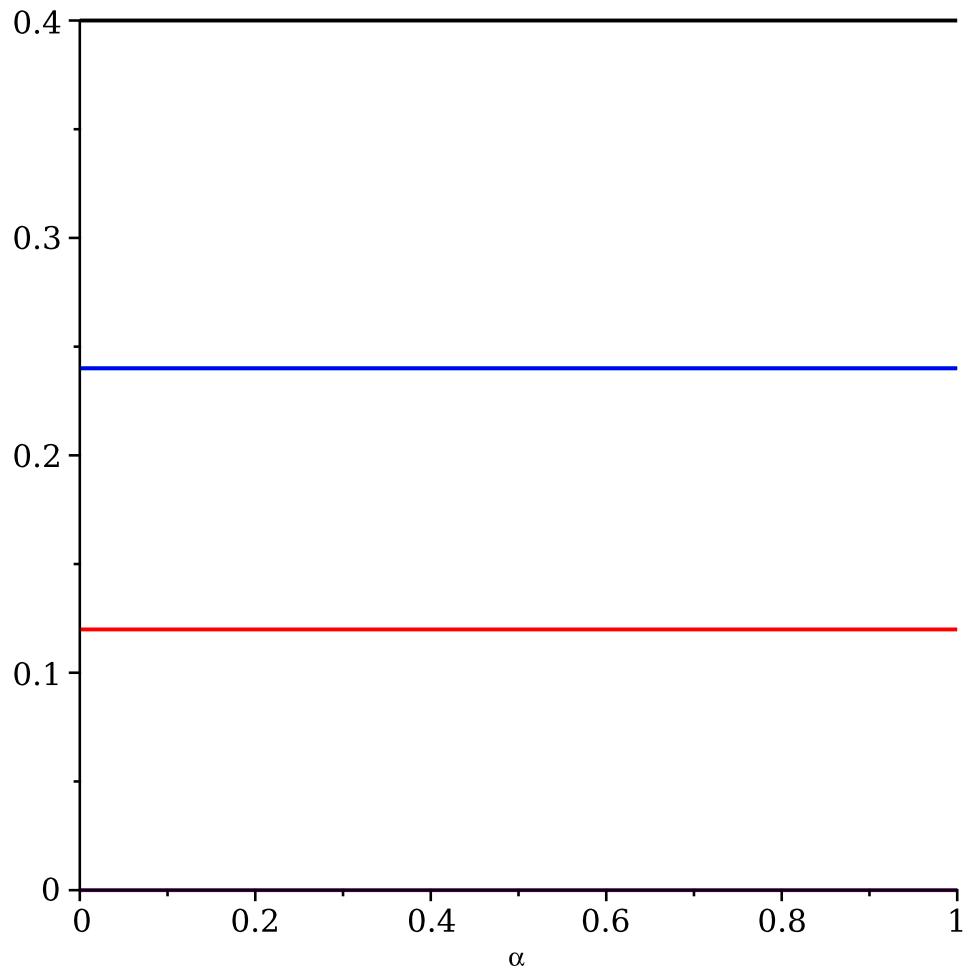
> # eerst uniform dus 0.2 prob per sprong

>  $x0 := \langle 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2 \rangle;$

>  $state\_20 := state\_n(20, x0) :$

>  $plot1 := plot(state\_20, alpha = 0..1, color = [green, red, blue, purple, black]);$

$$x0 := \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

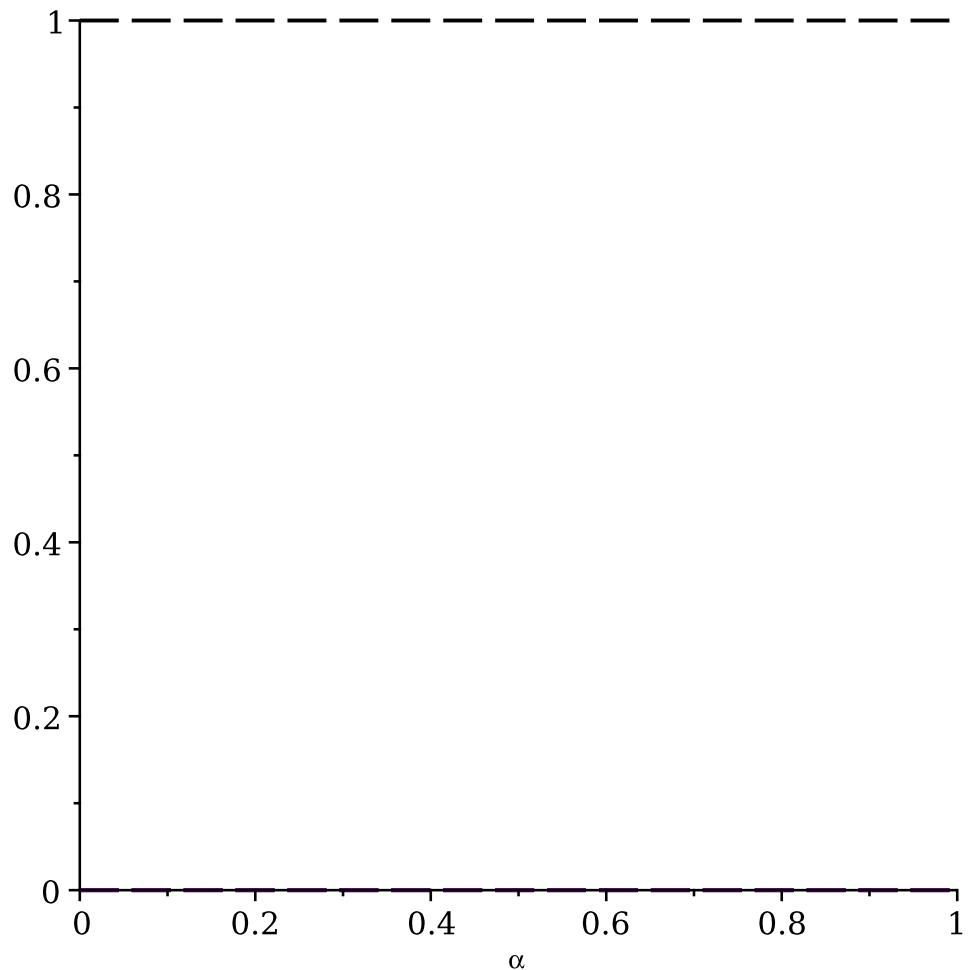


```

> # ik denk dat mijn Q en J niet goed zijn ingeladen, anyways I dont care
> # Nu kijken naar bezetting van website 4 en 5, dus 50 50
> x0 := <0, 0, 0, 0.5, 0.5>;
state_50 := state_n(20, x0) :
plot2 := plot(state_50, alpha = 0..1, color = [green, red, blue, purple, black],
linestyle = "dash");

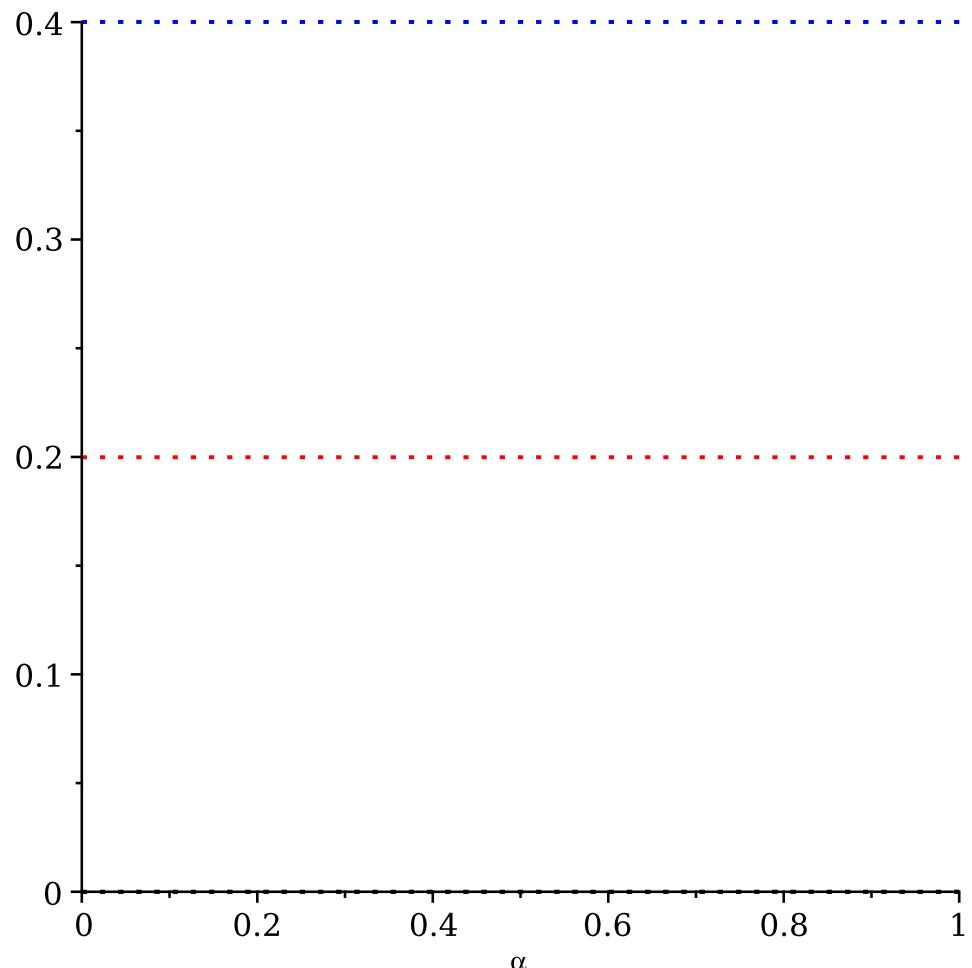
```

$$x0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$



```
> # Als laatste de bezetting van website 1, 2 en 3
> x0 := <1/3, 1/3, 1/3, 0, 0>;
state_50 := state_n(20, x0):
plot3 := plot(state_50, alpha = 0..1, color = [green, red, blue, purple, black],
linestyle = "dot");
```

$$x_0 := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



> #Warning, die plots kloppen niet, maar moet gewoonweg gevult worden  
met de juiste  $J$



// Exercise 1

# Wiskundige modellering in de ingenieurswetenschappen: Werkcollege 3

## Oefening 1

> restart:with(plots):with(LinearAlgebra):

We definiëren de (6x6)-matrix A als functie van Ex, Ey en B

>  $A := (Ex, Ey, B) \rightarrow \langle \langle 0|0|B|0|Ex\rangle, \langle 1|0|0|0|0\rangle, \langle -B|0|0|0|Ey\rangle, \langle 0|0|1|0|0\rangle, \langle 0|0|0|0|0\rangle \rangle;$   
 $A(Ex,Ey,B);$

$A := (Ex, Ey, B) \mapsto \langle \langle 0|0|B|0|Ex\rangle, \langle 1|0|0|0|0\rangle, \langle -B|0|0|0|Ey\rangle, \langle 0|0|1|0|0\rangle, \langle 0|0|0|0|0\rangle \rangle$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & B & 0 & Ex \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B & 0 & 0 & 0 & Ey \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Ook de beginwaarden steken we in een vector(functie)

>  $X0 := (x0, y0, vx0, vy0) \rightarrow \langle vx0, x0, vy0, y0, 1 \rangle:$   
 $X0(x0, y0, vx0, vy0);$

$$\begin{bmatrix} vx0 \\ x0 \\ vy0 \\ y0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

De algemene oplossing wordt gevonden als

>  $sol := \text{MatrixExponential}(t^*A(Ex,Ey,B)).X0(x0, y0, vx0, vy0);$   
 $x\_sol := sol[2];$   
 $y\_sol := sol[4];$   
 $sol := \left[ \left[ \cos(tB) vx0 + \sin(tB) vy0 + \frac{Ex \sin(tB) - Ey \cos(tB) + Ey}{B} \right], \right.$   
 $\left[ \frac{\sin(tB) vx0}{B} + x0 + \frac{(-\cos(tB) + 1) vy0}{B} \right.$   
 $\left. + \frac{BEyt - Ex \cos(tB) - Ey \sin(tB) + Ex}{B^2} \right],$   
 $\left. \left[ -\sin(tB) vx0 + \cos(tB) vy0 + \frac{Ex \cos(tB) + Ey \sin(tB) - Ex}{B} \right], \right]$

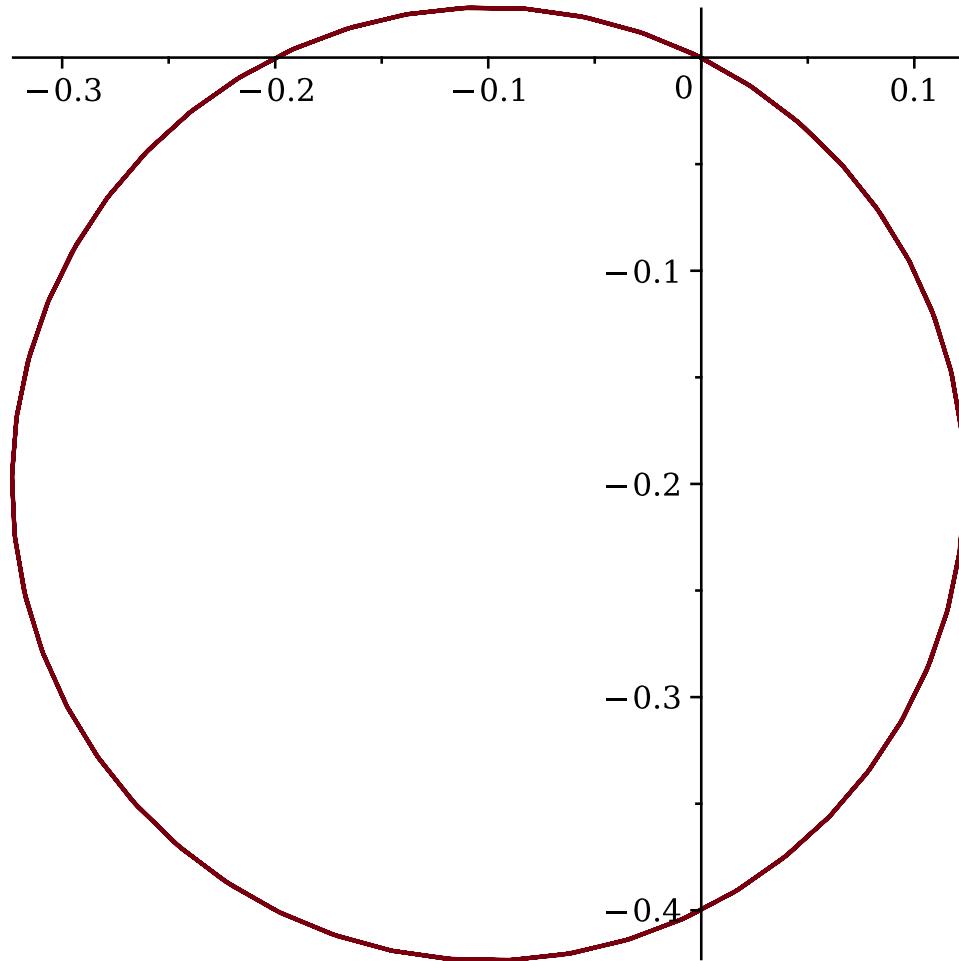
$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{(\cos(tB) - 1) vx0}{B} + \frac{\sin(tB) vy0}{B} + y0 \right. \\
& \left. + \frac{-B Ex t + Ex \sin(tB) - Ey \cos(tB) + Ey}{B^2} \right] \\
& \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
x_{sol} &:= \frac{\sin(tB) vx0}{B} + x0 + \frac{(-\cos(tB) + 1) vy0}{B} \\
&+ \frac{BEyt - Ex \cos(tB) - Ey \sin(tB) + Ex}{B^2} \\
y_{sol} &:= \frac{(\cos(tB) - 1) vx0}{B} + \frac{\sin(tB) vy0}{B} + y0 \\
&+ \frac{-B Ex t + Ex \sin(tB) - Ey \cos(tB) + Ey}{B^2}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Kijken we nu naar de concrete beginvoorwaarden voor  $(Ex, Ey) = (0,0)$ ,  $B=10$

```

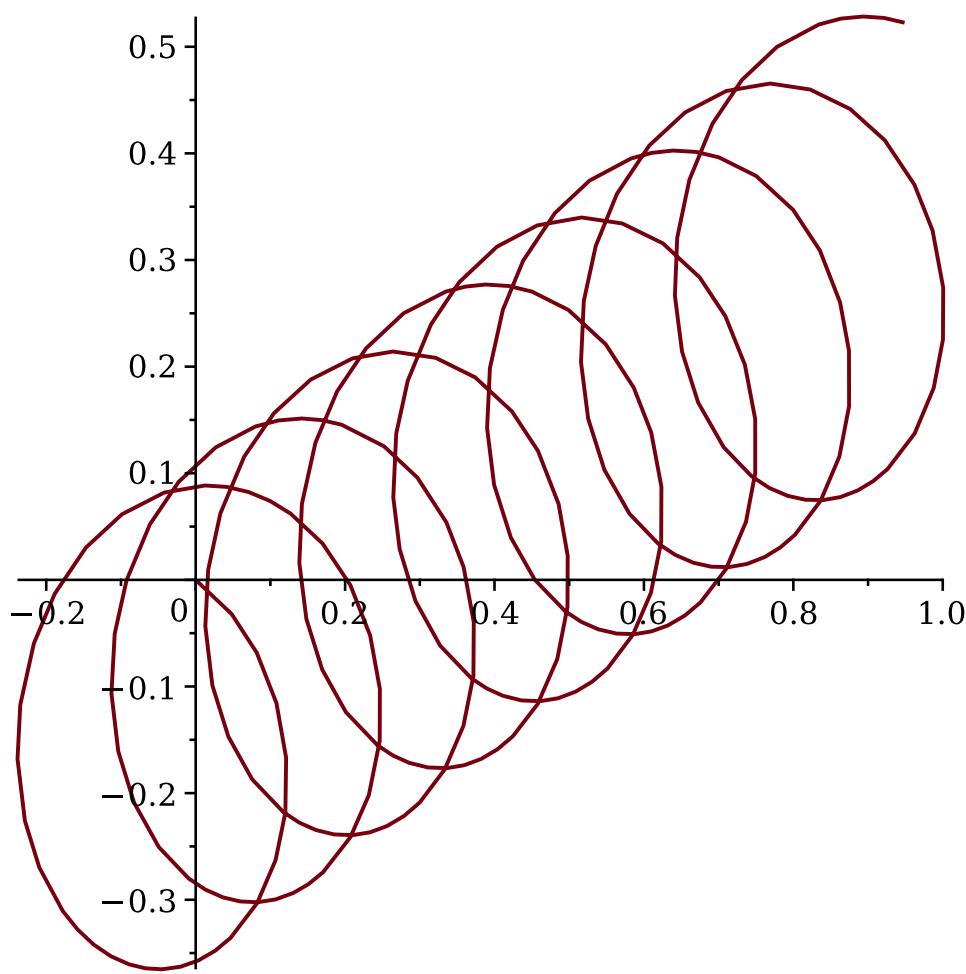
> sol_E0 := MatrixExponential(t*A(0,0,10)).X0(0,0,2,-1):
  x_sole0 := sol_E0[2]:
  y_sole0 := sol_E0[4]:
> plot([x_sole0, y_sole0, t=0..5]);

```



Analoog voor  $(Ex, Ey) = (-1, 2)$

```
> sol_E := MatrixExponential(t*A(-1,2,10)).X0(0,0,2,-1):  
x_sole := sol_E[2]:  
y_sole := sol_E[4]:  
> plot([x_sole, y_sole, t=0..5]);
```



Het qualitatieve verschil is te zien in de Jordanvorm van de matrix A: indien E verschillend is van 0 verschijnen er Jordan-blokken, wat zal zorgen voor een verschillend gedrag wanneer men e exponentiële  $\exp(t^*A)$  neemt

```
> JE0 := JordanForm(A(0,0,B));
JE := JordanForm(A(Ex,Ey,B));
```

$$JE0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -IB & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & IB & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$JE := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -IB & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & IB & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

► **Oefening 3**

► **Oefening 2**

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([ [1, -1, 0], [0, 1/2, 0], [-3/4, 7/4, 1/4] ])
      
$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$
 (1)
> J, Q := JordanForm(A, output = [ 'J', 'Q' ])
      
$$J, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$
 (2)
> cosD := Matrix([[ (cos(Pi * J[1, 1])), 0, 0], [0, (cos(Pi * J[2, 2])), 0], [0, 0, (cos(Pi * J[3, 3]))]]);
      
$$cosD := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
 (3)
> result := Q * cosD * MatrixInverse(Q)
      
$$result := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
 (4)
> # Et voila

```

Figure 97: Exercise 2

```

[> restart: with(LinearAlgebra):
[> # First we define the relationship as matrix
[> A := Matrix([[a,b],[1,0]])

$$A := \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$


[> J, Q := JordanForm(A, output = [ 'J','Q'])

$$J, Q := \begin{bmatrix} \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \end{bmatrix}, \quad (2)$$


$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2\sqrt{a^2 + 4b}} & \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2\sqrt{a^2 + 4b}} \\ -\frac{1}{\sqrt{a^2 + 4b}} & \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4b}} \end{bmatrix}$$


[> result := Q . MatrixPower(J, n) . MatrixInverse(Q) . Vector([1, 1]):
[> limit_ := simplify(result[1] / result[2])

$$limit_ := \left( (\sqrt{a^2 + 4b} - a - 2b) \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n + (\sqrt{a^2 + 4b} + a + 2b) \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n \right) / \left( (\sqrt{a^2 + 4b} + a - 2) \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n - \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n (a - \sqrt{a^2 + 4b} - 2) \right) \quad (3)$$


[> limit(limit_, n = infinity)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( (\sqrt{a^2 + 4b} - a - 2b) \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n + (\sqrt{a^2 + 4b} + a + 2b) \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n \right) / \left( (\sqrt{a^2 + 4b} + a - 2) \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n - \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n (a - \sqrt{a^2 + 4b} - 2) \right) \quad (4)$$


```

Figure 98: Exercise 3