

Zero to Hero: WiMo

Niels Savvides

December 27, 2024

Chapter 1

Analyse in 1 veranderijke: enkele aspecten

1.0.1 Continuiteitseigenschappen van functies

Functie $f(x)$ is continue over $]a, b[$ als:

1. $f(x)$ bestaat in elk punt
2. de limiet van $f(x)$ bestaat in elk punt

Continue afgeleide: $f(x)$ is continue (zie hierboven) en $f'(x)$ bestaat in elk punt. Dit kan:

1. gladde functies zijn: elk afgeleide is continu
2. stuksgewijs: $f(x)$ heeft een singulariteit, maar het bestaat in deel intervallen $]a, c[$ $]c, b[$

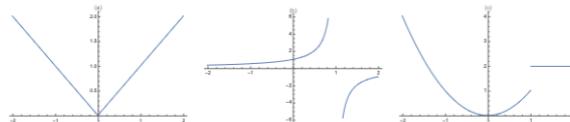


Figure 1.1: a) Continue functie, stuksgewijs continue afgeleide (als je afleid krijg je een singulairiteit)
b) Heeft een singulairiteit, dus stuksgewijs continu, stuksgewijs glad continu afleidbaar
c) Deze is glad stuksgewijs continu afleidbaar, is ook stuksgewijs continu

1.0.2 Taylorontwikkeling

We willen zaken gaan benaderen. Hiervoor gebruiken we:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

waarbij a het **werkpunt** is.

Veel voorkomende Taylorontwikkelingen:

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \\
 & \Rightarrow \ln(1-x) = 0 + x + \frac{x^2}{2} \cdot (\ln(0)) - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{(2n+1)!} \\
 & \Rightarrow \ln(1-x) = (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{(2n+1)!} \\
 & \Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n \quad \text{convergent voor }]-1, 1[\\
 & \hookrightarrow \text{propositie: de afleidings van } \left(\frac{1}{1-x}\right) \text{ maakt negatief}\\
 & \quad \text{van door } -x \text{ claim wordt het positief.} \\
 & \Rightarrow \ln(1-x) \approx -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}\right) \quad \text{van } x \in]-1, 1[
 \end{aligned}$$

Figure 1.2: Simply use the formulas

Storingsrekening

```

> # x^3 + epsilon · x = 1
> f := x → x^3 + epsilon · x = 1
      f := x → x^3 + e · x = 1                                         (1)

> # When epsilon is null, we get x = 1
> g := 1 + u · epsilon + v · epsilon^2
      g := v e^2 + u e + 1                                              (2)

> f_subs := subs(x = g, f(x))
      f_subs := (v e^2 + u e + 1)^3 + e (v e^2 + u e + 1) = 1        (3)

> f_expand := expand(f_subs)
      f_expand := e^6 v^3 + 3 e^5 u v^2 + 3 e^4 u^2 v + 3 e^4 v^2 + e^3 u^3 + 6 e^3 u v + e^3 v + 3 e^2 u^2
      + e^2 u + 3 v e^2 + 3 u e + e + 1                                 (4)

> # First keep the left hand side
> left_hand_side := lhs(f_expand)
      left_hand_side := e^6 v^3 + 3 e^5 u v^2 + 3 e^4 u^2 v + 3 e^4 v^2 + e^3 u^3 + 6 e^3 u v + e^3 v
      + 3 e^2 u^2 + e^2 u + 3 v e^2 + 3 u e + e + 1                  (5)

> # Extract coeff 1 and 2
> coeff_1 := coeff(left_hand_side, epsilon, 1)
      coeff_1 := 3 u + 1                                              (6)

> coeff_2 := coeff(left_hand_side, epsilon, 2)
      coeff_2 := 3 u^2 + u + 3 v                                       (7)

> solve({coeff_1 = 0, coeff_2 = 0}, {u, v})
      {u = -1/3, v = 0}                                                 (8)

> # Final result
> result := subs({u = -1/3, v = 0}, g)
      result := -e/3 + 1                                               (9)

```

Figure 1.3: Maple solution

Stortingreeksing

$$\alpha^3 + \varepsilon \alpha = 1$$

1) $\text{if } \varepsilon = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

$$\rightarrow \alpha_0 = 1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2$$

$$\text{Vul in: } (1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2)^3 + \varepsilon(1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2) \approx 1$$

$$(1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2)^3 \approx 1 + 3\alpha_1 \varepsilon + 3\alpha_2 \varepsilon^2$$

1) 1.

2) $3\alpha_1 \varepsilon$ (3rd order)

$\Rightarrow 3\alpha_1 \varepsilon^2 + 3\alpha_2 \varepsilon$

$$(\alpha_0 \varepsilon)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 \varepsilon + 3\alpha \varepsilon^2$$

$$\cancel{1 + 3\alpha_1 \varepsilon + \varepsilon^2(3\alpha_1^2 + 3\alpha_2)} + \varepsilon(1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2) \approx 1$$

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 3\alpha_1 + 1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{3}\varepsilon$$

Figure 1.4: 1. Merk op dat als epsilon 0 is, dan is $x = 1$. Dus we benaderen value 1: $1 + \varepsilon \cdot u + \varepsilon^2 \cdot v$. Vul dit in de main equation. Gebruik maple om dit op te lossen en vul u en v in x_1

1.0.3 Twee eenvoudige differentiaalvergelijkingen

Eerste orde differentiaalvergelijking

$$y'(x) = \lambda y(x)$$

Als we dit uitwerken krijgen we:

$$\ln(y(x)) = \lambda x + C$$

$$y(x) = e^{\lambda x + C} = e^C e^{\lambda x} = C e^{\lambda x} \text{ met } C = y(0)$$

$$y(x) = y(0) e^{\lambda x}$$

Radioactief verval

Radioactie

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda$$

$$\Leftrightarrow \ln(N(t)) = -\lambda t + C$$

$$\Leftrightarrow N(t) = e^{-\lambda t + C} = N_0(t)$$

$$\Leftrightarrow N(t) = N_0(t) \cdot e^{-\lambda t}$$

halveringstijd: $\frac{N_0}{2}$

$$\Rightarrow \frac{N_0/2}{t_{1/2}} = N_0(t) \cdot e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1/2) = -\lambda t_{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1/2) = -\lambda t_{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1/2)}{-\lambda} = t_{1/2}$$

Figure 1.5: Vindt eerst de differentiaalvergelijking (zie eerste differentiaalvergelijking). Dan kunnen we de oplossing gelijkstellen aan $N_0/2$. Werk dit uit en je hebt $t_{1/2}$ gevonden

Tweede orde differentiaalvergelijking

$$y''(x) = \lambda y(x)$$

Hierbij heb je 3 gevallen:

$$1. \lambda > 0: y(t) = A e^{\sqrt{\lambda}t} + B e^{-\sqrt{\lambda}t}$$

$$2. \lambda = 0: y(t) = A + Bt$$

3. $\lambda < 0$: $y(t) = A\cos(\sqrt{-\lambda}t) + B\sin(\sqrt{-\lambda}t)$

Complexe getallen

Algemene vorm: $z = a + bi$

waarbij a reeel, b imaginair en $i^2 = -1$

inverse: $(a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$

complement: $z = a + bi \rightarrow z^* = a - bi$

modulus: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

in **polaire vorm**:

$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ (Dit kan via Taylor bewezen worden (zie oefeningen))

Okey, nu nog een paar goniometrische formules:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Hoofdstelling van de algebra

Als we een kwadratisch veelterm hebben: $ax^2 + bx + c = 0$

Dan vinden we de nulpunten (oplossingen) met:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

met $b = -4 * a * c$ vinden we de discriminant.

Chapter 2

Lineare Algebra

2.0.1 Lineare onafhankelijkheid

Lineare onafhankelijkheid betekent dat de vectoren niet op een lijn liggen. Dit betekent dat de determinant van de matrix niet 0 is. Maar ook dat de vectoren niet een lineaire combinatie van elkaar zijn.

Voorbeeld: beschouw de drie vectoren (we gebruiken hier al de kolom-notatie voor vectoren)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad (2.1.3)$$

Figure 2.1: Hier zien we dat de vectoren op hun zelf lineair onafhankelijk zijn. Maar als we combinaties beginnen nemen dan worden ze wel lineaire combinaties van elkaar.

v_1, v_2, v_3 zijn lineair onafhankelijk. Maar v_1 en v_2 bijvoorbeeld, vormen een lineaire combinatie van v_3

2.0.2 Inproduct, Norm, Orthogonaliteit

- **Inproduct:** $uv = \sum_{i=1}^n u_i v_i$

- **Norm:** $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

Side note: om de **hoek** tussen 2 vectoren te vinden, $\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \cos(\theta)$

2.0.3 Gramm-Schmidt

Dit gaat ons toelaten om een basis te vinden van vectoren.

$$v_1 = u_1 / \|u_1\|$$

$$v_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1$$

$$v_x = \dots$$

Ook definieerd het dat een vector $v = v^{\parallel} + v^{\perp}$

Waarbij v^{\parallel} de projectie is van v op u en v^{\perp} de projectie op de orthogonale basis.

$$v^{\parallel} = (u_1 \cdot v) u_1 + (u_2 \cdot v) u_2 + \dots$$

Voorbeeld Gramm-Schmidt

```

> with(LinearAlgebra):
> v_1 := Vector([1, 1, 0])
v_1 := 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (1)

> v_2 := Vector([0, 1, 1])
v_2 := 
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
 (2)

> v_3 := Vector([1, 0, 1])
v_3 := 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
 (3)

> u_1 :=  $\frac{v_1}{Norm(v_1, 2)}$ 
u_1 := 
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (4)

> u_2 :=  $\frac{(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1)}{Norm(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1, 2)}$ 
u_2 := 
$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$
 (5)

> u_3 :=  $(v_3 - ((u_2 \cdot v_3) * u_2) - ((u_1 \cdot v_3) * u_1)) / Norm(v_3 - ((u_2 \cdot v_3) * u_2) - ((u_1 \cdot v_3) * u_1), 2)$ 

```

(6)

Figure 2.2: Hier gebruiken we dus de iteratieve formule om de basis te vinden.

Note: Dit kan uitgebreid worden naar functieruimtes. Hiervoor gaan we een oefening zien in het werkcollege.

2.0.4 Matrices

Typische vorm: $y = Ax$

Het **getransponeerde** is A^T , de rijen worden kolommen en omgekeerd.

Hier geldt dan dat: $(AB)^T = B^T A^T$, dus je draait de matrices om

2.0.5 Kolomruimte, rijruimte, nulruimte

- **Kolomruimte:** alle mogelijke lineaire combinaties van de kolommen ($K(A)$)

- **Rijruimte:** alle mogelijke lineaire combinaties van de rijen ($K(A^T)$)

- **Nulruimte:** alle vectoren die op 0 worden afgebeeld ($N(A)$ of $N(A^T)$)

Zeer belangrijk is dat:

$N(A)$ complementair is aan $K(A^T)$ en $N(A^T)$ is complementair aan $K(A)$

Bij de representatie van het vlak heb je een **rang**. Dit is basically de hoeveelheid kolommen van Matrix A niet nul zijn.

Voorbeeld definities

V D : z. l. 5.1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{max: } \begin{cases} 2 \\ 2 \\ 2 \end{cases} \quad \text{enkel linear ongh. kolommen!}$$

$$K(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad A = 2$$

$$N(A^T) = \vec{0}$$

$$K(A^T) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$N(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{dit zijn vectoren die vallen: } A\alpha = 0$$

$$A\vec{\alpha} = \vec{b}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = b_1 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = b_2 \end{cases}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{b_1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{b_2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

line in R^{4m}:

$$\vec{\alpha} = \vec{x}_p + \vec{\alpha}_n$$

(the nullvector van A = $\vec{0} \in N(A)$)

Figure 2.3:

2.0.6 Matrix Inverse

$$x = A^{-1}y$$

Typisch gezien is dit gedaan via: $\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$

Wat heel nuttig is is dat $AA^{-1} = I$ en $A^{-1}A = I$. Dit kan heel wat schrijfwerk vermijden

Weer zoals bij transponeren geldt dat $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2.0.7 Projectie en kleinste kwadraten benadering

Zoals we eerder hebben gezien bij Gramm-Schmidt, kunnen we $v = v^{\parallel} + v^{\perp}$ schrijven.

We kunnen er iets abstracter boven plakken en werken met een **Projector**.

Deze is gedefinieerd als: $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ (deze vorm is niet al te belangrijk).

Met de nieuwe definitie P kunnen we nu zeggen dat $v = Pv + (I - P)v$

The following properties hold:

1. $P^2 = P$
2. $P^T = P$

Voorbeeld Projectie

```

=> with(LinearAlgebra):
=> A := Matrix([[1, 0], [0, 1], [0, c]])
      A := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$
 (1)
=> p := A.(Transpose(A).A)-1.Transpose(A)
      p := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2+1} & \frac{c}{c^2+1} \\ 0 & \frac{c}{c^2+1} & \frac{c^2}{c^2+1} \end{bmatrix}$$
 (2)
=> subs(c = 0, p)
      
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 (3)
=>

```

Figure 2.4: We zien dat x en y component 1 zijn, dus dit is een projector voor het x-y vlak

2.0.8 Kleinste kwadraten fit

$$x = (A^T A)^{-1} A^T y$$

Dit gaat ons toelaten om te fitten op data.

In Maple wordt dit gedaan via `LinearAlgebra:-LeastSquares`.

2.0.9 Vierkante matrices

Determinant

De determinant is super handig. Hoe berekenen we deze?

Let \mathbf{A} be a 3×3 matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

The determinant of \mathbf{A} , denoted as $\det(\mathbf{A})$ or $|\mathbf{A}|$, is calculated as:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Expanding the terms, we have:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Properties:

1. $\det(A) = \det(A^T)$
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3. $\det(A) = 0$ is linear DEPENDENT

2.0.10 Basic rotation matrix

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

So a typical transformation equation looks like:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ with the middle matrix being **inverse**.}$$

Example

Voorbeeld: geroteerde basis. Beschouw de basis $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_x = (1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_y = (0, 1)$ en de geroteerde basis $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{e}'_x = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{e}'_y = (-\sin \theta, \cos \theta)$. Wat is de transformatie, die voor een vector de componenten $\mathbf{x}' = (x', y')$ t.o.v. de geroteerde basis geeft, in functie van de originele componenten $\mathbf{x} = (x, y)$.

Figure 2.5: Rotation opgave

```

> restart: with(LinearAlgebra):
>
> M := Matrix([[cos(theta), -sin(theta)], [sin(theta), cos(theta)]])
M := 
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$
 (1)

> inv := MatrixInverse(M)
inv := 
$$\begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} & \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \\ -\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} & \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \end{bmatrix}$$
 (2)

> v := Vector([x, y])
v := 
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
 (3)

> inv . v

$$\begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta)x}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} + \frac{\sin(\theta)y}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \\ -\frac{\sin(\theta)x}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} + \frac{\cos(\theta)y}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \end{bmatrix}$$
 (4)

```

Figure 2.6: Rotation antwoord

2.0.11 Eigenvectoren, eigenwaarden, diagonalisatie en de Jordan-decompositie

v_i is een eigenvector van A als $Av_i = \lambda_i v_i$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

- geometrische multiplicitet: aantal lineair onafhankelijke eigenvectoren (je moet de eigenvalue invullen en row echelon reduced form verkrijgen. Dan zie je hoeveel eigenvectoren er degelijk zijn)

Figuur 2.7 toont een voorbeeld van de multiplicitet.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 |A - \lambda I| &= 0 \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} &= 0 = -\lambda \cdot (-\lambda - 1) - 1(-\lambda - 1) + 1(1 + \lambda) \\
 &= -\lambda^3 + \lambda + \lambda + 1 + 1 \\
 &= -\lambda^3 + 2\lambda + 2
 \end{aligned}$$

↳ calculate eigenvalues:

$$\lambda = -1, -1, 2$$

$\det A = -1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 = s, \quad x_2 = t$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad n = 1, 1 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{eigen vectors} \rightarrow \text{geometric mult.} = 2$$

Figure 2.7: Een voorbeeld van de multipliciteit

- algebraische multipliciteit: aantal keer dat de eigenwaarde voorkomt in de determinant

Indien alle geometrische multipliciteiten gelijk zijn aan de algebraische multipliciteiten, dan is de matrix diagonaliseerbaar. $A = MDM^{-1}$

met D een diagonale matrix met de eigenwaarden op de diagonaal. en M een matrix met de eigenvectoren. M^T is de matrix met rechterhand eigenvectoren

2.0.12 Jordan Form

$A = MJM^{-1}$ met J een Jordan matrix. Dit is nodig indien de dimensie van de eigenruimte (geometrische multipelicitet) kleiner is dan de algebraische multipelicitet. Aka, de matrix is niet diagonaliseerbaar. 2.8 2.9

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \ddots & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Figure 2.8: Jordan matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Figure 2.9: Jordan matrix example

This gives us: 2.10

Vindt u we:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & -1 & 1/2+i & 1/2-i \\ \hline 0 & 0 & 3/2+i/2 & 3/2-i/2 \\ 0 & 0 & 1/2+i & 1/2-i \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+i \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/5+i/5 & -1/5-3i/5 & 0 \\ 0 & 2/5-i/5 & -1/5+3i/5 & 0 \end{array} \right]$$

Hieruit lezen we de eigenwaarden af: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1 - i, \lambda_4 = 1 + i$ en corresponderende (rechter)-eigenvectoren:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/2+i \\ 3/2+i/2 \\ 1/2+i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1/2-i \\ 3/2-i/2 \\ 1/2-i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3.120)$$

en linker-eigenvectoren:

$$\mathbf{v}_{L1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{L2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{L3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/5+i/5 \\ -1/5-3i/5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{L4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/5-i/5 \\ -1/5+3i/5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Figure 2.10: Jordan matrix solution

Example

Voorbeeld 2: Geef voor de matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.3.122)$$

de eigenwaarden, en eigenvectoren. We vinden (opnieuw met Maple):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Jordan-vorm}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Jordan-vorm}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3.123)$$

Uit de Jordan-vorm (middenste matrix) zien we dat er twee verschillende eigenwaarden zijn: $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 2$, waarbij de algebraïsche multipliciteit van λ_2 gelijk is aan drie en de geometrische multipliciteit gelijk aan twee. De eigenvector \mathbf{v}_1 horende bij λ_1 lezen we af in de eerste kolom van de eerste matrix (\mathbf{M}), de twee eigenvectoren \mathbf{v}_2 en \mathbf{v}_3 horende bij λ_2 lezen we af in kolom twee en kolom vier:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.124)$$

(Uit de structuur van de Jordan-vorm volgt dat de derde kolomvector geen eigenvector is.)

Figure 2.11: Jordan matrix example 2

The jordan blocks are defined by the superline noted using 1. Dus de goniometrische multipliciteit betekend de hoeveelheid jordan blocks.

2.0.13 Matrixmachten en iteratieve matrixvergelijkingen

$A^k = M D^k M^{-1}$ voor diagonaliseerbare matrices

$A^k = M J^k M^{-1}$ voor niet-diagonaliseerbare matrices

met diagonaal matrix: 2.12

$$\mathbf{D}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Figure 2.12: Diagonaal matrix

iteratieve matrixvergelijking: $x_k = MD^kM^{-1}x_0$ Op deze manier kun je telkens de k -de stap berekenen.

Dit is enkel voor de diagonaliseerbare matrices. ($A^k = MD^kM^{-1}$)

asymptotisch gedrag: $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lambda^k(v_{L1}u_0)v_1$

v_1 is een fixed point in het asymptotisch gedrag.

Voorbeeld

Zie Figuur 2.13.

Toepassing: De Fibonacci rij: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \dots$, is een bekende recursieve rij die blijkbaar terug te vinden is in allerhande processen in de natuur. Ze wordt bepaald door de recursie-relatie $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$, met als startvoorwaarden $x_0 = 0, x_1 = 1$. We kunnen hier als volgt een iteratieve matrixvergelijking aan associëren. Stellen we $\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix}$, dan hebben we $\mathbf{u}_k = \mathbf{A}\mathbf{u}_{k-1}$ met

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} (= \mathbf{MDM}^{-1}), \quad (2.3.132)$$

waarbij we de matrix in de laatste gelijkheid, bvb. via Maple JordanForm diagonaliseerden. Vervolgens vinden we uit (2.3.128):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k = \mathbf{MD}^k \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u}_0 &= \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad (2.3.133) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix} \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

waarbij de laatste gelijkheid benaderend geldt voor grote k . We vinden dus de uitdrukking

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \right) \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \quad (2.3.134)$$

voor de Fibonacci-getallen, alsook de asymptotische ratio $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1}/x_k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ wat de beroemde gulden snede is.

Het asymptotisch gedrag (grote k) kunnen we ook rechtstreeks uit de dominante eigenvectoren en corresponderende eigenwaarde halen. Uit (2.3.132) lezen we af dat:

$$\text{fixed point} \quad \mathbf{v}_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right) \quad \mathbf{v}_{L1} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \quad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \quad (2.3.135)$$

Uit (2.3.131) vinden we dan onmiddellijk het asymptotisch gedrag

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix} \approx \lambda_1^k (\mathbf{v}_{L1} \cdot \mathbf{u}_0) \mathbf{v}_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix}, \quad (2.3.136)$$

wat precies overeenkomt met de laatste benaderde gelijkheid in (2.3.134). Wat de asymptotische ratio x_{k+1}/x_k betreft, vinden we ook onmiddellijk $\mathbf{u}_k \approx \lambda_1 \mathbf{u}_{k-1}$, waaruit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1}/x_k = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, consistent met het eerdere resultaat.

Figure 2.13: Fibonacci voorbeeld

In het bovenstaande zien we dat λ_1 de dominante eigenwaarde is. Daardoor kunnen we de fixed point berekenen met:

$$\lambda_1^k (v_{L1} \cdot u_0) v_1$$

Omdat λ_1 dominant is, nemen we voor v_1 de eerste kolom van M en voor v_{L1} de eerste rij van M^{-1}

Dit kan toegepast worden in de zogezegde **Markov proces**

algemene vorm: $u_k = P u_{k-1}$ waarbij P een matrix is die de overgangen tussen de verschillende states

aangeeft met probabiliteit. $\sum p_{ij} = 1$

Ook goed om te weten is dat wanneer de matrix strikt positieve getallen heeft, dat matrix P een uniek dominante eigenwaarde $\lambda_1 = 1$ heeft met v_1 een positieve eigenvector. Deze v_1 is dan ook een fixed point.

Voorbeeld Markov proces

Zie Figuur 2.14 and 2.15.

Voorbeeld. Neem volgend eenvoudig weermodel met 3 toestanden: zonnig, bewolkt en regen. En wanneer het zonnig is, een kans van 70% dat het de volgende dag ook zonnig is, 10% kans dat het bewolkt is, en 20% kans dat het regent. Wanneer het bewolkt is, 40% kans dat het zonnig wordt, 20% kans dat het bewolkt blijft, en 40% kans dat het de volgende dag regent. En wanneer het regent, 20% kans dat het de volgende dag zonnig wordt, 30% dat het bewolkt wordt, en 50% kans dat het zal regenen. Dit geeft de volgende Markov matrix:

Figure 2.14: Markov proces

```

=> restart;
=> with(LinearAlgebra):
=>
=> A := Matrix([[0.7, 0.4, 0.2], [0.1, 0.2, 0.3], [0.2, 0.4, 0.5]])
      A := 
$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$
 (1)

=> A := convert(A, rational)
      A := 
$$\begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
 (2)

=> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])
      J, Q := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{5}}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{5}}{10} \end{bmatrix},$$
 (3)

      
$$\left[ \left[ \frac{28\sqrt{5}}{(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, \frac{-71+31\sqrt{5}}{2(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, \right. \right.$$

      
$$\left. \frac{7+3\sqrt{5}}{2(-5+8\sqrt{5})} \right],$$

      
$$\left[ \frac{11\sqrt{5}}{(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, -\frac{-29+11\sqrt{5}}{2(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2(-5+8\sqrt{5})} \right]$$

      
$$\left. \left[ \frac{20\sqrt{5}}{(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, -\frac{-21+10\sqrt{5}}{(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, -\frac{2+\sqrt{5}}{-5+8\sqrt{5}} \right] \right]$$

=> evalf(Q)

```

(4)

Figure 2.15: Markov proces solution

2.0.14 Matrixexponent en lineaire differentiaalvergelijkingen

Hier gaan we een matrix plaatsen de exponent.

$e^{At} = M e^{Dt} M^{-1} \rightarrow$ concreet voorbeeld

Algemeen:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

of

$$e^A = M e^D M^{-1} \quad e^A = M e^J M^{-1} \text{ (niet-diagonaliseerbare matrices)}$$

In matrix vorm zie je het volgende: 2.16

$$e^{t\mathbf{J}_n(\lambda)} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda} & t e^{t\lambda} & \frac{t^2}{2} e^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} & t e^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} e^{t\lambda} \\ 0 & 0 & e^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} e^{t\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda} \end{bmatrix}$$

Figure 2.16: Matrix exponent

Note: Maple geeft de functie `MatrixExponential(A, t)` om e^{At} te berekenen.

eerste-orde differentiaalvergelijking

$$y'(t) = Ay(t)$$

$$y(t) = e^{At}y(0)$$

n-de differentiaalvergelijkin

Hetzelfde als hierboven

Herschrijf de tweede-orde differentiaalvergelijking $y''(t) + w^2y(t) = 0$

Zie Figuur 2.17.

Voorbeeld. Herschrijf de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0, \quad (2.3.154)$$

als een lineair stelsel van eerste orde vergelijkingen, en los deze vervolgens op.

Oplossing: Met $\mathbf{y}(t) = (y'(t), y(t))$, kunnen we (2.3.154) herschrijven als:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{bmatrix}. \quad (2.3.155)$$

Verder vinden we:

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\omega \sin \omega t \\ \frac{1}{\omega} \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}, \quad (2.3.156)$$

waaruit we de oplossing kunnen aflezen als tweede component van $\mathbf{y} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{y}_0$:

$$y(t) = y(0) \cos \omega t + \frac{y'(0)}{\omega} \sin \omega t, \quad (2.3.157)$$

wat inderdaad overeenkomt met de oplossing (1.3.23) die we in het vorige hoofdstuk poneerden.

Figure 2.17: Tweede-orde differentiaalvergelijking

2.0.15 Symmetrische matrices

- $A = A^T$
- A heeft enkel reele eigenwaarden
- A heeft orthogonale eigenvectoren
- $A = ODO^T$ met O een orthogonale matrix en D een diagonale matrix

Omdat $O^T = O^{-1}$, kunnen we zeggen dat $O^T O = I$

Ook is het zo dat geometrische multipliciteit = algebraïsche multipliciteit. $\rightarrow A$ is diagonaliseerbaar.

2.0.16 SVD (Singular Value Decomposition)

$$A = U\Sigma V^T$$

of

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$$

met U en V orthogonale matrices en Σ een diagonale matrix met singular values

U is mxm, V is nxn en Σ is mxn

Example SVD

Als we compressie willen uitvoeren moeten we essentially SVD uitvoeren, maar onze som wordt beperkt door een rang r'

$$A = \sum_{i=1}^{r'} \sigma_i u_i v_i^T$$

Chapter 3

Hoofdstuk 3: Integratie en afleiding in R^n

3.0.1 Partiele afgeleiden

$$D_i f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Example

Voorbeeld. Beschouw de functie $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$. Bepaal hiervoor $\partial_x f(x, y)$ en $\partial_y f(x, y)$.

Figure 3.1: Partial derivatives example

```

> f := x->sqrt(x^2 + y)           f := x-> $\sqrt{x^2 + y}$           (1)
=
> diff(f(x), x)                   $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y}}$           (2)
=
> diff(f(x), y)                   $\frac{1}{2\sqrt{x^2 + y}}$         (3)
=

```

Figure 3.2: Partial derivatives example

Higher order partial derivatives:

Basically hetzelfde, doe het gewoon na elkaar, van binnen naar buiten

Voorbeeld. Beschouw dezelfde functie $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$ als hierboven. Bepaal nu de tweede orde partieel afgeleiden $\partial_x \partial_x f(x, y) = \partial_x^2 f(x, y)$, $\partial_x \partial_y f(x, y)$, $\partial_y \partial_x f(x, y)$ en $\partial_y \partial_y f(x, y) = \partial_y^2 f(x, y)$. (Het is nuttig van dergelijke afgeleiden met de hand te kunnen berekenen. ©Maple kan dit natuurlijk ook, zie het diff commando.)

Figure 3.3: Partial derivatives example

```

> f:= x->sqrt(x^2 + y)          (1)
=
> diff(f(x),x)                  (2)
=
> diff(f(x),y)                  (3)
=
> diff(diff(f(x),x),x)          (4)
=
> diff(diff(f(x),y),y)          (5)
=

```

Figure 3.4: Partial derivatives example

3.0.2 Kettingregel

When deriving, make sure to derive the respected variable as well.

3.0.3 Coördinaten transformaties

Hier gaan we de coördinaten transformeren naar een andere coördinatenstelsel. (om het probleem zo gemakkelijk mogelijk te maken)

Example

Voorbeeld. (Een grotere oefening) Bij 2D golfproblemen, zoals de trilling van een drum, verschijnt de 2D Laplacian:

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (3.1.14)$$

In het geval van een cirkelvormige drum is het aangewezen van poolcoördinaten (ρ, θ) te gebruiken, bepaald door $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Druk deze 2D Laplacian uit in termen van deze polaire coördinaten.

Oplossing: Laat ons vooreerst de coördinatentransformatie inverteren. We vinden:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan(y/x). \quad (3.1.15)$$

Hieruit halen we de partieel afgeleiden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \cos \theta & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-y/x^2}{1 + (y/x)^2} = -\frac{\sin \theta}{\rho} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \sin \theta & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{\cos \theta}{\rho}. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Toepassing van de kettingregel (3.1.13) levert dan:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (3.1.17)$$

en hieruit krijgen we dan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= (\cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta})(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ &\quad - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \rho} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

$$\begin{aligned} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \rho} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Analoog vind je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \rho} \\ &\quad + \frac{\cos^2 \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Tellen we deze twee uitdrukkingen op dan daalt de rook neer en vinden we:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (3.1.21)$$

of dus

1. Calculeer de ρ en θ naar x en y
2. vorm de chain rule: $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}$
3. doe hetzelfde voor met respect tot y .
4. Vermenigvuldig twee maal met elkaar door de dubbele afgeleide
5. som met elkaar
6. Je hebt nu de laplacian ($\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$)

3.0.4 Gradient en de differentiaal

gradient operator: $\nabla = \sum_{i=1}^n e_i \partial_i$

Via deze gradient kunnen we de richtingsafgeleide berekenen (variatie van een functie langs een kromme)

$$\nabla f \cdot \frac{dx}{dt}$$

Example

Voorbeeld: Bepaal voor het veld $f(x, y) = x + y$ de gradient. Integreer vervolgens de richtingsafgeleide: $df/dt = \nabla f \cdot \frac{dx}{dt}$ voor de kromme $(x(t), y(t)) = (x_0 t, y_0 t)$, van $t = 0$

tot $t = 1$ en toon expliciet aan dat je voor deze integraal inderdaad de uitdrukking $f(x(1), y(1)) - f(x(0), y(0)) = x_0 + y_0$ krijgt.

Figure 3.6: Gradient example

Hier zien we dat de gradient $\nabla = (\partial_x, \partial_y) = (1, 1)$ (want $f(x, y) = x + y$)

de richtingsafgeleide is dan $\nabla f \cdot \frac{dx}{dt} = (1, 1) \cdot (x_0, y_0) = x_0 + y_0$

Als je de integraal pakt van $t = 0$ naar $t = 1$: $\int_0^1 x_0 + y_0 dt = x_0 + y_0$

De gradient operator en richtingsafgeleide wordt gebruikt bij zaken zoals stochastic gradient descent, waar we proberen de lokale minima te vinden.

Example

Voorbeeld. Bereken de gradient en toon expliciet aan dat deze orthogonaal staat op de veldlijnen voor $f(x, y) = xy$.

Oplossing: We vinden:

$$\nabla f(x, y) = (y, x). \quad (3.1.32)$$

Verder hebben we voor de veldlijnen $xy = c$ voor een bepaalde constante c , ofwel $y = c/x$. Voor een infinitesimale verplaatsing langs een veldlijn hebben we dus $dy = -\frac{c}{x^2}dx$. De corresponderende vector \mathbf{dx} leest dan:

$$d\mathbf{x} = dx(1, -c/x^2) = dx(1, -y/x) \quad (3.1.33)$$

waar we voor de laatste uitdrukking $c = xy$ invullen. Deze vector staat inderdaad orthogonaal op de gradient, $d\mathbf{x} \cdot \nabla f = 0$.

Figure 3.7: Gradient example

1. Calculate the gradient

$$\nabla f = (\partial_x, \partial_y) = (y, x)$$

onze veldijn: $c = xy$ Note: We willen uiteindelijk kunnen zeggen dat onze richtingsafgeleide = 0, we hebben dus \mathbf{dx} nodig

$$y = \frac{c}{x}$$

$$dy = -\frac{c}{x^2}dx$$

We weten ook dat onze displacement along the kromme $dx = (dx, dy)$

We weten nu wel dy dus we vullen dit in: $dx = (dx, -\frac{c}{x^2}dx) = dx(1, -\frac{c}{x^2})$

We weten ook wat c is: $dx(1, -\frac{xy}{x^2}) = dx(1, -\frac{y}{x})$

Nu dat we de displacement hebben, vinden we de richtingsafgeleide:

$$\nabla f \cdot dx = (y, x) \cdot dx(1, -\frac{y}{x}) = ydx - ydx = 0$$

Dus hebben we bewezen dat de gradient ∇f loodrecht staat op de kromme.

3.0.5 Taylorreeks

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \Delta x_i \Delta x_j + \dots \\ &\quad + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \right) (\Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_k}) + \dots , \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

waarbij $\Delta x_i = (x_i - x_{0i})$ en de partieel afgeleiden worden genomen in het punt \mathbf{x}_0 waarrond ontwikkeld wordt.

Figure 3.8: Taylorreeks bij afgeleiden

Als Δx_i (tweede term van taylorreeks), we $\nabla f \cdot \Delta x_i$

Dit is een **stationair punt** wanneer $\nabla f = 0$

Er zijn hierbij 3 gevallen voor 1 variable:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} > 0$ (minimum)
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} < 0$ (maximum)
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$ (saddle point (stationair buigpunt))

Voor meerdere variabelen, maken we gebruik van de **Hessiaan** dat voorkomt in de tweede orde term van de taylorreeks:

- Hessiaan is symmetrisch, dus $H = ODO^T$

Voor meerdere variabelen is het mogelijke kwalitatieve gedrag rijker. In dat geval wordt het gedrag rond een stationair punt \mathbf{x}_0 gevatt door de **Hessiaan** H_{ij} de matrix die optreedt in de tweede orde term van (3.1.34):

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \Delta x_i \Delta x_j = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \Delta x_i H_{ij} \Delta x_j. \quad (3.1.36)$$

Deze matrix \mathbf{H} is symmetrisch, $H_{ij} = H_{ji} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, wegens de commutatie van de partiële afgeleiden. Uit het vorig hoofdstuk weten we dan dat die wordt gediagonaleerd door een orthogonale transformatie $\mathbf{H} = \mathbf{O} \mathbf{D} \mathbf{O}^T$. Zo krijgen we:

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{ijl} \Delta x_i O_{il} \lambda_l O_{jl} \Delta x_j = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_l \lambda_l \Delta x_l'^2, \quad (3.1.37)$$

met O_{ij} de orthogonale matrixcomponenten, λ_l de (reële) eigenwaarden en $\Delta x_l' = \sum_i O_{il} \Delta x_i$. Dit leidt dan tot de volgende mogelijke kwalitatieve gedragingen (zie ook fig. 3.1):

Figure 3.9: Hessiaan

- als alle $\lambda_i > 0$ (minimum)
- als alle $\lambda_i < 0$ (maximum)
- als er zowel positieve als negatieve λ_i zijn (saddle point)
- als er eigenwaarden zijn die = 0, dan krijg je in sommige richtingen een stationair buigpunt gedefinieerd door de derde orde vorm van taylorreeks

Example

Voorbeeld. Bepaal de stationaire punten voor de functie $f(x, y) = x^3 e^{-(x^2+y^2)}$, en onderzoek hun karakter (minimum, maximum, ...) met behulp van de Hessiaan.

Figure 3.10: Hessiaan

$$e^f = \zeta A^k$$

$$f(x,y) = x^3 \cdot e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 \cdot e^{-(x^2+y^2)} + x^3 \cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot -2x \\ \Leftrightarrow e^{-(x^2+y^2)} \cdot (3x^2 - 2x^4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}/2, 0)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 + x^3 \cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y) \Leftrightarrow -2y x^3 \cdot e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ \Leftrightarrow (-\sqrt{3}/2, 0)$$

■ stationaire punten
we kijken naar 3 tweede orde afleiden:

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (4x^5 - 16x^3 + 6x) e^{-(x^2+y^2)}$$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^3 (4y^2 - 2) e^{-(x^2+y^2)}$$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x^2 y (2x^3 - 3) e^{-(x^2+y^2)}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

high maar eigenwaarden van de stationaire punten en zie bovenstaan.

Figure 3.11: Hessiaan

```

[> restart: with(LinearAlgebra):
[> # Define the function
=> f := (x,y) ->x^3·exp(-(x^2 + y^2));
f := (x, y) ->x^3·e^-y^2-x^2
(1)

[> df_dx := diff(f(x,y),x);
df_dy := diff(f(x,y),y);

df_dx := 3 x^2 e^-x^2-y^2 - 2 x^4 e^-x^2-y^2
df_dy := -2 x^3 y e^-x^2-y^2
(2)

[> stationary_points := solve({df_dx = 0, df_dy = 0}, {x,y});
stationary_points := {x = 0, y = y}, {x = RootOf(2 Z^2 - 3), y = 0}
(3)

[> d2f_dx2 := diff(f(x,y),x,x);
d2f_dy2 := diff(f(x,y),y,y);
d2f_dxdy := diff(f(x,y),x,y);
Hessian := Matrix([[d2f_dx2, d2f_dxdy], [d2f_dxdy, d2f_dy2]]);

d2f_dx2 := 6 x e^-x^2-y^2 - 14 x^3 e^-x^2-y^2 + 4 x^5 e^-x^2-y^2
d2f_dy2 := -2 x^3 e^-x^2-y^2 + 4 x^3 y^2 e^-x^2-y^2
d2f_dxdy := -6 x^2 y e^-x^2-y^2 + 4 x^4 y e^-x^2-y^2
Hessian :=

$$\begin{bmatrix} 6 x e^{-x^2-y^2} - 14 x^3 e^{-x^2-y^2} + 4 x^5 e^{-x^2-y^2} & -6 x^2 y e^{-x^2-y^2} + 4 x^4 y e^{-x^2-y^2} \\ -6 x^2 y e^{-x^2-y^2} + 4 x^4 y e^{-x^2-y^2} & -2 x^3 e^{-x^2-y^2} + 4 x^3 y^2 e^{-x^2-y^2} \end{bmatrix}$$

(4)

[> Hessian_at_points := subs(stationary_points, Hessian);
Hessian_at_points :=  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 
(5)

[> eigenvalues := LinearAlgebra:-Eigenvalues(Hessian_at_points);
eigenvalues :=  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 
(6)

[> # Analyse the behaviour along the y-axis if needed
[> df_dx_at_x0 := subs(x = 0, df_dx);
df_dy_at_x0 := subs(x = 0, df_dy);
df_dx_at_x0 := 0
df_dy_at_x0 := 0
(7)

```

Figure 3.12: Hessiaan

3.0.6 Integratie

De riemanniaanse integraal

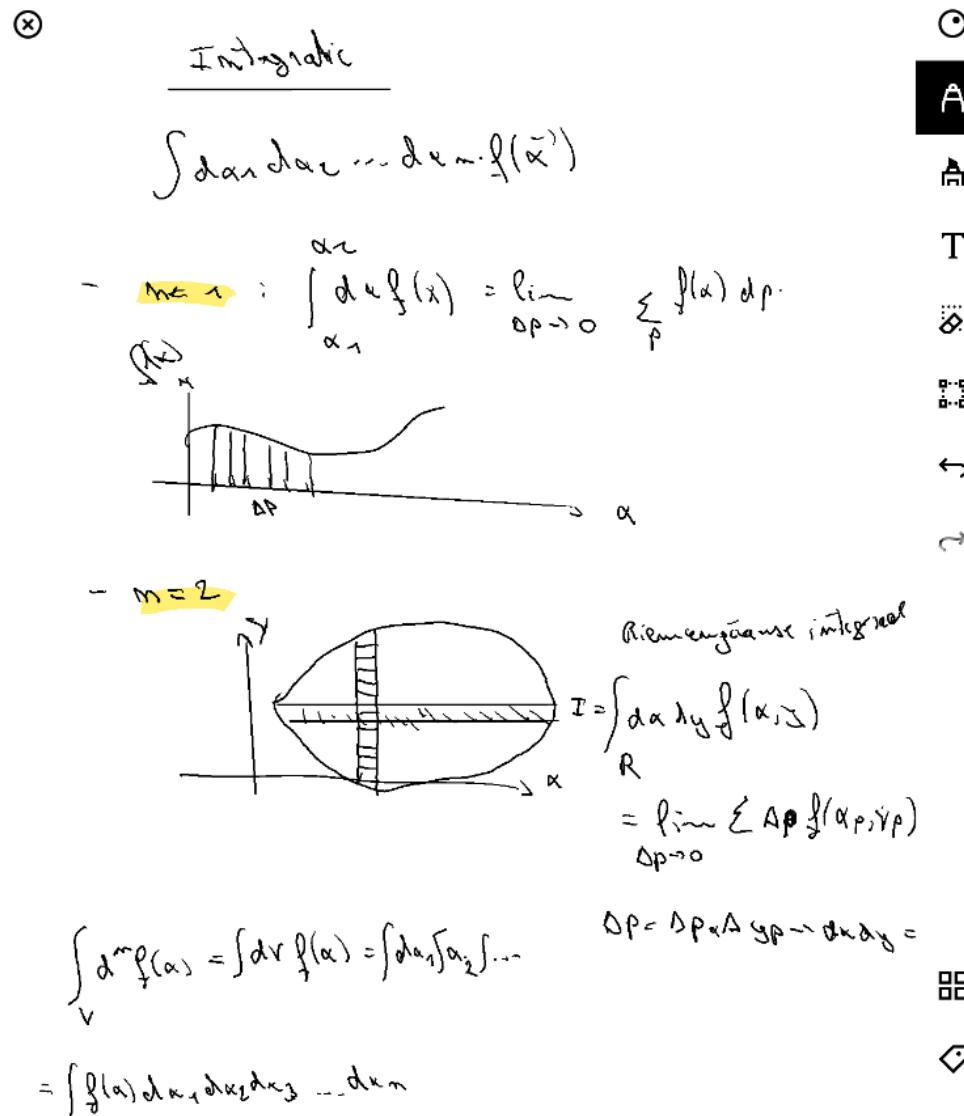


Figure 3.13: Integratie uitleg

Voorbeeld

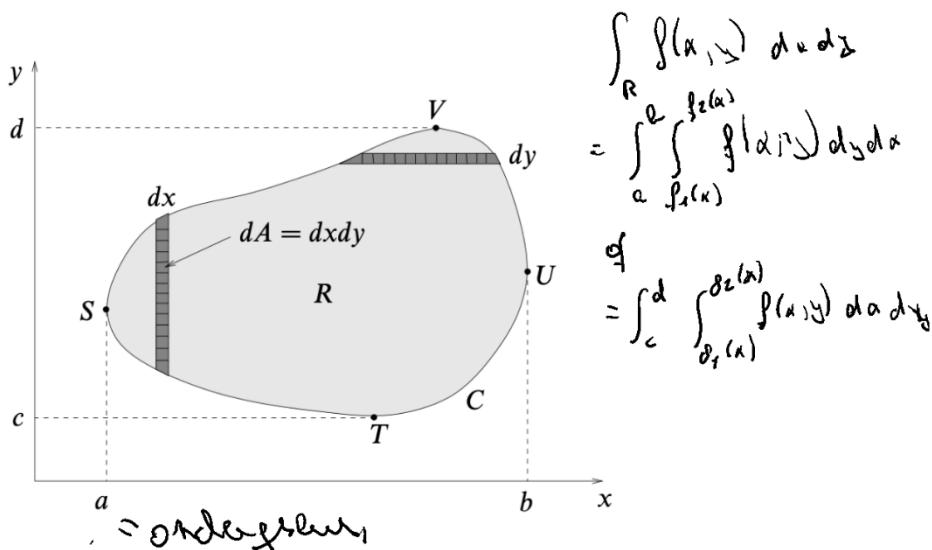


Figure 3.14: Integraal oppervlak

Voorbeeld

$$\textcircled{X} \quad \left[\frac{x^2}{z} \right]_x^2 = 6x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

66

HOOFDSTUK 3. INTEGRATIE EN AFLEIDING IN \mathbb{R}^N

$$= \frac{3}{2} [\theta]_0^{\pi} = \boxed{3\pi}$$

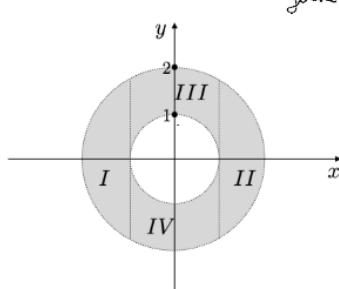
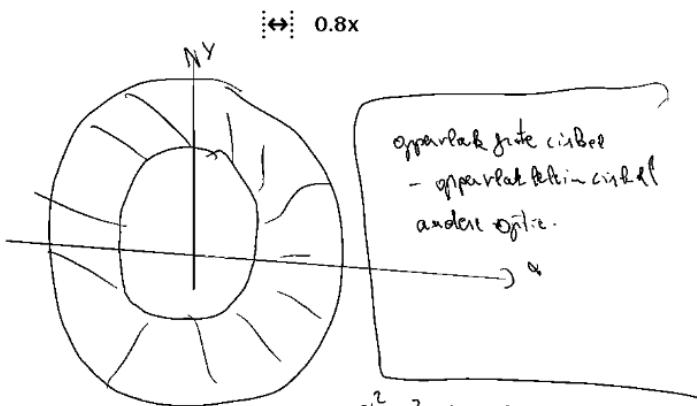


Figure 3.15: Cirkel oppervlak

Dit kan ook via de (x, y) coordinaten, waarbij de cirkel wordt voorgesteld door: $x^2 + y^2 = r^2$, dan krijg je:



$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$\alpha^2 + y^2 = 4 \rightarrow \text{buiten}$$

$$\alpha^2 + y^2 = 1 \rightarrow \text{binnen}$$

$$I_1 = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy dx = \int_{-1}^1 2\sqrt{4-x^2} dx$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} & \text{oppervlak cirkel } (\pi r^2) \\ & = \pi(4-1) = 3\pi \end{aligned}$$

$$I = 2I_1 + 2I_2 = 3\pi$$

Figure 3.16: Oppervlak cirkel x, y

We kunnen ook volumes berekenen, is basically een triple integraal...

Voorbeeld

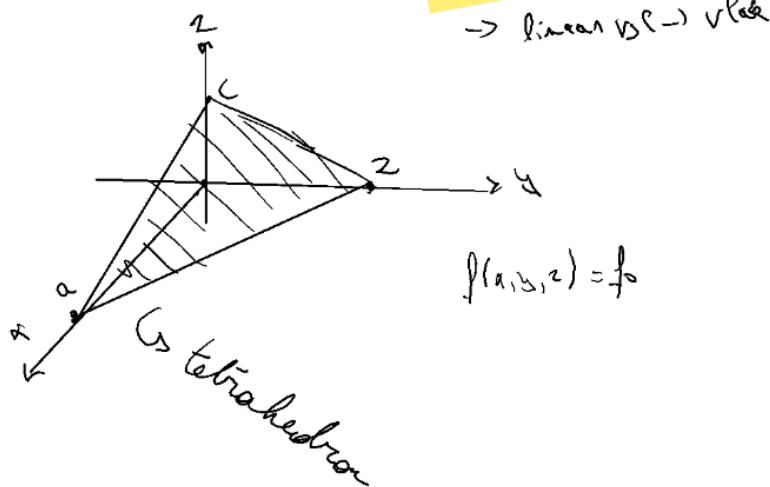
Voorbeeld, volume-integraal. Bepaal de massa M van de tetraedron R , begrenst door de coördinaatvlakken $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ en door het vlak $x/a + y/b + z/c = 1$, waarbij de dichtheid gegeven wordt door $\rho(x, y, z) = \rho_0(1 + x/a)$.

Figure 3.17: Volume vraag

Volumen:

$$\alpha=0, y=0, z=0, \frac{\alpha}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

→ linear $\rightarrow V_{\text{Plätt}}$



$$f(\alpha, y, z) = f_0 \left(1 + \frac{\alpha}{a}\right)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{\alpha}{a})} \int_0^{(1-\frac{\alpha}{a}-\frac{y}{b})c} f_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right) dx dy dz \\ &= f_0 \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{\alpha}{a})} \int_0^{(1-\frac{\alpha}{a}-\frac{y}{b})c} dz dy d\alpha = \frac{f_0 \cdot abc}{24} \end{aligned}$$

Figure 3.18: Volume solution

Een paar typische toepassingen zijn:

- Berekening oppervlakte of volume

$$A = \int_R dx dy \quad V = \int_R dx dy dz \quad (3.2.60)$$

- Berekening massa door de integratie van de oppervlakte- of volume dichtheid:

$$M = \int_R dx dy \rho(x, y) \quad M = \int_R dx dy dz \rho(x, y, z) \quad (3.2.61)$$

- Berekening massmiddelpunt \mathbf{x}_{mm} :

$$\begin{aligned} (x_{mm}, y_{mm}) &= \frac{1}{M} \int_R dx dy \rho(x, y) (x, y) \\ (x_{mm}, y_{mm}, z_{mm}) &= \frac{1}{M} \int_R dx dy dz \rho(x, y, z) (x, y, z). \end{aligned} \quad (3.2.62)$$

(De totale impuls van een star lichaam is dan $M\dot{\mathbf{x}}_{mm} = M\mathbf{v}_{mm}$.)

- Berekening inertiaal moment tensor I_{ij} (met $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$):

$$I_{ij} = \int_R dx dy \rho(x, y) x_i x_j \quad I_{ij} = \int_R dx dy dz \rho(x, y, z) x_i x_j \quad (3.2.63)$$

(Voor het draaimoment \vec{L} van een star lichaam dat roteert rond de oorsprong, rond een draaiaas met eenheidsvector \vec{n} en met hoeksnelheid ω hebben we dan $L_i = \omega \sum_j I_{ij} n_j$. Gegeven een krachtmoment (*torque*) m in de richting van \mathbf{n} , hebben we verder $m = \dot{\omega}(\sum_{ij} n_i n_j I_{ij})$)

Figure 3.19: Typische integralen

3.0.7 Verandering integratievariabelen

Basically we willen de integraal veranderen van coördinatenstelsel. Dit kan via de Jacobiaan.

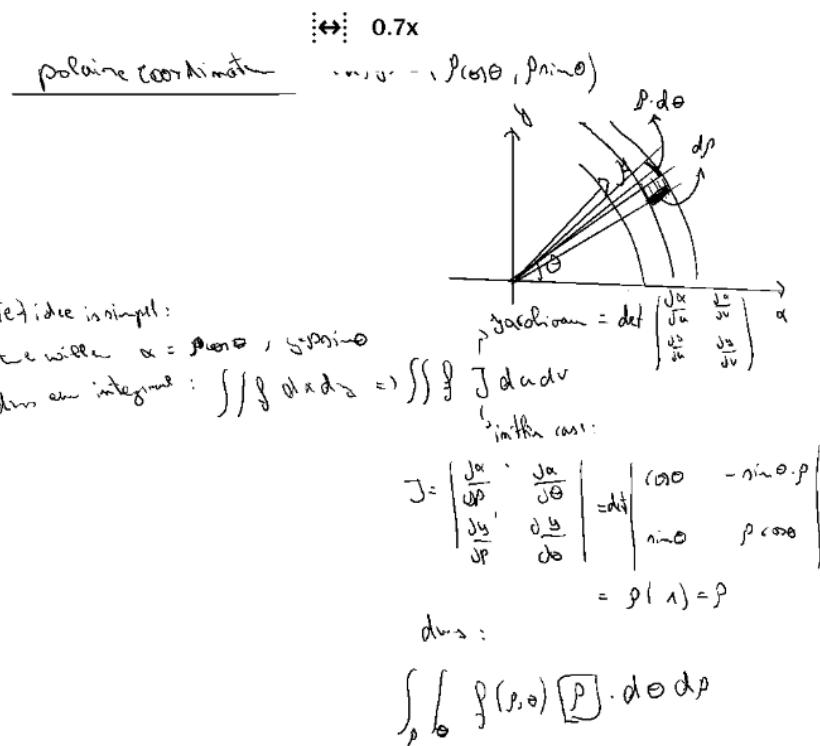


Figure 3.20: Voorbeeld coördinaten transformatie

3.0.8 Pool-, cilinder- en bolcoordinaten

- **Poolcoördinaten**

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad dA = r dr d\theta \quad (3.2.69)$$

Het coördinaatgebied $\{0 < r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ beschrijft heel de Euclidische 2D ruimte op de oorsprong $(x, y) = (0, 0)$ na, waarvoor θ onbepaald is. Voor de radiële coördinaat r hebben we $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (= afstand tot de oorsprong). Soms wordt ook nog ρ i.p.v. r gebruikt.

- **Cilindercoördinaten**

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \quad dV = r dr d\theta dz \quad (3.2.70)$$

Het coördinaatgebied $\{0 < r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < z < +\infty\}$ beschrijft heel de Euclidische 3D ruimte op de z -as na, $(x, y, z) = (0, 0, z)$, waarvoor θ onbepaald is. Voor de radiële coördinaat r hebben we opnieuw $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (= afstand tot de z -as). Soms wordt ook nog ρ i.p.v. r gebruikt.

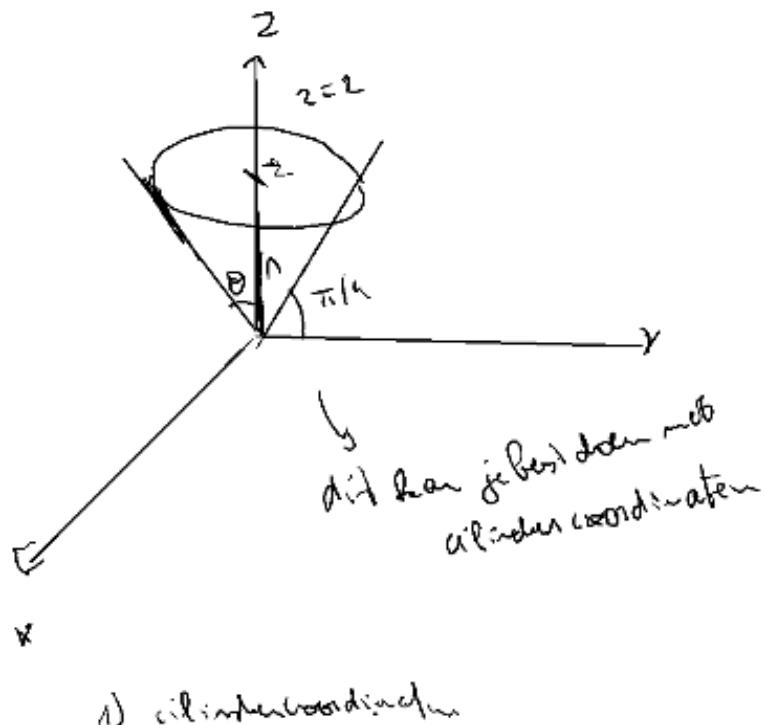
- **Bolcoördinaten**

$$(x, y, z) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \quad dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (3.2.71)$$

Het coördinaatgebied $\{0 < r < \infty, 0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ beschrijft heel de Euclidische 3D ruimte op de z -as na, $(x, y, z) = (0, 0, z)$, waarvoor φ onbepaald is. Nu hebben we voor de radiële coördinaat r dat $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (=afstand tot de oorsprong).

Figure 3.21: Pool, cilinder en bol coordinaten

Voorbeeld



$$\begin{aligned}
 & \int_R r \cdot dr \cdot dz \cdot d\phi \\
 & \int_0^2 dz \cdot \int_0^2 r dr \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \\
 & = 2\pi \int_0^2 dz \int_0^2 r dr = 2\pi \int_0^2 dz \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 \\
 & = 2\pi \cdot \int_0^2 \frac{2^2}{2} dz \\
 & = \frac{1}{2} \pi \cdot 8 = \frac{8\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Figure 3.22: Voorbeeld pool coördinaten

Chapter 4

Vectoranalyse in drie dimensies

4.0.1 Vectoren en vector bewerkingen

Scalair product, norm, afstand

Chapter 4

$$\vec{OP} = \vec{r}_P = (x, y, z)$$

$$\vec{PQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P$$

differentiatie: $\vec{v} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt}$

Scalair product: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}$
 $= \vec{v} \cdot \vec{w} \cdot \cos \theta$

Norm: $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

$\|\vec{PQ}\| = \|\vec{r}_Q - \vec{r}_P\|$
 \Rightarrow afstand

vectoriel product

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{e}_3$$

geometrisch: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Belangrijk om te weten is dat $w = u \times v$ de vector is die loodrecht staat op u en v .

Triple product: $u \times (v \times w) = (u.w).v - (u.v).w$

4.0.2 Vector velden en vectoriële afleiding

Vector- en scalaire velden: Maxwell en Navier-Stokes

Hier een paar vergelijkingen die je **niet** moet kennen maar wel moet kunnen bewijzen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \text{Faraday} \quad \leftarrow \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0} \\ \text{ampere} \quad \leftarrow \quad \underbrace{\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{Ampere}} &= \mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

Figure 4.2: Maxwell laws

De navier-stokes vergelijkingen beschrijven gas/liquid flow en zijn als volgt:

De Navier-Stokes vergelijkingen. Deze liggen aan de basis van de beschrijving van het dynamisch gedrag van vloeistoffen en gassen. We schrijven zowel de **continuiteitsvergelijking** (zonder afvoer- of bronterm):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (4.2.23)$$

als de eigenlijke Navier-Stokes momentum vergelijking (voor het geval van constante dynamische viscositeit μ en verdwijnende tweede viscositeitscoëfficiënt):

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \mu \left(\vec{\nabla}^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right) + \rho \vec{g}. \quad (4.2.24)$$

De twee vectorvelden hier zijn: $\vec{v}(x, y, z, t)$, die de snelheid beschrijft van het vloeistof/gas-elementje op de betreffende positie en tijd, en $\vec{g}(x, y, z)$, het zwaartekracht-

Figure 4.3: Navier-Stokes

Conservatieve velden

Conservatieve vectorvelden

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \phi = (\partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi)$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi}_{= \vec{0}} = \vec{0}$$

Figure 4.4: Conservatieve velden

Een vectorveld wordt conservatief genoemd wanneer deze kan herschreven worden als een gradient van een scalair veld ϕ

$$F = \nabla \phi$$

voorbeeld) $\vec{F} = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, -\frac{\alpha z}{z^2} \right)$

$$\vec{\nabla} \alpha F = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{z^2} & \frac{y}{z^2} & -\frac{\alpha z}{z^3} \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ -\frac{\alpha}{z^2}, \frac{\alpha}{z^2}, -\frac{y}{z^2} + \frac{y}{z^2}, \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \right\} = \vec{0}, \text{ conservatief}$$

$$\vec{F} = \nabla \varphi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\alpha y}{2}, \quad \varphi = \frac{\alpha y}{2}, \quad \varphi = \frac{\alpha y}{2}$$

Figure 4.5: Conservatief voorbeeld

```

> with(VectorCalculus):
> f := VectorField([y/z, x/z, -x*y/z^2], 'cartesian')[x, y, z]
      f := (y/z)âx + (x/z)ây + (-x*y/z^2)âz (1)
> ScalarPotential(f)
      yx
      z (2)

```

Figure 4.6: Conservatief voorbeeld maple

Samengevat: voor een ESG (enkelvoudig samenhangend gebied) is een vectorveld conservatief als de rotor = 0, $\nabla \times F = 0$. Hierbij hebben we dan ook het feit dat het vectorveld conservatief is: $F = \nabla\phi$

ESG btw is een gebied die we kunnen herleiden tot een punt. Dus stel er is een paal midden in het gebied, is dit geen ESG want we de paal staat in de weg!

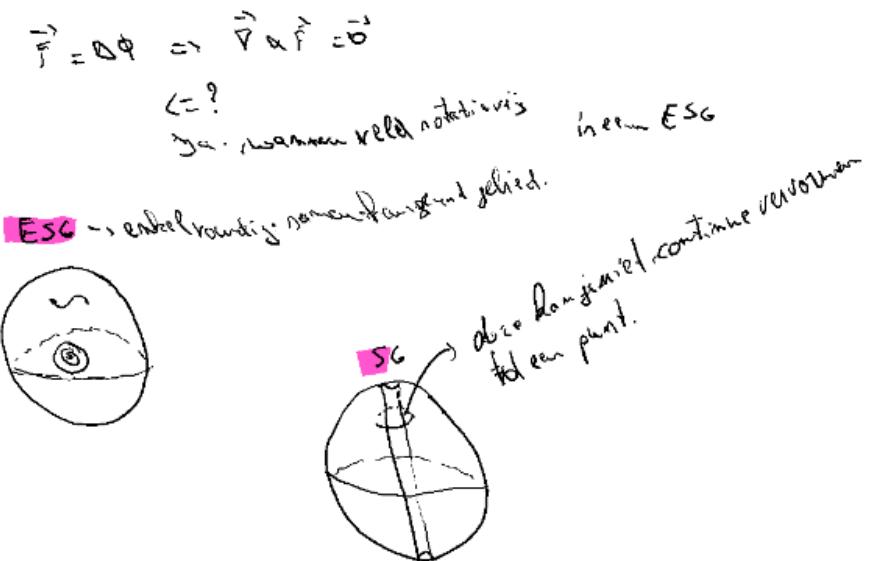


Figure 4.7: ESG

Voorbeeld

$$\begin{aligned}
 \text{Voorbeeld: } \vec{F} &= \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \dots, -\frac{xy}{z^2} \right) \quad \left. \begin{array}{l} r_+ (z > 0) \\ r_- (z < 0) \\ r=0 \rightarrow \text{singulairit.} \end{array} \right. \\
 \nabla \times \vec{F} &= \vec{0}, \quad F_x = \partial_y \phi = \frac{y}{z} \Rightarrow \phi = \frac{xy}{z} + f(y, z) \\
 F_y &= \partial_z \phi = \frac{x}{z} \Rightarrow \frac{xy}{z} + f(z) \\
 F_z &= \partial_x \phi = -\frac{y}{z^2} \Rightarrow \frac{xy}{z^2} + cte
 \end{aligned}$$

Als F twee keer afleidbaar is, dan is het rotatievrij, als de veld ESG is, dan is het vectorveld conservatief

Figure 4.8: Voorbeeld rotor conservatief

The Fab Four: gradient, divergentie, laplacian, rotor

1. Gradient: $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$
 2. Divergentie: Als we de gradient combineren met een vector veld, krijgen we de divergentie. Dit is een scalaire waarde. $\nabla \cdot E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$
 3. Laplacian: Is letterlijk gewoon gradient maar twee keer partieel afleiden per component... $\nabla \cdot \nabla = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
- // Note: De toepassing in de cursus wordt nooit op die manier gegeven... Skip

Nog iets heel belangrijk: **Rotor**: $\nabla \times E = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{bmatrix}$

Als rotor = 0, dan is het veld conservatief.

4.0.3 Nabla calculus

Dit zijn basically a bunch of formulas die je moet kunnen bewijzen:

allgemein beweisen

)

(4.2.)

$\vec{\nabla}(\phi + \chi) = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\chi$
$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
$\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{F}) = (\vec{\nabla}\phi) \cdot \vec{F} + \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$
$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{F}) = (\vec{\nabla}\phi) \times \vec{F} + \phi \vec{\nabla} \times \vec{F}$
$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$
$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = \vec{0}$
$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$
$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F}$

Figure 4.9: Bewijzen nabla calculus

)

Alle bewijzen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(\varphi + \psi) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} (\varphi + \psi) + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi + \psi) + \frac{\partial}{\partial z} (\varphi + \psi) \right) \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \\ &= \vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla} \psi \quad \otimes\end{aligned}$$

Sommprincipe:

$$\begin{aligned}\sim \vec{\nabla}(\vec{F} + \vec{G}) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x + G_x & F_y + G_y & F_z + G_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} \\ &= \vec{\nabla} \vec{F} + \vec{\nabla} \vec{G} \quad \otimes\end{aligned}$$

- $\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{F})$

$$\begin{aligned}&= \frac{\partial \varphi}{\partial x} F_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} F_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} F_z \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} F_x + \varphi \cdot \frac{\partial F_x}{\partial x} \right) + \dots \\ &= \vec{\nabla}(\varphi) \cdot \vec{F} + \varphi \cdot \vec{\nabla} \vec{F} \quad \otimes\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}- \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) &= \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{matrix} \cancel{\frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}} \\ \cancel{\left(\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)} \\ \cancel{\left(\frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)} = 0 \end{matrix} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Figure 4.10: Sommige bewijzen nabla calculus

Solenoidale vector velden

solenoidal is wanneer we het volgende hebben: $F = \vec{\nabla} \times A$ (Hierbij is F dus solenoidal)

Met A het **Vector potentiaal**.

Wanneer we $\vec{\nabla} \cdot F = 0$ dan is onze solenoidal vectorveld ook **divergentie vrij**.

Belangrijk volgende relatie: $F = \vec{\nabla} \times A$ (solenoidal) $\equiv \vec{\nabla} \cdot F = 0$ (divergentie vrij)

Zoals bij de Conservatieve velden, wanneer het veld niet ESG is, kunnen we niet convergeren naar 1 punt en dus $F \neq \vec{\nabla} \times A$

Voorbeeld

Voorbeeld. Beschouw het vectorveld $\vec{F} = (z, x, y)$. Is dit vectorveld solenoïdaal? Zoja, bepaal een vectorpotentiaal \vec{A} .

Figure 4.11: Sinusoidal example

It's very easy to see that the field is solenoidal, just take gradient and boem = (0, 0, 0)

Then we find A :

Oplossing: We zien onmiddellijk dat $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, het vectorveld is dus inderdaad solenoïdaal. \vec{A} moet dan voldoen aan:

$$\partial_y A_z - \partial_z A_y = z \quad \partial_z A_x - \partial_x A_z = x \quad \partial_x A_y - \partial_y A_x = y \quad (4.2.50)$$

We gebruiken nu de vrijheid (4.2.49) om A_z gelijk aan nul te stellen. Dit kan inderdaad altijd: voor een gegeven (A_x, A_y, A_z) vinden we met $\chi(x, y, z) = - \int_{z_0}^z dz' A_z(x, y, z')$ een nieuwe vectorpotentiaal $\vec{A}' = (A'_x, A'_y, 0)$.

$$\begin{aligned} A_z &\rightarrow A_z + \int d\chi = 0 & F_R &\approx z \approx -\partial_z A_y \Rightarrow A_y = -\frac{z^2}{2} + f(x, y) \\ \Leftrightarrow A_z &\approx -\partial_z \chi & F_S &\approx x + \partial_x A_z \approx A_z = z \approx f(x, z) \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} &\Rightarrow A_z = \int_{z_0}^z dz' A_z(x, y, z') & F_T &\approx y = \partial_y A_z - \partial_z A_y = \partial_y f - \partial_z f \\ &\quad z_0 & &\quad \int_{z_0}^z dz' \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{A} = \left(z, -\frac{z^2}{2} + f(x, y), 0 \right)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0, \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \phi$$

Figure 4.12: Solenoïde solution

Helmholtz decompositie

In een ESG kunnen we een vectorveld decomponeren in een solenoidal en een conservatief veld.

$F = \nabla \phi + \nabla \times A$ (eerste term is conservatief, tweede term is solenoidal)

Note: Dit is een **poissonvergelijking**

Die je kunt berekenen door het volgende te doen:

$$\pi(x) = - \int \frac{\rho(x')}{||x-x'|| \cdot 4\pi} d^3 x'$$

Voorbeeld

Voorbeeld: Geef een Helmholtzontbinding voor het vectorveld $\vec{F} = (x, z, y)$.

Figure 4.13: Helmholtz example

```

with(VectorCalculus):
SetCoordinates(cartesian[x, y, z]):


# Define the vector field F
F := <Fx(x, y, z), Fy(x, y, z), Fz(x, y, z)>:


# Compute the solenoidal (divergence-free) component using the curl
Solenoidal := Curl(F):


# Compute the irrotational (curl-free) component using the gradient
Potential := int(Fx, x) + int(Fy, y) + int(Fz, z):
Irrotational := Gradient(Potential):


# Display the components
Solenoidal, Irrotational;

```

Figure 4.14: Helmholtz maple

Helmholtz ontbinding

$\vec{F} = (\alpha, z, \omega)$

$\vec{F} = \nabla \phi + \nabla \times A$

A) $\nabla F = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$

en de oplossing is $\phi = \frac{a}{r}$ omdat $(\frac{a}{r}, 0)$

$\nabla \times A = \vec{F} - \nabla \phi = (\alpha, z, \omega) - (\alpha, 0, 0) = (0, z, \omega)$

dus $\nabla \times A = (0, z, \omega)$

$= \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial z}, \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)$

$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 & \text{Annule } \partial \omega = 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial z} = z \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial x} = \omega \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \omega = -\frac{\partial \omega}{\partial z} \\ z = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \rightarrow \omega = \frac{1}{2} z^2 + f(b) \\ b = \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 = A_y \end{cases}$

dan $f(z) = -\frac{1}{2} z^2$

$\Rightarrow \vec{A} = (0, 0, \frac{1}{2} (z^2 - \omega^2))$

Figure 4.15: Helmholtz solution

4.0.4 Integratie

Lijnintegralen

Is een integraal over een kromme C waarbij de lijnintegraal niet afhangt van de zin waarmee de kromme wordt doorlopen.

[A] Booglengte, dichtheid, massamiddelpunt, ...:

Stel we willen een koord lengte definieren, dit kunnen we doen door:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

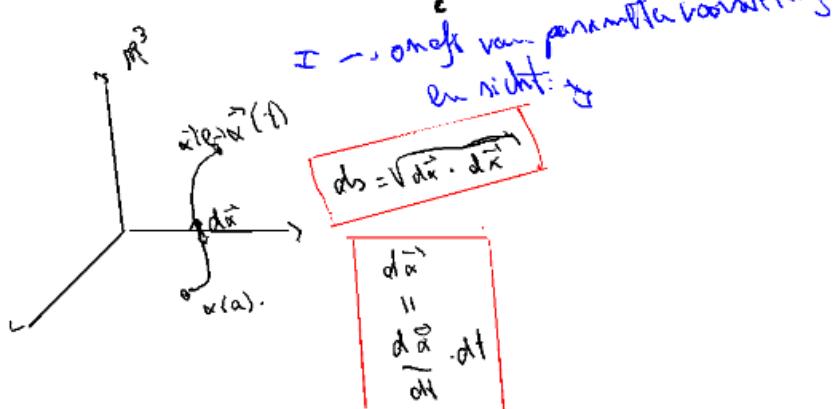
$$\text{met } dx = \frac{dx}{dt} dt$$

waarbij $\frac{dx}{dt}$ de **raakvector** is.

Hierbij mijn notities over het concept:

lijn integraal

$$\int_C ds \dots , \int_C d\vec{x} \cdot \vec{F}, \int_C d\alpha \times \vec{f}$$



$$\text{II} \quad \int_C d\vec{x} \cdot \vec{F} = \int_a^b dt \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{F} = \int_a^b dt \in F_i(\vec{\alpha}(t)) \frac{d\alpha_i(t)}{dt}$$

Figure 4.16: Notities lijn integraal

Voorbeeld

Voorbeeld. Bereken de lengte-integraal (4.3.65) voor het halve cirkelsegment

$$(x, y, z) = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \text{met } \theta \in [0, \pi], \quad (4.3.70)$$

voor 2 parametrisaties. Gebruik voor de eerste parametrisatie $t = \theta$ en voor de tweede parametrisatie $t = y$, de cartesische y -coördinaat.

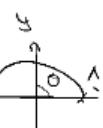


Figure 4.17: Voorbeeld lijn integraal

met $\lambda = 1$

Voorbeeld. Bereken de lengte-integraal (4.3.65) voor het halve cirkelsegment

$$(x, y, z) = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \text{met } \theta \in [0, \pi], \quad (4.3.70)$$

voor 2 parametrisaties. Gebruik voor de eerste parametrisatie $t = \theta$ en voor de tweede parametrisatie $t = y$, de cartesische y -coördinaat.

Oplossing: Voor de eerste parametrisatie vinden we $\frac{d\vec{x}}{d\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ en daaruit:

$$\left(-\sin \theta, \cos \theta \right) \cdot \left(\cos \theta, \sin \theta \right) = \frac{d\vec{x}}{d\theta} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\theta} = 1 \Rightarrow d\theta = \sqrt{\lambda} = 1 \quad (4.3.71)$$

Zodoende wordt de lengte-integraal (4.3.65):

$$\ell = \int_0^\pi d\theta = \pi. \quad (4.3.72)$$

Voor de tweede parametrisatie $t = y$ verdelen we vooreerst de gevraagde totale kromme in twee segmenten C_1 en C_2 links en rechts van de Y -as. We krijgen dan volgende parametrisaties:

$$\begin{aligned} C_1 : \quad (x, y, z) &= (-\sqrt{1-y^2}, y, 0) \quad \text{met } y \in [0, 1] \\ C_2 : \quad (x, y, z) &= (+\sqrt{1-y^2}, y, 0) \quad \text{met } y \in [0, 1] \end{aligned} \quad (4.3.73)$$

Nu hebben we: $\frac{d\vec{x}}{dy} = (\pm \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, 1, 0)$ en zodus:

$$\frac{d\vec{x}}{dy} \cdot \frac{d\vec{x}}{dy} = \frac{y^2}{1-y^2} + 1 = \frac{1}{1-y^2}. \quad (4.3.74)$$

Zo vinden we dan:

$$\ell = \ell_1 + \ell_2 = 2 \times \int_0^1 dy \sqrt{\frac{1}{1-y^2}} = \pi, \quad \text{daarvan beide kanten} \quad (4.3.75)$$

Bemerkt dat het linker-segment C_1 (als functie van $y \in [0, 1]$) hier in tegengestelde richting wordt doorlopen als het segment C_2 en als het door θ geparametriserde volledige segment C . Bemerkt ook dat voor dit voorbeeld $t = \theta$ duidelijk de slimmere keuze is, de y -parametrisatie werd hier genomen om expliciet te illustreren dat de lengte-integraal onafhankelijk is van de zin waarin de kromme wordt doorlopen.

Goed gedaan!

Figure 4.18: Lijnintegraal solution

Voorbeeld. Bereken de massa en het massamiddelpunt van de solenoïdale draad met uniforme dichtheid ρ , gelegen volgens de kromme:

$$(x, y, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z_0 \theta) \quad \text{met} \quad \theta \in [0, \theta_0]. \quad (4.3.76)$$

$$\text{massa} = \int \rho \cdot \text{dl} = \rho \int_{\theta=0}^{\theta_0} R \sqrt{R^2 + z_0^2} d\theta$$

Oplossing: We kiezen $t = \theta$ en hebben dan:

$$\frac{d\vec{x}}{d\theta} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\theta} = R^2 (\underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_{1}) + z_0^2 = R^2 + z_0^2. \quad (4.3.77)$$

Voor de massa vinden we dan:

$$M = \rho \int_0^{\theta_0} d\theta \sqrt{R^2 + z_0^2} = \rho \theta_0 \sqrt{R^2 + z_0^2}. \quad (4.3.78)$$

Verder vinden we dan voor het **massamiddelpunt**:

$$\begin{aligned} M(x_{m.m.}, y_{m.m.}, z_{m.m.}) &= \rho \int_0^{\theta_0} d\theta \sqrt{R^2 + z_0^2} (R \cos \theta, R \sin \theta, z_0 \theta) \\ &= \rho \sqrt{R^2 + z_0^2} (R \sin \theta_0, R(1 - \cos \theta_0), z_0 \frac{\theta_0^2}{2}), \end{aligned} \quad (4.3.79)$$

en daaruit tot slot:

$$\vec{x}_{m.m.} = \underbrace{(R \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}, R \frac{1 - \cos \theta_0}{\theta_0}, z_0 \frac{\theta_0^2}{2})}_{\text{as-100-punt}}. \quad (4.3.80)$$

Figure 4.19: Example lijnintegraal massa middelpunt

[B] Vectorvelden: $\int F \cdot dx$, $\int F \times dx$:

Hier hetzelfde als bij punt [A], maar nu definieren we de volgende integraal:

$$\int_b^a dt \sum_i F_i(x_1, x_2, x_3) \frac{dx_i}{dt},$$

Figure 4.20:

nog een ander type integraal is de volgende:

$$\int_b^a dt (F_y \dot{z} - F_z \dot{y}, F_z \dot{x} - F_x \dot{z}, F_x \dot{y} - F_y \dot{x}),$$

Figure 4.21: Ingtegraal vector velden type 2

Voorbeeld

Voorbeeld. Bereken de lijnintegraal (4.3.81) voor het vectorveld $\vec{F} = (z, x, y)$ langs de solenoïdale kromme van het vorige voorbeeld (4.3.76) voor het eindpunt $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$.

Oplossing: Gebruiken we opnieuw de parametrisatie volgens θ dan vinden we:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} d\theta (z_0\theta, R\cos\theta, R\sin\theta) \cdot (-R\sin\theta, R\cos\theta, z_0) \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} d\theta R^2 \cos^2\theta + Rz_0 \sin\theta(1-\theta) \\ &= \frac{3}{4}\pi R^2 + 2z_0 R.\end{aligned}\quad (4.3.84)$$

Figure 4.22: Voorbeeld lijn integraal vectorveld

Voorbeeld

Tornado voorbeeld

$$\begin{aligned}&\text{Handtekening: } \vec{v} \times \vec{v} \neq \vec{0} \quad \vec{v} = \vec{\nabla} \phi \\&\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0} \\&\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{x} \\&\text{met } \vec{v} = \vec{\nabla} \phi \text{ zelfs niet!} \\&\phi(x(a)) - \phi(x(b)) = 0, \text{ dus kan niet!} \\&\boxed{\Sigma \cdot n \cdot F = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{x}}\end{aligned}$$

$$\text{III. } \int_C d\vec{x} \times \vec{F} = \int_a^b dt \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{F} \right)$$

Figure 4.23: Voorbeeld tornado

Voorbeeld

Bij oost Sarant.

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int \frac{d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3}$$

$$\vec{x}' = (0, 0, z') \quad d\vec{x}' = dz' (0, 0, 1)$$

$$d\vec{x} \cdot \times (\vec{x} - \vec{x}') = dz \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z - z' \end{vmatrix}$$

$$= dz (-y, +x, 0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{(-y, x, 0)}{\left((x^2 + y^2 + (z-z')^2)^{1/2} \right)^3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z-z')^2)^{1/2}} dz = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

Figure 4.24:

4.0.5 Oppervlakteintegralen

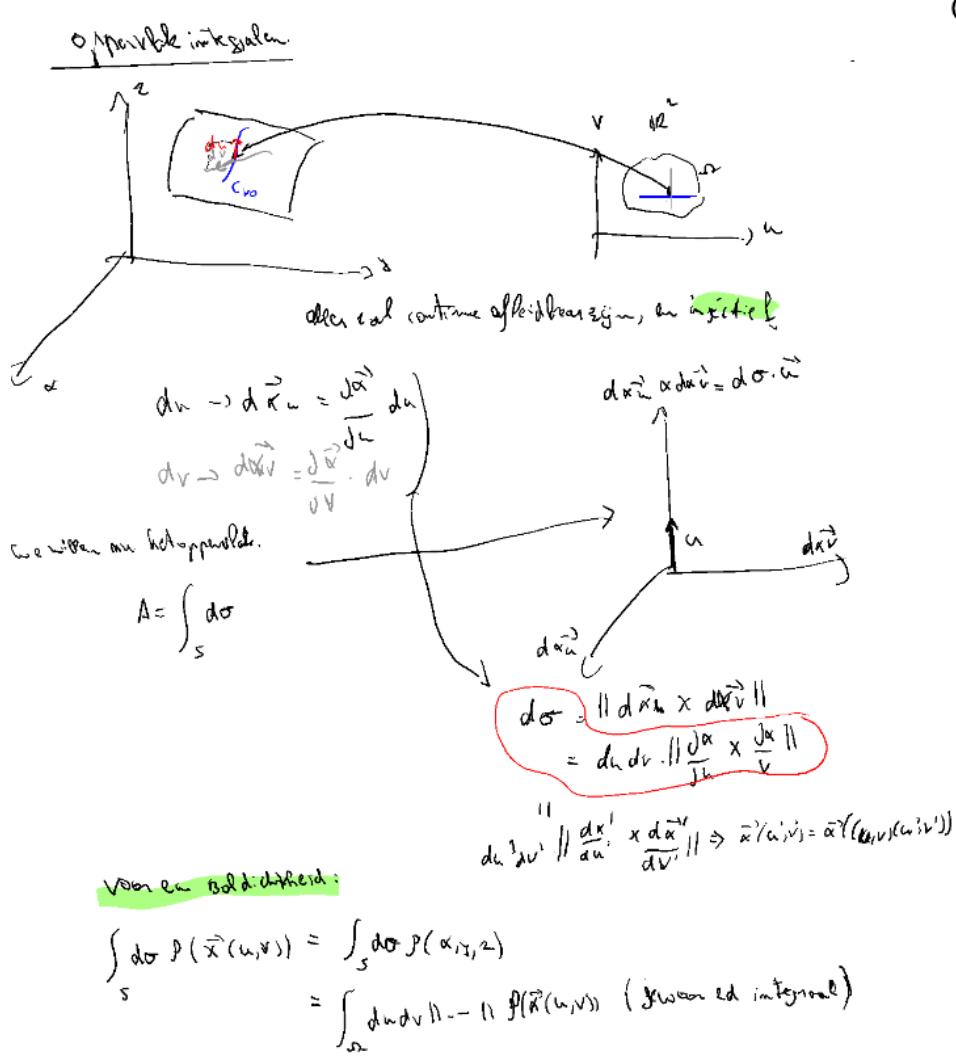


Figure 4.25: Oppervlakte integralen: maw, we gaan de oppervlakte in 3D berekenen door $\int \int dudv \text{norm}(du \times dv)$

Voorbeeld

Voorbeeld. Bereken de oppervlakte voor het randoppervlak van een bol met straal R .

Figure 4.26: Voorbeeld boloppervlak

defining boloppervlak \rightarrow bolcoördinaten

$$\vec{r} = (R \cos\theta \cos\phi, R \cos\theta \sin\phi, R \sin\theta)$$

$$\Theta = [0, \pi], \phi : [0, 2\pi]$$

$$d\vec{r} ? \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (R \cos\theta \cos\phi, R \cos\theta \sin\phi, -R \sin\theta)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-R \sin\theta \cos\phi, R \sin\theta \sin\phi, 0)$$

$\downarrow \phi$ \rightarrow Jacobidam.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \overbrace{R^2 \sin\theta}^{\text{eenheidsvector } \vec{n}} (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$$

eenheidsvector \vec{n}

$$\int_S d\sigma = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi R^2 \sin\theta$$

$$d\vec{\sigma} = d\vec{\Omega} \vec{n} = d\omega d\psi \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)$$

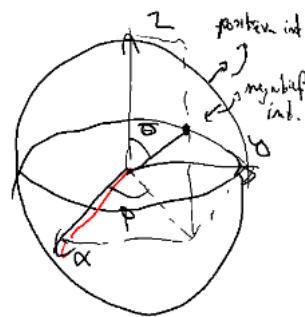
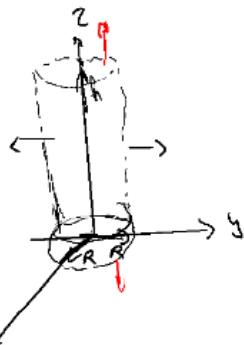


Figure 4.27: Voorbeeld boloppervlak oplossing

$$\int_S d\vec{\alpha} \cdot \vec{F}$$

$$\vec{r} = (x, y, 0)$$



$\vec{\alpha} = (R_{\cos\theta}, R_{\sin\theta}, z)$
 $\theta \in [0, 2\pi]$

$$z = \sum_0 k_i$$

$$\vec{j_\alpha} = (-R_{\sin\theta}, R_{\cos\theta}, 0)$$

$$d\alpha$$

$$\vec{j_\alpha} = (0, 0, 1)$$

$$\frac{d\vec{\alpha}}{d\theta} = \frac{d\vec{\alpha}}{dz} = (R_{\cos\theta}, R_{\sin\theta}, 0)$$

$\int_0^R \int_0^{2\pi} R (\cos\theta, \sin\theta, 0) (R_{\cos\theta}, R_{\sin\theta}, 0) dz d\theta$

$\underbrace{\int_0^R \int_0^{2\pi} R^2 R^2 dz d\theta}_{= R^2 R^2 \cdot 2\pi} = R^2 (0, 0, 1)$

stelt orthogonaal op het oppervlak (mantelp)

Figure 4.28: Cilinder oppervlak oplossing

Dan is er ook een toepassing van flux doorheen een oppervlak die kan uitgelegd worden met de volgende afbeelding:

Lading: \vec{J} : $\frac{\text{Lading}}{\text{m}^2 \cdot \text{n}}$

$$\text{Flux} = \frac{\text{Lading}}{\text{A}}$$

$$= \int_S d\vec{\sigma} \cdot \vec{J}$$

Voorbeeld:

$$\vec{J} = \left(0, 0, J_0 t - \frac{p^z}{m_e c} \right)$$

\rightarrow oppervlakstelement
uit (met gesloten randen maken)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow \text{divergentie-loos}$$

$$n = p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Figure 4.29: Flux voorbeeld

4.0.6 Integratiestellingen

4.4 Integratiestellingen

$\int_a^b d\vec{x} \frac{df}{dx} = f(b) - f(a)$	$\int_C d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} f = f(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_1)$
---	--

$\xrightarrow{\text{Int. over } 2D \rightarrow 1D}$

$$\int_S d\vec{\sigma} (\vec{V} \times \vec{F}) = \int_C d\vec{\alpha} \cdot \vec{F}$$

Stofbus

Figure 4.30: Integratie stellingen

Hier zien we **Stokes**, **divergentiestelling van Gauss**, en **Stelling van Green**. **Stokes** is een generalisatie van **Green**. Het idee van stokes is dat we een 2D integraal die de oppervlakte integraal is van een rotor **herleidt** tot een lijnintegraal over de rand.

$$\boxed{\int_S d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \oint_{C+} \vec{F} \cdot d\vec{x}},$$

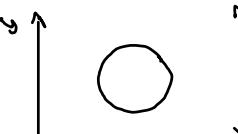
Figure 4.31: Stelling van Stokes

Nu we weten wat Stokes eigenlijk is, laten we een voorbeeld bezichtigen:

Voorbeeld oplossen

$$\text{Cijl: } \vec{\nabla} \times \vec{A} = 3(y^2, z^2, x^2)$$

Surface integratie over S_1



$$\vec{n} = (0, 0, 1)$$

$$dS = \vec{n} \cdot n \cdot dn \cdot d\theta$$

$$= (0, 0, n) \cdot n \cdot dn \cdot d\theta$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} 3n^2 \cos^2 \theta \cdot n \cdot dn \cdot d\theta$$

Surface integratie over S_2

in de bolcoördinaten:

$$\vec{n} = \frac{(R \sin \vartheta \cos \varphi, R \sin \vartheta \sin \varphi, R \cos \vartheta)}{n}$$

$$dS = \vec{n} \cdot R^2 \sin \vartheta$$

$$\cdot d\varphi d\theta$$

$$= (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot dS$$

Line integral:

$$\oint_C A \cdot (d\vec{r}) = \int_0^{2\pi} (0, R^3 \cos^3 \theta, R^3 \sin^3 \theta) \cdot (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0) \cdot d\theta$$

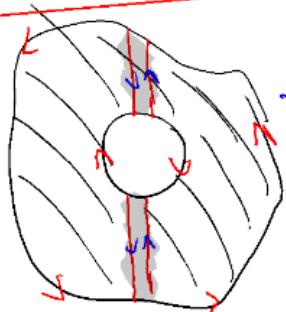
Figure 4.32: Stokes voorbeeld opgelost

Stelling van Green:

$$\vec{F} = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

$$\int_S d\vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \int_R dxdy (\partial_x f_2 - \partial_y f_1)$$

$$\int_C^+ d\vec{\alpha} \cdot \vec{F} = \oint_C^+ (d\alpha f_1 + d\beta f_2)$$



→ we kunnen ook
totale integraal = sommen in tygaal

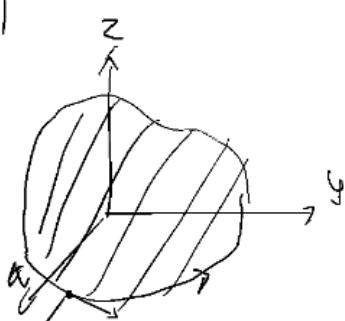


Figure 4.33: Uitleg Green

Aan de andere kant heb je de divergentiestelling, waarbij we een 3D volume integraal van de divergentie tot een oppervlak integraal over de randoppervlak kunnen herleiden.

Hoe gaan Divergentiestelling

30 -> 20

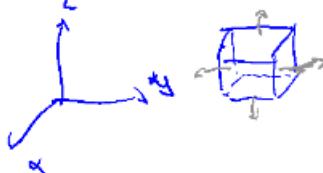
$$\begin{aligned}
 \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \int_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot \vec{F} \\
 \downarrow & \\
 I &= \int_V d\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot \vec{F} && \text{Bewijz (NK)} \\
 &= dx dy dz (dxF_x + dyF_y + dzF_z) \\
 &= dx dy dz \left(\frac{F_x(x+\Delta x, y, z) - F_x(x, y, z)}{\Delta x} \right) \\
 &\quad + dy dz (F_x(x+\Delta x, y, z) - F_x(x, y, z)) \\
 &= \int_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot \vec{F} \\
 d\vec{\sigma} &= dx dy dz
 \end{aligned}$$


Figure 4.34: Divergentie stelling

Of gewoon in formule:

$$\boxed{\int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \int_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot \vec{F} = \int_{\partial V} d\sigma \vec{n}^u \cdot \vec{F}},$$

Figure 4.35: Formule Divergentiestelling

Als je dan de stelling van Gauss wilt bekijken wordt het als volgt gedaan:

voorbeeld

Bol

$$\alpha^2 + y^2 + z^2 < R^2, \vec{F} = (\alpha, y, z)$$

$$\oint_{\partial V} \sigma F = R^2$$

$$\nabla \vec{F} = 3$$

$$d\vec{\sigma} = R^2 d\theta d\phi \sin\theta \vec{\omega}$$

$$\vec{F} = \vec{\omega} R$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi R^3 \sin\theta = 4\pi R^3$$

↓

Hier zit de Jacobian erin.

Figure 4.36: Voorbeeld Gauss toepassing

Zoals de prof het zei: "Ik ben trots op deze figuur". Hier gaan we zien dat de 2 infinitesimale oppervlaktes een shared boundary hebben, deze worden te niet gezien, waardoor je uiteindelijk 1 lijn integraal krijgt over die twee vlakjes, extrapolere nu naar de rest en zo bewijs je dus dat **Stokes** een Top G is. Btw, de rechterhand regel leert ons dan welke teken de lijnintegraal nodig heeft.

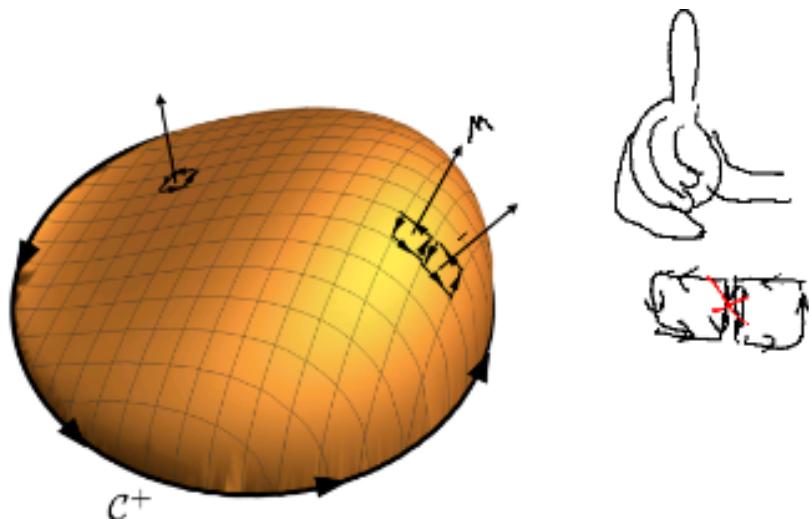


Figure 4.37: Inzicht integratie stellingen

4.0.7 Toepassing: Continuiteitsvergelijking

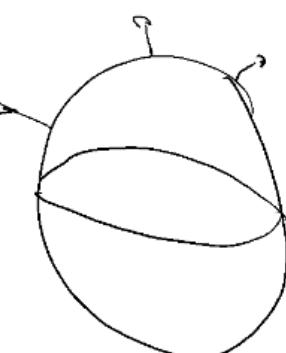
Het komt erop neer dat dit fysische toepassingen zijn waarbij we de wet van behoud van massa toepassen. Dit is een toepassing van de divergentiestelling. (een voorbeeld)

Het ander voorbeeld is behoud van lading:

4.4.3 Continuiteitsvergelijking



$$\text{Flux} = \frac{dQ}{dt} = \int_S d\sigma \cdot \vec{J}$$



$$\frac{d\sigma v}{dt} = - \int_S d\sigma \cdot \vec{J}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int_V dv \vec{J}_t \cdot \vec{v} = - \int_V dv \vec{J} \cdot \vec{v}$$

$$\int_V dv (\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}) = 0$$

$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

↓
toont aandat als lading veranderd
dat er lading weggaat of komt.

Figure 4.38: Lading

Chapter 5

Gewone Lineaire Differentiaalvergelijkingen

Note: Dit is meer een oefening gerichte hoofdstuk.

Eerst definieren we een paar termen:

$y'(x) + y^3(x) \Rightarrow$ homogene DV van de eerste orde.

Lineaire DV: $\underbrace{y''(x)}_{\text{lineaire DV van 2de orde.}} + \underbrace{y'(x)}_{=f(x)}$

Allgemeine Vorm: $y^n + p_0(x)y^{n-1} + \dots + p_{m-1}(x)y' + p_m(x)y = g(x)$
 Implizite Vorm: $L(D)y = g(x)$
 $L(D) = p_0 + p_1x + \dots + p_m x^m$ $x \in \mathbb{R}$

Homogen problem: $L(D)y = 0$

$$L(D) = (\alpha f + \beta g) = \alpha L(D)f + \beta L(D)g$$

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

is eindeindige Menge.

$$L(D)y = 0 \Leftrightarrow y \in V_L \Leftrightarrow V_L = \{p(x)\} \quad y_1, \dots, y_n\}$$

$$\dim V_L = m \quad \text{mit } y(x) = \sum_{i=1}^m c_i y_i(x)$$

Figure 5.1: Termen

In woorden: Homogeen heeft geen source, linear wel, orde wordt bepaald door de hoogste afgeleide, en differentiaalvergelijkingen zijn gewoon vergelijkingen met afgeleiden.

5.0.1 Voorbeelden

Voorbeeld 1:

$$y'(x) = \lambda y(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \lambda \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \lambda dx \Rightarrow \ln|y| = \lambda x + C_1 \Rightarrow y = C_2 \cdot e^{\lambda x}$$

Voorbeeld 2:

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0 \Rightarrow y(x) = C_1 \underbrace{\cos \omega x}_{y_1} + C_2 \underbrace{\sin \omega x}_{y_2}$$

Figure 5.2: Some DV examples

Wronkiaan: Dit is een determinant van de matrix van de afgeleiden van de functies. Als deze determinant = 0, dan zijn de functies lineair afhankelijk. We willen meestal checken of een matrix lineair onafhankelijk is, dit doen we door de determinant te berekenen en zien of het $\neq 0$.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix}$$

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\omega \sin \omega x & \omega \cos \omega x \end{vmatrix} = \omega(\omega)$$

Figure 5.3: Wronskiaan voorbeeld

Hoe bepalen we de verschillende oplossingen van een differentiaalvergelijking?

Hoe bepalen we $y_i(\alpha)$

- droge „operende functies“, pen en papier.

$$\text{1. } y'(x) + p(x) y(x) = 0$$

$$y(x) = \underbrace{y(x_0)}_{C_1} \cdot \exp \underbrace{- \int_{x_0}^x p(x') dx'}_{J_1}$$

$$\text{2. } y''(x) + a_1 y^{n-1}(x) + \dots + a_{m-1} y'(x) + a_m y(x) = 0$$

$$\text{in de vorm } L(\beta) = 0^n + a_1 0^{n-1} + \dots + a_{m-1} 0 + a_m$$

$$L(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m$$

$$= (z - \alpha_1)^{m_1} (z - \alpha_2)^{m_2} \cdots (z - \alpha_p)^{m_p}$$

$$M = \sum_{i=1}^p m_i$$

$$(\alpha_j, m_j) \rightarrow y_i(\alpha) = \alpha^{\alpha_j} e^{i\pi \alpha_j}$$

$$\vec{y}(\alpha) = \vec{y}_0(\alpha)$$

$$\vec{y}(\alpha) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

veroorzaakt door tweede orde voorwaarden als 1ste orde.

Figure 5.4: Bepalen y_i

voorbereidt

$$\frac{y'' + y' + 3 = 0}{}$$

$$z^2 + z + 1 = 0$$

$$z \pm \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \left(-\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right) \text{ en } \left(-\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right)$$

wortels

$$y_1(x) = \exp^{-\frac{(1+i\sqrt{3})x}{2}} \quad \text{en} \quad \exp^{-\frac{(1-i\sqrt{3})x}{2}}$$

speciale oplossingen:

$$y_1 = \exp^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$y_2 = \exp^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Figure 5.5: Voorbeeld DV calc

Dan heb je ook het concept van particuliere oplossingen, dit zijn oplossingen die je zelf moet vinden. Dit kan je doen door de methode van de variatie van de constanten toe te passen. Aka, je neemt de algemene oplossing en je gaat de constanten veranderen naar functies.

$L(D)y = g$

"particuliere oplossing" $y_p(x)$ ($\tilde{y}(x)$)

$$L(D)y_p = g, \quad L(D)\tilde{y} = g$$

$$L(D)(y - y_p) = 0 \Rightarrow y(x) = y_p(x) + \sum_{i=1}^n c_i y_i(x)$$

Figure 5.6: Particuliere oplossingen

5.0.2 Beginvoorwaarden calculeren

Essentially, we gaan de beginvoorwaarden gebruiken om de constanten te berekenen. Dit doen we door de functie in te vullen in de differentiaalvergelijking en dan de constanten te berekenen.

$$L(D)y = g$$

$$\text{Bv. } \left\{ \begin{array}{l} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_p(t_0) + c_1 y_1(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) = y_0 \\ y'_p(t_0) + c_1 y_2(t_0) + \dots + c_n y^{(n-1)}(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y_p^{(n-1)} + c_1 y_n(t_0) + \dots + c_n y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{calculatie} \\ \text{beginvoorwaarden} \end{array}$$

$$\Rightarrow A c = \vec{y}$$

Figure 5.7: Beginvoorwaarden calculatie

5.0.3 Rand versus beginvoorwaarden probleem

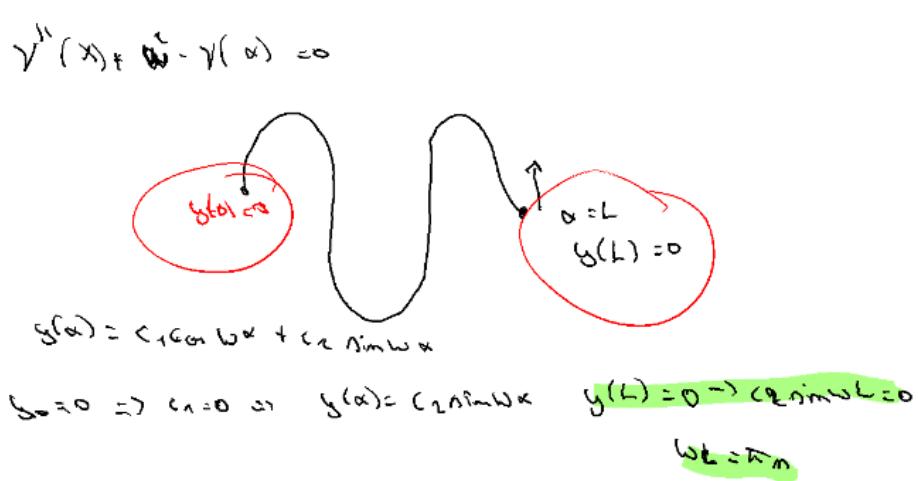


Figure 5.8: Rand vs beginvoorwaarden

De professor vond het ook leuk om een beetje fysica toe te voegen:

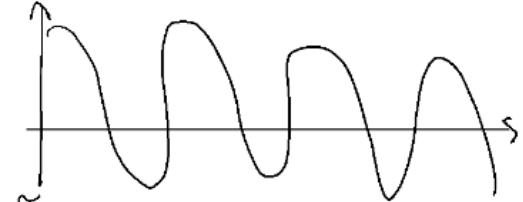
$$m \cdot u'' + \tilde{D} u' + \tilde{\omega} \cdot u = f(t) \rightarrow \text{Vcl.}$$



\tilde{D} = weerstand

$\tilde{\omega} = m \cdot$

$$\omega^2 + 2\tilde{\rho}\omega + \omega_0^2 m = \tilde{f}(t)$$



$$\omega_0^2 + 2\tilde{\rho}\omega + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha_{\pm} = -\tilde{\rho} \pm \sqrt{\tilde{\rho}^2 - \omega_0^2}$$

(hyp)

kritische waarde $\tilde{\rho} = \omega_0$

(dus $\tilde{\rho} > \omega_0 \rightarrow$ overgedempt)

Allens $\tilde{\rho} < \omega_0 \rightarrow$ ondergedempt.

Figure 5.9: RLC en gedempte trillingen

Chapter 6

Fourier Expansies

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

met $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \cos(nt)$ en $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \sin(nt)$, met $T = \frac{2\pi}{n}$ en $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, waar we weten dat $f(t)$ een periode heeft van 2π . ($f(t+2\pi) = f(t)$)

Algemeen kunnen we a_n (of b_n) berekenen door: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+2\pi} dt f(t) \cos(nt)$

Hieruit kunnen we c_0 en c_n berekenen:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$\text{of } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) e^{-int}$$

Fourierreeks is het transformeren van tijdsdomein naar frequentiedomein.

We zien dus ook dat b_n het complex deel is van de fourier expansie.

Onze a_n en b_n ervaren verschillende scenarios:

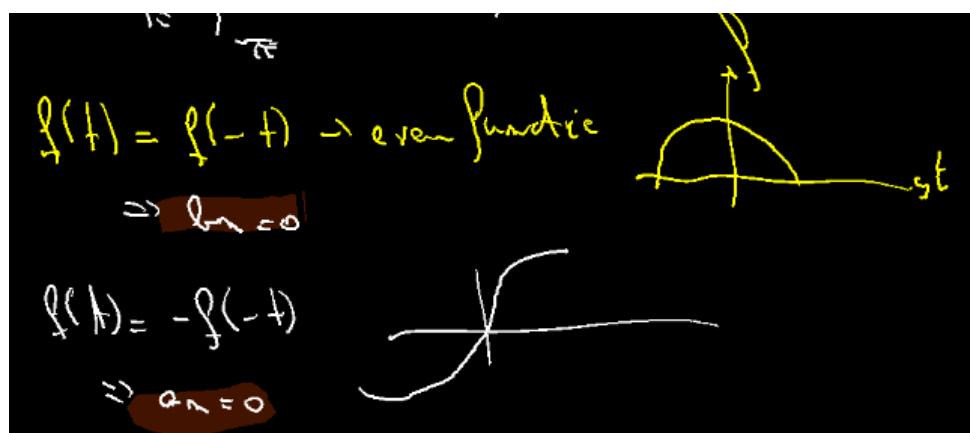


Figure 6.1: Sinus is oneven, cosinus is even

6.0.1 Orthogonale basisfuncties

Orthogonaliteit

$$\langle \cos(nt), \sin(nt) \rangle = \pi \delta_{m,n}$$

$$\langle \cos(nt), \cos(nt) \rangle = \begin{cases} 2\pi \delta_{m,n} & (n=0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

$$\langle \cos(nt), \sin(nt) \rangle = 0$$

$$\langle \sin(nt), f(t) \rangle = b_m \cdot \pi \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dt}_{\pi} \sin(nt) \cdot f(t)$$

Figure 6.2: Orthogonale relaties basis functies

We hebben heel de tijd er van uitgegaan dat we tussen $-\pi$ en π werken, maar dit is niet altijd het geval. We kunnen ook werken tussen 0 en 2π of zelfs 0 en T . (algemeen)

$$f(t+T) = f(t) \quad u = \frac{t}{T} 2\pi, \quad f(u) = f(t+u)$$

$$\rightarrow f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi \cdot m \cdot t}{T}\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi \cdot m \cdot t}{T}\right)$$

$$a_m = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T dt \cos\left(\frac{2\pi \cdot m \cdot t}{T}\right) \cdot f(t)$$

$$b_m = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T dt \sin\left(\frac{2\pi \cdot m \cdot t}{T}\right) \cdot f(t)$$

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{\frac{i 2\pi \cdot m \cdot t}{T}} \quad c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{i 2\pi \cdot m \cdot t}{T}}$$

Figure 6.3: Algemeen periode

6.0.2 Convergentie

We weten wat de fourier expansie is. Als we nu het volgende definieren:

$\sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$, we kijken hoe goed $F_N(t)$ de functie benaderd.

De voorwaarde is dat $A \in C \in B$

A: Convergentie in het gemiddelde

Convergentie kunnen we definieren als:

$$\|f - f_N\|^2 = \langle f - f_N, f - f_N \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dt (f(t) - f_N(t))^2$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\|^2 = 0 \quad \text{frequentie}$$

Figure 6.4: Convergentie fourier

B: f is continu, f' is stuksgewijs continu

B. f is continu, f' is stuksgewijs continu

$$|f_N(t) - f(t)| \leq \frac{c}{N} < \varepsilon \rightarrow N > \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^2$$

$f, f', \dots, f^{(n)}$ continu, f' stuksgewijs continu

$$|f_N(t) - f(t)| \leq \frac{c}{N^{n+1}} \text{ uniform}$$

Figure 6.5: f is continu en f' is stuksgewijs continu

C: f is stuksgewijs glad

C. f stuksgewijs glad : $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(t) = \frac{1}{2} (f(t_-) + f(t_+))$

linker limit rechter limit

merges convergentie

gypos fenomeen, divergentie indicatie punten.

Figure 6.6: f is stuksgewijs glad

6.0.3 Periodieke extensies en de cosinus reeks

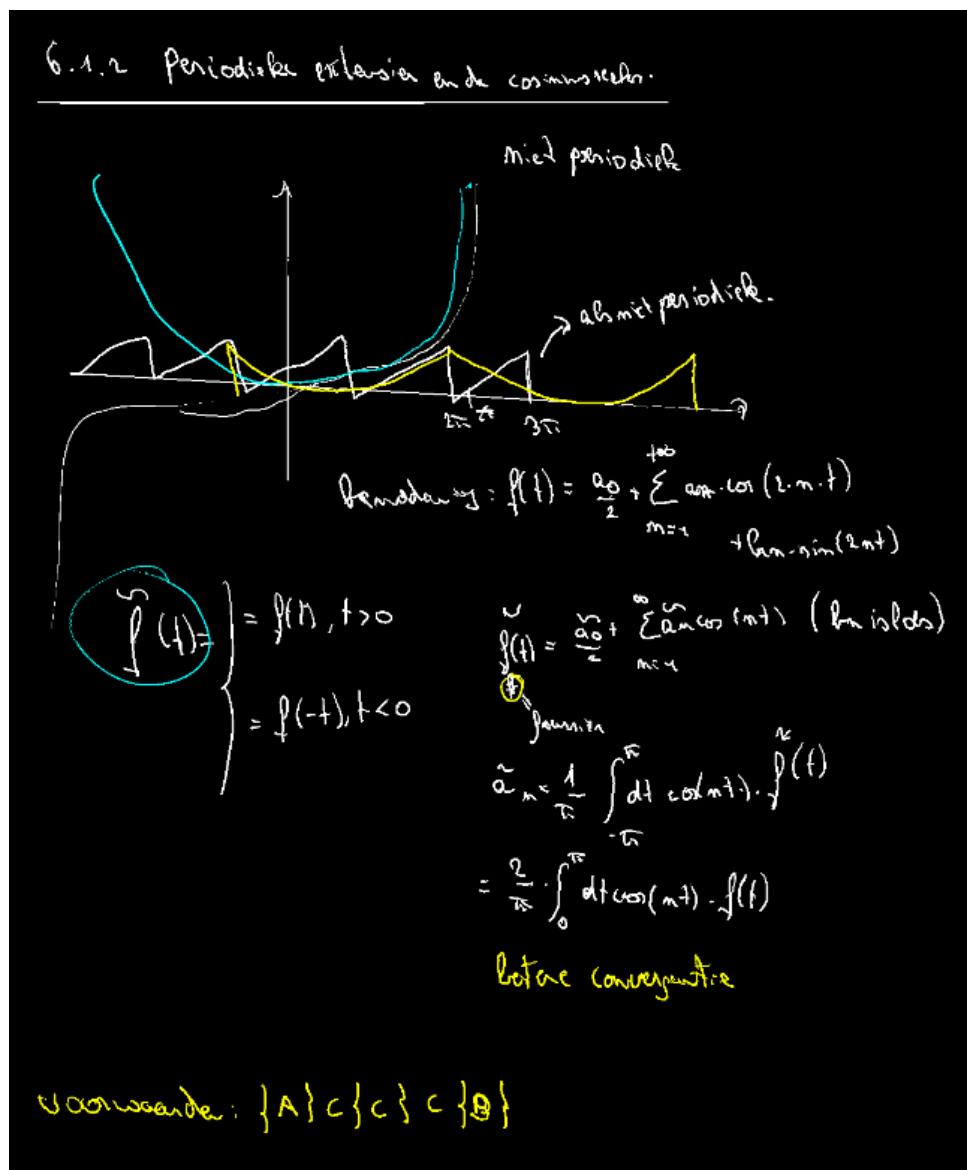


Figure 6.7: Periodieke extensies en de cosinus reeks

Als deze reeks convergeert, dan is dit ook zo voor $f(t + k\pi)$

Net zoals de cosinusreeks hebben we ook de sinusreeks, dit is de situatie waarbij $f = -f(-t)$ (oneven functie)

6.0.4 Discrete Fourier Transformatie

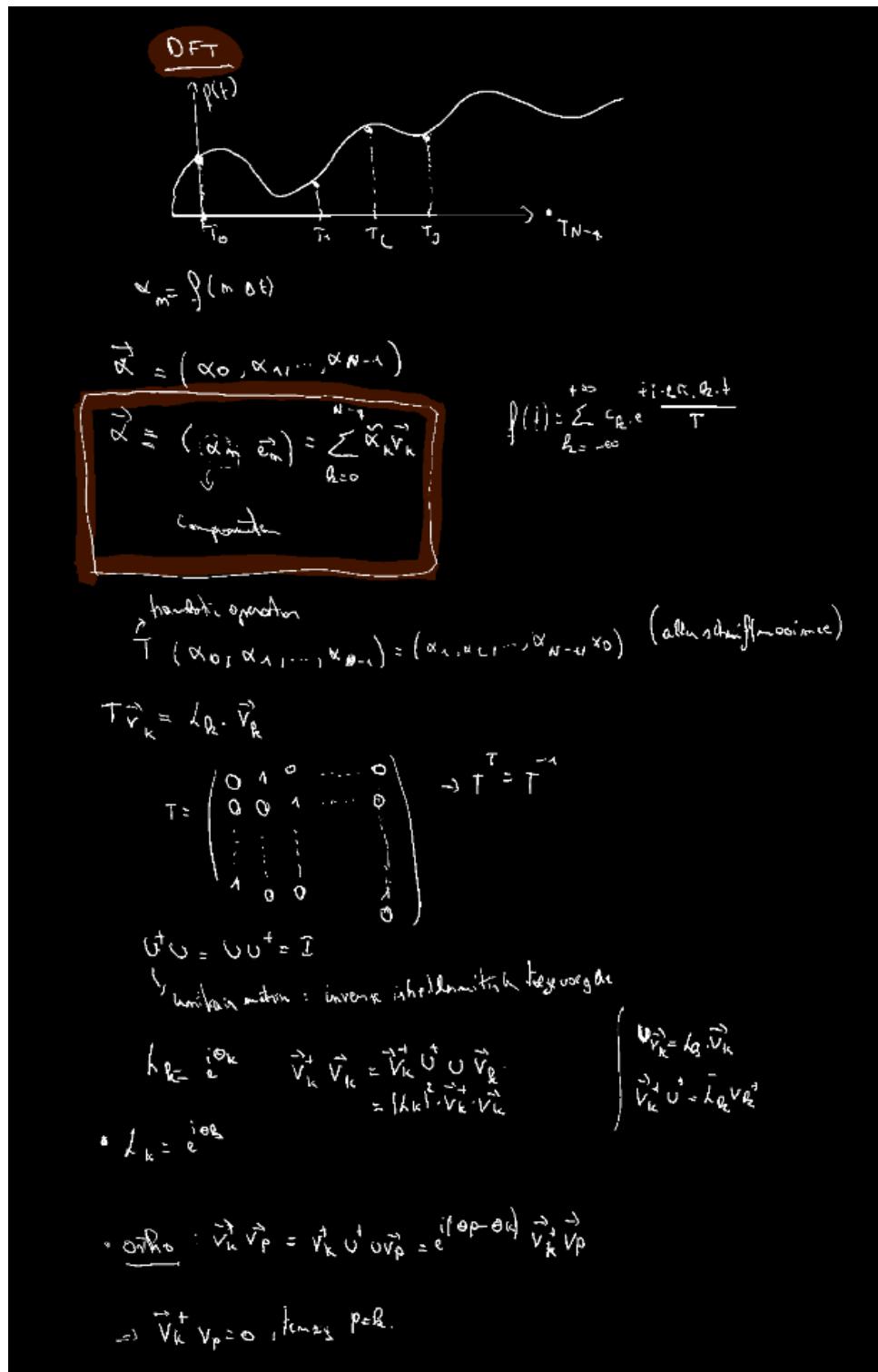


Figure 6.8: Uitleg DFT

De DFT van een sequentie x_n is gegeven door:

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N}$$

DFT explained → Great video.

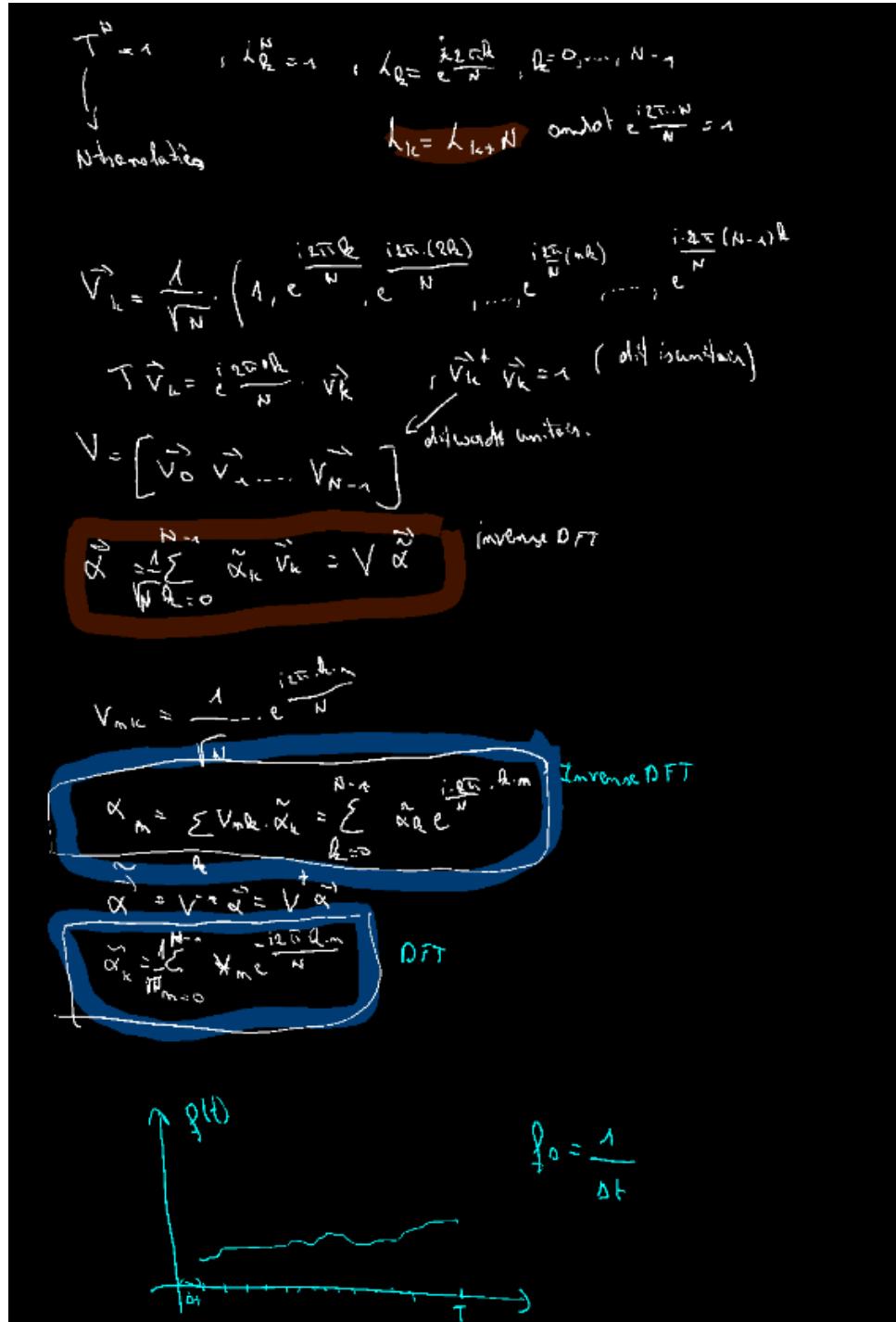


Figure 6.9: Definitie DFT en inverse DFT

Explicit uitgeschreven wordt dit:

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi n k}{N}}$$

Voor de inverse transformatie hebben we dan:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{x}},$$

wat nu expliciet leest:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_k e^{+i \frac{2\pi n k}{N}}.$$

Figure 6.10: DFT en inverse DFT

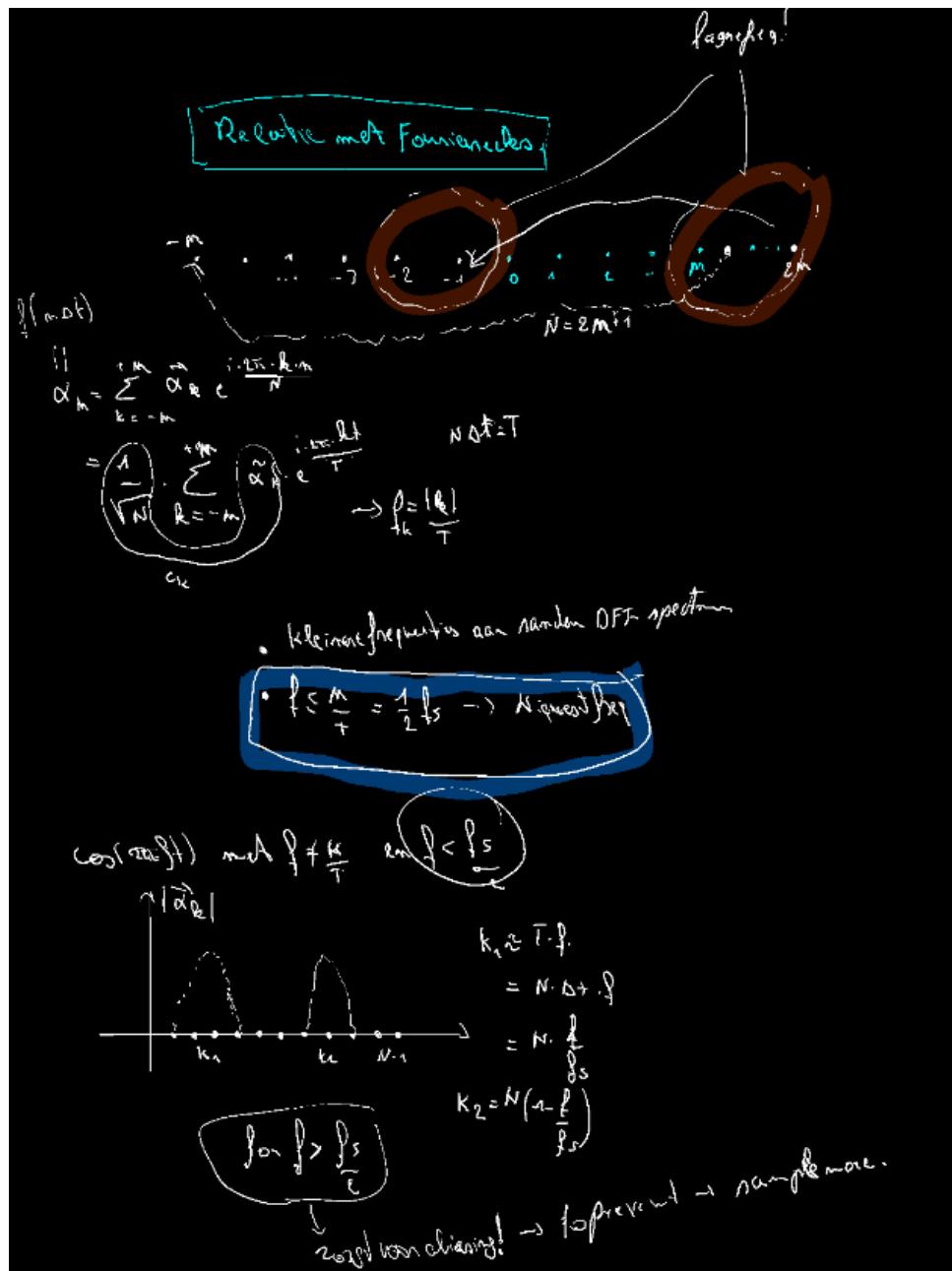


Figure 6.11: Relatie met fourierreeks

Waar het effect van aliasing zich vertoont:

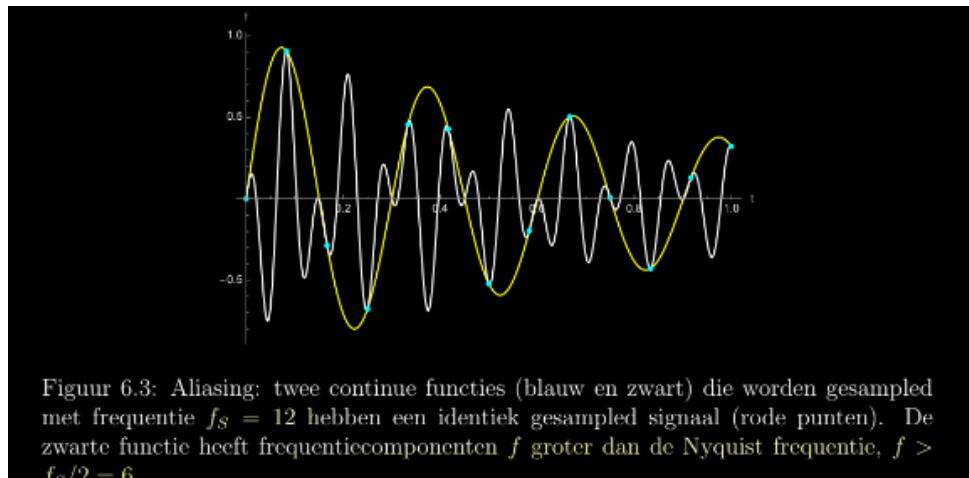


Figure 6.12: Aliasing

6.0.5 Fast Fourier Transform (FFT)

Eerst wat we in de cursus hebben gezien:

$$\mathcal{Z} = \sqrt{N} \rightarrow N \text{ complex vermenigvuldigingen}$$

\hookrightarrow combinatie $N \log N$

$$F_N = \left\{ \begin{matrix} 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)^2} \end{matrix} \right\} \quad \text{met } w = \exp\left(\frac{i 2\pi}{N}\right)$$

Figure 6.13: fast fourier transform

$\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{F}_N$ met:

$$\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)^2} \end{bmatrix}, \quad (6.2.50)$$

waarbij $w = e^{i\frac{2\pi}{N}}$. De crux van het algoritme berust dan op een matrixfactorisatie die de DFT op een N -componentsvector essentieel herleidt tot 2 DFTs op $N/2$ -components vectoren (we beperken hier ons al meteen tot waarden van N die een macht van twee vormen, $N = 2^l$ voor $l \in \mathbb{N}$). Deze beroemde Cooley-Tukey factorisatie leest:

$$\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{D}_{N/2} \\ \mathbf{I}_{N/2} & -\mathbf{D}_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{N/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{N/2} \end{bmatrix} \mathbf{P}_{even/oneven}, \quad (6.2.51)$$

hier is $\mathbf{P}_{even/oneven}$ de permutatiematrix die de even en oneven vectorcomponenten apart sorteert: $\mathbf{P}(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}) = (x_0, x_2, \dots, x_{N-2}, x_1, x_3, \dots, x_{N-1})$. De middelste matrix voert dan apart een DFT uit op de eerste $N/2$ en laatste $N/2$ componenten (de even en oneven componenten van de originele vector). De linkse matrix bestaat uit vier blokken, met in elke blok een $(N/2 \times N/2)$ diagonaalmatrix, met enerzijds de eenheidsmatrix $\mathbf{I}_{N/2} = diag(1, 1, \dots)$ en anderzijds de matrix $\mathbf{D} = diag(1, w, w^2, \dots, w^{(N/2-1)})$. Als concreet voorbeeld, voor $N = 4$ leest deze factorisatie (ga zelf na):

$$\mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.2.52)$$

Laat ons dan al eens het aantal benodigde complexe vermenigvuldigingen tellen voor een DFT transformatie werkende op een bepaalde vector, waarbij we gebruik maken van de factorisatie (6.2.51). Eerst hebben we de even/oneven permutatie van de componenten, deze vergt geen vermenigvuldigingen. De middelste matrixtransformatie, met zijn twee DFT transformaties, telkens op de helft van de componenten, vergt $2 \times (N/2)^2 = N^2/2$ vermenigvuldigingen. De laatste (meest linkse) transformatie vergt tot slot $N/2$ matrixvermenigvuldigingen (vermenigvuldiging van de $N/2$ diagonaalcomponenten van $\mathbf{D}_{N/2}$ met de corresponderende onderste componenten van de vector). Zo krijgen we dus in totaal $N^2/2 + N/2 = N/2(N+1)$ vermenigvuldigingen, wat al een reductie betekent t.o.v. de N^2 vermenigvuldigingen van de oorspronkelijke matrixtransformatie.

Figure 6.14: Cooley Turkey

En nu wat chatty zegt:

Fast Fourier Transform (FFT) Algorithm

The Fast Fourier Transform (FFT) computes the Discrete Fourier Transform (DFT) efficiently by using a divide-and-conquer strategy. The DFT is given by:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Step 1: Divide into Even and Odd Parts

Split the input $x[n]$ into even- and odd-indexed components:

$$x_{\text{even}} = \{x[0], x[2], \dots\}, \quad x_{\text{odd}} = \{x[1], x[3], \dots\}$$

Step 2: Recursive DFTs

Compute the DFTs of the smaller sequences:

$$X_{\text{even}}[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{\text{even}}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N/2} kn}$$

$$X_{\text{odd}}[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{\text{odd}}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N/2} kn}$$

Step 3: Combine Results

Combine the smaller DFTs to form the complete result:

$$X[k] = X_{\text{even}}[k] + W_N^k X_{\text{odd}}[k], \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

$$X[k + N/2] = X_{\text{even}}[k] - W_N^k X_{\text{odd}}[k], \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

where $W_N^k = e^{-j \frac{2\pi}{N} k}$ are the twiddle factors.

FFT Example: $x[n] = [1, 2, 3, 4]$

Given the signal $x[n] = [1, 2, 3, 4]$ and $N = 4$, we compute the FFT step by step.

Step 1: Divide into Even and Odd Parts

$$x_{\text{even}} = [1, 3], \quad x_{\text{odd}} = [2, 4]$$

Step 2: Compute Smaller DFTs

DFT for $x_{\text{even}} = [1, 3]$:

$$\begin{aligned} X_{\text{even}}[0] &= 1 + 3 = 4, & X_{\text{even}}[1] &= 1 - 3 = -2 \\ X_{\text{even}} &= [4, -2] \end{aligned}$$

DFT for $x_{\text{odd}} = [2, 4]$:

$$\begin{aligned} X_{\text{odd}}[0] &= 2 + 4 = 6, & X_{\text{odd}}[1] &= 2 - 4 = -2 \\ X_{\text{odd}} &= [6, -2] \end{aligned}$$

Step 3: Combine Results

For $k = 0$:

$$\begin{aligned} X[0] &= X_{\text{even}}[0] + W_4^0 X_{\text{odd}}[0] = 4 + 6 = 10 \\ X[2] &= X_{\text{even}}[0] - W_4^0 X_{\text{odd}}[0] = 4 - 6 = -2 \end{aligned}$$

For $k = 1$:

$$\begin{aligned} X[1] &= X_{\text{even}}[1] + W_4^1 X_{\text{odd}}[1], & W_4^1 &= e^{-j \frac{\pi}{2}} = -j \\ X[1] &= -2 + (-j)(-2) = -2 + 2j \\ X[3] &= X_{\text{even}}[1] - W_4^1 X_{\text{odd}}[1] \\ X[3] &= -2 - (-j)(-2) = -2 - 2j \end{aligned}$$

Final Result

$$X[k] = [10, -2 + 2j, -2, -2 - 2j]$$

Chapter 7

Partiële Differentiaalvergelijkingen

7.1 Warmte en golfvergelijking

Hier bespreken we $u(x, t)$ ipv $u(x)$.

We hebben twee soorten partiële differentiaalvergelijkingen:

- Warmtevgl: $\partial_t u(x, t) = \alpha^2 \partial_x^2 u(x, t)$
- Golfvgl: $\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t)$

7.1.1 Randvoorwaarden

- Dirichlet: $u(a, t) = u_a$
- Neumann: $\partial_x u(x, t)|_{x=a} = J_a$

Wanneer u_a of J_a gelijk is aan 0, spreken we van een homogene randvoorwaarde. Als niet 0, dan is dit inhomogene randvoorwaarde.

Beginvoorwaarden

Voor de warmtevgl: $u(x, 0) = f(x)$

Voor de golfvgl:

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ \partial_t u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

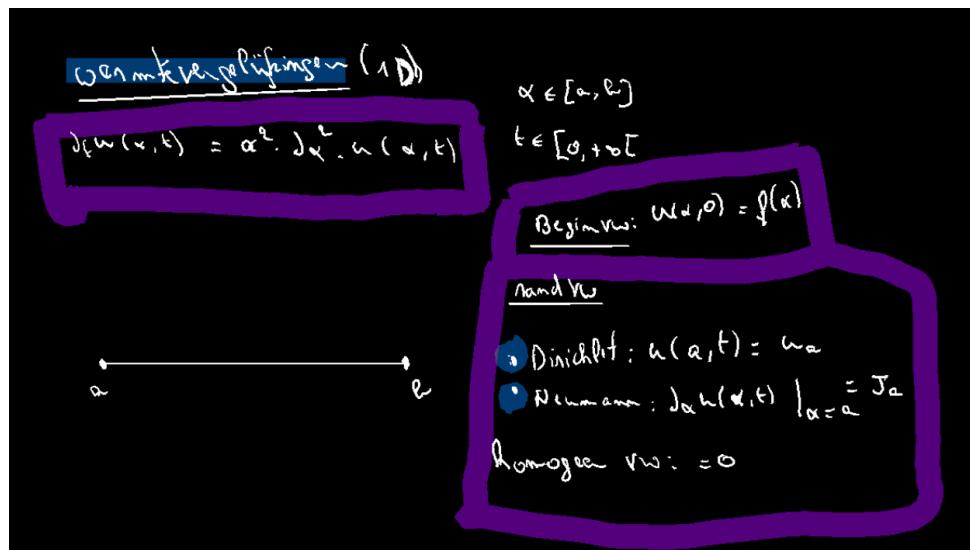


Figure 7.1: Wärmevegl

7.1.2 Fysische basis

Warmte

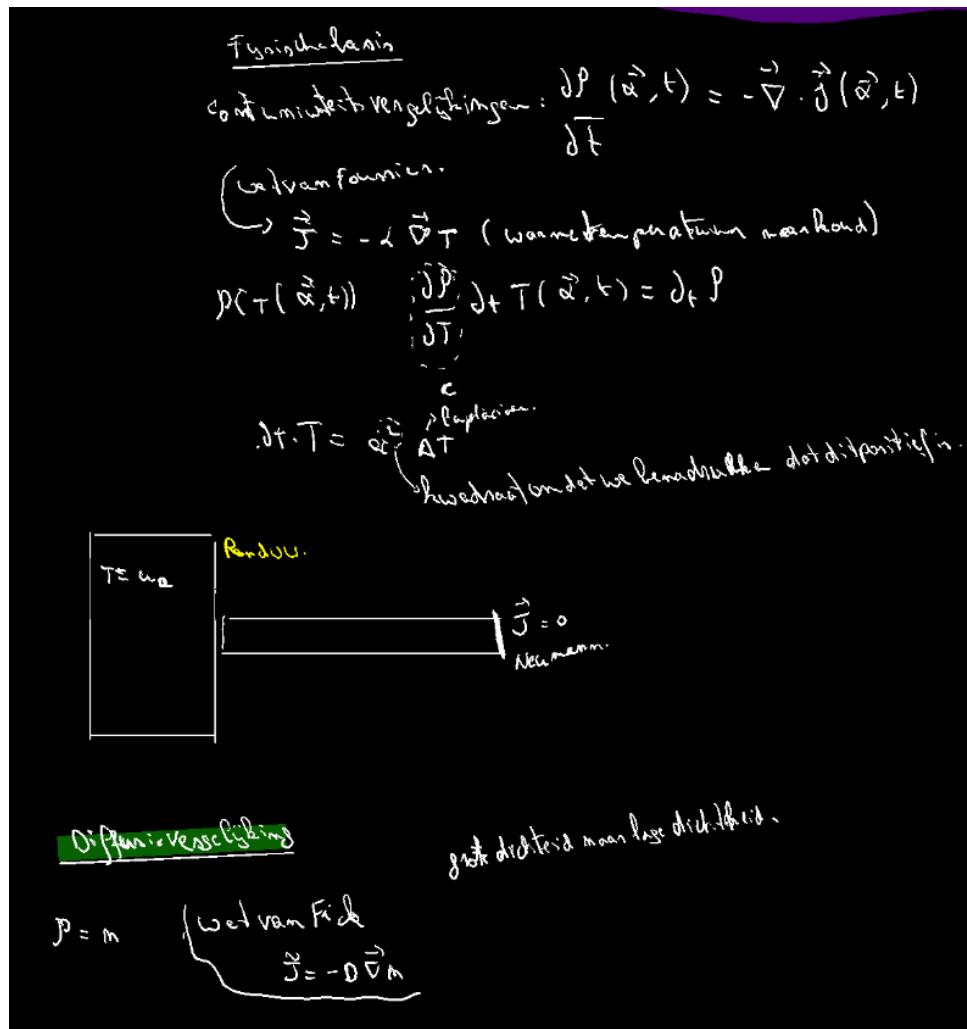


Figure 7.2: Fysische basis warmte

Golf

De golfvgl: $\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t)$

We gebruiken Dirichlet voor een gespannen snaar, en Neumann voor een vrij uiteinde.

7.2 Oplossing 1D Warmtevergelijking

Basically, we nemen de scheiding van veranderlijken. Deze laten ons toe om de normale modes te vinden, die voldoen aan de homogene randvoorwaarden.

Dus stap 1: Scheiding van veranderlijken:

Stap 1: Scheiding der veranderlijken

Als eerste stap bij het zoeken van een oplossing van een PDV is het algemeen een goed idee om een scheiding der veranderlijken te proberen. Concreet voor de 1D warmtevergelijking:

$$\partial_t u(x, t) = \alpha^2 \partial_x^2 u(x, t) \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, \infty[, \quad (7.3.13)$$

stellen we een oplossing van de vorm

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (7.3.14)$$

voorop. Substitutie in (7.3.13) geeft dan:

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (7.3.15)$$

Het is dan duidelijk dat beide leden van deze laatste gelijkheid noch van x en noch van t mogen afhangen. Zodoende vinden we:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \alpha^2 \sigma, \quad (7.3.16)$$

met σ een bepaalde constante, de zogenaamde **scheidingsconstante**. Zo valt de warmtevergelijking dus uiteen in twee afzonderlijke vergelijkingen voor $X(x)$ en $T(t)$:

$$X''(x) = \sigma X(x), \quad (7.3.17)$$

$$T'(t) = \alpha^2 \sigma T(t). \quad (7.3.18)$$

Figure 7.3: Scheiding van veranderlijken

Stap 2: We vinden de normale modes:

- Ga opzoek naar oplossingen $X(x)$ die voor bepaalde waarden van σ voldoen aan de homogene randvoorwaarden.

Concreet beschouwen we hier homogene Dirichletrandvoorwaarden² aan beide randen (bemerk dat we $a = 0$ en $b = L$ nemen voor de randpunten):

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (7.3.19)$$

A priori onderscheiden we drie kwalitatief verschillende mogelijkheden:

- $\sigma > 0$

In dat geval hebben we (zie § 1.3 uit hoofdstuk 1) de algemene oplossing:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}, \quad (7.3.20)$$

en je kan makkelijk zelf aantonen dat de randvoorwaarden (7.3.19) dan impliceren dat $c_1 = c_2 = 0$, er bestaat dus geen niet-triviale oplossing ($X(x) \neq 0$).

- $\sigma = 0$

In dat geval hebben we de algemene lineaire oplossing:

$$X(x) = c_1 + c_2 x, \quad (7.3.21)$$

en opnieuw kan je makkelijk aantonen dat er geen niet-triviale oplossing bestaat die voldoet aan de homogene Dirichlet randvoorwaarden (7.3.19).

- $\sigma < 0$

Nu hebben we als algemene oplossing:

$$X(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx), \quad (7.3.22)$$

met $\sigma = -k^2$. De eerste randvoorwaarde $X(0) = 0$ impliceert onmiddellijk dat $c_1 = 0$. De tweede randvoorwaarde $X(L) = 0$ leest dan, $c_2 \sin(kL) = 0$. Hieruit volgt dat $c_2 = 0$ tenzij(!) $kL = \pi n$ met $n \in \mathbb{N}^+$. We vinden dus als niet-triviale oplossingen van (7.3.17) die voldoen aan de Dirichlet-randvoorwaarden (7.3.19):

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7.3.23)$$

horende bij $\sigma_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$.

Gegeven zo'n oplossing $X_n(x)$ vinden we de bijhorende $T_n(t)$ dan als oplossing van (7.3.18) met $\sigma = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$:

$$T'_n(t) = \alpha^2 \sigma_n T_n(t), \quad (7.3.24)$$

waaruit dan:

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t}. \quad (7.3.25)$$

²In het volgende voorbeeld en in de bord/werkcolleges zullen andere randvoorwaarden aan bod komen.

Figure 7.4: Stap 2 warmte vgl

Nemen we de oplossingen voor X_n en T_n samen dan vinden we uiteindelijk de zogenaamde **normale modes**:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-(\frac{n\pi\alpha}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7.3.26)$$

De meest algemene oplossing van de warmtevergelijking (7.3.13) die voldoet aan de homogene Dirichlet randvoorwaarden vinden we dan als algemene lineaire combinatie - of nog: *superpositie* - van deze normale modes³:

$$u_h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n e^{-(\frac{n\pi\alpha}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (7.3.27)$$

met s_1, s_2, \dots bepaalde reële constantes.

Stap 2 bis: Verwerking van (eventuele) inhomogene randvoorwaarden

De algemene oplossing $u_h(x, t)$ voor bepaalde homogene randvoorwaarden kan makkelijk worden uitgebreid naar de algemene oplossing $u(x, t)$ voor de corresponderende inhomogene randvoorwaarden. Concreet, voor het geval dat we hier behandelen van Dirichlet randvoorwaarden links en rechts, lezen dergelijke inhomogene randvoorwaarden:

$$u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2, \quad (7.3.28)$$

voor bepaalde constanten $T_1, T_2 \neq 0$. We stellen dan de particuliere lineaire (tijdsonafhankelijke) functie:

$$\tilde{u}(x) = (1 - \frac{x}{L})T_1 + \frac{x}{L}T_2, \quad (7.3.29)$$

welke duidelijk een oplossing vormt van de 1D warmtevergelijking ($\partial_t \tilde{u} = \partial_x^2 \tilde{u} = 0$), die voldoet aan de inhomogene (Dirichlet) randvoorwaarden (7.3.28). Voor de meest algemene oplossing $u(x, t)$ die voldoet aan deze inhomogene randvoorwaarden geldt dan onmiddellijk dat $u(x, t) - \tilde{u}(x)$ de meest algemene oplossing vormt die voldoet aan de homogene randvoorwaarden, of dus:

$$u(x, t) = \tilde{u}(x) + u_h(x, t), \quad (7.3.30)$$

expliciet uitgeschreven leest dit:

$$u(x, t) = (1 - \frac{x}{L})T_1 + \frac{x}{L}T_2 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n e^{-(\frac{n\pi\alpha}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (7.3.31)$$

³Je ziet onmiddellijk dat elke lineaire combinatie van oplossingen opnieuw een oplossing vormt van de warmtevergelijking. Hoe weten we dan dat (7.3.27) de meest algemene oplossing vormt voor de gestelde randvoorwaarden? Wel, op een bepaald tijdstip (vb. $t = 0$) heeft het rechterlid de uitdrukking van een Fourier(sinus)reeks, en zoals we uit hoofdstuk 6 weten, kan elke (stuksgewijs) gladde functie voor $x \in [0, L]$ worden voorgesteld door dergelijke convergerende reeks. Als dusdanig vat (7.3.27) dus elke (stuksgewijs gladde) beginvoorraarde $u(x, 0) = f(x)$ (zie ook stap 4). Uit de afleiding in stappen 1 en 2 volgt dan verder dat de tijdsafhankelijkheid $\propto e^{-(\frac{n\pi\alpha}{L})^2 t}$ van de Fouriercoëfficiënten volledig bepaald wordt uit de eis dat $u(x, t)$ inderdaad een oplossing is.

Figure 7.5: Warmte vgl part 2

Stap 3: Verwerking van beginvoorwaarde

Tot slot bepalen we nog de vrije coëfficiënten s_1, s_2, \dots in de algemene oplossing (7.3.31) uit de beginvoorwaarde $u(x, 0) = f(x)$. Hiertoe herschrijven we deze beginvoorwaarde als: $u_h(x, 0) = f(x) - \tilde{u}(x)$, of expliciet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) - \tilde{u}(x). \quad (7.3.32)$$

De coëfficiënten s_n volgen dan uit toepassing van de orthogonaliteitsrelaties (6.1.14). In het bijzonder gebruiken we hier (7.3.35) (zie § 'orthogonaliteitsrelaties' hieronder), om te schrijven:

$$\langle \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), f(x) - \tilde{u}(x) \rangle = \int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) (f(x) - \tilde{u}(x)) = \frac{L}{2} s_n \quad (7.3.33)$$

$$\Rightarrow \boxed{s_n = \frac{2}{L} \langle \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), f(x) - \tilde{u}(x) \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) (f(x) - \tilde{u}(x))}. \quad (7.3.34)$$

Figure 7.6: Warmte vgl part 3

7.3 oplosingsmethoden voor wortelvergelijkingen

Step 1: zoek naar oplossing die voldoet voor afhankelijk van veranderlijken.

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$\alpha(\omega) T'(t) = \alpha^2 X''(\omega) \cdot T(t)$$

- deel door $\alpha \cdot t$

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{t} = \alpha^2 \cdot \frac{X''(\omega)}{\alpha(\omega)}$$

$$X''(\omega) = \alpha \cdot X(\omega)$$

$$T'(t) = \alpha^2 \cdot \alpha T(t)$$

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

Step 2: Beperking normale modi

$$\text{gevene randvoorwaarde: } X(0) = X(L) = 0$$

$$\sqrt{\alpha} \propto -\sqrt{\alpha} \quad (\text{R.V.} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0)$$

$$\Rightarrow X(0) = c_1 \cdot e^{i \sqrt{\alpha} x} + c_2 \cdot e^{-i \sqrt{\alpha} x} = 0$$

$$\alpha(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\alpha = 0, X(\omega) = c_1 + c_2 \alpha$$

$$\alpha(L) = 0 \Rightarrow c_2 L = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha < 0, X(\omega) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x) \quad (\omega^2 = 0) \\ \alpha(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ \alpha(L) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(L\omega) = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{triviale oplossing} \\ \alpha(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ \alpha(L) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(L\omega) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\alpha_m(\omega) = \sin\left(\frac{m\pi}{L}\omega\right) \quad \text{voor } m=1, 2, \dots \quad K_L = m \cdot \pi \quad \left(\omega = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \right)$$

$$T'(t) = \alpha^2 \cdot \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \cdot T_m(t) \quad \Rightarrow \quad T_m(t) = \exp\left(-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t\right)$$

$$\text{normale modi: } u_m(x,t) = \exp\left(-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$$u_R(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} n_m \exp\left(-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

homogen.

evenwicht.

evenwicht?

$$\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t \gg 1$$

$$\Rightarrow t \gg \frac{L^2}{\alpha^2 \pi^2}$$

$$L \sim \sqrt{t}$$

nu niet homogen:

$$u(0,t) = T_1, \quad u(L,t) = T_L$$

$$\tilde{u}(x) = T_1 + (T_L - T_1) \cdot \left(\frac{x}{L}\right)$$

$$u(x,t) = \tilde{u}(x) + u_R(x,t)$$

peripherieregeling.

Step 3: Verwerken beginvoorwaarden.

$$f(x) = u(x,0) = \tilde{u}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} n_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$$f(x) - \tilde{u}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} n_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \int_0^L \sin^2\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{2} n_m$$

$$= \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cdot \underbrace{\left(f(x) - \tilde{u}(x)\right)}_{\sim \dots} dx \approx \frac{L}{2} n_m$$

$$\Leftrightarrow n_m = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cdot \dots dx$$

7.2.1 Orthogonaliteitsrelaties

$$\langle \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right), \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \rangle = \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = \frac{L}{2} \delta_{m,n}, \quad m \neq 0, \quad (7.3.35)$$

$$\langle \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right), \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \rangle = \int_0^L dx \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = \begin{cases} \frac{L}{2} \delta_{m,n}, & m \neq 0 \\ L, & m = n = 0 \end{cases}, \quad (7.3.36)$$

$$\langle \sin\left(\frac{\pi(1+2m)}{2L}x\right), \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2L}x\right) \rangle = \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi(1+2m)}{2L}x\right) \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2L}x\right) = \frac{L}{2} \delta_{m,n}, \quad (7.3.37)$$

$$\langle \cos\left(\frac{\pi(1+2m)}{2L}x\right), \cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2L}x\right) \rangle = \int_0^L dx \cos\left(\frac{\pi(1+2m)}{2L}x\right) \cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2L}x\right) = \frac{L}{2} \delta_{m,n}, \quad (7.3.38)$$

Figure 7.7: Orthogonaliteitsrelaties

7.3 Voorbeeld Oefening

Als illustratie schrijven we expliciet de reeksoplossing neer met Dirichlet randvoorwaarden ($u(0, t) = T_1$ en $u(L, t) = T_2$) en beginvoorwaarde

$$u(x, 0) = f(x) \begin{cases} = T_1 & x \in [0, L/2] \\ = T_2 & x \in [L/2, L] \end{cases}. \quad (7.3.39)$$

Uit (7.3.34) vinden we:

$$s_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \left(\theta\left(\frac{L}{2} - x\right)T_1 + \theta\left(x - \frac{L}{2}\right)T_2 + (T_1 - T_2)\frac{x}{L} - T_1 \right),$$

(met $\theta(x)$ de Heaviside stapfunctie, $\theta(x) = 1$ voor $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ voor $x < 0$), waaruit uiteindelijk:

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= 0 \\ s_{2n} &= (T_2 - T_1) \frac{(-1)^n}{n\pi}, \end{aligned} \quad (7.3.40)$$

resulterend in de expansie (7.3.31) voor $u(x, t)$:

$$u(x, t) = T_1\left(1 - \frac{x}{L}\right) + T_2\frac{x}{L} + (T_2 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} e^{-(\alpha \frac{2\pi n}{L})^2 t} \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right). \quad (7.3.41)$$

In fig.7.1(a) tonen we de bekomen oplossing voor specifieke waarden van T_1, T_2, L . Bemerк dat de gevonden oplossing $u(x, t)$ **voor grote t tijdsonafhankelijk** wordt. Dit is ook wat we fysisch verwachten van een (warmte-)diffusieproces, na voldoende tijd wordt een evenwichtsconfiguratie bereikt. In de oplossing (7.3.31) manifesteert dit zich in het exponentiële verval van de pre-factor bij de modes $\propto \sin(\frac{\pi n}{L}x)$. De stationaire oplossing die overblijft is de particulier oplossing $\tilde{u}(x)$:

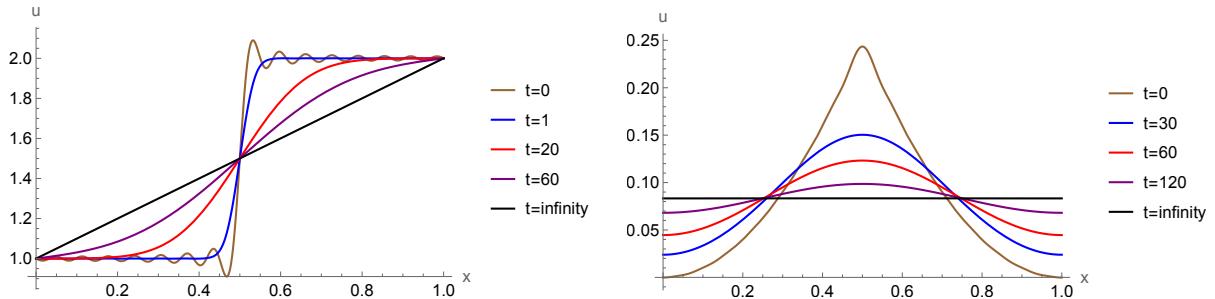
$$u(x, t) \xrightarrow{\lim_{t \rightarrow \infty}} \tilde{u}(x). \quad (7.3.42)$$

De tijdsschaal t_e waarover het evenwicht bereikt wordt, volgt dan uit de traagst afneemende exponentieel die in de expansie verschijnt. Voor het voorbeeld (7.3.41) is dit $e^{-(\alpha \frac{2\pi}{L})^2 t}$, waaruit $t_e \gtrsim (\frac{L}{2\pi\alpha})^2$. Algemeen zal deze tijdsschaal schalen als $(L/\alpha)^2$, met L de lengte van de geleider en α^2 de warmtecoëfficiënt. Ook deze schaling komt fysisch precies overeen met *diffusieve propagatie*.

Het exponentiële verval van de modes $\propto e^{-(\alpha \frac{\pi n}{L})^2 t}$ zorgt er ook voor dat voor groeiende t de reeks steeds sneller convergeert. In het bijzonder worden voor elke positieve t de hogere-orde coëfficienten gedempt, wat verklaart waarom het Gibbs fenomeen in figuur 7.1 (a) onmiddellijk verdwijnt.

7.3.1 Voorbeeldoefening

Beschouw een staaf van lengte L met een bepaalde warmtecoëfficiënt α^2 die aan elk van **de uiteinden geïsoleerd is** (= homogene Neumann randvoorwaarden). De initiële temperatuursverdeling leest: $u(x, 0) = T_0(x) = f(x) = T_c(\frac{x}{L})^2$ in het interval $[0, L/2]$ en $u(x, 0) = T_0(x) = f(x) = T_c(1 - \frac{x}{L})^2$ in het interval $[L/2, L]$. Bepaal de de temperatuursevolutie $u(x, t)$ als een reeksontwikkeling in normale modes.



Figuur 7.1: (a) De reeks (7.3.41) getrunceerd tot op $n = 15$, voor $\alpha = 0.02$, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $L = 1$. Bemerk de evolutie naar de x -afhankelijke evenwichtsconfiguratie $\tilde{u}(x)$ die lineair interpoleert tussen de twee vastgehouden temperaturen aan de uiteinden. Bemerk ook het Gibbs-fenomeen voor de reeksbenadering op $t = 0$ wanneer de exacte $u(x, t)$ discontinu is voor $x = L/2$. Deze discontinuitéit verdwijnt onmiddellijk voor $t > 0$, waardoor de volgende reeksbenaderingen veel beter convergeren. (b) De reeks (7.3.58) getrunceerd tot op $m = 15$, voor $\alpha = 0.02$, $T_c = 1$, $L = 1$. Voor de geïsoleerde warmtegeleider evolueert de temperatuur $u(x, t)$ geleidelijk aan naar een constante verdeling $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = s_0 = T_c/12$.

Stap 1: Scheiding der veranderlijken

Dit verloopt identiek als hierboven, we vinden (zie (7.3.17) en (7.3.18)):

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) = \sigma X(x), \\ T'(t) = \alpha^2 \sigma T(t). \end{array} \right. \quad (7.3.43)$$

$$(7.3.44)$$

Stap 2: Bepaling normale modes

Nu hebben we **homogene Neumann randvoorwaarden**, die zich opnieuw doorzetten naar $X(x)$:

$$X'(0) = X'(L) = 0, \quad (7.3.45)$$

met opnieuw de drie kwalitatief verschillende mogelijkheden:

- $\sigma > 0$

In dat geval hebben we (zie § 1.3 uit hoofdstuk 1) de algemene oplossing:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}, \quad (7.3.46)$$

hoge modus → van waarde
en de randvoorwaarden (7.3.45) zullen opnieuw impliceeren dat $c_1 = c_2 = 0$, er bestaat dus geen niet-triviale oplossing ($X(x) \neq 0$).

- $\sigma = 0$

In dat geval hebben we de algemene lineaire oplossing:

$$X(x) = c_1 + c_2 x. \quad (7.3.47)$$

In tegenstelling tot in het (Dirichlet) geval van hierboven, bestaat er nu wel een niet-triviale oplossing. Uit $X'(0) = 0$ volgt $c_2 = 0$, waardoor we meteen ook hebben dat $X'(L) = 0$. Zo vinden we als niet-triviale oplossing van (7.3.43) horende bij $\sigma = 0$:

$$X(x) = 1. \quad (7.3.48)$$

- $\sigma < 0$

Hier hebben we de algemene oplossing:

$$X(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx), \quad (7.3.49)$$

met $\sigma = -k^2$. De eerste randvoorwaarde $X'(0) = 0$ impliceert onmiddellijk dat $c_2 = 0$. De tweede randvoorwaarde $X'(L) = 0$ leest dan: $-kc_1 \sin(kL) = 0$. Hieruit volgt dat $c_1 = 0$, tenzij $kL = \pi n$ met $n \in \mathbb{N}^+$.

Samengevat vinden we dus als niet-triviale oplossingen van (7.3.43) die voldoen aan de Neumann-randvoorwaarden (7.3.45) (bemerkt dat we starten bij $n = 0$, overeenkomend met de constante oplossing (7.3.48)):

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (7.3.50)$$

horende bij $\sigma_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$.

Gegeven zo'n oplossing $X_n(x)$ vinden we de bijkomende $T_n(t)$ dan als oplossing van (7.3.44) met $\sigma = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$:

$$T'_n(t) = \alpha^2 \sigma_n T_n(t), \quad (7.3.51)$$

waaruit:

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (7.3.52)$$

Nemen we de oplossingen voor X_n en T_n samen dan vinden we uiteindelijk de normale modes:

$$\boxed{u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (7.3.53)$$

En de meest algemene oplossing van de warmtevergelijking (7.3.13) die voldoet aan de homogene Neumann randvoorwaarden vinden we dan als reeksontwikkeling in deze normale modes:

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}, \quad (7.3.54)$$

met s_0, s_1, s_2, \dots bepaalde reële constantes.

Stap 3: verwerking van beginvoorwaarde *→ Voor $s(n)$ te
uitevaluieren*

De beginvoorwaarde leest $u(x, 0) = f(x)$, of expliciet:

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) = T_c\left(\frac{x}{L}\right)^2 \theta(L/2 - x) + T_c\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \theta(x - L/2). \quad (7.3.55)$$

De coëfficiënten s_n volgen dan uit toepassing van de cosinus orthogonaliteitsrelaties (7.3.36). Enerzijds hebben we dan:

$$s_0 = \frac{1}{L} \int_0^L dx f(x) = \frac{T_c}{12}. \quad (7.3.56)$$

Anderzijds ⁴:

$$\begin{aligned} s_{2m+1} &= \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{L}x\right) = 0 \\ s_{2m} &= \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi(2m)}{L}x\right) = T_c \frac{(-1)^m}{m^2 \pi^2} \end{aligned} \quad (7.3.57)$$

Dit levert de gezochte expansie op voor $u(x, t)$:

$$u(x, t) = T_c \left(\frac{1}{12} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 \pi^2} e^{-(\alpha \frac{2\pi m}{L})^2 t} \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \right) \quad (7.3.58)$$

In figuur 7.1 (b) tonen we de evolutie van $u(x, t)$ (getruncceerd tot op $m = 15$).

7.4 Oplossing 1D golfvergelijking

De oplossingsmethode voor de 1D golfvergelijking loopt heel gelijkaardig als deze voor de 1D warmtevergelijking (vorige sectie). We doorlopen de verschillende stappen.

Stap 1: Scheiding der veranderlijken

De op te lossen vergelijking leest nu:

$$\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t) \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, \infty[, \quad (7.4.59)$$

en we stellen hiervoor opnieuw een oplossing van de vorm

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (7.4.60)$$

⁴Voor algemene $n \in \mathbb{R}$ geeft de evaluatie van de integraal: $\frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = 2T_c \frac{(-2 \sin(n\pi) + 2n\pi \cos(n\pi/2))}{(n\pi)^3}$, waaruit de uitdrukkingen (7.3.57) volgen. Je kan zelf ook zonder expliciete berekening aantonen uit het even karakter van $f(x)$, $f(x) = f(L - x)$, dat algemeen de coëfficiënten voor oneven $n = 2m + 1$ verdwijnen, $s_{2m+1} = 0$.

Stap 3: verwerking van beginvoorwaarde

\rightarrow Voor $s(n)$ te
uitevaluieren

De beginvoorwaarde leest $u(x, 0) = f(x)$, of expliciet:

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) = T_c\left(\frac{x}{L}\right)^2 \theta(L/2 - x) + T_c\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \theta(x - L/2). \quad (7.3.55)$$

De coëfficiënten s_n volgen dan uit toepassing van de cosinus orthogonaliteitsrelaties (7.3.36). Enerzijds hebben we dan:

$$s_0 = \frac{1}{L} \int_0^L dx f(x) = \frac{T_c}{12}. \quad (7.3.56)$$

Anderzijds ⁴:

$$\begin{aligned} s_{2m+1} &= \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{L}x\right) = 0 \\ s_{2m} &= \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi(2m)}{L}x\right) = T_c \frac{(-1)^m}{m^2 \pi^2} \end{aligned} \quad (7.3.57)$$

Dit levert de gezochte expansie op voor $u(x, t)$:

$$u(x, t) = T_c \left(\frac{1}{12} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 \pi^2} e^{-(\alpha \frac{2\pi m}{L})^2 t} \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \right) \quad (7.3.58)$$

In figuur 7.1 (b) tonen we de evolutie van $u(x, t)$ (getruncceerd tot op $m = 15$).

7.4 Oplossing 1D golfvergelijking

De oplossingsmethode voor de 1D golfvergelijking loopt heel gelijkaardig als deze voor de 1D warmtevergelijking (vorige sectie). We doorlopen de verschillende stappen.

Stap 1: Scheiding der veranderlijken

De op te lossen vergelijking leest nu:

$$\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t) \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, \infty[, \quad (7.4.59)$$

en we stellen hiervoor opnieuw een oplossing van de vorm

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (7.4.60)$$

⁴Voor algemene $n \in \mathbb{R}$ geeft de evaluatie van de integraal: $\frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = 2T_c \frac{(-2 \sin(n\pi) + 2n\pi \cos(n\pi/2))}{(n\pi)^3}$, waaruit de uitdrukkingen (7.3.57) volgen. Je kan zelf ook zonder expliciete berekening aantonen uit het even karakter van $f(x)$, $f(x) = f(L - x)$, dat algemeen de coëfficiënten voor oneven $n = 2m + 1$ verdwijnen, $s_{2m+1} = 0$.

größte Vergrößerung (10)

$$\int_0^L u(x,t) = c^2 \cdot \int_0^L u(x,t)$$

$$x \in [a, b]$$

$$t \in [0, \infty]$$

$$\text{Dirichlet } u(a,t) = u_a$$

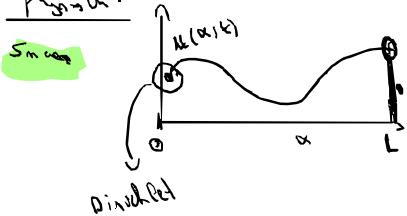
$$\text{Neumann: } \int_a^b u(x,t) |_{x=a} = y_a$$

Begrenzung:

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\int_0^L u(x,t) |_{t=0} = f(x)$$

Für $x \in [a, b]$:



→ Neumann mit \bar{v} und \bar{p} (eigene diff = 0) (Neumann)

Elettromagnetismus

gleichphasig $p(\vec{x}, t), p(\vec{x}, \epsilon)$

$$p = p_0 + \tilde{p} \quad | \quad p = p_0 + \tilde{p} \quad | \quad p = f(l) \approx \frac{f(p_0)}{p_0} + \frac{f'(l_0) \cdot \tilde{p}}{\tilde{p}}$$

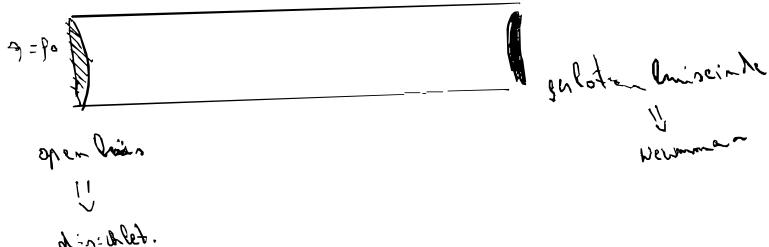
$$0 = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \vec{\nabla} (\tilde{p} \cdot \vec{v}) \rightarrow \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + p_0 \vec{v} \cdot \vec{\nabla} = 0$$

$$\hookrightarrow (4\pi \cdot \epsilon_0) \delta_0 \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = - \vec{\nabla} \tilde{p} = - f'(p_0) \vec{\nabla} \cdot \vec{p}$$

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = - p_0 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = f'(p_0) + \Delta \cdot \tilde{p}$$

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = f'(p_0) \cdot \Delta \tilde{p}$$

$$c^2 = f'(p_0) = \frac{dp}{dt} \Big|_{p=p_0}$$



voorop. Substitutie in (7.4.59) geeft dan:

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (7.4.61)$$

Het is dan duidelijk dat beide leden van deze laatste vergelijking noch van x en noch van t mogen afhangen. Zodoende vinden we:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = c^2 \sigma, \quad (7.4.62)$$

met scheidingsconstante σ . Zo valt de golfvergelijking uiteen in twee afzonderlijke vergelijkingen voor $X(x)$ en $T(t)$:

$$X''(x) = \sigma X(x), \quad (7.4.63)$$

$$T''(t) = c^2 \sigma T(t). \quad (7.4.64)$$

Stap 2: Bepaling normale modes

We gaan eerst op zoek naar oplossingen $X(x)$ van (7.4.59) voor bepaalde waarden van σ , zodat deze oplossingen voldoen aan de homogene randvoorwaarden. Concreet beschouwen we hier, net als bij het eerste voorbeeld voor de warmtevergelijking, **homogene Dirichletrandvoorwaarden** aan beide randen:

$$X(0) = X(L) = 0, \quad (7.4.65)$$

waaruit dan (zie (7.3.20)-(7.3.23)) de niet-triviale oplossingen volgen:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7.4.66)$$

horende bij $\sigma_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$.

Gegeven zo'n oplossing $X_n(x)$ vinden we de bijhorende $T_n(t)$ dan als oplossing van (7.4.64) met $\sigma = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$:

$$T''_n(t) = c^2 \sigma_n T_n(t), \quad (7.4.67)$$

waaruit dan:

$$T_n(t) = s_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + t_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right). \quad (7.4.68)$$

Bemerk dat de vergelijking voor T_n nu een tweede-orde differentiaalvergelijking is, in tegenstelling tot de eerste-orde vergelijking die we krijgen bij de warmtevergelijking. Hierdoor is de algemene oplossing een lineaire combinatie van twee oplossing ($\propto \cos$ en $\propto \sin$). We schrijven hier al algemene constantes s_n en t_n , deze zullen dan door de beginvoorwaarden worden bepaald (zie stap 3).

Nemen we de oplossingen voor X_n en T_n samen, dan vinden we uiteindelijk de normale modes:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(s_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + t_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7.4.69)$$

7.4) Afdeling 1D golftog.

1: rekenen opeenvolgende voorwaarden: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$X(x)T'(t) = C^2 X''(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = C^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

$$X''(x) = -\sigma X(x)$$

$$T''(t) = C^2 \cdot \sigma \cdot T(t)$$

2. Normale moden

$$X_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), m=1, 2, 3, \dots$$

(Duidelijk $X(0)=X(L)=0$)

$$\sigma = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$$

$$T_m''(t) = -C^2 \cdot \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \cdot T_m(t)$$

$$T_m(t) = D_m \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{L} t\right) + t_m \sin\left(\frac{m\pi}{L} t\right)$$

3: Verwerking inhorige RV

$$\rightarrow \text{algemene oplossing: } u_m(x,t) = T_m(t) \cdot X_m(x)$$

$$\hookrightarrow u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} t_m \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{L} t\right)$$

3. Verwerken BV'en

$$f(x,0) = u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$g(x) = \partial_t u(x,t) \Big|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} t_m \frac{C_m \pi}{L} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$t_m = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L dx \cdot f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

geen $f(x)$ omdat homogene randvoorwaarden

$$t_m = \frac{2}{C_m \pi} \cdot \int_0^L dx \cdot g(x) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$\underbrace{\left(\int_m\right)}_{\downarrow} = \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \text{fundamentale freq}$$

Reguliere harmonie.

en de meest algemene oplossing van de golfvergelijking (7.4.59) die voldoet aan de homogene Dirichlet randvoorwaarden vinden we dan als een expansie in deze normale modes:

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(s_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + t_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),} \quad (7.4.70)$$

met $s_1, s_2, \dots, t_1, t_2, \dots$ bepaalde reële constantes.

We houden het hier concreet overigens bij homogene randvoorwaarden, zodat er geen inhomogene randvoorwaarden moeten worden verwerkt.

Stap 3: verwerking van beginvoorwaarden

Tot slot verwerken we nog de beginvoorwaarden

$$u(x, 0) = f(x) \quad \partial_t u(x, t)|_{t=0} = g(x). \quad (7.4.71)$$

Na invullen van (7.4.70) lezen deze respectievelijk:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (7.4.72)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{cn\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (7.4.73)$$

De coëfficiënten s_1, s_2, \dots en t_1, t_2, \dots volgen dan uit toepassing van de orthogonaleitelsrelaties, in het bijzonder (7.3.35):

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) f(x), \\ t_n &= \frac{2}{cn\pi} \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) g(x). \end{aligned} \quad (7.4.74)$$

Als concreet voorbeeld beschouwen we een gespannen snaar (=homogene Dirichlet randvoorwaarden aan beide eindpunten) met lengte L die we op $t = 0$ uit rust loslaten, met initieel profiel $u(x, 0) = f(x) = 5h\frac{x}{L}$ voor $x < L/5$ en $u(x, 0) = f(x) = \frac{5}{4}h(1 - \frac{x}{L})$ voor $x \geq L/5$.

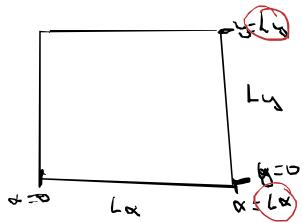
Initiële rust vertaalt zich naar $g(x) = 0$ en dus ook $t_n = 0$. De coëfficiënten s_n vinden we als:

$$s_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi n\pi}{L}x\right) \left(\frac{5x}{L}h\theta\left(\frac{L}{5} - x\right) + \frac{5}{4}h(1 - \frac{x}{L})\theta(x - \frac{L}{5}) \right) = \frac{25h}{2} \frac{\sin(\frac{n\pi}{5})}{n^2\pi^2}. \quad (7.4.75)$$

Hieruit volgt dan de oplossing (zie ook figuur 7.2 (a)):

$$u(x, t) = \frac{25h}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{5})}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{c\pi n}{L}t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right). \quad (7.4.76)$$

7.5 (in fore) (Belangrijke voorbeelden)



$$\Delta u(\alpha, \gamma, t) = \alpha^2 (\Delta \alpha + \Delta \gamma) \cdot u(\alpha, \gamma, t)$$

$$\text{R.V. Neumann: } \left. \frac{\partial}{\partial x} u(\alpha, \gamma, t) \right|_{\alpha=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial y} u(\alpha, \gamma, t) \right|_{y=L_y} = 0$$

beginwaarden:

$$B.V.: u(\alpha, \gamma, 0) = f(\alpha, \gamma)$$

$$1) \text{ SDV } \quad u(\alpha, \gamma, t) = X(\alpha) Y(\gamma) T(t) \quad (\text{plug in } \circlearrowright)$$

$$X'' Y T' = \alpha^2 (X'' Y T + \alpha Y'' T)$$

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(\alpha)}{X(\alpha)} + \alpha^2 \frac{Y''(\gamma)}{Y(\gamma)}$$

$$X''(\alpha) = \sigma_\alpha X(\alpha), \quad Y''(\gamma) = \sigma_\gamma Y(\gamma), \quad T'(t) = \alpha^2 (\sigma_\alpha + \sigma_\gamma) \cdot T(t)$$

2) Normale modi

$$(1), \quad X(0) = X'(L\alpha) = 0$$

$$\text{oplossing: } X_{m\alpha} = \cos\left(\frac{\pi m \alpha}{L\alpha}\right)$$

$$Y_{m\gamma} = \cos\left(\frac{\pi m \gamma}{L\gamma}\right)$$

$$m\alpha = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sigma_\alpha = -\left(\frac{\pi m \alpha}{L\alpha}\right)^2$$

$$m\gamma = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sigma_\gamma = -\left(\frac{\pi m \gamma}{L\gamma}\right)^2$$

$$T(t) = \exp\left(-\alpha^2 \pi^2 \left(\frac{m\alpha^2}{L\alpha^2} + \frac{m\gamma^2}{L\gamma^2}\right)t\right)$$

$$M_{(m_x, m_y)}(\alpha, \gamma, t) = \exp^{-\alpha^2 \pi^2 \left(\frac{m_x^2}{L_x^2} + \frac{m_y^2}{L_y^2}\right)t} \cdot \cos\left(\frac{\pi m_x}{L_x} \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi m_y}{L_y} \gamma\right)$$

$$3) u(\alpha, \gamma, t) = \sum_{m_x, m_y=0}^{+\infty} n(m_x, m_y) \cdot M_{(m_x, m_y)}(\alpha, \gamma, t)$$

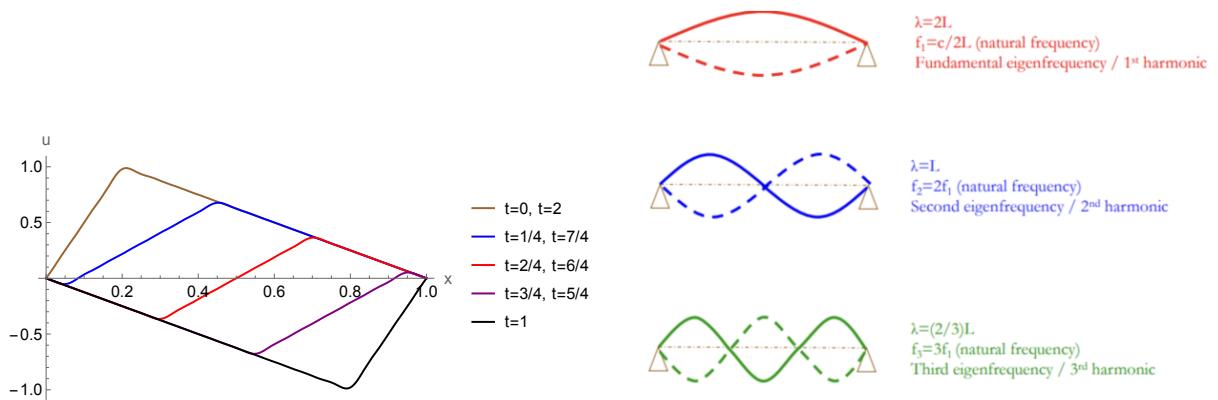
$$u(\alpha, \gamma, 0) = f(x, y) = \sum_{m_x, m_y=0}^{+\infty} n(m_x, m_y) \cdot \cos\left(\frac{\pi m_x}{L_x} \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi m_y}{L_y} \gamma\right)$$

Orthogonaliteitrelatie:

$$\int_0^L dx \cos\left(\frac{\pi m}{L} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) = \delta_{m,n}$$

$$\begin{cases} = 0 & \text{if } m \neq n \\ = 1 & \text{if } m = n \end{cases}$$

Dit is een iets duidelijker bewijs.



Figuur 7.2: (a) De reeksoplossing (7.4.76) voor een trillende snaar, getruncceerd tot op $n = 30$, voor $c = h = L = 1$. Zoals verwacht is de oplossing periodiek met periode $T = \frac{1}{f_1} = \frac{2L}{c} = 2$. Zie de clip The motion of a plucked string voor een slow-motion opname van een trillende snaar met een beginvoorwaarde van dezelfde vorm. (b) De eerste drie normale moden ($n = 1, 2, 3$), met golflengtes (λ in figuur) $L_n = 2L, L, \frac{2}{3}L$ en frequenties $f_n = \frac{c}{2L}, \frac{c}{L}, \frac{3c}{2L}$.

Normale moden, eigenfrequenties en resonantie.

De individuele normale moden $\propto \cos\left(\frac{c\pi n}{L}t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$ in de reeksexpansie (7.4.76), vormen staande golven (zie figuur 7.2 (b)). Dit is algemeen zo voor de normale moden van de golfvergelijking, men spreekt ook over de eigenmoden. Deze golven hebben bepaalde **eigenfrequenties** f_n .

Specifiek voor het 1D geval is dat al de eigenfrequenties f_n een geheel veelvoud zijn van de laagste frequentie f_1 . Men spreekt over de grondtoon (frequentie f_1) en de hogere orde harmonieken (frequenties f_n ($n > 1$)). Zo vinden we hier dus in het geval van Dirichlet randvoorwaarden: $f_n = \frac{cn}{2L}$ en corresponderende golfengtes $L_n = \frac{c}{f_n} = \frac{2L}{n}$. Vertalen we dit naar geluid dan komt dergelijk spectrum overeen met een zuivere toon. En dit is dan ook de reden waarom muziekinstrumenten (gitaar, piano, blaasinstrumenten) die een zuivere toon genereren een 1D karakter hebben, in tegenstelling tot bijvoorbeeld de drum die voldoet aan de 2D golfvergelijking. Verder hangt de klankkleur van een toon af van de relatieve verhouding van de verschillende harmonieken. Uit de bovenstaande analyse volgt dus dat de klankkleur geproduceerd door een snaarinstrument ook afhangt van de precieze manier waarop de snaar aangeslagen wordt (wat elke gitarist uiteraard al wist).

In realiteit zal er door dissipatieve effecten in de meeste systemen een demping optreden van de verschillende normale moden - een aangeslagen gitaarsnaar blijft niet eeuwig trillen. Dit fenomeen hebben we ook gezien voor de gedempte harmonische oscillator in hoofdstuk 5 §5.3. In dat geval bestaat er slechts één mode met eigenfrequentie $\omega_0 = 2\pi f_0$, en vonden we naast de demping, ook het resonantiefenomeen veroorzaakt door een externe bron met frequentie $f \approx f_0$. Hier hebben we verschillende eigenfrequenties f_n en zal een externe bron **resonanties** veroorzaken, wanneer de frequentie resoneert met een of meer van deze eigenfrequenties $f \approx f_n$ (zie bijvoorbeeld

de clip Guitar that Plays itself).

7.5 2D golfvergelijking: de cirkelvormige drum

Tot slot van dit hoofdstuk beschouwen we de 2D golfvergelijking:

$$\partial_t^2 u(\vec{x}, t) = c^2 \Delta u(\vec{x}, t) \quad (7.5.77)$$

met

$$\vec{x} = (x, y) \quad \text{en} \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2. \quad (7.5.78)$$

We zullen ons beperken tot het bepalen van de normale modes. Zoals hierboven besproken, geven deze modes ons de resonante frequenties en corresponderende trillingen van het medium. We stellen voor deze normale modes opnieuw een **scheiding der veranderlijken** die we in eerste instantie schrijven als:

$$u(\vec{x}, t) = A(x, y)T(t). \quad (7.5.79)$$

Substitutie in (7.5.77) resulteert dan in:

$$A(x, y)T''(t) = c^2 T(t) \Delta A(x, y) \Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{\Delta A(x, y)}{A(x, y)}, \quad (7.5.80)$$

waaruit we dan twee vergelijkingen vinden, met scheidingsconstante σ :

$$\Delta A(x, y) = \sigma A(x, y), \quad (7.5.81)$$

$$T''(t) = \sigma c^2 T(t). \quad (7.5.82)$$

Analoog als bij het 1D geval, zoeken we eerst oplossingen van (7.5.81), voor bepaalde scheidingsconstantes (=eigenwaarden) σ . De vorm van de oplossingen en de bijhorende eigenwaarden hangt sterk af van het gebied Ω waarover de golfvergelijking geldt, met bijhorende randvoorwaarden op de rand $\partial\Omega$. Hier nemen we het klassieke geval van een cirkelvormige drum (met straal R), met Dirichlet randvoorwaarden (=gespannen drumvel). Deze randvoorwaarden laten zich op een natuurlijke manier schrijven in polaire coördinaten $\vec{x}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ ⁵:

$$A(R, \theta) = 0 \quad \text{voor} \quad \theta \in [0, 2\pi[\quad (7.5.83)$$

Het ligt dan ook voor de hand van voor de normale modes A_n als anzats opnieuw een scheiding der veranderlijken, ditmaal in ρ en θ , te gebruiken:

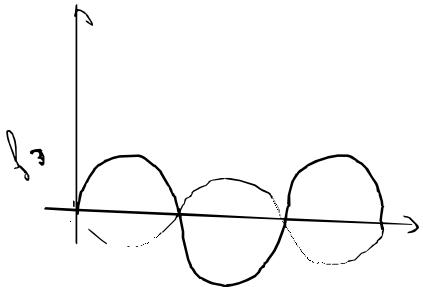
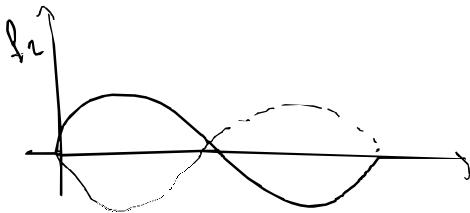
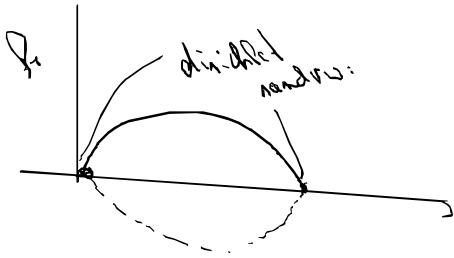
$$A(\rho, \theta) = F(\rho)G(\theta). \quad (7.5.84)$$

Substitutie in (7.5.81) levert dan, gebruik makende van de uitdrukking (3.1.22) voor de Laplacian in poolcoördinaten:

$$\left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} \partial_\theta^2 \right) A(\rho, \theta) = \sigma A(\rho, \theta) \quad (7.5.85)$$

⁵Waarbij we met licht misbruik van notatie $A(\vec{x}(\rho, \theta)) = A(\rho, \theta)$ noteren.

7.5 2D gelängverzerrungen



$$\tilde{d}t u(\alpha, \omega, t) = c^2 (\tilde{d}\alpha + \tilde{d}\omega) u(\alpha, \omega, t)$$

$$(\alpha, \omega) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

$$\xrightarrow{\text{SDV}} u(\alpha, \omega, t) = A(\rho, \theta) \cdot T(t)$$

$$\Rightarrow A T''(t) = c^2 \left(\tilde{d}\rho + \frac{1}{\rho} \cdot \tilde{d}\rho + \frac{1}{\rho^2} \cdot \tilde{d}\theta \right) \cdot A(\rho, \theta) \cdot T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{c^2 \left(\dots \right) \cdot A(\rho, \theta)}{A(\rho, \theta)}$$

$$T''(t) = c^2 \cdot \sigma \cdot T(t)$$

$$\left(\tilde{d}\rho + \frac{1}{\rho} \tilde{d}\rho + \frac{1}{\rho^2} \tilde{d}\theta \right) \cdot A(\rho, \theta) = \sigma A(\rho, \theta)$$

$$A(\rho, \theta) = F(\rho) \cdot G(\theta)$$

$$(F''(\rho) + \frac{1}{\rho} F'(\rho) + \frac{F(-\rho)}{\rho^2} \cdot \frac{G''(\theta)}{G(\theta)}) = \sigma \cdot F(\rho)$$

$$G''(\theta) = -m^2 \cdot G(\theta) \rightarrow G(\theta) = \cos(m\theta + \alpha)$$

$$F''(\rho) + \frac{1}{\rho} F'(\rho) - \frac{F(\rho)}{\rho^2} = \sigma \cdot F(\rho)$$



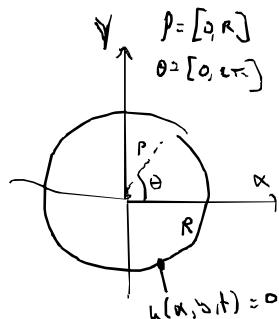
$$\lambda = -\sigma$$

$$J_{mn}(R\sqrt{\lambda}) = 0$$

$$R\sqrt{\lambda} = \alpha_{m,n}$$

$$\lambda = \left(\frac{\alpha_{m,n}}{R} \right)^2 = -\sigma$$

$$A_{m,n}(\rho, \theta) = \cos(m\theta + \alpha)$$



$$\Rightarrow (F''(\rho) + \frac{F'(\rho)}{\rho})G(\theta) + \frac{F(\rho)}{\rho^2}G''(\theta) = \sigma F(\rho)G(\theta) \quad (7.5.86)$$

$$\Rightarrow F''(\rho) + \frac{F'(\rho)}{\rho} + \frac{F(\rho)}{\rho^2} \frac{G''(\theta)}{G(\theta)} = \sigma F(\rho) \quad (7.5.87)$$

Aangezien deze vergelijking voor elke θ en ρ moet gelden, vinden we onmiddellijk dat G''/G constant moet zijn, of:

$$G''(\theta) = -m^2 G(\theta), \quad (7.5.88)$$

met als enige mogelijke oplossingen consistent met de periodiciteit van de hoek $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$:

$$G(\theta) = \cos(m\theta + \alpha) \quad m \in \mathbb{N} \quad (7.5.89)$$

met α een arbitraire fase. De vergelijking voor $F(\rho)$ wordt dan:

$$F''(\rho) + \frac{F'(\rho)}{\rho} - m^2 \frac{F(\rho)}{\rho^2} = \sigma F(\rho), \quad (7.5.90)$$

of na vermenigvuldiging met ρ :

$$\rho F''(\rho) + F'(\rho) - m^2 \frac{F(\rho)}{\rho} = \sigma \rho F(\rho). \quad (7.5.91)$$

Dit is de zogenaamde *Besselvergelijking*, en men kan aantonen dat deze vergelijking enkel oplossingen heeft die niet-singulier zijn in $\rho = 0$ en bovendien verdwijnen voor bepaalde waarden van ρ (wat we nodig hebben om te kunnen voldoen aan (7.5.83)), voor negatieve waarden van de scheidingsconstante $\sigma < 0$. Schrijven we $\lambda = -\sigma > 0$ dan lezen deze niet-singuliere oplossingen:

$$F(\rho) = J_m(\rho\sqrt{\lambda}), \quad (7.5.92)$$

waarbij $J_m(x)$ bekend staat als de cilindrische Besselfunctie van orde m . De randvoorwaarde (7.5.83) impliceert dan dat deze Besselfunctie moet verdwijnen op de rand $\rho = R$: $F(R) = 0$, of dus:

$$J_m(R\sqrt{\lambda}) = 0. \quad (7.5.93)$$

Dit zal uiteindelijk zorgen voor een discreet spectrum van de eigenwaarden λ . Om deze te bepalen kijken we naar de nulpunten van de Besselfuncties. Voor een gegeven m heeft $J_m(x)$ oneindig veel nulpunten $x_{m,n} > 0$ met $n = 1, 2, \dots$, gelabeld van klein naar groot. Aldus krijgen de eigenwaarden een dubbel label $\lambda_{m,n}$ met $R\lambda_{m,n}^{1/2} = x_{m,n}$. Samengevat krijgen we voor de cirkelvormige drum de normale modes (zie ook figuur 7.3):

$$A_{m,n}(\rho, \theta) = \cos(m\theta + \alpha)J_m\left(\frac{\rho}{R}x_{m,n}\right), \quad (7.5.94)$$

horende bij $\sigma = -\lambda_{m,n} = -x_{m,n}^2/R^2$. De tijdsafhankelijkheid van de volledige normale modes,

$$u_{m,n}(\rho, \theta) = A_{m,n}(\rho, \theta)T_{m,n}(t) \quad (7.5.95)$$

vinden we tot slot makkelijk uit (7.5.82):

$$T''_{m,n}(t) = -\left(\frac{cx_{m,n}}{R}\right)^2 T(t) \Rightarrow T_{m,n}(t) = s_{m,n} \cos\left(\frac{cx_{m,n}}{R}t\right) + t_{m,n} \sin\left(\frac{cx_{m,n}}{R}t\right). \quad (7.5.96)$$

De normale modes hebben dus eigenfrequenties

$$f_{m,n} = \frac{c\lambda_{m,n}^{1/2}}{2\pi} = \frac{cx_{m,n}}{2\pi R}. \quad (7.5.97)$$

In tegenstelling tot het 1D geval komen deze eigenfrequenties niet langer voor volgens gehele verhoudingen, vandaar dat een drum geen zuivere tonen voortbrengt⁶. Voor de vier laagste waarden van de nulpunten, en dus laagste frequenties, hebben we (afgerond):

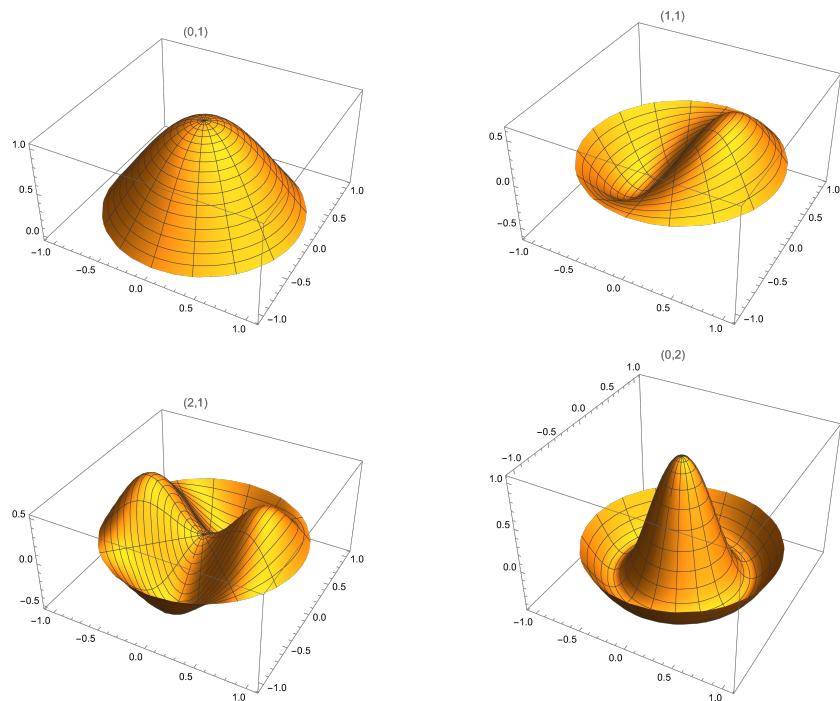
$$x_{0,1} = 2.40 \quad x_{1,1} = 3.83 \quad x_{2,1} = 5.14 \quad x_{0,2} = 5.52. \quad (7.5.98)$$

Volledig analoog als in het 1D geval vinden we een algemene oplossing dan als een superpositie van normale modes:

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{m,n} \left(s_{m,n} \cos\left(\frac{cx_{m,n}}{R}t\right) + t_{m,n} \sin\left(\frac{cx_{m,n}}{R}t\right) \right) A_{m,n}(\rho, \theta), \quad (7.5.99)$$

waarbij de vrije coëfficiënten $s_{m,n}, c_{m,n}$ volgen uit de beginvoorwaarden $f(\vec{x}) = u(\vec{x}, 0)$ en $g(\vec{x}) = \partial_t u(\vec{x}, t)|_{t=0}$. We werken dit hier niet verder uit. Zie ook het bord/werkcollege voor het makkelijkere 2D geval van een vierkante plaat.

⁶Een klassiek probleem in de wiskunde is 'Can one hear the shape of a drum?' Kunnen we met andere woorden de vorm van de rand volledig afleiden uit het frequentiespectrum. Het antwoord blijkt 'niet helemaal' te zijn (zie wikipedia).

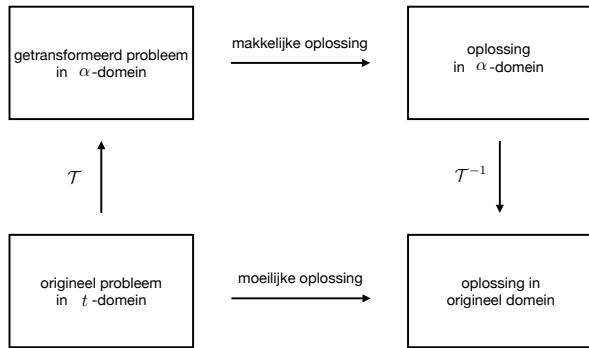


Figuur 7.3: Voor de 2D drum, de vier normale modes (7.5.94) met laagste frequenties, $(m, s) = (0, 1), (1, 1), (2, 1), (0, 2)$, voor $R = 1$, $\alpha = 0$.

Chapter 8

Integraaltransformaties

8.1 Fouriertransformatie



Figuur 8.1: Algemene filosofie bij het gebruik van integraaltransformaties.

8.1 Fouriertransformatie

8.1.1 Definities en eigenschappen

De **Fouriertransformatie** voor een (reële of complexe) functie $f(t)$ van een reële variabele t wordt gedefinieerd als¹:

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (8.1.4)$$

hierbij definiëren we $\int_{-\infty}^{+\infty} dt (\dots)$ als de symmetrische limiet van de eigenlijke integraal: $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} dt (\dots)$. Voor functies die stuksgewijs continu zijn en die bovendien **absoluut integreerbaar** zijn:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt |f(t)| < +\infty, \quad (8.1.5)$$

is deze Fouriertransformatie goed gedefinieerd en zal $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$. Voor functies die bovendien stuksgewijs continu afleidbaar zijn, is ook de inverse transformatie goed gedefinieerd. Deze **inverse Fouriertransformatie** heeft nagenoeg dezelfde vorm als de originele transformatie:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{f}(\omega) e^{+i\omega t} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (8.1.6)$$

waarbij we opmerken dat voor discontinue punten $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)](t) = \frac{1}{2}(f(t_+) + f(t_-))$.

We zien dus dat de Fouriertransformatie ons toelaat van een signaal $f(t)$ in het **tijdsdomein** $t \in [-\infty, +\infty]$ te schrijven als een superpositie van frequentiecomponenten $\propto e^{i\omega t}$. Het getransformeerde signaal $\hat{f}(\omega)$ geeft ons dan het signaal in het

¹Maple hanteert dezelfde conventie, $\text{fourier}(f(t), t, \omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)$, zoals hier gedefinieerd.

frequentiedomein ${}^2\omega \in]-\infty, +\infty[$. De overeenkomsten met de Fourierreeks en de DFT (hoofdstuk 6) zijn navenant, het verschil tussen de drie transformaties zit hem in de aard van zowel het tijdsdomein als frequentiedomein. Bij de DFT zijn beide domeinen discreet en eindig, terwijl de Fourierreeks een eindig continu tijdsdomein $[-T/2, T/2]$ heeft en een oneindig discreet frequentiedomein.

Verband met Fourierreeks

Net als we de Fourierreeks kunnen construeren als limiet van de discrete Fourier transformatie (zie § 6.2), kunnen we ook de Fouriertransformatie opvatten als een limiet van Fourierreeks, waarbij we de lengte van het beschouwde interval $[-T/2, T/2]$ naar oneindig laten gaan, $T \rightarrow \infty$. We starten hiervoor van de uitdrukking (6.1.15) voor de Fourierreeks:

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} t} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \hat{f}(\omega_n) e^{i\omega_n t} \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (8.1.7)$$

Op de derde lijn identificeren we $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$, $T c_n = \hat{f}(\omega_n)$ en $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$. De laatste lijn geldt in de limiet $T \rightarrow \infty$, waarbij de sommatie een integratie over de continue variabele ω wordt. Het is in deze limiet dat we de uitdrukking voor de inverse Fouriertransformatie (8.1.6) terugvinden.

Omgekeerd kunnen we dan de uitdrukking voor de Fouriercoëfficiënten (6.1.16) op de volgende manier herschrijven:

$$\begin{aligned} T c_n = \hat{f}(\omega_n) &= \int_0^T dt f(t) e^{-i \frac{2\pi n}{T} t} \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt f(t) e^{-i \frac{2\pi n}{T} t} \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt f(t) e^{-i\omega_n t}, \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

wat we in de limiet $T \rightarrow \infty$ herkennen als de uitdrukking (8.1.4) voor de Fouriertransformatie. Hier gebruikten we op de tweede lijn de veronderstelde periodiciteit van $f(t)$, $f(t) = f(t - T)$.

²Meer algemeen spreken we ook van het Fourierdomein. Hier interpreteren we t als een tijdsvariabele, zodat $\omega = 2\pi f$ inderdaad overeenkomt met een frequentie. Zoals we verderop in dit hoofdstuk zien, zijn er even goed toepassingen waarbij het originele domein een ruimte- (i.p.v. tijds-) karakter heeft (zie verderop in dit hoofdstuk).

Fourierrepresentatie van de Dirac-delta functie

De Fouriertransformatie kan ook gebruikt worden voor **distributies**, zoals de Dirac-delta functie $\delta(t - t_0)$. Deze wordt gedefinieerd door:

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \delta(t - t_0) f(t), \quad (8.1.9)$$

voor elke functie $f(t)$ die continu is in een omgeving van t_0 . Ruwweg gezegd kunnen we de Dirac-delta functie dus opvatten als een oneindig scherp rond t_0 gepikte puls.

We halen de Fourierrepresentatie van deze Dirac-delta functie uit de combinatie van de inverse transformatie \mathcal{F}^{-1} en de originele transformatie \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} f(t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{f}(\omega) e^{i\omega t_0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{i\omega(t_0-t)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t_0-t)} \right). \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

De verwisseling van de integratievolgorde van twee oneigenlijke integralen blijkt gerechtvaardigd voor de absoluut integreerbare functies die we hier beschouwen. Uit de laatste lijn kunnen we dan een uitdrukking aflezen voor de Dirac-delta functie:

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t_0-t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t-t_0)}, \quad (8.1.11)$$

waarbij we voor de laatste gelijkheid een verandering van integratievariabele, $\omega \rightarrow -\omega$, gebruiken. Door deze uitdrukking te identificeren met (8.1.6) kunnen we dit ook nog schrijven als

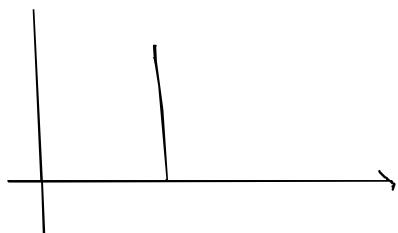
$$\mathcal{F}[\delta(t - t_0)](\omega) = e^{-i\omega t_0} \quad (8.1.12)$$

De moeilijk te hanteren Dirac-delta functie in het tijdsdomein, wordt een eenvoudige functie in het frequentie-domein.

Voorbeeld: de Fouriertransformatie van een discrete puls. Dit is een illustratief voorbeeld dat goed het verband tussen de signaalkarakteristieken in het tijdsdomein en het frequentiedomein illustreert. Voor de Fouriertransformatie van een discrete puls:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t \notin [-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2}] \\ h & -\frac{\Delta t}{2} < t < \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \quad (8.1.13)$$

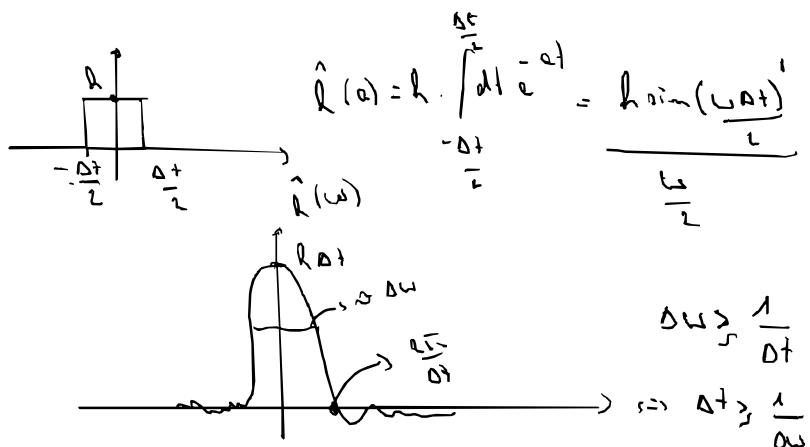
$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot \delta(t - t_0) f(t)$$



$$\begin{aligned} f(t_0) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \cdot \hat{f}(\omega) e^{i\omega t_0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{i\omega(t_0-t)} \\ \int \delta(t-t_0) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t_0-t)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t-t_0)} \end{aligned}$$

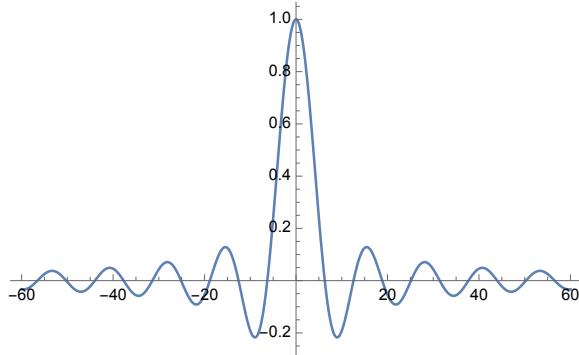
$$\boxed{\mathcal{F} [\delta(t-t_0)] = e^{-i\omega t_0}}$$

Rechteckig puls



vinden we:

$$\begin{aligned}
 \hat{h}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \\
 &= h \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} e^{-i\omega t} dt \\
 &= h \frac{\sin(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\frac{\omega}{2}}
 \end{aligned} \tag{8.1.14}$$



Figuur 8.2: De functie (8.1.14) voor $h = \Delta t = 1$.

We zien dat deze functie gepiekt is rond $\omega = 0$, met $\hat{h}(0) = h\Delta t$. En dat de breedte $\Delta\omega$ gaat als $\frac{1}{\Delta t}$. Heel korte pulsen in het tijdsdomein, impliceert een brede functie in het frequentiedomein en omgekeerd:

$$\Delta\omega \times \Delta t \gtrsim 1 \tag{8.1.15}$$

Dit fenomeen is welbekend in de muziek, waar heel korte staccato's onvermijdelijk een spreiding $\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t}$ voor de geluidsfrequenties betekenen. Het is ook een belangrijke wetmatigheid bij communicatie. Het maximum aantal bits dat per seconde kan worden verstuurd, f_B is begrensd door de bandbreedte $\Delta\omega$ van het communicatiekanaal: $f_B \sim 1/\Delta t \lesssim \Delta\omega$. Dezelfde wiskundige relatie speelt ook in de kwantumphysica waarbij een deeltje door een golffunctie wordt beschreven. Hierbij beschrijft de golffunctie in het 'tijdsdomein' dan de spreiding in de positie x en deze in het 'frequentiedomein' de spreiding in het momentum $p = \hbar\omega$ van het deeltje. Wat dan uiteindelijk $\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar$ geeft, de beroemde onzekerheidsrelatie van Heisenberg.

Bemerkt ook dat voor $h = 1/\Delta t$, de pulsfunctie $h_{\Delta t}(t)$, in de limiet $\Delta t \rightarrow 0$ een representatie van de Dirac-delta functie geeft: $\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} h_{\Delta t}(t)$. In deze limiet vinden we voor de Fouriergetransformeerde $\hat{h}(\omega) = 1$ voor $\omega \in]-\infty, +\infty[$, wat consistent is met (8.1.12).

Eigenschappen van de Fouriertransformatie

Enkele belangrijke eigenschappen van de Fouriertransformatie zijn:

- **Translatie in de tijd:** $\mathcal{F}[f(t - a)](\omega) = e^{-i\omega a} \hat{f}(\omega)$ met $\omega \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$;
- **Complexe toevoeging:** $\mathcal{F}[\overline{f(t)}](\omega) = \overline{\mathcal{F}[f(-t)](\omega)}$, $\omega \in \mathbb{R}$;
- **Translatie in de frequentie:** $\mathcal{F}[e^{iat} f(t)](\omega) = \hat{f}(\omega - a)$, $\omega \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$;
- **Modulatie:** $\mathcal{F}[f(t) \cos(at)](\omega) = \frac{1}{2} (\hat{f}(\omega - a) + \hat{f}(\omega + a))$, $\omega \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$;
- **Schaalwijziging:** $\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$, $\omega \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- **Tijdsreversie:** $\mathcal{F}[f(-t)](\omega) = \hat{f}(-\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.
- **Afleiding in frequentie-domein:** $\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f(t)](\omega) = -i \mathcal{F}[tf(t)](\omega)$

We geven het bewijs van de eerste eigenschap bij wijze van voorbeeld (bewijs de overige eigenschappen zelf als **oefening**). Er geldt dat

$$\mathcal{F}[f(t - a)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t - a) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} ds f(s) e^{-i\omega(s+a)}, \quad (8.1.16)$$

waarbij we de substitutie $s = t - a$ doorgevoerd hebben. Deze laatste uitdrukking kunnen we herschrijven als:

$$e^{-i\omega a} \int_{-\infty}^{+\infty} ds f(s) e^{-i\omega s} = e^{-i\omega a} \hat{f}(\omega), \quad (8.1.17)$$

waaruit het gestelde volgt.

8.1.2 Convolutietheorema

Beschouw een signaal $f(t)$ dat wordt *geconvoluteerd* met een *transferfunctie* $g(t)$:

$$F(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau g(t - \tau) f(\tau) \quad (8.1.18)$$

Voor de Fouriertransformatie van $F(t)$ krijgen we dan eenvoudigweg het product van de Fouriertransformaties van $f(t)$ en $g(t)$:

$$\mathcal{F}[(f * g)(t)](\omega) = \hat{F}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega). \quad (8.1.19)$$

Convolutionstheoreme

$$f(t) = (f * g)(t) \quad H = \int_{-\infty}^{+\infty} dz f(z) \cdot g(t-z)$$

$$\hat{f}(\omega) = \hat{F}[f * g](\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$$



Lage- & Drehungssatze

$$f(t) \quad f_T(t) = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} dz f(z) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} dz f(z) h(t-z) \quad (T, \frac{1}{T})$$

$$\hat{f}_T(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right)$$

8. 1 - 3 Fourierreihen vom eingeschränkt

$$F[f'(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot f'(t) \cdot e^{-i\omega t} = \cancel{f(t)} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i \omega \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot f(t) \cdot e^{-i\omega t}$$

$$F[f'(t)](\omega) = (-i\omega) F[f(t)](\omega)$$

Bewijs. Voor $\hat{F}(\omega)$ hebben we:

$$\begin{aligned}
 \hat{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau g(t - \tau) f(\tau) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} g(t - \tau) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f(\tau) e^{-i\omega \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{-i\omega t'} g(t') \\
 &= \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega),
 \end{aligned} \tag{8.1.20}$$

(op de derde lijn gaan we hier over op de nieuwe integratievariabele $t' = t - \tau$).

Toepassing: running mean. Dikwijs kan het interessant zijn om uit een functie $f(t)$ een 'lopend gemiddelde' (=running mean) te halen. Neem bijvoorbeeld de stap van weerdata naar klimaatdata, waarbij we geïnteresseerd zijn in de evolutie van de gemiddelde temperatuur, eerder dan de ogenblikkelijke temperatuur. Concreet willen we dan het signaal $f(t)$ vertalen naar een ogenblikkelijk gemiddelde via :

$$F_T(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} dt' f(t') \tag{8.1.21}$$

Dit is een convolutie met de pulsfunctie (8.1.13) (met $h = \frac{1}{T}$ en $\Delta t = T$):

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau h(t - \tau) f(\tau). \tag{8.1.22}$$

In het frequentiedomein wordt dit dan:

$$\hat{F}_T(\omega) = \hat{f}(\omega) \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}}. \tag{8.1.23}$$

8.1.3 Fouriertransformatie van afgeleiden

Een belangrijke eigenschap is dat de Fouriertransformatie van de afgeleide van een functie $f(t)$ op een heel eenvoudige manier gerelateerd is aan de Fouriertransformatie van de functie zelf:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f'(t)](\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt f'(t) e^{-i\omega t} \\
 &= f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \frac{d}{dt} e^{-i\omega t} \\
 &= i\omega \mathcal{F}[f(t)](\omega),
 \end{aligned} \tag{8.1.24}$$

waarbij we op de tweede lijn een partiële integratie toepasten en op de derde lijn gebruik maken van $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ wat volgt uit de absolute integreerbaarheid. Een afgeleide

feldverteilung

$$\partial_t^2 \phi(x,t) - c^2 \cdot \Delta_x^2 \cdot \phi(x,t) = 0$$

B.V.: $\phi(x,0) = f(x)$, $\partial_t \phi(x,t) \Big|_{t=0} = g(x)$

R.v. $\left. \begin{array}{l} \phi(x,t) \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \pm \infty \end{array} \right.$

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{\phi}(k,t) e^{+ikx} \quad \hat{\phi}(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi(x,t) e^{-ikx}$$

$$\partial_t^2 \hat{\phi}(k,t) + c^2 k^2 \hat{\phi}(k,t) = 0$$

$$\hat{\phi}(k,t) = \hat{\phi}_1(k) \cos ck - t + \hat{\phi}_2(k) \sin ck$$

$$\hat{\phi}_1(k) = \hat{f}(k), \quad ck \hat{\phi}_2(k) = \hat{j}(k)$$

in het tijdsdomein vertaalt zich dus naar de vermenigvuldiging met een factor $i\omega$ in het frequentiedomein. Dit veralgemeend naar n -de orde afgeleiden:

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)](\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}[f(t)](\omega) \quad (8.1.25)$$

Hierdoor vertalen differentiaalvergelijkingen in het originele domein zich naar dikwijls makkelijker op te lossen algebraische vergelijkingen in het Fourierdomein.

Toepassing: Fouriertransformatie van golfvergelijking.

Beschouw de 1D golfvergelijking op de volledige reële as,

$$\partial_t^2 \phi(x, t) - c^2 \partial_x^2 \phi(x, t) = 0, \quad x \in]-\infty, \infty[, \quad t \in [0, +\infty[\quad (8.1.26)$$

met beginvoorwaarden:

$$\phi(x, 0) = f(x) \quad \partial_t \phi(x, t)|_{t=0} = g(x) \quad (8.1.27)$$

We lossen dit op door gebruik te maken van een Fourierrepresentatie voor de x -variabele (niet de t -variabele!):

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{\phi}(k, t) e^{ikx} \quad (8.1.28)$$

Hiervoor brengen we de vergelijkingen (8.1.26) en (8.1.30) naar het Fourierdomein (k -domein), door toepassing van de Fouriertransformatie op elke term in de vergelijking:

$$\partial_t^2 \hat{\phi}(k, t) + k^2 c^2 \hat{\phi}(k, t) = 0 \quad k \in]-\infty, \infty[, \quad t \in [0, +\infty[\quad (8.1.29)$$

$$\hat{\phi}(k, 0) = \hat{f}(k) \quad \partial_t \hat{\phi}(k, t)|_{t=0} = \hat{g}(k), \quad (8.1.30)$$

waarbij we gebruik maken van het feit dat de afgeleiden naar t commuteren met de x -integratie, $\int dx \partial_t^n(\dots) = \partial_t^n (\int dx (\dots))$, en van (8.1.25) ($\partial_x \rightarrow ik$). Voor een vaste k is (8.1.29) de harmonische vergelijking met eigenfrequentie $\omega_0 = c|k|$. Zo vinden we onmiddellijk als algemene oplossing:

$$\hat{\phi}(k, t) = \hat{\phi}_1(k) \cos ckt + \hat{\phi}_2(k) \sin ckt. \quad (8.1.31)$$

Leggen we ook nog de beginvoorwaarden op, dan krijgen we:

$$\hat{\phi}_1(k) = \hat{f}(k) \quad \text{en} \quad \hat{\phi}_2(k) = \frac{1}{ck} \hat{g}(k). \quad (8.1.32)$$

Tot slot brengen we ϕ terug naar het x -domein, en vinden we de oplossing:

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk (\hat{\phi}_1(k) \cos ckt + \hat{\phi}_2(k) \sin ckt) e^{ikx}, \quad (8.1.33)$$

met $\hat{\phi}_1(k)$ en $\hat{\phi}_2(k)$ gegeven door (8.1.32). Dezelfde strategie kan ook toegepast worden op (partiële) differentiaalvergelijkingen van een andere vorm, zie hiervoor de oefeningenlijst bij dit hoofdstuk.

Slotbemerk: specifiek voor de 1D golfvergelijking is dat de algemene oplossing kan geschreven worden als de som van een rechtslopende en een linkslopende golf, met snelheid $\pm c$:

$$\phi(x, t) = \phi_+(x - ct) + \phi_-(x + ct). \quad (8.1.34)$$

Dit zien we explicet door (8.1.33) te herschrijven:

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{\phi}_+(k) e^{ik(x-ct)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{\phi}_-(k) e^{ik(x+ct)}, \quad (8.1.35)$$

met $\hat{\phi}_{\pm}(k) = \frac{\hat{\phi}_1(k) \pm i\hat{\phi}_2(k)}{2}$.

8.2 Laplacetransformatie

8.2.1 Definitie en eigenschappen

Een beperking van de Fouriertransformatie is de voorwaarde van absolute integreerbaarheid, die bijvoorbeeld polynomiaal stijgende functies $f(t) \stackrel{\lim t \rightarrow \infty}{\sim} t^\alpha$ met $\alpha \geq -1$, of exponentieel stijgende functies $f(t) \stackrel{\lim t \rightarrow \infty}{\sim} e^{\alpha t}$ met $\alpha > 0$ uitsluit. Ook de Fouriertransformatie van de circulaire functies $\sin \omega t, \cos \omega t$ is singulier. De Laplace transformatie is een uitbreiding van de Fouriertransformatie die deze beperkingen overstijgt. Deze integraaltransformatie wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{+\infty} dt f(t) e^{-zt}}, \quad (8.2.36)$$

hier is z een complexe parameter. $\mathcal{L}[f](z)$ wordt het **Laplacebeeld** of de **Laplace-transformatie** genoemd van f . We bemerken twee belangrijke verschillen met de Fouriertransformatie:

1. Anders dan bij de Fouriertransformatie wordt er nu over het interval $[0, +\infty[$ geïntegreerd. Twee functies $f_1(t)$ en $f_2(t)$ die samenvallen op de positieve reële as, $f_1(t) = f_2(t)$ voor $t \geq 0$, hebben dus hetzelfde Laplacebeeld. We kunnen de Laplacetransformatie ook formeel herschrijven als een integraal over de volledige reële as:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \theta(t) e^{-zt}, \quad (8.2.37)$$

met $\theta(t)$ de Heaviside functie:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (8.2.38)$$

De functie $\tilde{f}(t) = f(t)\theta(t)$ verdwijnt voor $t < 0$. Dergelijke functies worden ook nog *causale functies* genoemd.

8.2 Laplace transformatie

Slotbemerk: specifiek voor de 1D golfvergelijking is dat de algemene oplossing kan geschreven worden als de som van een rechtslopende en een linkslopende golf, met snelheid $\pm c$:

$$\phi(x, t) = \phi_+(x - ct) + \phi_-(x + ct). \quad (8.1.34)$$

Dit zien we explicet door (8.1.33) te herschrijven:

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{\phi}_+(k) e^{ik(x-ct)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{\phi}_-(k) e^{ik(x+ct)}, \quad (8.1.35)$$

met $\hat{\phi}_{\pm}(k) = \frac{\hat{\phi}_1(k) \pm i\hat{\phi}_2(k)}{2}$.

8.2 Laplacetransformatie

8.2.1 Definitie en eigenschappen

Een beperking van de Fouriertransformatie is de voorwaarde van absolute integreerbaarheid, die bijvoorbeeld polynomiaal stijgende functies $f(t) \stackrel{\lim t \rightarrow \infty}{\sim} t^\alpha$ met $\alpha \geq -1$, of exponentieel stijgende functies $f(t) \stackrel{\lim t \rightarrow \infty}{\sim} e^{\alpha t}$ met $\alpha > 0$ uitsluit. Ook de Fouriertransformatie van de circulaire functies $\sin \omega t, \cos \omega t$ is singulier. De Laplace transformatie is een uitbreiding van de Fouriertransformatie die deze beperkingen overstijgt. Deze integraaltransformatie wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{+\infty} dt f(t) e^{-zt}}, \quad (8.2.36)$$

hier is z een complexe parameter. $\mathcal{L}[f](z)$ wordt het **Laplacebeeld** of de **Laplace-transformatie** genoemd van f . We bemerken twee belangrijke verschillen met de Fouriertransformatie:

1. Anders dan bij de Fouriertransformatie wordt er nu over het interval $[0, +\infty[$ geïntegreerd. Twee functies $f_1(t)$ en $f_2(t)$ die samenvallen op de positieve reële as, $f_1(t) = f_2(t)$ voor $t \geq 0$, hebben dus hetzelfde Laplacebeeld. We kunnen de Laplacetransformatie ook formeel herschrijven als een integraal over de volledige reële as:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \theta(t) e^{-zt}, \quad (8.2.37)$$

met $\theta(t)$ de Heaviside functie:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (8.2.38)$$

De functie $\tilde{f}(t) = f(t)\theta(t)$ verdwijnt voor $t < 0$. Dergelijke functies worden ook nog *causale functies* genoemd.

Laplace-transformatie

$$f(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}, \omega \in \mathbb{R}$$

↓
 $f(t) = e^{-t}$

$$\tilde{F}(z) = \mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{\infty} dt f(t) e^{-zt} \quad \begin{matrix} \text{Laplace} \\ \text{definition} \end{matrix}$$

1) $t \in [0, +\infty[$, $f_1(t), f_2(t)$, $f_1(t) = f_2(t), t \geq 0$

causal: $\tilde{f}(t) = \Theta(t) \cdot f(t), \Theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

Heaviside

2) Exponentiële damped

$$z = x + i\gamma \quad |e^{-zt}| = e^{-xt}$$

$f(t) \leq M e^{nxt}$, voor $x > n_0$, zodat $\tilde{F}(z)$ bestaat

Voorbeeld:

$$\boxed{\bullet f(t) = 1} \quad (\Theta(t)) \rightarrow \tilde{F}(z) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L dt e^{-zt} = \frac{1}{z} (1 - e^{-zL})$$

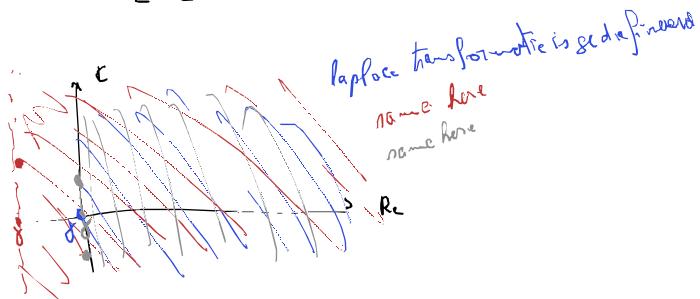
$$= \frac{1}{z} \text{ voor } \operatorname{Re}(z) > 0$$

maar voor $\operatorname{Re}(z) \leq 0 \rightarrow$ infinitie dus niet
definieerd in het Reel domain

$$\boxed{\bullet f(t) = e^{at}}$$

$$\tilde{F}(z) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L dt e^{(z-a)t}$$

$$= \frac{1}{z-a} \quad \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(a)$$



$$\boxed{\bullet f(t) = \text{constant}} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{F}(z) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L dt \cdot \frac{1}{2} (e^{iat} + e^{-iat}) e^{-zt}$$

$$= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{i} \left(\frac{-(z-i\omega) + -(z+i\omega)}{e^{i\omega L} - e^{-i\omega L}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-i\omega} + \frac{1}{z+i\omega} \right) = \frac{z}{z^2 + \omega^2} \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

Laplace voor allen! Wanneer $\int_0^L f(t) e^{-zt} dt$ voor $z = 0$ convergeert.

$$\bullet f(t) = \frac{1}{t} \quad (\text{niet convergent voor } t=0)$$

2. Schrijven we $z = x + iy$ dan hebben we $|e^{-zt}| = e^{-xt}$. Het is dankzij deze exponentiële factor dat het convergentiegedrag van de Laplaceintegraal voor $t \rightarrow +\infty$ beter is dan voor de Fourierintegraal. In het bijzonder hebben we dat, voor functies $f(t)$ die voor $t \geq 0$ voldoen aan $|f(t)| < M e^{s_0 t}$ voor reële constanten M en s_0 , de Laplaceintegraal zal convergeren indien $\operatorname{Re}(z) > s_0$, in het deel dus van het complexe vlak dat rechts ligt van de verticale rechte $x = s_0$.

Voorbeelden.

- Het Laplacebeeld van $f(t) = 1$.

$$\int_0^{+\infty} dt e^{-zt} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L dt e^{-zt} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-zL}}{z} \quad (8.2.39)$$

Schrijven we $e^{-zL} = e^{-(x+iy)L} = e^{-xL}e^{-iyL}$, dan is het duidelijk dat de integraal convergeert, $\lim_{L \rightarrow \infty} e^{-zL} = 0$, voor $x > 0$, i.e. $\operatorname{Re}(z) > 0$. Voor $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ convergeert de Laplacetransformatie niet. We vinden dus:

$$\mathcal{L}[1](z) = \frac{1}{z} \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (8.2.40)$$

- Het Laplacebeeld van $f(t) = e^{at}$ met a een complexe constante.

$$\int_0^{+\infty} dt e^{at} e^{-zt} = \int_0^{+\infty} dt e^{-(z-a)t} = \lim_{L \rightarrow +\infty} dt \int_0^L e^{-(z-a)t} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-(z-a)L}}{z - a}. \quad (8.2.41)$$

Analoog aan het voorgaande voorbeeld bekomen we dat

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} e^{-(z-a)L} = 0 \quad \text{als } \operatorname{Re}(z - a) > 0, \quad (8.2.42)$$

terwijl in alle andere gevallen deze limiet niet bestaat. We vinden dus

$$\mathcal{L}[e^{at}](z) = \frac{1}{z - a} \quad \operatorname{Re}(z - a) > 0. \quad (8.2.43)$$

- Het Laplacebeeld van $\cos(at)$ met a een reële constante. Uit $\cos(at) = \frac{1}{2}(e^{iat} + e^{-iat})$ vinden we uit het vorige voorbeeld, door toepassing van de lineariteit (8.0.2):

$$\mathcal{L}[\cos(at)](z) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{iat}] + \mathcal{L}[e^{-iat}]) = \frac{1}{2(z - ia)} + \frac{1}{2(z + ia)} = \frac{z}{z^2 + a^2} \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (8.2.44)$$

In deze voorbeelden zien we explicet, in overeenstemming met de bemerking 2 hierboven, dat voor een Laplacetransformeerbare functie $f(t)$ het Laplacebeeld $F(z)$

bestaat in een rechterdeel van complex vlak, $\operatorname{Re}(z) > \gamma_f$. Men spreekt hier over de *convergentieabscis* γ_f . Typisch kunnen we γ_f ook rechtstreeks aflezen uit het Laplacebeeld als de reële waarde van het meest rechtse singuliere punt van $F(z)$. Men kan zich ook afvragen of alle functies $f(t)$ Laplacetransformeerbaar zijn, i.e. een Laplacebeeld hebben in een deel van het complexe vlak? Het antwoord is neen, zo zal de Laplace-integraal $\mathcal{L}[f](z)$ van $f(t) = e^{t^2}$ of $f(t) = t^\alpha$ met $\alpha \leq -1$ voor geen enkele waarde van z convergeren; in het eerste geval doordat de Laplaceintegraal divergeert op oneindig, in het tweede geval doordat er een divergentie optreedt rond nul.

In tabel 8.2.1 geven we een overzicht van gangbare Laplacetransformaties:

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)](z)$
1	$\frac{1}{z}$
$\exp(at)$	$\frac{1}{z-a}$
$t^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{z^{n+1}}$
\sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2z^{\frac{3}{2}}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{z^2 + a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{z}{z^2 + a^2}$
$t \sin(ta)$	$\frac{2az}{(z^2 + a^2)^2}$
$t \cos(ta)$	$\frac{z^2 - a^2}{(z^2 + a^2)^2}$
$\sin(at + b)$	$\frac{z \sin(b) + a \cos(b)}{z^2 + a^2}$
$\cos(at + b)$	$\frac{z \cos(b) - a \sin(b)}{z^2 + a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{z^2 - a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{z}{z^2 - a^2}$

Tabel 8.1: Bekende Laplacetransformaties

Enkele eigenschappen van de Laplacetransformatie (toon deze als **oefening** zelf aan). Als de functies f en g laplacebeelden $F(z)$ en $G(z)$ bezitten voor respectievelijk $\operatorname{Re}(z) > \gamma_f$ en $\operatorname{Re}(z) > \gamma_g$, dan geldt:

- **Translatie:** $\mathcal{L}[f(t-a)\theta(t-a)](z) = \exp(-az)F(z)$, $\operatorname{Re}(z) > \gamma_f$, $a > 0$;
- **Lineariteit:** $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](z) = \alpha F(z) + \beta G(z)$, in $\operatorname{Re}(z) > \max(\gamma_f, \gamma_g)$;
- **Demping:** $\mathcal{L}[f(t) \exp(-at)](z) = F(z+a)$, $\operatorname{Re}(z+a) > \gamma_f$;
- **Schaalwijziging:** $\mathcal{L}[f(at)](z) = \frac{1}{a}F\left(\frac{z}{a}\right)$, $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{a}\right) > \gamma_f$, $a > 0$;
- **Afleiding in frequentie-domein:** $\frac{d}{dz}\mathcal{L}[f(t)](z) = \mathcal{L}[-tf(t)](z)$, $\operatorname{Re}(z) > \gamma_f$,

8.2.2 De inverse Laplacetransformatie

De Laplacetransformatie kan enkel nuttig zijn als we Laplacegetransformeerde functies $F(z)$ via de inverse transformatie kunnen terugbrengen naar het originele domein:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(z)](t). \quad (8.2.45)$$

Wat betreft het gedefinieerd zijn van deze inverse operatie hebben we vooreerst de belangrijke stelling van Lerch: Als $\mathcal{L}[f_1(t)](z) = \mathcal{L}[f_2(t)](z)$ dan is voor $t > 0$, $f_1(t) = f_2(t) + N(t)$ met

$$\int_0^{t_0} N(t) dt = 0 \quad \forall t_0 > 0 \quad (8.2.46)$$

of $N(t) \neq 0$ in een aftelbaar aantal punten. Bij ingenieurstoepassingen, waar we met (stuksgewijs) **continue functies** werken, kunnen we $N(t) = 0$ nemen, en **is de inverse Laplace transformatie dus uniek bepaald**.

Deze inverse transformatie wordt algemeen gegeven door de Bromwich integraal, die een integratie vergt in het complexe vlak, wat buiten het bestek van deze cursus valt. De inverse transformatie voor een bepaalde $F(z)$ kan in vele gevallen ook gevonden worden door het Laplacebeeld $F(z)$ via bovenstaande eigenschappen van de Laplacetransformatie te herschrijven als een lineaire combinatie van gekende Laplacebeelden uit bovenstaande tabel. Zie de voorbeelden hieronder. Ook Maple zal in vele gevallen een analytisch antwoord geven, zie de commandos 'laplace' (Laplacetransformatie) en vooral 'invlaplace' (inverse Laplacetransformatie).

Voorbeelden

- We starten met het Laplacebeeld $L(z) = \frac{z}{z^2+2z+2}$ in $\operatorname{Re}(z) > -1$. Schrijven we dit beeld als

$$L(z) = \frac{z}{1+(z+1)^2}, \quad \operatorname{Re}(z) > -1 \quad (8.2.47)$$

$$\mathcal{L}^{-1} = \cos t - \sin t$$

Bewijs dampedeigenschap

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t) e^{-at}] (z) &= \int_0^\infty dt f(t) e^{-(z+a)t} \\ &= \mathcal{L}[f(t)] (z+a) \end{aligned}$$

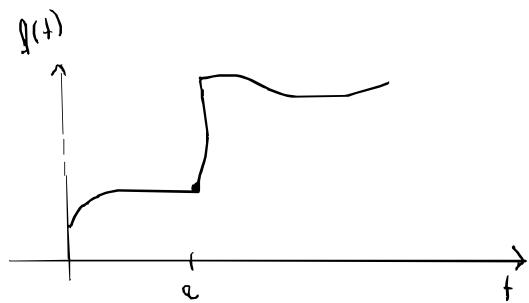
een dampeding in de tijd domineert een transmissie voor een losse dampeding.

Tijdsreep

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$$

inv Laplace (maple)

"old school"



dan denken we aan een combinatie van cosinus, sinus en de dempingseigenschap, aangezien

$$L(z) = \frac{z+1}{1+(z+1)^2} - \frac{1}{1+(z+1)^2} = \mathcal{L}[\cos(t)\exp(-t)](z) - \mathcal{L}[\sin(t)\exp(-t)](z), \quad (8.2.48)$$

zodat een Laplace-origineel gegeven wordt door $f(t) = \exp(-t)(\cos(t) - \sin(t))$ dat continu is in $[0, +\infty[$

- Gegeven het Laplacebeeld $L(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ in $\operatorname{Re}(z) > 0$. Dit kunnen we herschrijven als

$$L(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (8.2.49)$$

Hierin herkennen we

$$L(z) = \mathcal{L}[1](z) - \mathcal{L}[\exp(-t)](z), \quad (8.2.50)$$

zodat een origineel gegeven wordt door $f(t) = (1 - \exp(-t))$ dat continu is in $[0, +\infty[$.

- Gegeven het Laplacebeeld $L(z) = \frac{z}{z^2-1}$ in $\operatorname{Re}(z) > 1$. We kunnen dit herschrijven als

$$L(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}}{z+1} \quad (8.2.51)$$

Hierin herkennen we

$$L(z) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\exp(t)](z) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[\exp(-t)](z), \quad (8.2.52)$$

zodat $f(t) = \cosh(t)$ een Laplace-origineel is dat continu is in $[0, +\infty[$.

8.2.3 Laplacetransformatie van afgeleiden

Met het oog op het oplossen differentiaalvergelijkingen, is het net als voor de Fouriertransformatie interessant van de Laplacetransformatie van de afgeleide functie $f'(t)$ te bekijken. We hebben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)](z) &= \int_0^{+\infty} dt f'(t) e^{-zt} \\ &= f(t)e^{-zt}|_0^\infty + z \int_0^{+\infty} dt f(t) e^{-zt} \\ &= z\mathcal{L}[f(t)](z) - f(0) \quad (\text{voor } \operatorname{Re}(z) > \gamma_f), \end{aligned} \quad (8.2.53)$$

waar we op de tweede lijn partieel integratie gebruikten en op de derde lijn gebruikten dat $|f(t)| < M e^{\gamma_f t}$. We hebben dus voor een continue afleidbare functie $f(t)$ met Laplacebeeld $F(z)$:

$$\mathcal{L}[f'(t)](z) = zF(z) - f(0) \quad (8.2.54)$$

Differentialformalre van geleidin

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)](z) &= \int_0^\infty dt f'(t) e^{-zt} \\ &= f(t) e^{-zt} \Big|_0^\infty + z \cdot \int_0^\infty dt f(t) e^{-zt} \\ &= \underbrace{-f(0)}_{\text{handwerte}} + \mathcal{L}[f(t)](z) \end{aligned}$$

handwerte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)](z) &= -f^{(n-1)}(0) + z \mathcal{L}[f^{(n-1)}(t)](z) \\ &= -f^{(n-1)}(0) - 2f^{(n-2)}(0) - \dots - 2^{n-1} \cdot f(0) + 2^n \cdot \mathcal{L}[f(t)](z) \end{aligned}$$

Woofteln

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}(t) + \omega_0^2 \cdot u(t) = \sin \omega t \\ u(0) = u_0 \\ \dot{u}(0) = u_1 \end{array} \right.$$

$$u(t) \rightarrow U(z) \quad \mathcal{L}[u''(t)](z) = -u_1 - 2u_0 + z^2 U(z)$$

$$-u_1 - 2u_0 + z^2 \cdot U(z) + \omega_0^2 \cdot U(z) = \frac{\omega \omega}{z^2 + \omega^2}$$

$$U(z) = \frac{1}{(z^2 + \omega_0^2)} \left(\frac{\omega \omega}{z^2 + \omega^2} + u_1 + 2u_0 \right)$$

→ inverse:

$$u(t) = u_0 + u_0 (\omega_0 t) + \frac{u_1}{\omega_0} \cdot n \pi - \omega t + \frac{\omega}{\omega_0 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega t \right)$$

Via inductie vinden we dan (voor voldoende afleidbare functies):

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](z) = z^n F(z) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (8.2.55)$$

Een Laplacetransformatie zal een differentiaalvergelijking dus omzetten in een algebraïsche vergelijking, met inbegrip van de beginvoorwaarden.

Voorbeeld. Als voorbeeld beschouwen we de harmonische oscillator vergelijking met externe periodieke kracht (tweede geval van § 5.3), met algemene beginvoorwaarden:

$$\begin{cases} u'' + \omega_0^2 u = a \sin \omega t, \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{cases} \quad (8.2.56)$$

De Laplacegetransformeerde vergelijking leest dan:

$$z^2 U(z) - zu_0 - u_1 + \omega_0^2 U(z) = \frac{a\omega}{z^2 + \omega^2} \quad (8.2.57)$$

Dit lossen we op naar $U(z)$:

$$U(z) = \frac{zu_0 + u_1}{z^2 + \omega_0^2} + \frac{a\omega}{(z^2 + \omega^2)(z^2 + \omega_0^2)}. \quad (8.2.58)$$

De oplossing $u(t)$ volgt dan uit de inverse Laplacetransformatie: $u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(z)](t)$. We bepalen deze hier handmatig. De inverse transformatie van de eerste term identificeren we makkelijk via de tabel (8.2.1):

$$U_1(z) = \frac{zu_0 + u_1}{z^2 + \omega_0^2} \quad \rightarrow \quad u_1(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{u_1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (8.2.59)$$

De tweede term heeft iets meer werk nodig:

$$U_2(z) = \frac{a\omega}{(z^2 + \omega^2)(z^2 + \omega_0^2)} = \frac{a\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\frac{1}{z^2 + \omega^2} - \frac{1}{z^2 + \omega_0^2} \right) \quad (8.2.60)$$

waaruit we dan opnieuw via de tabel (8.2.1) halen:

$$u_2(t) = \frac{a\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \quad (8.2.61)$$

Nemen we alles samen dan vinden we uiteindelijk:

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{L}^{-1}[U_1(z) + U_2(z)](t) \\ &= u_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{u_1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right). \end{aligned} \quad (8.2.62)$$

Formularium

Taylorontwikkeling

- $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$
- $\sin(x) = x$ voor kleine x

Differentiaalvergelijkingen

- $y'(x) = \lambda y(x)$
- $y''(x) = \lambda y(x)$ (hier werden 3 gevallen besproken)

Complexe getallen

- $z = a + bi$ (algemene vorm)
- $i^2 = -1$
- **inverse:** $(a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$
- **complement:** $z = a + bi \rightarrow z^* = a - bi$
- **modulus:** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Hoofdstelling van de algebra

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

met $b = -4 * a * c$

Lineare Algebra

$$\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \cos(\theta) \text{ // Hoek tussen twee vectoren}$$

$$v^{\parallel} = (u_1 \cdot v) u_1 + (u_2 \cdot v) u_2 + \dots \text{ // Projectie van } v$$

Matrixen

- Jacobiaan: $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$

Oefeningen

Huis 1

```
[> restart: with(LinearAlgebra):
[> t := taylor(sqrt(x+4)^3, x = 0, 3);
v := sqrt(y+4)^3;
t := 8 + 3x +  $\frac{3}{16}x^2 + O(x^3)$ 
v :=  $(y+4)^{3/2}$  (1)

[> # voor  $5^{3/2}$  nemen we x = 1
[> x_1 := evalf( $8 + 3 + \frac{3}{16}$ )
x_1 := 11.18750000 (2)

[> # Wat is de fout? Wel, dat zal de derde term zijn ( $O(x^3)$ )
[> error_1 := abs( $\frac{x^3}{6} \cdot \text{diff}(v, y\$3)$ );
error_1 := evalf(subs(y = 0, x = 1, error_1))
error_1 :=  $\frac{|x|^3}{16|y+4|^{3/2}}$ 
error_1 := 0.007812500000 (3)

[> # voor  $6^{3/2}$  nemen we x = 2
[> x_2 := evalf( $8 + 3 \cdot 2 + \frac{3}{16} \cdot 2^2$ )
x_2 := 14.75000000 (4)

[> error_2 := abs( $\frac{x^3}{6} \cdot \text{diff}(v, y\$3)$ )
error_2 :=  $\frac{|x|^3}{16|y+4|^{3/2}}$  (5)

[> error_2 := evalf(subs(x = 2, y = 0, error_2))
error_2 := 0.0625000000 (6)

[> # Waarom nemen we y = 0? Omdat dit de grootste fout zou maken, we
nemen altijd max. Dus fout \element {0, 1, 2}
[>
```

Figure 8.1: Exercise 1

```

> restart:
> # i
> limit( sin(3*x)/sinh(x), x=0)           3
                                         (1)
> # ii
> limit( (tan(x)-tanh(x))/sinh(x)-x, x=0) 4
                                         (2)
> # iii
> limit( (sqrt(1-a*x)-sqrt(1+a*x))/x, x=0) -a
                                         (3)
> # IV
> limit( (ln(1+x)+ln(1-x))/x^2, x=0)      -1
                                         (4)

```

Figure 8.2: Exercise 2

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta \quad B:$$

$$\begin{aligned}
 e^{\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \rightarrow e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \theta^n}{n!} \\
 &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^4}{24} + \dots \\
 &= \underbrace{i\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots\right)}_{\sin\theta} + \underbrace{-\frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + \dots}_{\cos\theta} \\
 &= \cos\theta + i\sin\theta
 \end{aligned}$$

Figure 8.3: Exercise 3

$$\begin{aligned}
 a &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 a \cdot b &= 1 \cdot (-1) + (1 \cdot 1) + (-1 \cdot 0) = 0 \\
 A < ab^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Figure 8.4: Exercise 4

WC 1

```

> p := x→x·(x - 1) - a
       $p := x \mapsto x \cdot (x - 1) - a$  (1)

> # i
> p_i := subs(a = 0, p(x))
       $p_i := x \cdot (x - 1)$  (2)

> solve(p_i = 0)
      0, 1 (3)

> # Dus lambda = 0, en lambda = 1
> # Benader naar x = 0
> x_0 := 0 + u·a + v·a2
       $x_0 := va^2 + ua$  (4)

> p_subs_0 := subs(x = x_0, p(x))
       $p_{subs\_0} := (va^2 + ua) \cdot (va^2 + ua - 1) - a$  (5)

> p_expand_0 := expand(p_subs_0)
       $p_{expand\_0} := a^4 v^2 + 2 a^3 u v + a^2 u^2 - v a^2 - u a - a$  (6)

> coeff_1_0 := coeff(p_expand_0, a, 1)
       $coeff_{1\_0} := -u - 1$  (7)

> coeff_2_0 := coeff(p_expand_0, a, 2)
       $coeff_{2\_0} := u^2 - v$  (8)

> solve_0 := solve({coeff_1_0 = 0, coeff_2_0 = 0}, {u, v})
       $solve_0 := \{u = -1, v = 1\}$  (9)

> result_0 := subs(u = rhs(solve_0[1]), v = rhs(solve_0[2]), x_0)
       $result_0 := a^2 - a$  (10)

>
> # Benader 1
> x_1 := 1 + u·a + v·a2
       $x_1 := va^2 + ua + 1$  (11)

> p_subs_1 := subs(x = x_1, p(x))
       $p_{subs\_1} := (va^2 + ua + 1) \cdot (va^2 + ua) - a$  (12)

> p_expand_1 := expand(p_subs_1)
       $p_{expand\_1} := a^4 v^2 + 2 a^3 u v + a^2 u^2 + v a^2 + u a - a$  (13)

> coeff_1_1 := coeff(p_expand_1, a, 1)
       $coeff_{1\_1} := u - 1$  (14)

> coeff_1_2 := coeff(p_expand_1, a, 2)
       $coeff_{1\_2} := u^2 + v$  (15)

> solve_1 := solve({coeff_1_1 = 0, coeff_1_2 = 0}, {u, v})
       $solve_1 := \{u = 1, v = -1\}$  (16)

> result_1 := subs(u = rhs(solve_1[1]), v = rhs(solve_1[2]), x_1)

```

Figure 8.5: Exercise 1

```

> # Define the Taylor expansion for a forward approximation
Taylor_y := (h,t) → y(t) + h*diff(y(t),t) + (1/2)*h^2*diff(y(t),t$2) + (1/6)
    *h^3*diff(y(t),t$3) + (1/24)*h^4*diff(y(t),t$4):

# Define the Taylor expansion for a backward approximation
Taylor_g := (h,t) → y(t) - h*diff(y(t),t) + (1/2)*h^2*diff(y(t),t$2) - (1/6)
    *h^3*diff(y(t),t$3) + (1/24)*h^4*diff(y(t),t$4):

# Define the result expression
result := (h,t) → (Taylor_y(h,t) + Taylor_g(h,t) - 2*y(t)) / h^2:

# Simplify the result
simplified_result := simplify(result(h,t));


$$simplified\_result := \frac{h^2 \left( \frac{d^4}{dt^4} y(t) \right)}{12} + \frac{d^2}{dt^2} y(t) \quad (1)$$


>
#i) kwadratisch
#ii
> restart;
with(plots):
with(plottools):

t_val := evalf( $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ );

# Define the function y and its 2nd derivative
y := t → -cos(t);

# Define the error function as a function of h for a specific t
err := (h) → abs( $y(t_{val}) - \frac{(\cos(h+t_{val}) + \cos(h-t_{val}) - 2\cos(t_{val}))}{h^2}$ );

# Plot the error as a function of h with log-log scale
loglogplot(err(h), h = 10^{-8} .. 10^3);
t_val := 1.047197551
y := t → -cos(t)
err := h →  $|y(t_{val}) - \frac{\cos(h+t_{val}) + \cos(h-t_{val}) - 2\cos(t_{val})}{h^2}|$ 

```

Figure 8.6: Exercise 2

$$3) \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_n &= \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{(2, -1, 0, 0)^T}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} (2, -1, 0, 0)^T \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, 0 \right)^T \end{aligned}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2 - (\vec{v}_n \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_n =$$

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_3 - \sum_{k=1}^{n-1} (\vec{v}_k \cdot \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_k$$

⋮

$$2) \quad \text{open } \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\omega'' = (v_1 \cdot \omega) v_1 + (v_2 \cdot \omega) v_2$$

$$\text{Remember: } \omega = \omega'' + \omega^\perp$$

Figure 8.7: Exercise 3

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> v1 := Vector([2·I, -1, 0, 0]):
> v2 := Vector([I, 0, 3, 1]):
> v3 := Vector([1, 1 - I, 0, 1]):
> v4 := Vector([0, 0, 0, I]):
> u1 := simplify( $\frac{v1}{\text{Norm}(v1, 2)}$ ):
> u2 := simplify( $\frac{(v2 - (u1 \cdot v2) \cdot u1)}{\text{Norm}(v2 - (u1 \cdot v2) \cdot u1, 2)}$ )

$$u2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{255} \sqrt{255} \\ \frac{2\sqrt{255}}{255} \\ \frac{\sqrt{255}}{17} \\ \frac{\sqrt{255}}{51} \end{bmatrix} \quad (1)$$

> u3 := simplify( $\frac{(v3 - (u1 \cdot v3) \cdot u1 - (u2 \cdot v3) \cdot u2)}{\text{Norm}(v3 - (u1 \cdot v3) \cdot u1 - (u2 \cdot v3) \cdot u2, 2)}$ ):
> u4 := simplify( $\frac{(v4 - (u1 \cdot v4) \cdot u1 - (u2 \cdot v4) \cdot u2 - (u3 \cdot v4) \cdot u3)}{\text{Norm}(v4 - (u1 \cdot v4) \cdot u1 - (u2 \cdot v4) \cdot u2 - (u3 \cdot v4) \cdot u3, 2)}$ )

$$u4 := \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{559} - \frac{9I}{1118}\right) \sqrt{559} \\ \left(-\frac{9}{559} - \frac{6I}{559}\right) \sqrt{559} \\ \left(\frac{3}{1118} - \frac{11I}{1118}\right) \sqrt{559} \\ \frac{3I}{86} \sqrt{559} \end{bmatrix} \quad (2)$$

>
> # Projectie
> W := Vector([3, 1 - I, 2 + I, 1]):
> y_proj := simplify((u1 · W) · u1 + (u2 · W) · u2)

$$(3)$$


```

Figure 8.8: Exercise 3

Bord 1

```

> p := x→x·(x - 1)·(x - 2)·(x - 4) - a
      p := x→x·(x - 1)·(x - 2)·(x - 4) - a          (1)
> x_0 := u·a + v·a^2
      x_0 := v a^2 + u a                         (2)
> p_subs := subs(x = x_0, p(x))
      p_subs := (v a^2 + u a) (v a^2 + u a - 1) (v a^2 + u a - 2) (v a^2 + u a - 4) - a   (3)
> p_expand := expand(p_subs)
      p_expand := a^8 v^4 + 4 a^7 u v^3 + 6 a^6 u^2 v^2 - 7 a^6 v^3 + 4 a^5 u^3 v - 21 a^5 u v^2 + a^4 u^4
      - 21 a^4 u^2 v + 14 a^4 v^2 - 7 a^3 u^3 + 28 a^3 u v + 14 a^2 u^2 - 8 v a^2 - 8 u a - a   (4)
> # Only keep the 1st order and second order
>
> coeff_1 := coeff(p_expand, a, 1)
      coeff_1 := -8 u - 1                         (5)
> coeff_2 := coeff(p_expand, a, 2)
      coeff_2 := 14 u^2 - 8 v                     (6)
> solve({coeff_1 = 0, coeff_2 = 0}, {u, v})
      {u = -1/8, v = 7/256}                      (7)
>

```

Figure 8.9: Exercise 1

$$2) \text{ i) } y'(t_n) \approx v_m = \frac{y_{m+1} - y_m}{h}$$

$$\begin{cases} c = t_m \\ t_{m+1} = t_m + h \end{cases}$$

$$y(t_{m+1}) = y(t_m) + h \cdot y'(t_m) + \frac{h^2}{2} \tilde{y}''(f) \quad f \in [t_m, t_{m+1}]$$

$$\Rightarrow v_m = \frac{y_{m+1} - y_m}{h} = \frac{y(t_m) + h \cdot y'(t_m) + \frac{h^2}{2} \tilde{y}''(f) - y(t_m)}{h} = y'(t_m) + \frac{h}{2} \tilde{y}''(f)$$

$$\text{found: } |y'(t_m) - v_m| = \frac{h}{2} \tilde{y}''(f) = \frac{h}{2} c \rightarrow \text{linear.}$$

\hookrightarrow cal. abh. von c zu y'' .

ii)

$$y'(t_m) = v_m = \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2h}$$

$$- y(t_{m+1}) = y(t_m) + h \cdot y'(t_m) + \frac{h^2}{2} \tilde{y}''(t_m) + \frac{h^3}{6} \tilde{y}'''(f) \quad f \in [t_m, t_{m+1}]$$

$$- y(t_{m-1}) = y(t_m) - h \cdot y'(t_m) + \frac{h^2}{2} \tilde{y}''(t_m) - \frac{h^3}{6} \tilde{y}'''(f) \quad f \in [t_{m-1}, t_m]$$

$$y'(t_m) = v_m = y(t_m) + h \cancel{y'(t_m)} + \frac{h^2}{2} \cancel{y''(t_m)} + \frac{h^3}{6} \tilde{y}'''(f)$$

$$- (y(t_m) - h \cancel{y'(t_m)} + \frac{h^2}{2} \cancel{y''(t_m)} - \frac{h^3}{6} \tilde{y}'''(f))$$

$$= y'(t_m) + \frac{h^2}{12} (2 \tilde{y}'''(f_+) + \tilde{y}'''(f_-))$$

$$|y'(t_m) - v_m| = \frac{h^2}{6} |\tilde{y}'''(f)| \leq \frac{h^2}{6} c \rightarrow \text{using max. value condition.}$$

Figure 8.10: Exercise 2

```

> restart;
> with(plots):
>
> y := t->cos(t)
y := t-> cos(t)                                         (1)

> exact_speed := t->-sin(t)
exact_speed := t-> -sin(t)                                (2)

> t_val := evalf( $\frac{\text{Pi}}{2}$ )
t_val := 1.570796327                                     (3)

>
> forward_difference := (t, h)-> $\frac{(y(t+h) - y(t))}{h}$ 
forward_difference := (t, h)->  $\frac{y(t+h) - y(t)}{h}$                                (4)

> central_difference := (t, h)-> $\frac{(y(t+h) - y(t-h))}{2 \cdot h}$ 
central_difference := (t, h)->  $\frac{y(t+h) - y(t-h)}{2 \cdot h}$                          (5)

>
> forward_error := h->abs(exact_speed(t_val) - forward_difference(t_val, h))
forward_error := h->|exact_speed(t_val) - forward_difference(t_val, h)|      (6)

> central_error := h->abs(exact_speed(t_val) - central_difference(t_val, h))
central_error := h->|exact_speed(t_val) - central_difference(t_val, h)|      (7)

> loglogplot([central_error(h), forward_error(h)], h = 10-8..1, color = [red, blue])

```

Figure 8.11: Exercise 2 part 2 Maple

$$3) \vec{v}_1 = (2, 3, 0) \text{ und } \vec{v}_2 = (1, -2, 3) \quad \text{inner product} = \text{dot product}$$

$$\text{i)} \vec{u}_1 = \vec{v}_1$$

$$2) \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \cdot \vec{u}_1$$

$$3) \vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \cdot \vec{u}_1 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_2\|^2} \cdot \vec{u}_2$$

$\left\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right\rangle = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \rightarrow \text{daarvan verder doen}$

$$\boxed{\vec{u}_k = \vec{v}_k - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{v}_k, \vec{u}_l \rangle}{\|\vec{u}_l\|^2} \cdot \vec{u}_l}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{(2, 3, 0)}{\sqrt{13}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, 0 \right) = \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, 0 \right)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1}{\| \vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 \|}, \text{ in maple:}$$

$$\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, 0 \right) \cdot (1, -2, 3)$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{6\sqrt{13}}{13}, 0 \right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, 0 \right)$$

$$= \left(\frac{52}{169}, -\frac{117}{169}, 0 \right)$$

ii) zit maple

iii) Rangieren \vec{u}_1 und \vec{u}_2 dazu für Vektoren mit
gepaartem als \vec{v}_1 von \vec{v}_2 benennen we:

$$\vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_2$$

$$\text{dann } \vec{y}^\perp = \vec{y} - \vec{y}^{\parallel 145} \Rightarrow \vec{y} = \vec{y}^{\parallel} + \vec{y}^{\perp}$$

Figure 8.12: Exercise 3

```

restart;
with(plottools): with(plottools);

{annulus, arc, arrow, circle, cone, cuboid, curve, cutout, cylinder, dtkz, dodecahedron, ellipse, ellipticArc, exportplot, extrude, getdata, hemisphere, hexahedron, homothety, hyperbola, icosahedron, importplot, line, octahedron, parallelepiped, pieSlice, point, polygon, polyhedronByName,
prism, project, rectangle, reflect, rotate, scale, sector, semitorus, sphere, stellate, tetrahedron, torus, transform, translate, triangulate}

v1 := (2|3|0)
v2 := (1, -2, 3)

v1 := [ 2 3 0 ]
v2 := [ 1
         -2
          3 ]

u1 := ( 2*sqrt(13) | 3*sqrt(13) | 0 )
u1 := [ 2*sqrt(13) 3*sqrt(13) 0 ]

u2 := ( 52 | -18*sqrt(13) | 0 )
u2 := [ 4
         -18
          13
           0 ]

origin := (0|0|0);

line_v1 := line(origin, v1, color=blue);
line_v2 := line(origin, v2, color=red);
line_u1 := line(origin, u1, color=green);
line_u2 := line(origin, u2, color=yellow);

# Display the lines together
display(line_v1, line_v2, line_u1, line_u2, axes=normal, scaling=constrained);

origin := [ 0 0 0 ]
line_v1 := CURVES([ [ 0. 0. 0. ], [ 2. 3. 0. ] ], COLOUR(RGB, 0., 0., 1.0000000))
line_v2 := CURVES([ [ 0. 0. 0. ], [ 1. -2. 3. ] ], COLOUR(RGB, 1.0000000, 0., 0.))
line_u1 := CURVES([ [ 0. 0. 0. ], [ 0.554700196225229 0.832050294337844 0. ] ], COLOUR(RGB, 0., 1.0000000, 0.))
line_u2 := CURVES([ [ 0. 0. 0. ], [ 0.307692307692308 -1.38461538461538 0. ] ], COLOUR(RGB, 1.0000000, 1.0000000, 0.))

```

Figure 8.13: Exercise 3 - plot

```

> restart;
> with(LinearAlgebra): with(plottools): with(plots):
> #i
v_1 := Vector([2, 3, 0])
v_1 := 
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (1)

> v_2 := Vector([1, -2, 3])
v_2 := 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
 (2)

> u_1 :=  $\frac{v_1}{\text{Norm}(v_1, 2)}$ 
u_1 := 
$$\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (3)

> u_2 :=  $\frac{(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1)}{\text{Norm}(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1, 2)}$ 
u_2 := 
$$\begin{bmatrix} \frac{21\sqrt{2158}}{2158} \\ -\frac{7\sqrt{2158}}{1079} \\ \frac{3\sqrt{2158}}{166} \end{bmatrix}$$
 (4)

> # ii
> null_vector := Vector([0, 0, 0])
null_vector := 
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (5)

> line_v1 := line(null_vector, v_1, color = purple)
line_v1 := CURVES $\left(\begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 2. & 3. & 0. \end{bmatrix}, \text{COLOUR(RGB, 0.50196078, 0.,}\right.$  (6)

```

Figure 8.14: Exercise 3

Huis 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + y + z = b_1 \\ \alpha - y + z = b_2 \\ 3\alpha + 2z = b_3 \end{array} \right.$$

Neem, b_3 is lineair comb van b_1 en b_2

Figure 8.15: Huis 2 Exercise 1

- 2) - moet vierkant zijn en rijen/colommen moeten lineair onafhankelijk zijn. Negen determinante mag ook geen 0 zijn.

Figure 8.16: Huis 2 Exercise 2

3)

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ii) $\det(AB) = 0 \neq \det(A) \cdot \det(B) = 0$
dus of A niet singulier zijn of B.

Figure 8.17: Huis 2 Exercise 3

$$4) A\vec{x} = \vec{y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(0) & \cos(0) \\ \cos(1) & \cos(1) \\ \cos(2) & \cos(2) \\ \cos(3) & \cos(3) \\ \cos(4) & \cos(4) \\ \cos(5) & \cos(5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,04 \\ 1,05 \\ -0,2 \\ -2 \\ -0,2 \\ 1,41 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = (\Delta^T \Delta)^{-1} \cdot \Delta^T \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 1,04 \\ -0,54 \end{pmatrix}$$

(\downarrow)

drew using maple:

1) pointplot

2) plot(fit)

should be quite close

Figure 8.18: Huis 2 Exercise 4

```

# First define the data
> x := [0.04, 1.05, -0.2, -2, -0.2, 1.11];
x := [0.04, 1.05, -0.2, -2, -0.2, 1.11]

> t := [0, 1, 2, 3, 4, 5]
t := [0, 1, 2, 3, 4, 5]

> # Construct the matrix A
> A := Matrix([[cos(0), cos(0)], [cos(1), cos(2)], [cos(2), cos(4)], [cos(3), cos(6)], [cos(4), cos(8)], [cos(5), cos(10)]])
A := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \cos(1) & \cos(2) \\ \cos(2) & \cos(4) \\ \cos(3) & \cos(6) \\ \cos(4) & \cos(8) \\ \cos(5) & \cos(10) \end{bmatrix}$$


> # Perform kleinste quadraten fit: x = (A'A)^{-1}A^T
> c := LeastSquares(A, Vector(x))
c := 
$$\begin{bmatrix} 1.040593609 \\ -0.9362867375 \end{bmatrix}$$


> x_function := t->c[1]*cos(t) + c[2]*cos(2*t);
x_function := t->c_1*cos(t) + c_2*cos(2*t)

> plot_points := pointplot([seq([t[i], x[i]], i=1..6)], color=red):
plot_fit := plot(x_function(t_), t_=0..5, color=blue):
display(plot_points, plot_fit)

```

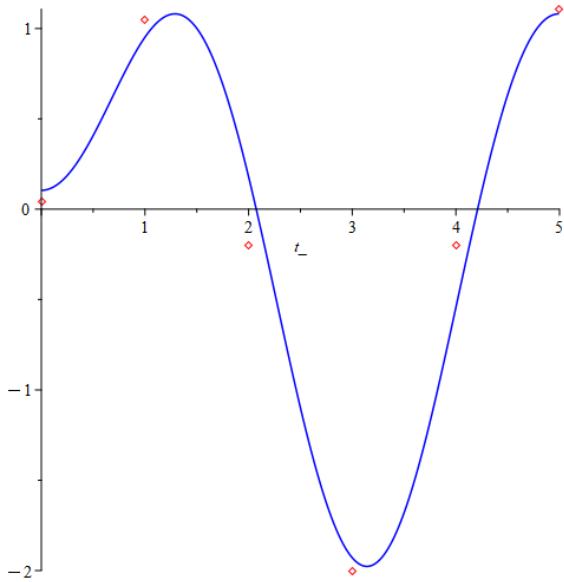


Figure 8.19: Huis 2 Exercise 4 Maple

```

> with(LinearAlgebra):
> p := Matrix([[[5/6, 1/6, 1/3], [1/6, 5/6, -1/3], [1/3, -1/3, 1/3]]])
      
$$p := \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(p, output = ['J', 'Q'])
      
$$J, Q := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{17}{6} & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$


```

Figure 8.20: Huis 2 Exercise 5: We zien dat de projector op het YZ vlak projecteert.

6) Hier moeten we matrix A vinden waarmee twee vectoren

$v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 2, 0)$ in de ruimte liggen,
waarvan de Nullruimte orthogonaal is (relatief) van de
rijruimte.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, we moeten aantonen dat
 $\{k_1, k_2\}$ lineaire combinatie is
van K_A . Als dit het geval is is
dit deel van rijruimte.

Wat is b ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ b = 2c_2 \rightarrow b = -4 \\ 2 = c_1 \end{cases}$$

$1c_2$ is lineaire combinatie die behoort niet tot
nullruimte

Figure 8.21: Huis 2 Exercise 6: Uit de cursus weten we dat er geen basis kan gevonden worden voor $K(A^T)$ en $N(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) einsetzen:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 4 & 2-\lambda & 4 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & (2-\lambda)((2-\lambda)(2-\lambda) - 4) - 1 \cdot (4(2-\lambda) - 8) + 2(4 \cdot 4 - 2 \cdot 2) \\
 &= (2-\lambda)(\cancel{4} - \cancel{\lambda}\cancel{2} - 2\lambda + \cancel{\lambda}^2 - \cancel{4}) - (\cancel{8} - 4\lambda \cancel{2}) + 2(\cancel{4} \cdot \cancel{4} - 4 + \cancel{2}) \\
 &= (2-\lambda)(-4\lambda + \lambda^2) + 4\lambda + 4\lambda = 0 \\
 &= 1 \cancel{-} 8\lambda + 2\lambda^2 + 4\lambda \cancel{-} \cancel{\lambda}^2 + 8\lambda = 0 \\
 &\Rightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 = 0 \\
 & \Rightarrow \lambda^2(\lambda - 6) = 0
 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 6$$

\Rightarrow columnen für die Eigenvektoren.

Figure 8.22: Huis 2 Exercise 7

```

> with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[2, 1, 2], [4, 2, 4], [2, 1, 2]])
      A := 
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
 (1)

> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])
      J, Q := 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$
 (2)

>

```

Figure 8.23: Huis 2 Exercise 7 Maple

$$8) \begin{array}{ll} v_1 = 0 & v \\ v_2 = 3 & v \\ v_3 = 5 & w \end{array}$$

i) Basis voor ruimte is $\{w\}$ omdat $Aw = 0$.
Kernenruimte is dan $\{v, w\}$

ii) 1 oplossing: $A\alpha = b$
 $\rightarrow \alpha = \frac{1}{3}v + \frac{1}{5}w$, alle oplossingen zijn veelvoud
 van muurteil: $\alpha = \frac{1}{3}v + \frac{1}{5}w + k \cdot u$ met $k \in \mathbb{R}$

iii) $\alpha = \alpha u + \beta v + \gamma w$
 $= 3v + 5w$, w is niet in de vergelijkingen dus
 kan niet berdekt worden.

Figure 8.24: Huis 2 Exercise 8

(Door de hash te 'ondertekenen' met een privé sleutel kan de identiteit van len geverifieerd en kan de afzender niet ontkennen dat hij de data heeft

identiteit: identificeert de bron van de data.

authenticiteit: De data zelf wordt niet verborgen.

confidantialiteit: Het heeft geen invloed op het verborgen van communicatie, (action Code)

: Verzekert dat de data niet is gewijzigd.
verificatie: Verzekert dat het bericht van een specifieke entiteit komt (degene zit).

n. Zowel zender als ontvanger hebben toegang tot de sleutel, dus het kan niet bericht heeft verzonnen
confidantialiteit of Traffic-flow confidantialiteit: Verborgt de inhoud of het bestaan die niet.

confidantialiteit: Versleutelt de data om deze privé te houden.

an, Data-origin authenticatie, Entity authenticatie: Omdat de sleutel gedeeld ender en ontvanger.

confidantialiteit: Verborgt niet het feit dat communicatie plaatsvindt.

It: Op zichzelf biedt het geen integriteitsbescherming, maar het kan worden met andere methoden (zoals een MAC) voor integriteitsbescherming.

ie

confidantialiteit: Wanneer iets met de publieke sleutel wordt versleuteld, kan alleen de private sleutel het ontcijferen.

confidantialiteit en Data-origin authentication: Voor al wanneer gebruikt voor digitale signatuur: De eigenaar van de private sleutel kan gidenitificeerd worden als de enige die handtekening kan hebben getekend.

confidantialiteit: Verborgt niet het feit dat communicatie plaatsvindt.

Figure 8.25: Huis 2 Exercise 8 second version

g) $A = UV^T$

i) rang 1 matrix omdat $A = UV^T$, dus alle kolommen van A zijn lineaire combinaties van elkaar.

ii) $Au = \underbrace{Uv}_\text{pijenwaarde} u$

$$Au = (UV^T)u = u(V^Tu) \approx (V^Tu)u$$

Au is een rechte vereniging van u dus er is in u een eigenvector

iii) $l_1 = V^Tu$

$d_2 = 0 \rightarrow$ eigenschap van rang 1 - matrizen.

iv)

$\text{trace}(A) = \text{som van diagonale elementen}$

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} = \underbrace{V^T}_{l_1} \underbrace{u}_{l_1}$$

Figure 8.26: Huis 2 Exercise 9

```

> with(LinearAlgebra):
> u := Vector([u1, u2])

$$u := \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \end{bmatrix} \quad (1)$$


> v := Transpose(Vector([v1, v2]))

$$v := \begin{bmatrix} v1 & v2 \end{bmatrix} \quad (2)$$


> A := u . v

$$A := \begin{bmatrix} u1 v1 & u1 v2 \\ u2 v1 & u2 v2 \end{bmatrix} \quad (3)$$


> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])

$$J, Q := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u1 v1 + u2 v2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{u2 v2}{u1 v1 + u2 v2} & \frac{u1 v1}{u1 v1 + u2 v2} \\ -\frac{u2 v1}{u1 v1 + u2 v2} & \frac{u2 v1}{u1 v1 + u2 v2} \end{bmatrix} \quad (4)$$


> # Hier kunnen we zien dat de rang = 1
> Eigenvalues(A)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ u1 v1 + u2 v2 \end{bmatrix} \quad (5)$$


> # We zien dus dat lambda = u . vT
> # lambda_1 = 0, lambda_2 = u1.v1 + u2.v2
> Eigenvectors(A)

$$\begin{bmatrix} u1 v1 + u2 v2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{u1}{u2} & -\frac{v2}{v1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$


> # We zien hier dat u een eigenvector is!
>
> # Als laatste, de trace is simpel, onze lambda_2 = u1.v1 + u2.v2. Als je kijkt
    naar A, en je telt de diagonaal op, dan zie je hetzelfde uitkomen ;)

```

Figure 8.27: Huis 2 Exercise 9 Maple

Bord 2

$$(t_1, b_1) = (10, 10, 1)$$

$$(t_2, b_2) = (21, 7, 4 \text{ m})$$

$$(t_3, b_3) = (31, -5, 2)$$

1) $y(t) = \sqrt{t} \cdot -\frac{8}{2} t^2 \quad | A \propto = y$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 10 & 1 \\ 7 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

→ check in maple

2) proof: $A^T (\tilde{y} - y) = 0$

$$\Leftrightarrow A^T \tilde{y} - A^T y = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T \tilde{y} - \underbrace{A^T A}_{= I} (\underbrace{A^T A}_{= I})^{-1} A^T \tilde{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T \tilde{y} - \underbrace{A^T A}_{= I} (\underbrace{A^{-1} A^T}_{= I}) A^T \tilde{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T \tilde{y} - \underbrace{A^T}_{= I} \underbrace{A^T}_{= I} A^T \tilde{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \quad \square$$

Figure 8.28: Bord 2 Exercise 1

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(plots): with(plottools):
> # i)
> A := Matrix([[1, 1], [2, 4], [3, 9]])
A := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$
 (1)

> y := Vector([10.1, 7.4, -5.2])
y := 
$$\begin{bmatrix} 10.1 \\ 7.4 \\ -5.2 \end{bmatrix}$$
 (2)

> result := LeastSquares(A, y)
result := 
$$\begin{bmatrix} 15.3552631578947 \\ -5.71315789473684 \end{bmatrix}$$
 (3)

> v_0 := result[1]
v_0 := 15.3552631578947 (4)

> g := result[2] · (-1) · (2)
g := 11.4263157894737 (5)

> #ii) zie notes
> #iii)
> y_tilde := A . result;
y_tilde := 
$$\begin{bmatrix} 9.64210526315789 \\ 7.85789473684210 \\ -5.35263157894737 \end{bmatrix}$$
 (6)

> column_space_vector := Column(A, 2);
column_space_vector := 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$
 (7)

> # Define line representing the column space K(A)
K_A := plot([t → column_space_vector[1]*t, t → column_space_vector[2]*t, t
= -1 .. 3], color = blue, thickness = 2, title = "Column Space K(A)");
Error, (in plot) expected a range but received t = -1 .. 3
> # Plot the original data points y
data_points := plot([seq([i, y[i]], i = 1 .. 3)], style = point, symbol = circle, color
= black, title = "Data Points and Column Space");

```

Figure 8.29: Bord 2 Exercise 1 Maple

Wiskundige modellering in de ingenieurswetenschappen: Bordoefeningenles 2

Oefening 1

```
[> restart: with(plots):with(LinearAlgebra):with(plottools):  
oorsprong := <0,0,0>;
```

Constructie matrix A en vector y:

```
[> K1 := <1,2,3>;  
K2 := <1,4,9>;  
A := <K1|K2>;  
y := <10.1,7.4,-5.2>;
```

$$\begin{aligned} K1 &:= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ K2 &:= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \\ A &:= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \\ y &:= \begin{bmatrix} 10.1 \\ 7.4 \\ -5.2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Heeft dit stelsel een oplossing?

```
[> solve(A.<v0, -g/2>)=y, {v0,g});  
> Determinant(<K1|K2|y>);
```

5.8

(1.2)

We bepalen de kleinste kwadraten benadering en fit:

De onbekenden x bepalen kan op 2 manieren:

- met een stelsel (meest efficiënt)

```
[> solve((A^%T.A).(<-v0,-g/2>)=A^%T.y,{v0,g});  
{g = 11.42631579, v0 = 15.35526316}
```

(1.3)

- met behulp van de matrix inverse

```
[> x := MatrixInverse(A^%T.A).A^%T.y;
```

Figure 8.30: Bord 2 Exercise 1 Maple Version 2: Warning, pdf is not fully loaded, go look in my files

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = 2$$

$$m_1 = 1 = 1$$

$$m_2 = 1 \quad m_3 = 2$$

$$m_4 = 1$$

$$m_5 = 1$$

$$m_6 = 1$$

dit is omdat we w-gorden
vorm tellen / dan
niet diagonaliseerbaar

Lisvectorrs:

$$\left(\begin{array}{c} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) \rightarrow m < m^!$$

Figure 8.31: Bord 2 Exercise 2

```

[> with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[0, -1, 3, 0], [1, 0, 0, 1], [0, 0, 3, -1], [0, 0, 1, 1]])
      A := 
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
 (1)

[> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])
      J, Q := 
$$J, Q := \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{I}{2} & \frac{I}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
 (2)

```

Figure 8.32: Bord 2 Exercise 2 Maple

$$3) \quad A = V_1 V_1^T + V_3 V_3^T$$

$$1) \quad K(A) = \text{span} \{ V_1, V_3 \}$$

$$2) \quad K(A^T) = \text{span} \{ V_2, V_1 \}$$

$$3) \quad N(A) : \quad A\alpha = (V_1 V_1^T + V_3 V_3^T) \alpha = 0$$

$$= V_1 (V_1^T \alpha) + V_3 (V_3^T \alpha) = 0$$

These need to be null, no look in direction on V_3 , thus

$$N(A) = \text{span} \{ V_3 \}$$

4) $N(A^T)$: we want to solve:

$$A^T y = (V_2 V_1^T + V_1 V_3^T) y = 0$$

$$= V_2 (V_1^T y) + V_1 (V_3^T y) = 0$$

$$\Rightarrow N(A^T) = \{ V_2 \}$$

Figure 8.33: Bord 2 Exercise 3

4)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T)$$

1. Is A symmetrisch?

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) ; A^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_2 e_1^T + e_1 e_2^T) \quad \checkmark$$

2. $A^L = A^R$:

$$\begin{aligned} A^L &= \frac{1}{2} \cdot (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T)^2 \\ &= \frac{1}{2} (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) \\ &= \frac{1}{2} (e_1 e_2^T e_1 e_2^T + e_1 e_2^T \cdot e_2 e_1^T + e_2 e_1^T e_1 e_2^T \\ &\quad + \underbrace{e_2 e_1^T \cdot e_2 e_1^T}_0) \\ &= \frac{1}{2} (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) \neq A \rightarrow \text{green projection} \end{aligned}$$

Figure 8.34: Bord 2 Exercise 4

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot g(t) \cdot dt$$

$\text{span} \langle 1, \cos(\beta t), \sin(\beta t) \rangle$ met $\beta \in [1, +\infty]$

dus de componenten zijn $1, \cos(\beta t)$ en $\sin(\beta t)$

we merken:

$$\langle 1, 1 \rangle = \sqrt{2\pi}$$

$$\langle \cos(\beta t), \cos(\beta t) \rangle = \sqrt{\pi}$$

$$\langle \sin(\beta t), \sin(\beta t) \rangle = \sqrt{\pi}$$

dus onze vectoren die de basis vormen zijn:

$$\left\{ c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad c_k = \frac{\cos(\beta_k t)}{\sqrt{\pi}}, \quad n_k = \frac{\sin(\beta_k t)}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

a) de projectie f_0 is calculated with:

$$f_0 = \langle c_0, f \rangle^2 c_0 + \sum \langle c_k, f \rangle \cdot c_k + \langle n_k, f \rangle^2 n_k$$

$$\langle c_0, f \rangle^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{3}$$

$$\langle c_k, f \rangle = 4\sqrt{\pi} \frac{(-1)^k}{k^2} \rightarrow f_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{3} + 4\sqrt{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{k^2}$$

$$\langle n_k, f \rangle^2 = 0$$

b) de afstand is definit door: $\sqrt{\langle f_0 - f, f_0 - f \rangle}$

$$\begin{aligned} &= \| f(t) - f_0 \|^2 = \langle f(t), f(t) \rangle \\ &\quad - 2 \cdot \langle f(t), f_0 \rangle \\ &\quad + \langle f_0, f_0 \rangle \end{aligned}$$

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> inproduct := (f, g)→int(conjugate(f)·g, t = -Pi..Pi):
> NORM := f→sqrt(inproduct(f, f)):
> simplify(NORM(1))

$$\sqrt{2} \sqrt{\pi} \quad (1)$$


> assume(k, 'integer');
simplify(NORM(cos(k*t)), symbolic);

$$\sqrt{\pi} \quad (2)$$


> simplify(NORM(sin(k·t)), symbolic);

$$\sqrt{\pi} \quad (3)$$


> # ii
> t1 := inproduct( $\frac{1}{\sqrt{2 \pi}}$ , t^2)

$$t1 := \frac{\sqrt{2} \pi^{5/2}}{3} \quad (4)$$


> t2 := simplify(inproduct( $\frac{\cos(k \cdot t)}{\sqrt{\pi}}$ , t^2), symbolic)

$$t2 := \frac{4 \sqrt{\pi} (-1)^k}{k^2} \quad (5)$$


> simplify(inproduct( $\frac{\sin(k \cdot t)}{\sqrt{\pi}}$ , t^2), symbolic)

$$0 \quad (6)$$


> f0 := simplify(t1 + t2)

$$f0 := \frac{\sqrt{\pi} (\sqrt{2} \pi^2 k^2 + 12 (-1)^k)}{3 k^2} \quad (7)$$


> distance := simplify(inproduct(t^2, t^2)^2 - 2·inproduct(t^2, f0) + inproduct(f0, f0)^2, symbolic)
distance :=  $\frac{1}{81 k^8} \left( 16 \left( -\frac{9 \pi^{5/2} \sqrt{2} k^8}{4} - 27 (-1)^k k^6 \sqrt{\pi} \right. \right.$  
$$(8)$$


$$\left. \left. + \left( 24 \pi^2 (-1)^k k^2 (\pi^4 k^4 + 72) \sqrt{2} + 5184 + \left( \pi^8 + \frac{81}{100} \pi^6 \right) k^8 + 432 \pi^4 k^4 \right) \pi^3 \right) \right)$$


> limit(distance, k = infinity)

$$\frac{16 \pi^{12}}{81} + \frac{4 \pi^{10}}{25} - \frac{4 \sqrt{2} \pi^{11/2}}{9} \quad (9)$$


> eval(distance, k = 100000); # we can see it going to null

```

Figure 8.36: Bord 2 Exercise 5 Maple

WC 2

A) $\ln(u(t)) = \ln(a) - ct^2 - bt$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \\ 1 & t_5 & t_5^2 \end{pmatrix} \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \ln(a) \\ -c \\ -b \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \ln(y_2) \\ \ln(y_3) \\ \ln(y_4) \\ \ln(y_5) \end{pmatrix}$$

Stochiometrie: $\vec{\alpha}' = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y}$

$\therefore a = 5, 20, b = 0, 35, c = 0, 32$

plot name as homework.

Figure 8.37: WC 2 Exercise 1

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> inproduct := (f, g) → integrate(f*g, t = -infinity ..infinity);
NORM   := f → sqrt(inproduct(f, f)):

inproduct := (f, g) → integrate(g·f, t = -∞ ..∞)          (1)

> f0 := exp(-t^2/2)/NORM(exp(-t^2/2)):

> w1 := t*exp(-t^2/2)-f0*inproduct(f0, t*exp(-t^2/2));
f1 := w1/NORM(w1):
w1 :=  $t e^{-\frac{t^2}{2}}$                                          (2)

> w2 := t^2*exp(-t^2/2)-f1*inproduct(t^2*exp(-t^2/2), f1)-f0
      *inproduct(t^2*exp(-t^2/2), f0);
f2 := w2/NORM(w2):
w2 :=  $t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{2}$            (3)

> w3 := t^3*exp(-t^2/2)-f2*inproduct(t^3*exp(-t^2/2), f2)-f1
      *inproduct(t^3*exp(-t^2/2), f1)-f0*inproduct(t^3*exp(-t^2/2),
      f0);
f3 := w3/NORM(w3):
w3 :=  $t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{3 t e^{-\frac{t^2}{2}}}{2}$          (4)

> w4 := t^4*exp(-t^2/2)-f3*inproduct(t^4*exp(-t^2/2), f3)-f2
      *inproduct(t^4*exp(-t^2/2), f2)-f1*inproduct(t^4*exp(-t^2/2),
      f1)-f0*inproduct(t^4*exp(-t^2/2), f0);
f4 := w4/NORM(w4):
w4 :=  $t^4 e^{-\frac{t^2}{2}} - 3 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{3 e^{-\frac{t^2}{2}}}{4}$     (5)

> # i: de orthonormale basis is dus de span van <f_0, w_1, w_2, w_3, w_4, ...>
> # ii: zie notes

```

Figure 8.38: WC 2 Exercise 2

Lange oplossing

```
> g0 := fn(0)*inproduct(fn(0),g);
g1 := fn(0)*inproduct(fn(0),g)+fn(1)*inproduct(fn(1),g);
g2 := fn(0)*inproduct(fn(0),g)+fn(1)*inproduct(fn(1),g)+fn(2)*inproduct(fn(2),g);
g3 := fn(0)*inproduct(fn(0),g)+fn(1)*inproduct(fn(1),g)+fn(2)*inproduct(fn(2),g)+fn(3)*inproduct(fn(3),g);
g4 := fn(0)*inproduct(fn(0),g)+fn(1)*inproduct(fn(1),g)+fn(2)*inproduct(fn(2),g)+fn(3)*inproduct(fn(3),g)+fn(4)*inproduct(fn(4),g);
```

Korte oplossing (niet te kennen)

```
> g_n := n -> add(fn(i)*inproduct(fn(i),g),i=0..n);
Warning, (in g_n) `i` is implicitly declared local
```

Visualisatie

```
> app0 := plot(g_n(1), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=blue, legend="projectie op W[0]");
app1 := plot(g_n(1), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=black, linestyle="dot", legend="projectie op W[1]", thickness=3);
app2 := plot(g_n(2), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=red, legend="projectie op W[2]");
app3 := plot(g_n(3), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=purple, linestyle="dot", legend="projectie op W[3]", thickness=3);
app4 := plot(g_n(4), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=coral, legend="projectie op W[4]");
> gplot := plot(g, t=-5..5, thickness=1, color=black, legend="g(t)", thickness=2);
> display(gplot,app0, app1, app2, app3, app4);
```

Figure 8.39: WC 2 Exercise 2 Maple

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> e_1 := Vector([1, 0, 0])

$$e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> e_2 := Vector([0, 1, 0])

$$e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

> A :=  $\frac{1}{2} \cdot (e_1 \cdot \text{Transpose}(e_1) + e_2 \cdot \text{Transpose}(e_2) + e_1 \cdot \text{Transpose}(e_2)$ 

$$+ e_2 \cdot \text{Transpose}(e_1))$$


$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

> # Is A = Transpose(A)?
> Transpose(A)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

> # YES!
> # Is A = A^2?
> A^2

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

> # YEHAAAHHH
> # The subspace is thus e_1 + e_2

```

Figure 8.40: WC 2 Exercise 3 Maple

Huis 3

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[3, 4], [1, 0]])

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = [J'|Q'])

$$J, Q := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad (2)$$

> recursie_relatie := Q . MatrixPower(J, n) . Q-1 . Vector([1, 1])

$$\text{recursie\_relatie} := \begin{bmatrix} \frac{-3(-1)^n}{5} + \frac{84^n}{5} \\ \frac{3(-1)^n}{5} + \frac{24^n}{5} \end{bmatrix} \quad (3)$$

> limit_eq := recursie_relatie[1]

$$\text{limit\_eq} := \frac{-3(-1)^n}{5} + \frac{84^n}{5} \quad (4)$$

> limit_eq := recursie_relatie[2]

$$\text{limit\_eq} := \frac{3(-1)^n}{5} + \frac{24^n}{5}$$

> limit(limit_eq, n = infinity)
4
>

```

Figure 8.41: Huis 3 Exercise 1

$$y_{n+1} = 3y_n + 4y_{n-1}$$

$$y_0 = y_1 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n}$$

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{via maple}} \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De recursieve relatie zegt: $\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} = Q D^{n-1} Q^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$

(via maple)

$$= \dots \left(\begin{array}{c} \text{circle} \\ \text{heart} \\ \text{circle} \end{array} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{c} \text{circle} \\ \text{heart} \\ \text{circle} \end{array} \right) = q$$

Figure 8.42: Huis 3 Exercise 1

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{pmatrix} a & b & e & f \\ c & d & g & h \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & k & l \end{pmatrix} \\
 &= a \cdot \begin{pmatrix} d & g & h \\ 0 & i & j \\ 0 & k & l \end{pmatrix} - c \cdot \begin{pmatrix} b & e & f \\ 0 & i & j \\ 0 & k & l \end{pmatrix} \\
 &= ad \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} - cd \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
 &= (ad - cd) \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \det(a) \det(c) = \det(ac)
 \end{aligned}$$

Figure 8.43: Huis 3 Exercise 2

```

> with(LinearAlgebra):
> # First express the matrix ( N=2)
> A := Matrix([[a,b,e,f],[c,d,g,h],[0,0,i,j],[0,0,k,l]])
      
$$A := \begin{bmatrix} a & b & e & f \\ c & d & g & h \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & k & l \end{bmatrix}$$
 (1)

> Determinant(A)           
$$adil - adjk - bcil + bcjk$$
 (2)
> # This is the answer, the only thing now is to identify the result
> det_a := a·d - c·b       
$$det_a := ad - cb$$
 (3)
> det_b := e·h - g·f       
$$det_b := eh - gf$$
 (4)
> det_c := i·l - k·j       
$$det_c := il - kj$$
 (5)
> expand(det_a · det_c)    
$$adil - adjk - bcil + bcjk$$
 (6)
> # Look, same answer, thus it can be done like this.

```

Figure 8.44: Huis 3 Exercise 2

// Exercise 3

```

> restart : with(LinearAlgebra) : with(plots) : with(plottools) :
> A := Matrix([[1, 1], [1, 0]]) :
> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q']) :
> AK := Q • MatrixPower(J, k) • MatrixInverse(Q) • Vector([ (1 - sqrt(5)) / 2, 1 ]) :
> recursion := AK[1] / AK[2] :
> limit(recursion, k = infinity)

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \tag{1}$$

> # Nu met een kleine epsilon toegevoegd
> AK := Q • MatrixPower(J, k) • MatrixInverse(Q) • Vector([ (1 - sqrt(5)) / 2
+ epsilon, 1 + epsilon ]) :
> recursion := AK[1] / AK[2] :
> limit(recursion, k = infinity)

$$\frac{3\sqrt{5} + 5}{5 + \sqrt{5}} \tag{2}$$


```

```

> # We doen de uitdagende bijvraag niet aangezien dit wordt geskipped door
   professor.
> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([ [ 8/10, 3/10 ], [ 2/10, 7/10 ] ])

$$A := \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = [ 'J', 'Q' ])

$$J, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad (2)$$

> # Lambda_1 = 1, lam_2 =  $\frac{1}{2}$ ,
   obviously gaat lambda_1 domineren wanneer we exponentiële vorm
   nemen.
> # Aka,  $v_1 = \left[ \frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right]$  is het asymptotische vector. Let's proof this shit
> JK := Matrix([ [ 1, 0 ], [ 0, (1/2)^k ] ])

$$JK := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix} \quad (3)$$

> result := Q * JK * MatrixInverse(Q)

$$result := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^k}{5} & \frac{3}{5} - \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^k}{5} \\ \frac{2}{5} - \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^k}{5} & \frac{2}{5} + \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^k}{5} \end{bmatrix} \quad (4)$$

> # In this form, we can see if k -> infinity, then we get the answer we were
   looking for. Prove accepted.

```

Figure 8.45: Huis 3 Exercise 4

```

> restart : with(LinearAlgebra) :
> A := Matrix([ [ 98/100, 0, 0 ], [ 2/100, 97/100, 0 ], [ 0, 3/100, 1 ] ])
      
$$A := \begin{pmatrix} \frac{49}{50} & 0 & 0 \\ \frac{1}{50} & \frac{97}{100} & 0 \\ 0 & \frac{3}{100} & 1 \end{pmatrix}$$

> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])
      
$$J, Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{49}{50} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{97}{100} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

> MatrixPower(J, n)
      
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{49}{50}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{97}{100}\right)^n \end{pmatrix}$$

> # Here we see that Lambda_1 is dominant, so eigenvector 1 is dominant
> v_1 := Vector([0, 0, 1])
      
$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

> # everyone will die.
>

```

Figure 8.46: Exercise 5

6. Voor een Markov matrix is de som van de componenten van een vector \mathbf{x} gelijk aan de som van de componenten van \mathbf{Ax} . Bewijs dat voor eigenvectoren $\mathbf{Av}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k$, met $\lambda_k \neq 1$ de som van de componenten verdwijnt.

Verifieer ook voor de matrix A uit vraag 4.

Oplossing:

$$\sum_i (\mathbf{v}_k)_i = \sum_i (A\mathbf{v}_k)_i = \lambda_k \sum_i (\mathbf{v}_k)_i$$

$$(1 - \lambda_k) \sum_i (\mathbf{v}_k)_i = 0 \iff \lambda_k = 1 \text{ of } \sum_i (\mathbf{v}_k)_i = 0$$

Figure 8.47: Exercise 6

7. a) Schrijf de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0, \quad \text{met } y(t), a, b \in \mathbb{R} \quad (2)$$

als een eerste-orde matrix differentiaalvergelijking $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, met $\mathbf{y} = (\dot{y}, y)$, en los deze vergelijking vervolgens op.

Je vindt drie types kwalitatief verschillend gedrag van de oplossing, voor $a^2 > 4b$, $a^2 = 4b$ en $a^2 < 4b$. Verklaar dit gedrag vanuit de Jordan-vorm van \mathbf{A} .

Oplossing:

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= -a\dot{y} - by \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- $a^2 > 4b$:

We krijgen een diagonale Jordan vorm met 2 verschillende eigenwaarden. De basisoplossingen zijn $e^{\lambda_1 t}$ en $e^{\lambda_2 t}$.

- $a^2 = 4b$: In dit geval krijgen we een niet-diagonale Jordan vorm met $\lambda_1 = \lambda_2 = -a/2$. De basisoplossingen zijn $e^{\lambda_1 t}$ en $te^{\lambda_1 t}$.

- $a^2 < 4b$: De Jordanvorm is opnieuw diagonaal. We krijgen 2 complexe eigenwaarden. De basisoplossingen zijn gedempte oscillaties.

Figure 8.48: Exercise 7

```

> # A) is basically gwn Jordan Form en kijken wat je eigenwaarden
   eigenvectoren zijn lolz.
> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[-2, 2, 2], [-5, 4, 3], [0, 0, 2]])

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = [J,Q])

$$J, Q := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - I & 0 \\ 0 & 0 & 1 + I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} - \frac{2I}{5} & -\frac{1}{5} + \frac{2I}{5} \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{I}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{I}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

> # Hierboven is a)
> # Ok nu b) Het idee is simpel, we willen alpha_1, alpha_2 en y(t)
y0 := Vector([1, 1, 1]):
> constants := solve(Q.Vector([alpha1, alpha2, conjugate(alpha2)]) = y0,
   [alpha1, alpha2]);

$$\text{constants} := [[\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0]] \quad (3)$$

> # nu nog y(t). y(t) = Q · exp(D) · Q⁻¹ · y₀
> D_exp := Matrix([[exp(2·t), 0, 0], [0, exp((1 - I)·t), 0], [0, 0, exp((1 + I)·t)]])

$$D_{\text{exp}} := \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1-I)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(1+I)t} \end{bmatrix} \quad (4)$$

> y := Q · D_exp · MatrixInverse(Q) · y0

$$y := \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \quad (5)$$

> # Et voila.

```

Figure 8.49: Exercise 8

// Exercise 9

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(plots): with(plottools):
> A := Matrix([[0,-1,0,-1],[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0]]):
> J, Q := JordanForm(A, output = [ 'J', 'Q' ]):
> u := Vector([1,0,2,1]):
> y := MatrixExponential(A, t) • u:
> f := simplify(y[4])
      
$$f := \frac{2 \left( e^{-\frac{t}{2}} + \frac{3 e^{\frac{t}{2}}}{2} \right) \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3} t}{2}\right)}{3} + e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3} t}{2}\right)$$

> # ii is hetzelfde...

```

(1)

Bord 3

$$A) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \alpha(t) \\ y'(t) \\ y(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B & 0 & E\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B & 0 & 0 & 0 & Ey \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \alpha(t) \\ y'(t) \\ y(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e^A \cdot y_0 = \begin{pmatrix} v_{\alpha 0} \\ \alpha_0 \\ v_{y0} \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

geeft de enige resultaat.

(i) zie Maple

Figure 8.50: Exercise 1

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[2, 3], [1, 0]])

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])

$$J, Q := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (2)$$

> # Dit is i) lambda_1 = -1, lambda_2 = 3
> # ii)
> v_1 := Q[ .., 1]

$$v_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (3)$$

> v_2 := Q[ .., 2]

$$v_2 := \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (4)$$

> v_3 := Vector([1, 2])

$$v_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

> eq := <1, 2> = c1 * v_1 + c2 * v_2;

$$eq := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c1}{4} + \frac{3c2}{4} \\ -\frac{c1}{4} + \frac{c2}{4} \end{bmatrix} \quad (6)$$

> solve(eq, {c1, c2})

$$\{c1 = -5, c2 = 3\} \quad (7)$$


```

Figure 8.51: Exercise 1

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> # Oefening 2 vind ik maar brol, wordt nooit gevraagd
> # i)
> # Leer gwn matrixExponential te gebruiken
> A := Matrix([[1, 1], [1, 1]])
      A := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
 (1)
> MatrixExponential(A)
      
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} & \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} \end{bmatrix}$$
 (2)

```

Figure 8.52: Exercise 2

// Exercise 3

```
[> restart: with(LinearAlgebra): with(plots): with(plottools):  
[> #i)
```

```
[> P := Matrix([ [0, 0, 1, 0, 0], [1/2, 0, 0, 0, 0], [1/2, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1/2, 0], [0, 0, 0, 1/2, 1] ]])
```

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
[> T := 1/5 Matrix([[1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1]])
```

$$T := \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad (2)$$

```
[> G := a→a·P + (1 - a)·T
```

$$G := a \mapsto a \cdot P + (1 - a) \cdot T \quad (3)$$

```
[> #ii)
```

```
[> J, Q := JordanForm(G(a), output = [ 'J', 'Q' ])
```

(4)

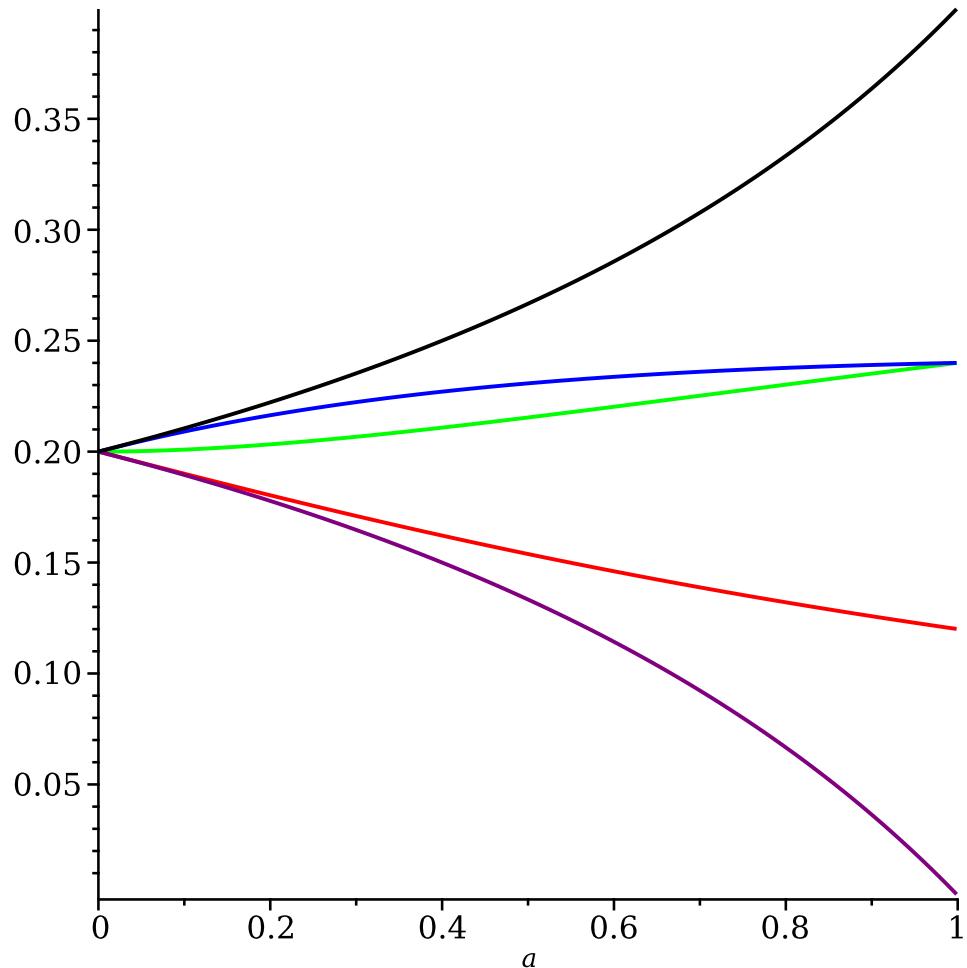
$$\boxed{J, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2} - \frac{I}{2}\right)a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2} + \frac{I}{2}\right)a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \left[\frac{2(a^2 + a + 1)}{5(a^2 + 2a + 2)}, \frac{4}{25}, \right. \\ \left. \frac{3Ia + 10 + 2I + 5a}{10(2Ia + 3 + I + a)}, \frac{-\frac{I}{50}(11Ia^2 + 32Ia - 7a^2 - 4 + 32I - 14a)}{a^2 + 2a + 2}, 0 \right], \\ \left[\frac{a+2}{5(a^2 + 2a + 2)}, \frac{2}{25}, \frac{Ia - 6 + 4I - 4a}{10(2Ia + 3 + I + a)}, \right. \\ \left. \frac{\frac{I}{50}(2Ia^2 + 9Ia - 9a^2 - 18 + 14I - 23a)}{a^2 + 2a + 2}, 0 \right], \\ \left[\frac{a^2 + 3a + 2}{5(a^2 + 2a + 2)}, \frac{4}{25}, -\frac{4Ia + 4 + 6I + a}{10(2Ia + 3 + I + a)}, \right. \\ \left. \frac{\frac{I}{50}(9Ia^2 + 23Ia + 2a^2 + 14 + 18I + 9a)}{a^2 + 2a + 2}, 0 \right], \\ \left[\frac{2(-1+a)}{5(a-2)}, 0, 0, 0, -\frac{2(-1+a)}{5(a-2)} \right], \\ \left[-\frac{2}{5(a-2)}, -\frac{2}{5}, 0, 0, \frac{2(-1+a)}{5(a-2)} \right] \end{bmatrix}}$$

> # Hier zien we alvast dat lambda 1 dominant is, dus eigenvector 1 is sexy
 > sol := Q[.., 1]

(5)

$$sol := \begin{bmatrix} \frac{2(a^2 + a + 1)}{5(a^2 + 2a + 2)} \\ \frac{a + 2}{5(a^2 + 2a + 2)} \\ \frac{a^2 + 3a + 2}{5(a^2 + 2a + 2)} \\ \frac{2(-1 + a)}{5(a - 2)} \\ -\frac{2}{5(a - 2)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

> `plot(sol, a = 0..1, color = [green, red, blue, purple, black]);`
`evalf(subs({a = 1}, sol));`



(6)

$$\begin{bmatrix} 0.2400000000 \\ 0.1200000000 \\ 0.2400000000 \\ 0. \\ 0.4000000000 \end{bmatrix} \quad (6)$$

> # we zien dus dat website 5 het meest zal worden bezocht

> #iii)

> $J, Q := JordanForm(G(1), output = ['J', 'Q'])$

$$J, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{I}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{I}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{10} - \frac{I}{10} & \frac{3}{10} + \frac{I}{10} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{10} + \frac{I}{5} & -\frac{1}{10} - \frac{I}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} - \frac{I}{10} & -\frac{1}{5} + \frac{I}{10} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> # antwoord is dan ofcourse v_1 en v_5 letsgo

> #iv)

> $state_n := (n, x0) \rightarrow Q \cdot J^n \cdot MatrixInverse(Q) \cdot x0 :$

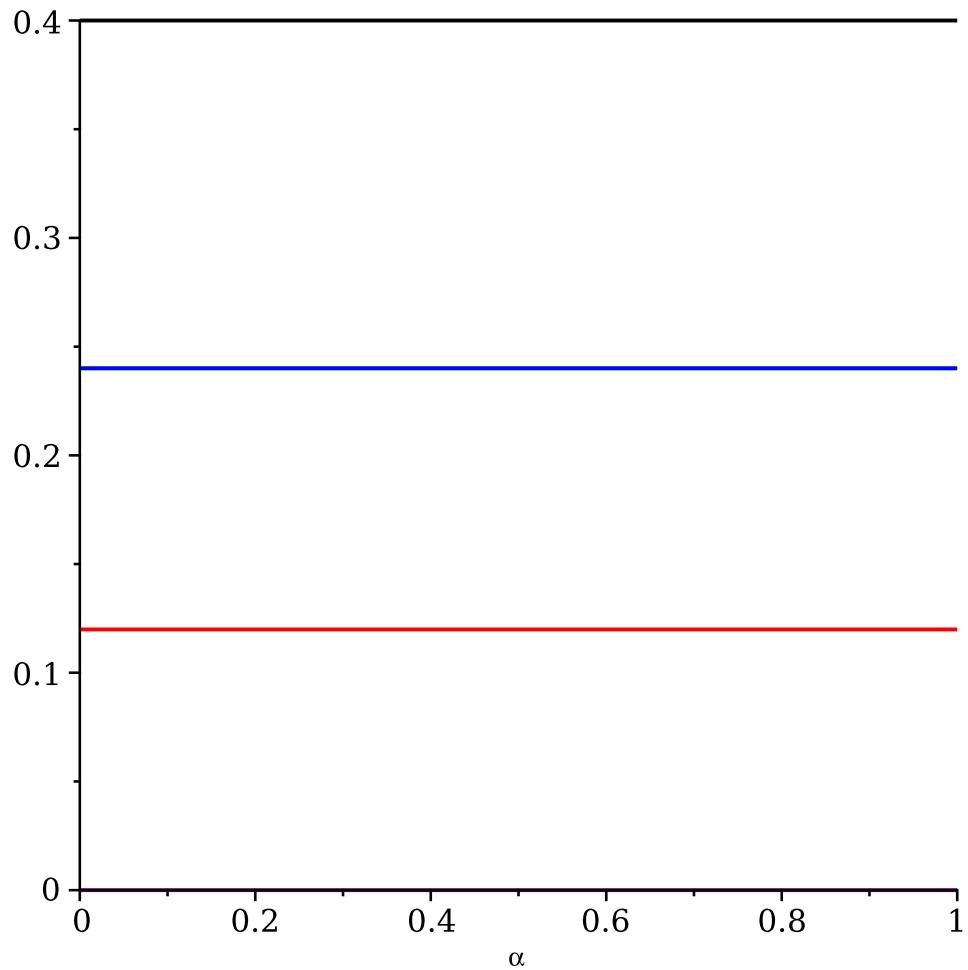
> # eerst uniform dus 0.2 prob per sprong

> $x0 := \langle 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2 \rangle;$

> $state_20 := state_n(20, x0) :$

> $plot1 := plot(state_20, alpha = 0..1, color = [green, red, blue, purple, black]);$

$$x0 := \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

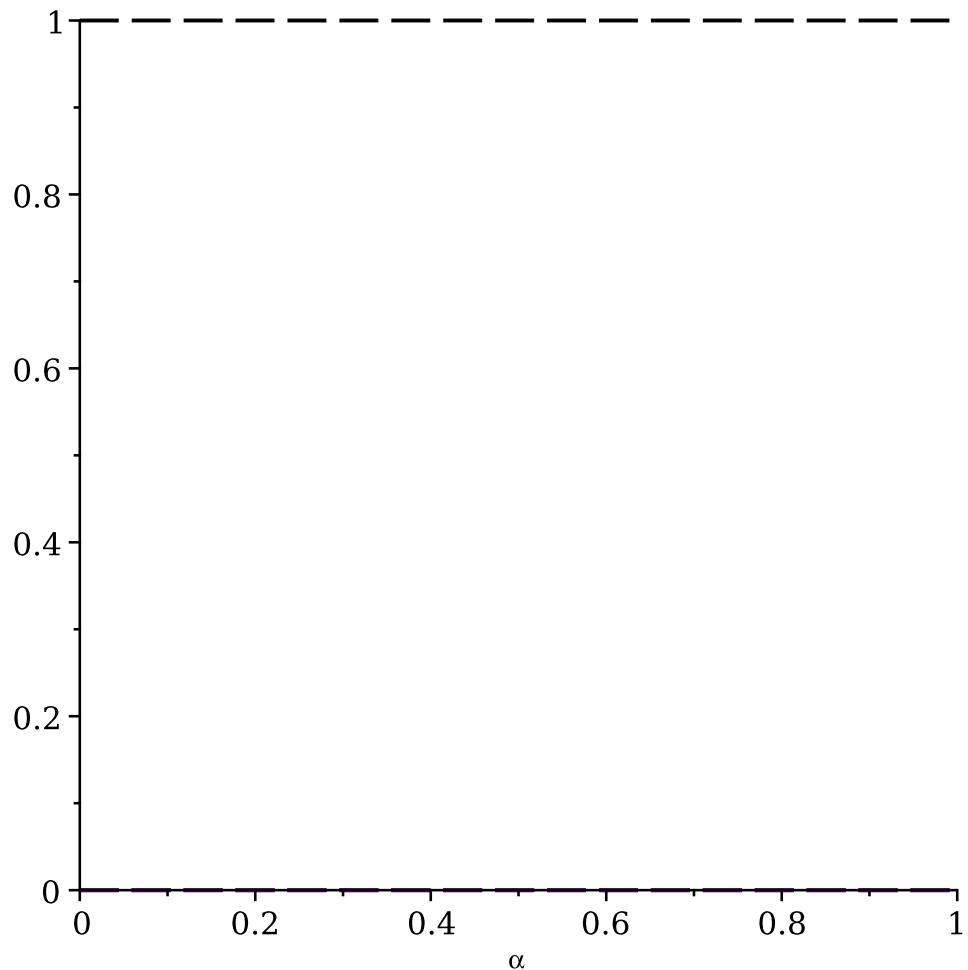


```

> # ik denk dat mijn Q en J niet goed zijn ingeladen, anyways I dont care
> # Nu kijken naar bezetting van website 4 en 5, dus 50 50
> x0 := <0, 0, 0, 0.5, 0.5>;
state_50 := state_n(20, x0) :
plot2 := plot(state_50, alpha = 0..1, color = [green, red, blue, purple, black],
linestyle = "dash");

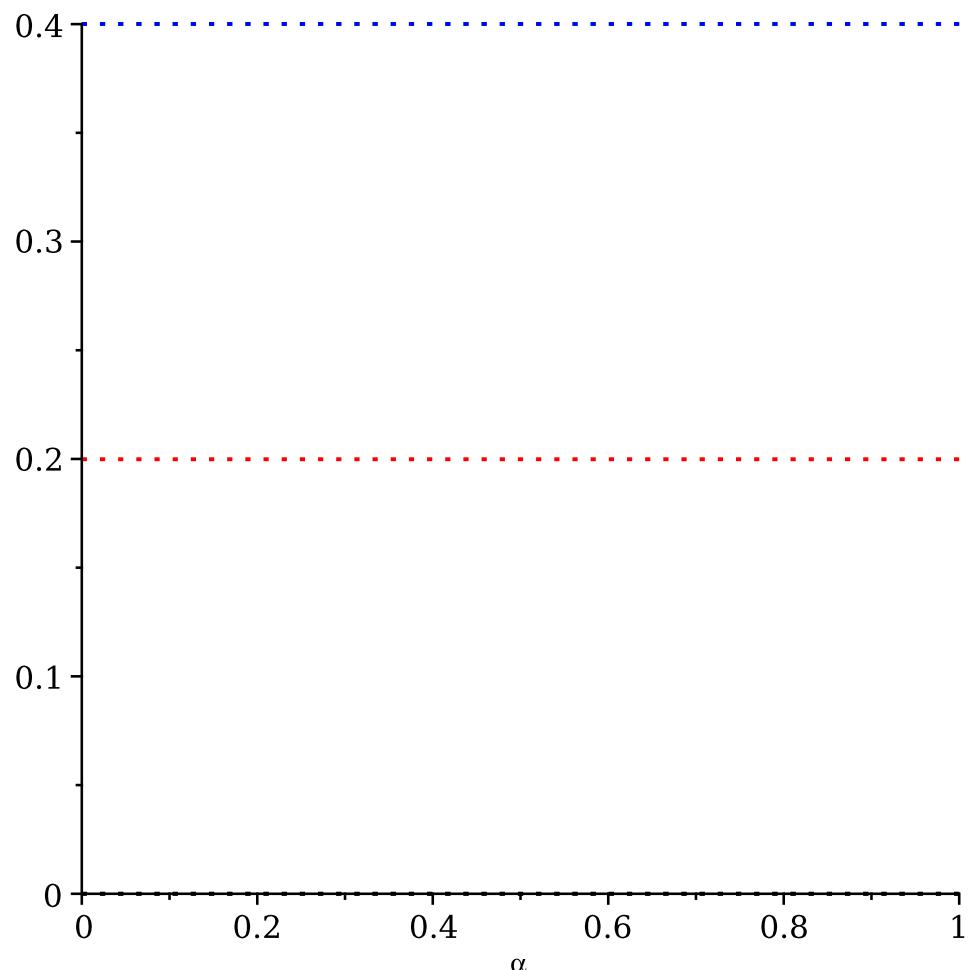
```

$$x0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$



```
> # Als laatste de bezetting van website 1, 2 en 3
> x0 := <1/3, 1/3, 1/3, 0, 0>;
state_50 := state_n(20, x0):
plot3 := plot(state_50, alpha = 0..1, color = [green, red, blue, purple, black],
linestyle = "dot");
```

$$x_0 := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



> #Warning, die plots kloppen niet, maar moet gewoonweg gevult worden
met de juiste J



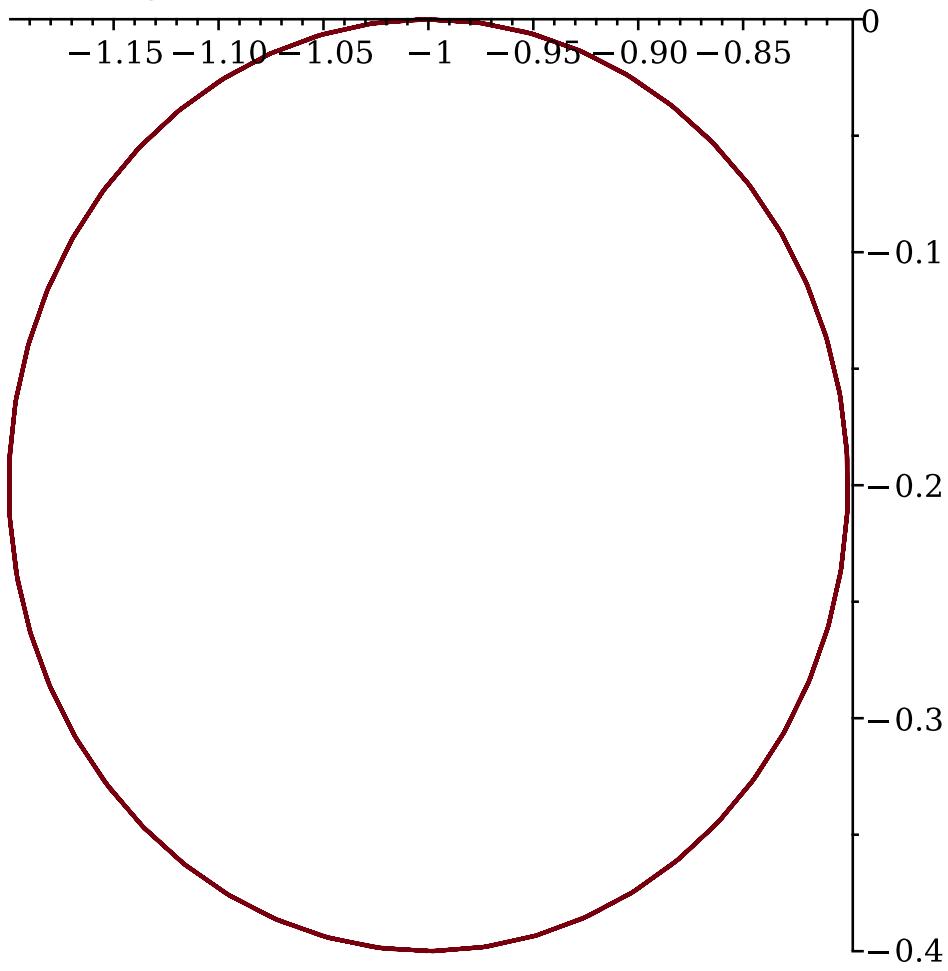
WC 3

// Exercise 1

```

> restart: with(inttrans): with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[0, 0, B, 0, Ex], [1, 0, 0, 0, 0], [-B, 0, 0, 0, Ey], [0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0]]):
> y := Vector([vx0, x0, vy0, y0, 1]):
> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q']):
> exp_A := MatrixExponential(A, t):
> res := exp_A * y:
> x := res[2]:
> y := res[4]:
> # ii
> # We doen maar eentje
> A := Matrix([[0, 0, 10, 0, 0], [1, 0, 0, 0, 0], [-10, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0]]):
> exp_A := MatrixExponential(A, t):
> res := exp_A * Vector([2, -1, 0, 0, 1]):
> x := res[2]:
> y := res[4]:
> plot_1 := plot([x, y, t = 0..0.5])

```



```

> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([ [1, -1, 0], [0, 1/2, 0], [-3/4, 7/4, 1/4] ])
      
$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$
 (1)
> J, Q := JordanForm(A, output = [ 'J', 'Q' ])
      
$$J, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$
 (2)
> cosD := Matrix([[ (cos(Pi * J[1, 1])), 0, 0], [0, (cos(Pi * J[2, 2])), 0], [0, 0, (cos(Pi * J[3, 3]))]]);
      
$$cosD := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
 (3)
> result := Q * cosD * MatrixInverse(Q)
      
$$result := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
 (4)
> # Et voila

```

Figure 8.53: Exercise 2

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> # First we define the relationship as matrix
> A := Matrix([[a,b],[1,0]])

$$A := \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = [ 'J','Q'])

$$J, Q := \begin{bmatrix} \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \end{bmatrix}, \quad (2)$$


$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2\sqrt{a^2 + 4b}} & \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2\sqrt{a^2 + 4b}} \\ -\frac{1}{\sqrt{a^2 + 4b}} & \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4b}} \end{bmatrix}$$

> result := Q . MatrixPower(J, n) . MatrixInverse(Q) . Vector([1, 1]):
> limit_ := simplify(result[1] / result[2])

$$limit_ := \left( (\sqrt{a^2 + 4b} - a - 2b) \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n + (\sqrt{a^2 + 4b} + a + 2b) \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n \right) / \left( (\sqrt{a^2 + 4b} + a - 2) \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n - \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n (a - \sqrt{a^2 + 4b} - 2) \right) \quad (3)$$

> limit(limit_, n = infinity)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( (\sqrt{a^2 + 4b} - a - 2b) \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n + (\sqrt{a^2 + 4b} + a + 2b) \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n \right) / \left( (\sqrt{a^2 + 4b} + a - 2) \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n - \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n (a - \sqrt{a^2 + 4b} - 2) \right) \quad (4)$$


```

[>
]

Figure 8.54: Exercise 3

Huis 4

$$3y = z^3 + 2z \cdot 2$$

i) $\frac{\partial}{\partial x} z(x,y) : 3 = 2z^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$
 $\Leftrightarrow 1 = \frac{\partial z}{\partial x} (z^2 + x)$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{z^2 + x} = \frac{\partial z}{\partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial x} z(x,y) : 0 = 2z^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2z + 2 \cdot x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$
 $\Leftrightarrow -2z = \frac{\partial z}{\partial x} (z^2 + x)$
 $\Leftrightarrow -\frac{z}{z^2 + x} = \frac{\partial z}{\partial x}$

ii) $\frac{\partial}{\partial y} z(x,y) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (z^2 + x)^{-1}}_{= -1 \cdot (z^2 + x) \cdot 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial y}} = -1 \cdot (z^2 + x) \cdot 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$
 $= -\frac{2z}{(z^2 + x)^2 \cdot (z^2 + x)} = -\frac{2z}{(z^2 + x)^3}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} z(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{z}{z^2 + x} \right) = -\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot (z^2 + x) - 2 \cdot (z^2 + x) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 1 \right)}{(z^2 + x)^2} \\ &= \frac{z + z \left(-2 \left(\frac{-z}{z^2 + x} \right) + 1 \right)}{(z^2 + x)^2} \end{aligned}$$

$$= z + z - \frac{2z^2}{z^2 + x} = \frac{z(1/z^2 + x) - 2z^2}{(z^2 + x)^2} = \frac{z - 2z^3}{(z^2 + x)^2} = \frac{z(1 - 2z^2)}{(z^2 + x)^2}$$
 $\text{So: } x \cdot \frac{\partial}{\partial y} z(x,y) + \frac{\partial}{\partial x} z(x,y) = 0 \quad \blacksquare$

Figure 8.55: Exercise 1

$$2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = (x^2, y^2) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

$$a = e^{i\pi/4} \quad b = e^{-i\pi/4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot e^{i\pi/4} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot e^{-i\pi/4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot e^{-i\pi/4} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot e^{i\pi/4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot e^{i\pi/4} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot e^{-i\pi/4} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot e^{i\pi/4} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot e^{i\pi/4} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (e^{i\pi/4})^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} e^{i\pi/4} \cdot e^{-i\pi/4} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{-i\pi/4} \cdot e^{i\pi/4} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (e^{i\pi/4})^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{i\pi/2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} e^{i\pi/2} e^{i\pi/2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} e^{-i\pi/2} e^{i\pi/2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{-i\pi/2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot e^{-i\pi/4} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot e^{i\pi/4} \right) \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot e^{i\pi/4} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot e^{i\pi/4} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{i\pi/2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} e^{i\pi/2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{-i\pi/2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} e^{-i\pi/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4} \right) \\ &= e^{i\pi/2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 = (e^{i\pi/4})^2 + (e^{-i\pi/4})^2 = 1$$

Figure 8.56: Exercise 2

$$f(x,y) = x^2 - 12xy + 48x + 6y^2, \quad b \neq 0$$

1) calculate partial derivatives $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, and equal to zero

$$-\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 12y + 48 = 0$$

↓
to find stationary
points.

$$-\frac{\partial f}{\partial y} = -12x + 2by = 0$$

$$\therefore 12x = 2by \Rightarrow 12a$$

$$\therefore y = \frac{6a}{b}$$

$$\therefore 3x^2 - 12 \cdot \frac{6a}{b} + 48 = 0$$

$$\therefore 3x^2 - \frac{72a}{b} + 48 = 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{24a}{b} + 16 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{\pm} = \frac{12 + 4\sqrt{9 - 6a^2}}{b}$$

$$\begin{aligned} D_{\text{local}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - b \cdot a \cdot 11 \\ &= 576a^2 - 64 \end{aligned}$$

- } als $D > 0$: gleme optima
 als $D < 0$: free optima -
 als $D = 0$: topotoma.

Figure 8.57: Exercise 3

$$e) f(x(t), y(t)) = c$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = c$$

\rightarrow schrijf ∂A dan in relatieve vorm:

$$x^3 - y^3 = c(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - y^3 = cx^2 + cy^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - cx^2 = y^3 + cy^2$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - c) = y^2(y + c)$$

$$\Rightarrow x^2 \frac{(x - c)}{(y + c)} = y^2$$

$$\Leftrightarrow x \sqrt[3]{\frac{(x - c)}{(y + c)}} = y. \quad \text{N.B. } x(t) \neq 0$$

$$\Rightarrow y(t) = t \cdot \sqrt[3]{\frac{(t - c)}{(t + c)}}$$

$$\text{dus } (x(t), y(t)) = \left(t, t^3 \sqrt[3]{\frac{1-c}{1+c}} \right)$$

$$f) \text{ toon aan } \nabla f(x,y) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t} \right) = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{6x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-6y^2x^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

∇f = gradient.

ok. partiële derivaties voor $(x(t), y(t))$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt[3]{\frac{1-c}{1+c}} \quad \rightarrow \text{Via rekening}$$

$$\text{dus m.a.: } \nabla f(x,y) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t} \right) = 0 \quad \blacksquare$$

Figure 8.58: Exercise 4

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> V:=-cos(3·(x-y))·cos(z+y)·cos(5·(x+y))
       $V := -\cos(3x - 3y) \cos(z + y) \cos(5x + 5y)$  (1)
> H:=Matrix([[diff(V,x,x),diff(V,x,y),diff(V,x,z)], [diff(V,y,x),diff(V,y,y),
              diff(V,y,z)], [diff(V,z,x),diff(V,z,y),diff(V,z,z)]]):
> H:=eval(H,[x=0,y=0,z=0])
      
$$H := \begin{bmatrix} 34 & 16 & 0 \\ 16 & 35 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
 (2)
> J,Q:=JordanForm(H,output = ['J','Q']):
> evalf(J)
[[50.51822645 - 5. × 10-9 I, 0., 0.],
 [0., 18.51981170 + 1.932050808 × 10-8 I, 0.],
 [0., 0., 0.961961840 - 1.532050808 × 10-8 I]] (3)
> # dus w_12 = 50.51, w_22 = 18.51, w_32 = 0.96
>

```

Figure 8.59: Exercise 5

Bord 4

$$f(x, y) = \sin(x) e^y + y^2$$

i) $\vec{v} = \left\{ \cos(x) e^y, \sin(x) \cdot e^y + 2y \right\}$

plot is done with matlab.

ii) we kiezen een horizonte waarde $f(x, y) = c$

$$\sin(x) e^y + y^2 = c$$

$$(c) \sin(x) = \frac{c - y^2}{e^y}$$

$$\therefore \arcsin\left(\frac{c - y^2}{e^y}\right) \approx x$$

$$\Rightarrow x = \arcsin\left(\frac{c - y^2}{e^y}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

iii) Maple.

iv) gradient toont richting aan: (α, β)

$$\Rightarrow \left\{ \cos(x) e^y, \sin(x) \cdot e^y + 2y \right\}$$

$$\Theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(x) \cdot e^y + 2y}{\cos(x) \cdot e^y}\right) \in 71,09^\circ$$

$-71,09^\circ$

want we
richting naar buiten

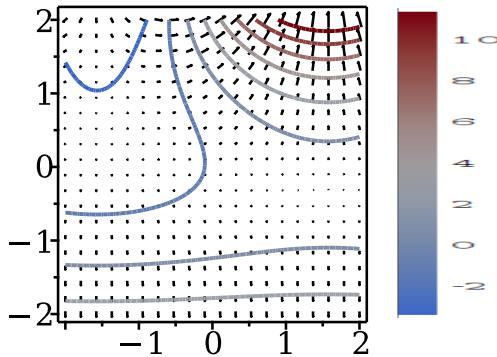
Figure 8.60: Exercise 1

```

> restart: with(LinearAlgebra) : with(VectorCalculus) : with(plots) :
  with(plottools) :
  SetCoordinates(cartesian[x,y]) :
> f := (x,y)→sin(x)·exp(y) + y2:
> gradient := Gradient(f(x,y)) :
> fig1:=gradplot(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2,      axes=boxed,scaling=
  constrained):
> display(fig1):
>
> # ii)
>
> solve(f(x,y) = c, x) :
> fig2 := contourplot(f(x, y), x = -2..2, y = -2..2, axes = boxed, scaling
  = constrained) :
display(fig2) :

> # Now simply display them together
> display(fig1,fig2)

```



```

> # Here we confirmed that the gradient is pointing to the rising direction
> # iv)
> gradient_adapted_1 := cos(1)·exp(1) :

> gradient_adapted_2 := sin(1)·exp(1) + 2
                                gradient_adapted_2 := sin(1) e + 2

```

(1)

> $\text{angle} := \text{convert}\left(\text{evalf}\left(\arctan\left(\frac{\text{gradient_adapted_2}}{\text{gradient_adapted_1}}\right)\right), \text{degrees}\right)$
angle := 71.09038174 degrees

(2)

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus): with(plots):
SetCoordinates(cartesian[x,y]):
```

> # Define the function
 $f := (x, y, z, t) \rightarrow 4*x*y*z + t^2 - x^2 - y^2 - z^2;$

Set the coordinates for partial derivatives
SetCoordinates(cartesian[x,y,z,t]);

Calculate the gradient
grad_f := Gradient(f(x,y,z,t));

Solve for critical points by setting each component of the gradient to zero
critical_points := solve({grad_f[1] = 0, grad_f[2] = 0, grad_f[3] = 0, grad_f[4] = 0}, {x, y, z, t});

Calculate the Hessian matrix of f
hessian_f := Hessian(f(x,y,z,t));

$$f := (x, y, z, t) \mapsto 4*x*y*z + t^2 + (-x^2) + (-y^2) + (-z^2)$$

$$\text{cartesian}_{x,y,z,t} \quad (1)$$

> # Now for every point we need to calculate the eigenvalues and explore these
eval_hessian := subs({x = 0, y = 0, z = 0, t = 0}, hessian_f);

$$\text{eval_hessian} := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

> # For point (0,0,0,0) we get a saddle point cuz lambda {-2, 2}, thus pos and negative
eval_hessian := Eigenvalues(subs({x = 1/2, y = 1/2, z = 1/2, t = 0}, hessian_f));

$$\text{eval_hessian} := \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

> # saddle point, and so forth...

Figure 8.61: Exercise 2

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta_t^2 - \Delta_\alpha^2) \cdot g(t, \alpha) = 0 \rightarrow \Delta_u \cdot \Delta_v \cdot g(u, v) = 0 \\ u = t - \alpha, v = t + \alpha \end{array} \right.$$

i) Wenn dann gilt $(\Delta_t^2 - \Delta_\alpha^2) = 4 \Delta_u \cdot \Delta_v$

$$\Delta_t^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \Delta_u + \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \Delta_v \right)^2 = (\Delta_u + \Delta_v)^2$$

$$\Delta_\alpha^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \cdot \Delta_u + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \cdot \Delta_v \right)^2 = (-\Delta_u + \Delta_v)^2$$

Daraus: $\Delta_t^2 - \Delta_\alpha^2 = 4 \Delta_u \cdot \Delta_v$

Beweis: $g(t, \alpha) = f_1(t - \alpha) + f_2(t + \alpha)$
 $= f_1(u) + f_2(v) = g(u, v)$

en $\Delta_u \cdot \Delta_v \cdot g(u, v) = 0 \rightarrow$ dies ergibt
 von selbst.

Figure 8.62: Exercise 3

The following exercise is quite difficult, however we simply take the SVD and look at the diagonal matrix to see the dim of the dominant singular values.

Wiskundige modellering in de ingenieurswetenschappen: Bordoeefingenenles 4

► Oefening 1

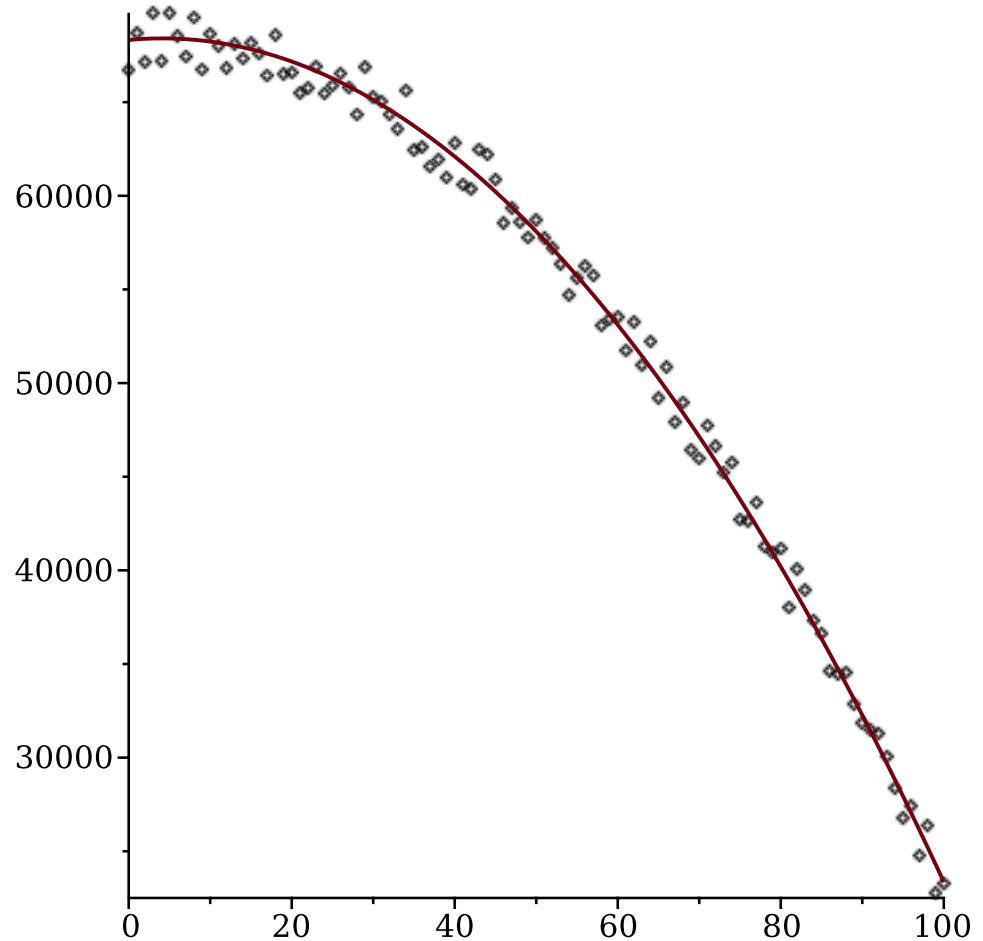
► Oefening 2

► Oefening 3

▼ Oefening 4

Noisy Freefall

```
> restart:with(LinearAlgebra):with(plots):with(MTM):
Rijken en kolommen (# datapunten per meting en # metingen)
> mmax := 100:
nmax := 200:
Functies: constante functie, lineaire en kwadratische functie
> f1 := t -> t^0:
f2 := t -> t^1:
f3 := t -> t^2:
Tijdpunten (equidistant array/sequence)
> ts := [seq(t, t=0..mmax, 1)]:
Random generators: R1, R2 voor random beginsposities, beginsnelheden
H voor random noise per meetpunt
R1f := rand(-100000.0..100000.0):
R2f := rand(-1000.0..1000.0):
H := rand(-1600.0..1600.0):
lijst van beginposities en beginsnelheden
> R1 := [seq(R1f(), i=0..nmax)]:
R2 := [seq(R2f(), i=0..nmax)]:
Datamatrix (metingen in kolommen van M)
> M := Matrix(mmax+1, nmax, (i, j) -> R1[j]*f1(ts[i]) + R2[j]*
f2(ts[i])-9.8/2*f3(ts[i])+H()):
visualisatie meting i
> i := 101;
pointplot_i := pointplot(ts, M[.,i]):
curveplot_i := plot(ts, R1[i]*map(f1,ts)+R2[i]*map(f2,ts)
-9.8/2*map(f3,ts)):
display(pointplot_i, curveplot_i);
i := 101
```



SVDecomposition

> U,S,V := svd(M);

Singular values: 3 grote (orde 10^6 , 10^5), rest zijn kleiner (orde 20)

> Diagonal(S);

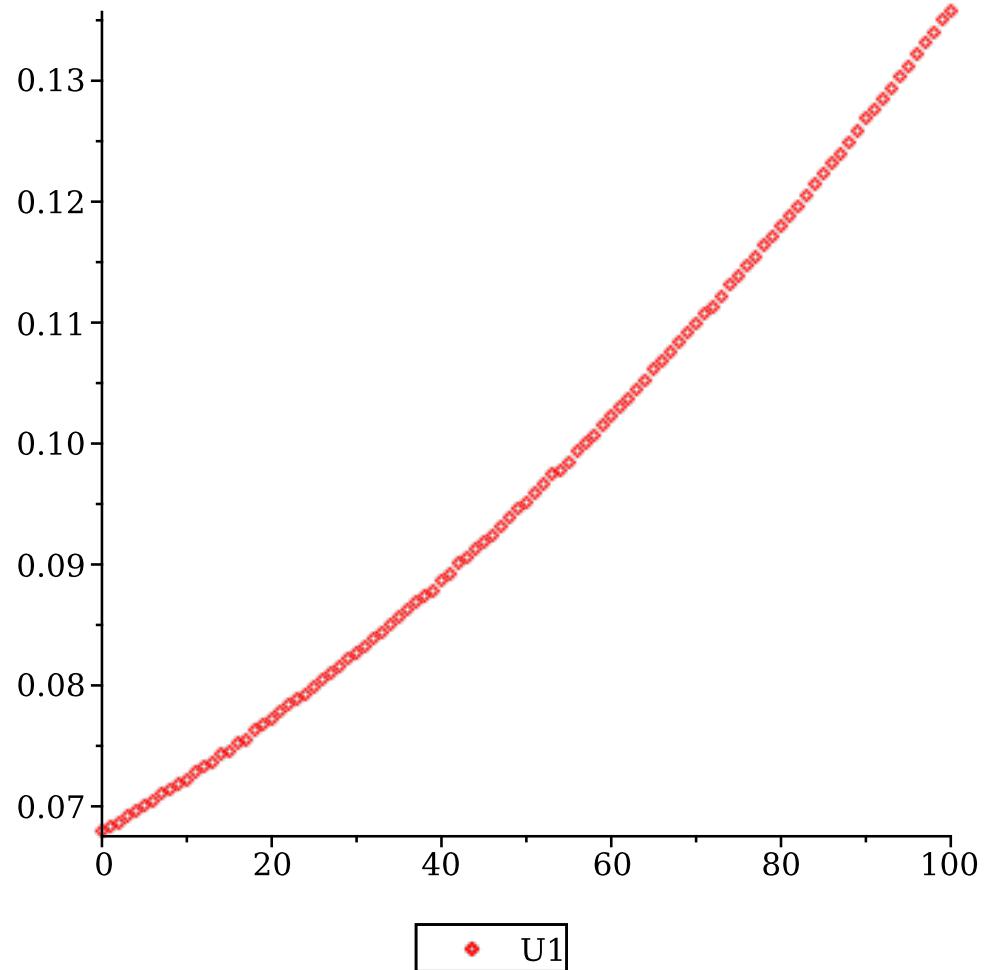
(4.1)

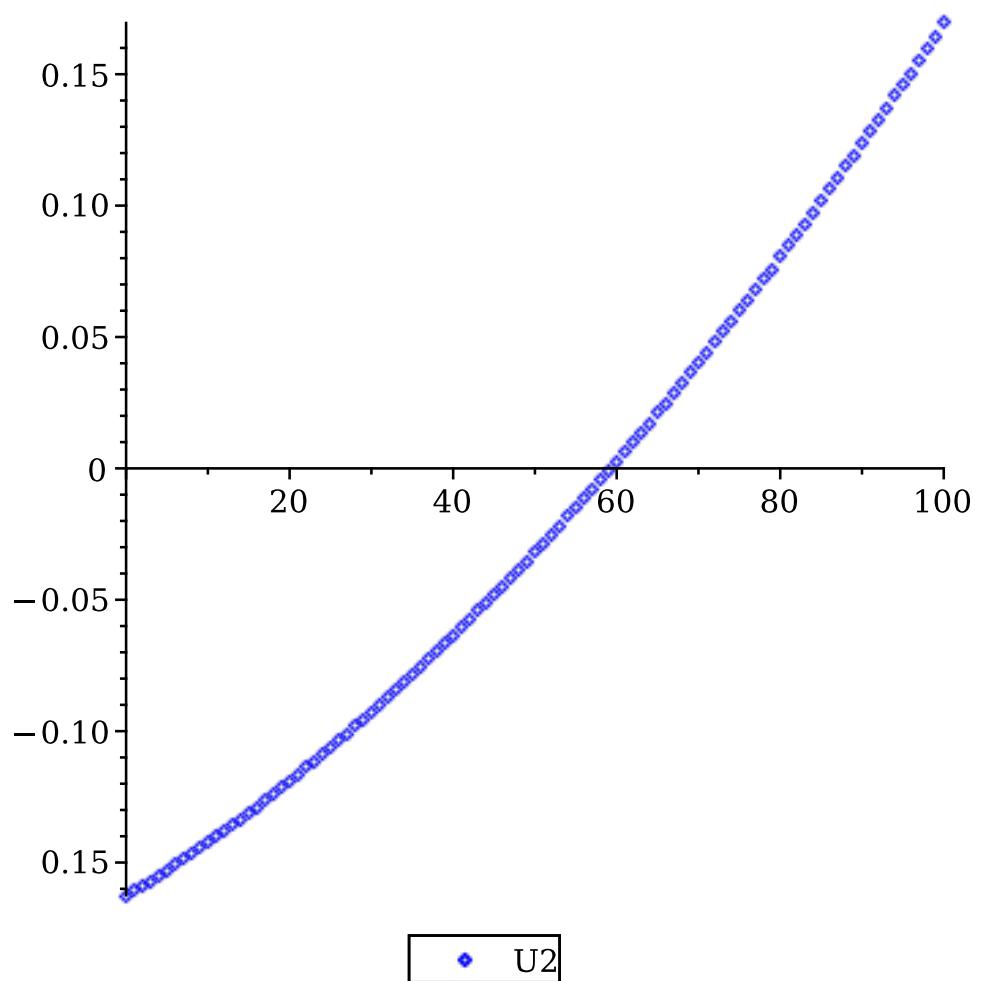
$$\begin{bmatrix} 9.64056374121872 \times 10^6 \\ 2.73723132122265 \times 10^6 \\ 396624.491513215 \\ 22195.3215958040 \\ 21414.8781379108 \\ 20743.5564482751 \\ 20522.3370051525 \\ 20028.2625394204 \\ 19723.4939016135 \\ 19679.6542984042 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

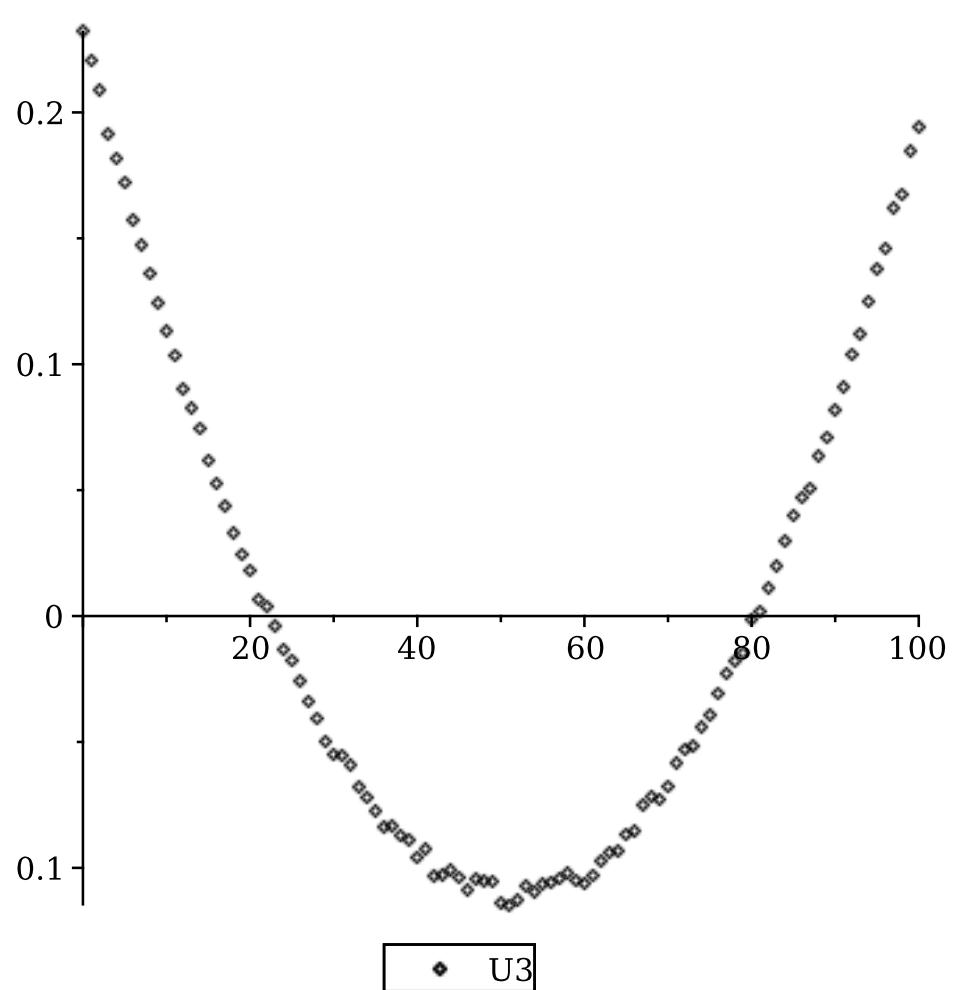
101 element Vector[column]

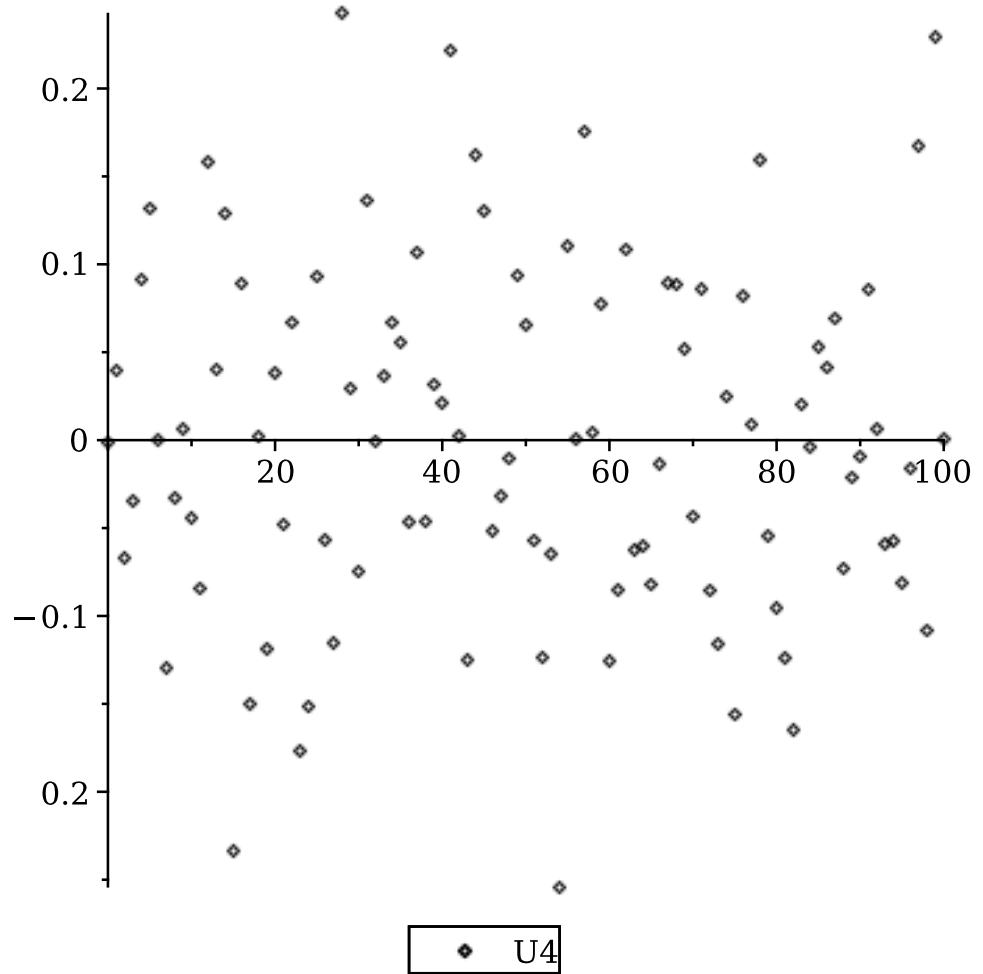
Plot U vectoren bij eerste 3 singular values

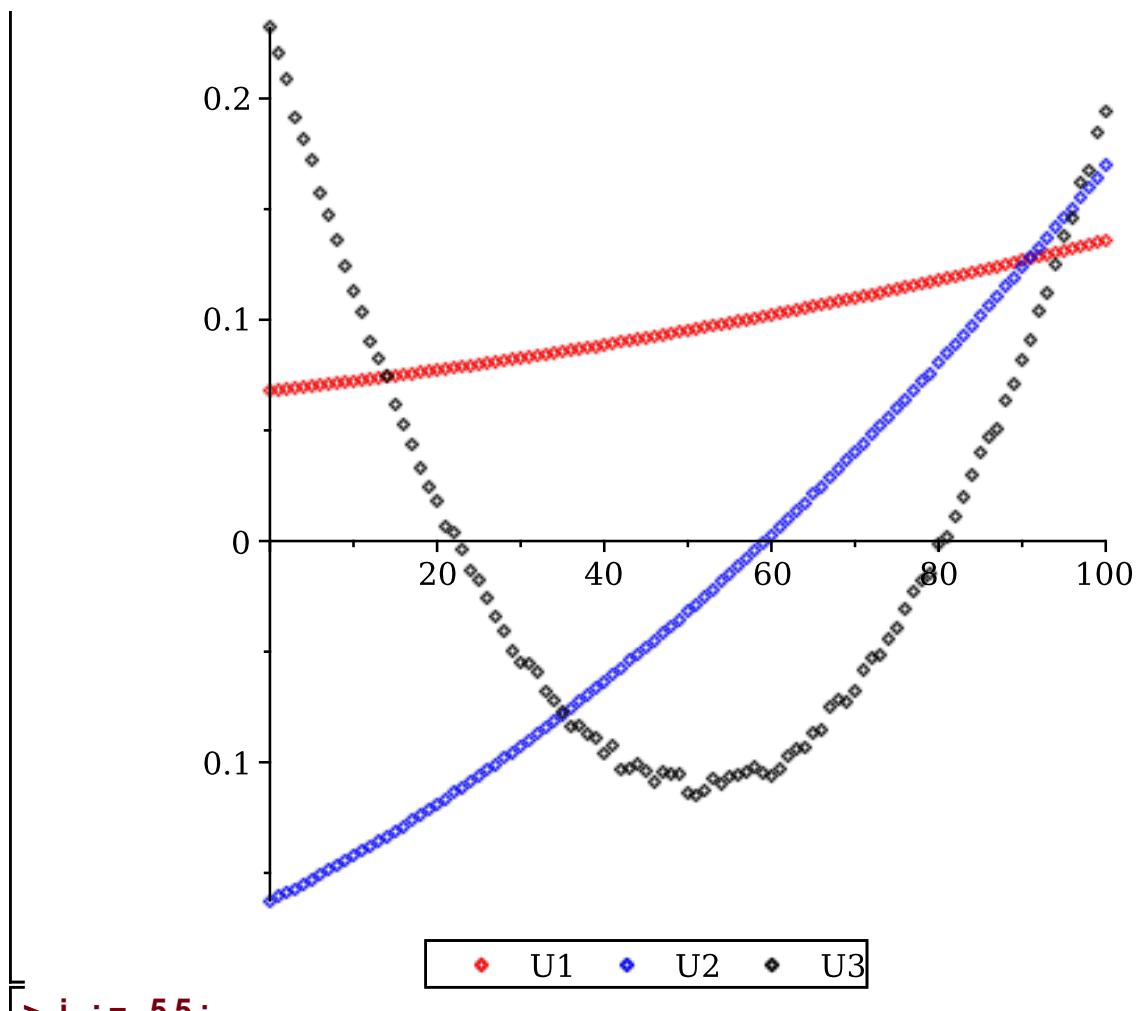
```
> U1plot := pointplot(ts, U[...], color=red, legend="U1");
U2plot := pointplot(ts, U[...], color=blue, legend="U2");
U3plot := pointplot(ts, U[...], color=black, legend="U3");
U4plot := pointplot(ts, U[...], color=black, legend="U4");
display(U1plot,U2plot, U3plot);
```











```
> i := 55;
```

```

pointplot_i := pointplot(ts, M[..,i]):
curveplot_i := plot(ts, R1[i]*map(f1,ts)+R2[i]*map(f2,ts)
-9.8/2*map(f3,ts)):

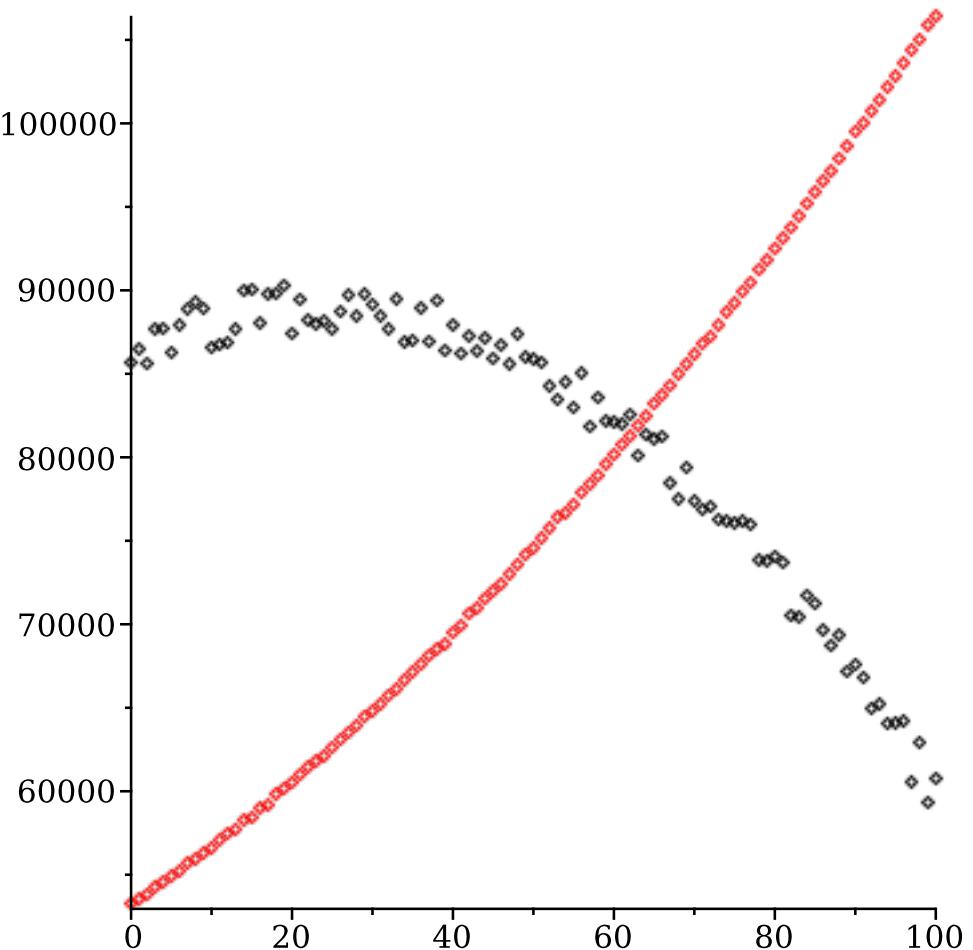
proj1 := (U[..,1].M[..,i]).U[..,1]:
proj2 := (U[..,1].M[..,i]).U[..,1]+(U[..,2].M[..,i]).U[..,2]:
proj3 := (U[..,1].M[..,i]).U[..,1]+(U[..,2].M[..,i]).U[..,2]+(U
[..,3].M[..,i]).U[..,3]:
proj4 := (U[..,1].M[..,i]).U[..,1]+(U[..,2].M[..,i]).U[..,2]+(U
[..,3].M[..,i]).U[..,3]+(U[..,4].M[..,i]).U[..,4]:

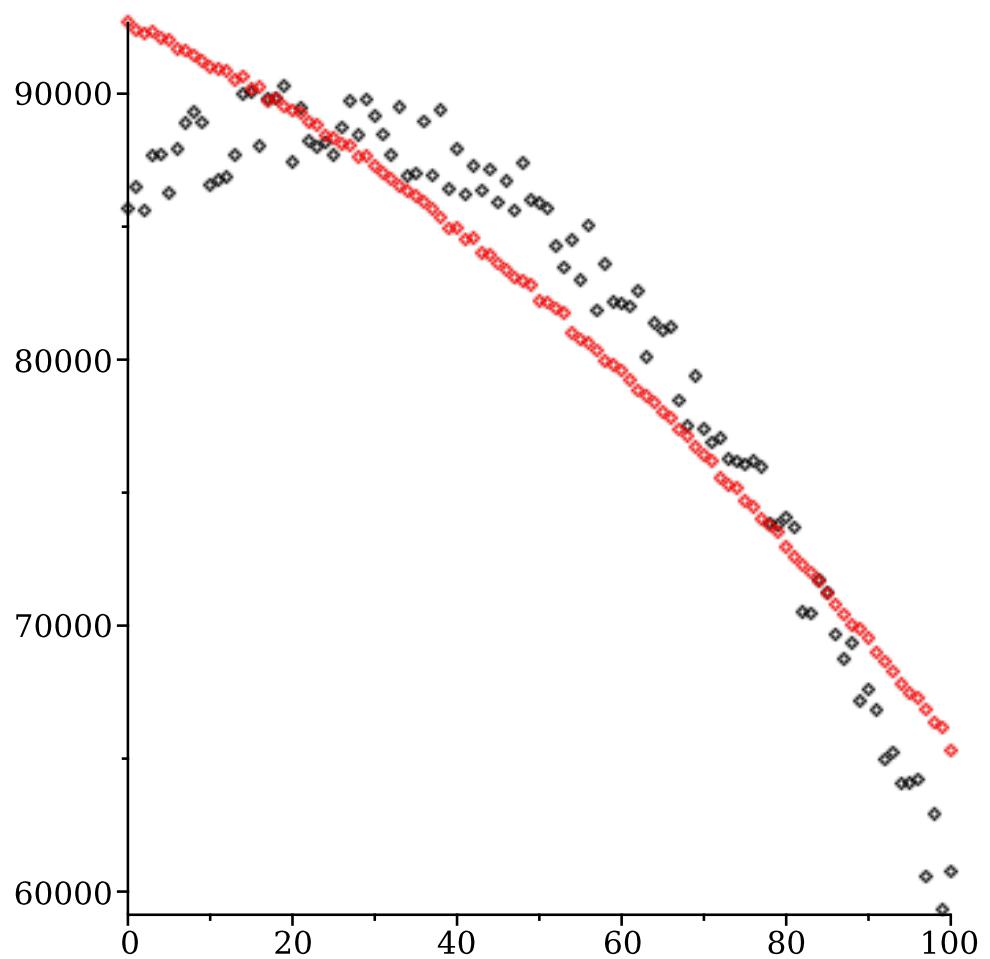
projectieplot1 := pointplot(ts, proj1, color=red):
projectieplot2 := pointplot(ts, proj2, color=red):
projectieplot3 := pointplot(ts, proj3, color=red):
projectieplot4 := pointplot(ts, proj4, color=red):

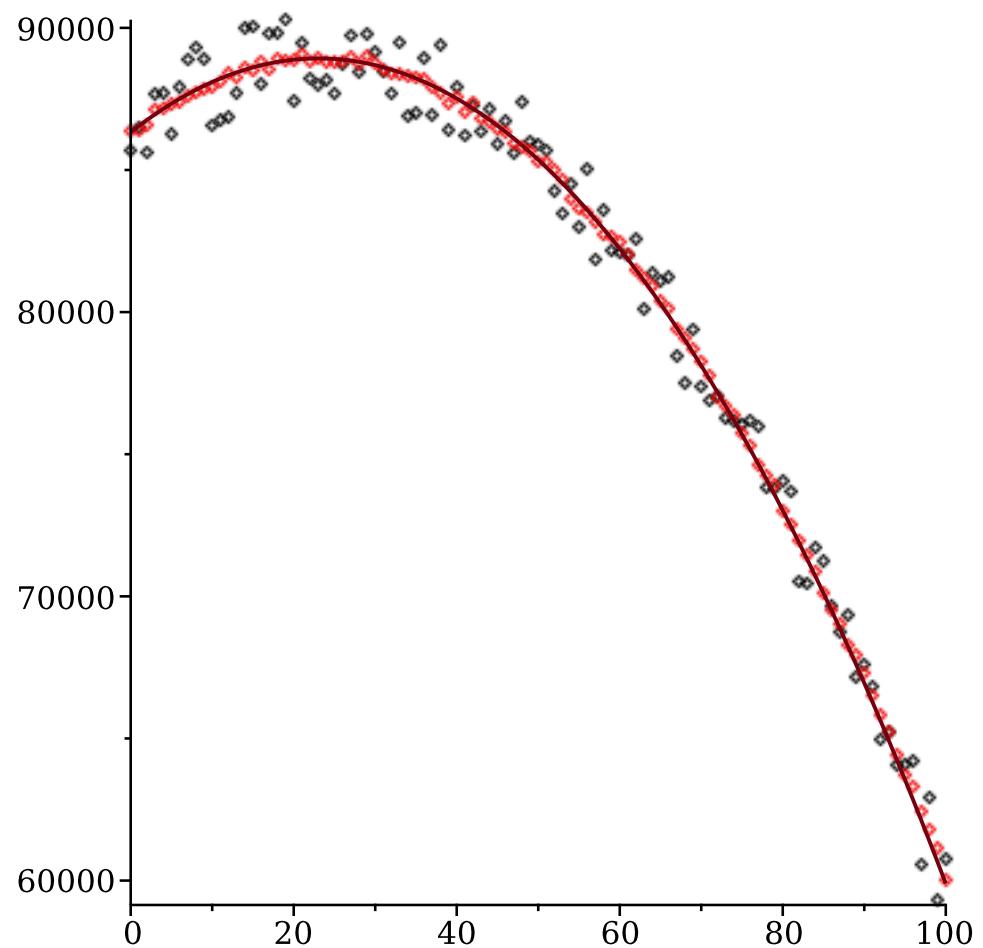
display(pointplot_i, projectieplot1);
display(pointplot_i, projectieplot2);
display(pointplot_i, projectieplot3, curveplot_i);

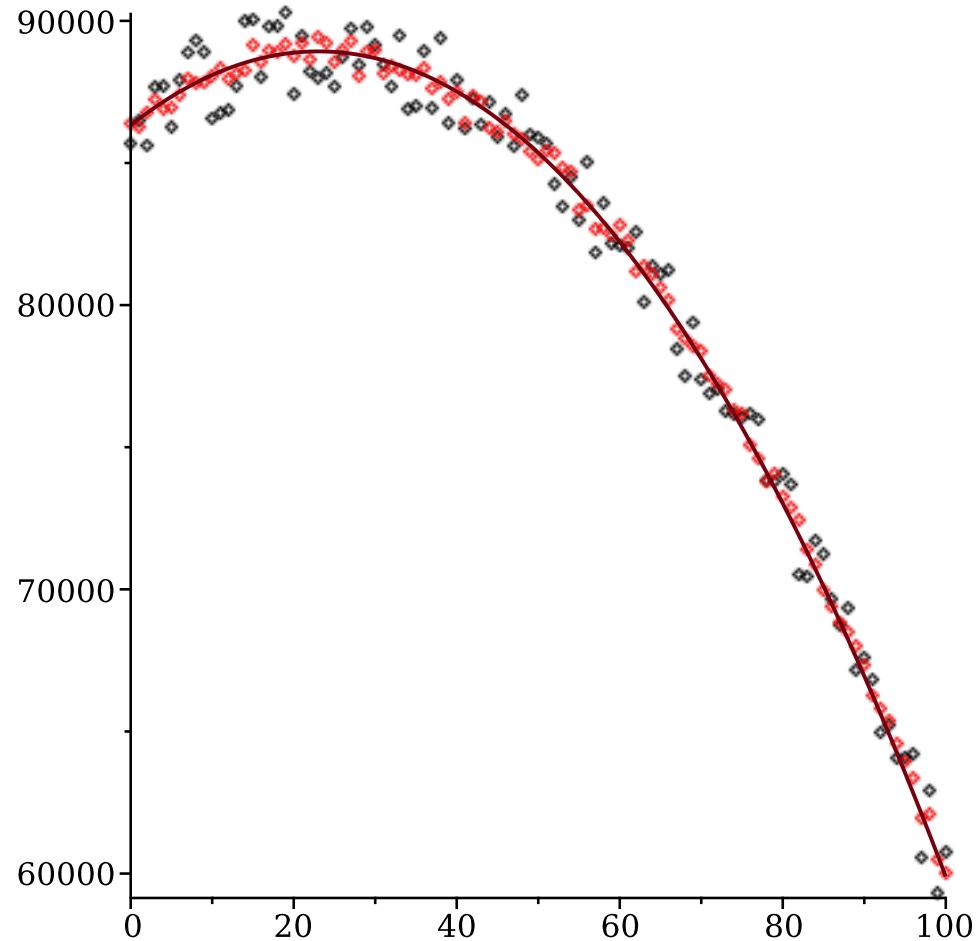
```

```
display(pointplot_i, projectieplot4, curveplot_i);  
i := 55
```









Noisy oscillator

```

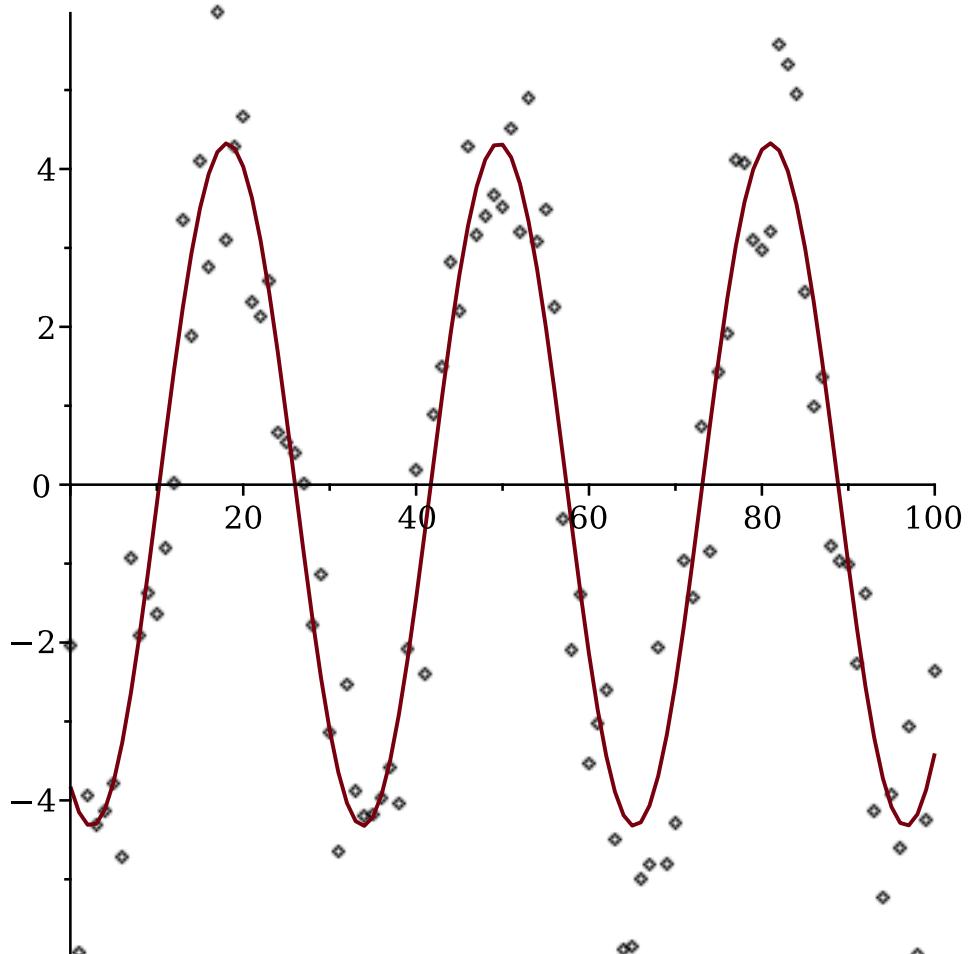
> restart:with(plots):with(LinearAlgebra):with(MTM):
Rijen en kolommen (# datapunten and # metingen)
> mmax := 100:
nmax := 200:
Functies: cosinus en sinus
> f1 := t -> cos(0.2*t):
f2 := t -> sin(0.2*t):
Tijdpunten (equidistant array/sequence)
> ts := [seq(t, t=0..mmax, 1)]:
Random functies: R voor random amplitudes, H voor random noise per
meetpunt
> A := 4.0:
R := rand(-A..A):
H := rand(-1.8..1.8):
lijst van amplitudes voor elke meting
> R1 := [seq(R(), i=0..nmax)]:
R2 := [seq(R(), i=0..nmax)]:
> M := Matrix(mmax+1, nmax, (i, j) -> R1[j]*f1(ts[i]) + R2[j]*f2

```

```

 $(ts[i])+H():$ 
visualisatie meting i
> i := 30;
pointplot_i := pointplot(ts, M[..,i]):
curveplot_i := plot(ts, R1[i]*map(f1,ts)+R2[i]*map(f2,ts)):
display(pointplot_i,curveplot_i);
i := 30

```



```

SVDecomposition
> U,S,V := svd(M):
Singular values: 2 grote (orde 250), rest zijn kleiner (orde 20)
> Diagonal(S);

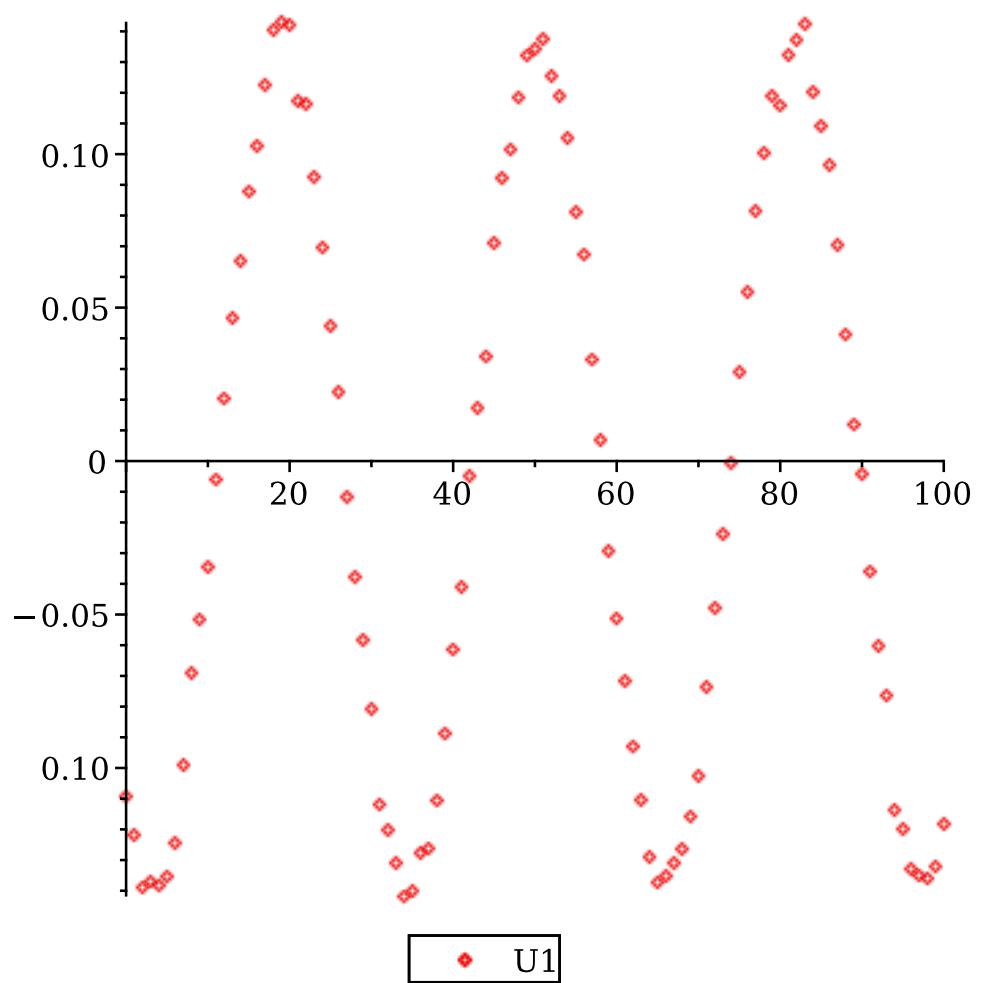
```

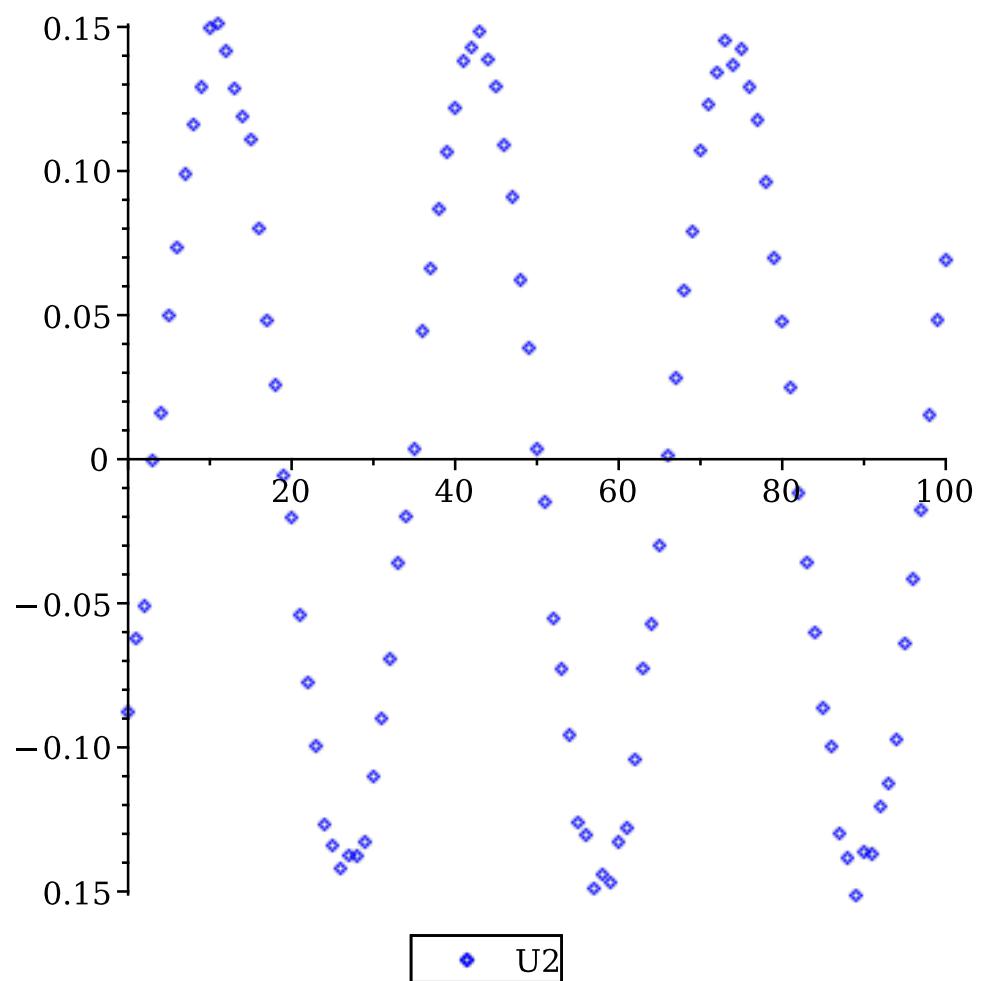
$$\begin{bmatrix}
 255.451392358734 \\
 213.264462492594 \\
 25.1582279645861 \\
 24.0507702090590 \\
 23.9080041033373 \\
 23.1593145814381 \\
 22.9934092535045 \\
 22.1853405869249 \\
 21.8719264275831 \\
 21.6988494211531 \\
 \vdots
 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

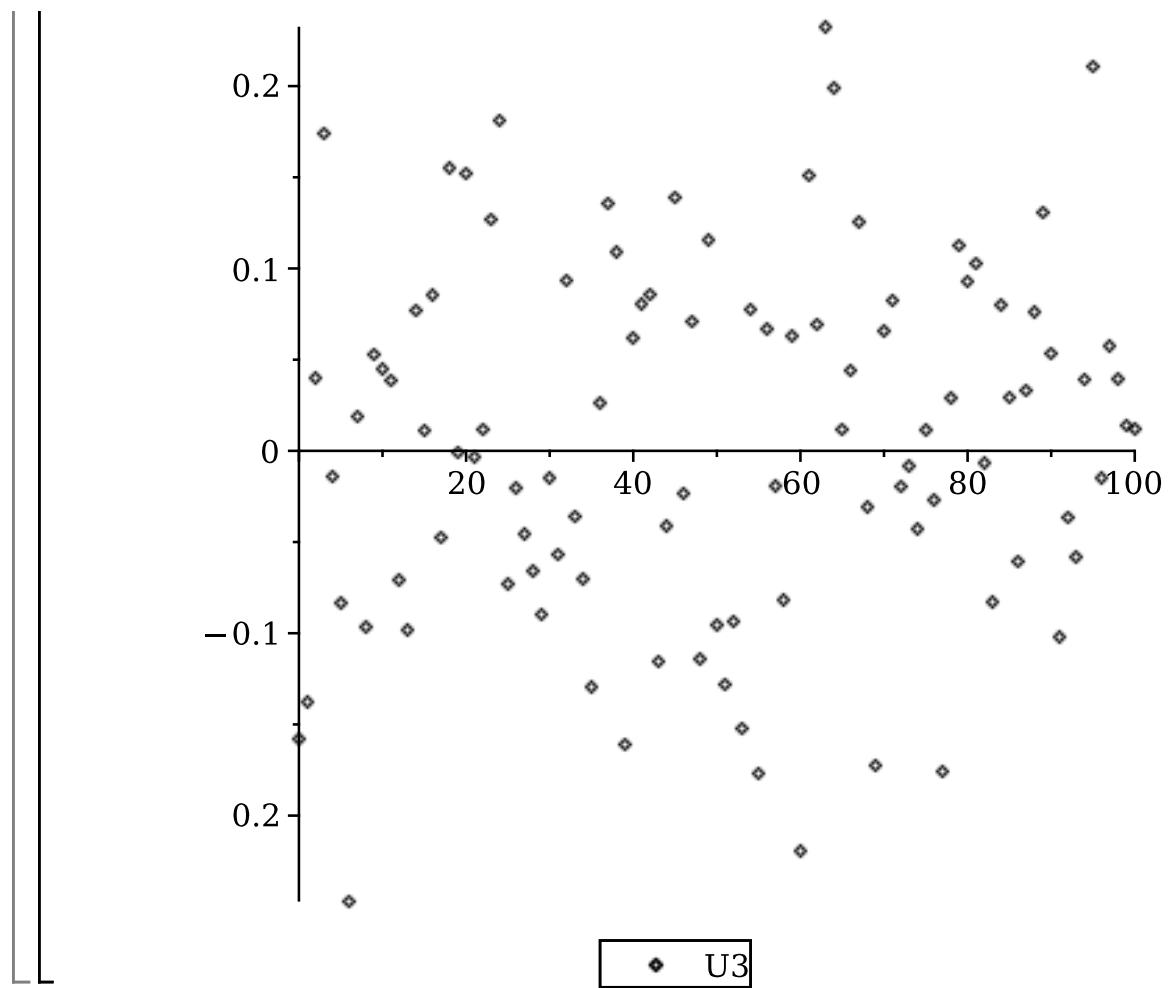
101 element Vector[column]

Plot U vectoren bij eerste 3 singular values

```
> U1plot := pointplot(ts, U[..,1], color=red, legend="U1");
U2plot := pointplot(ts, U[..,2], color=blue, legend="U2");
U3plot := pointplot(ts, U[..,3], color=black, legend="U3");
```







WC 4

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(plots): with(VectorCalculus):
> f := (x,y)→x·y·(x2 - y2 - 1)
      f := (x, y) ↪ x·y·(x2 + (-y2) - 1)                                (1)

> SetCoordinates(cartesian[x, y]):
> grad := Gradient(f(x, y))
      grad := (y(x2 - y2 - 1) + 2x2y)ēx + (x(x2 - y2 - 1) - 2xy2)ēy      (2)

> stationary_points := solve({grad[1] = 0, grad[2] = 0}, {x, y})
stationary_points := {x = 0, y = 0}, {x = 0, y = RootOf(_Z2 + 1)}, {x = 1, y = 0}, {x = -1, y = 0}, {x = -1/2, y = RootOf(_Z2 + 1)/2}, {x = 1/2, y = RootOf(_Z2 + 1)/2}      (3)

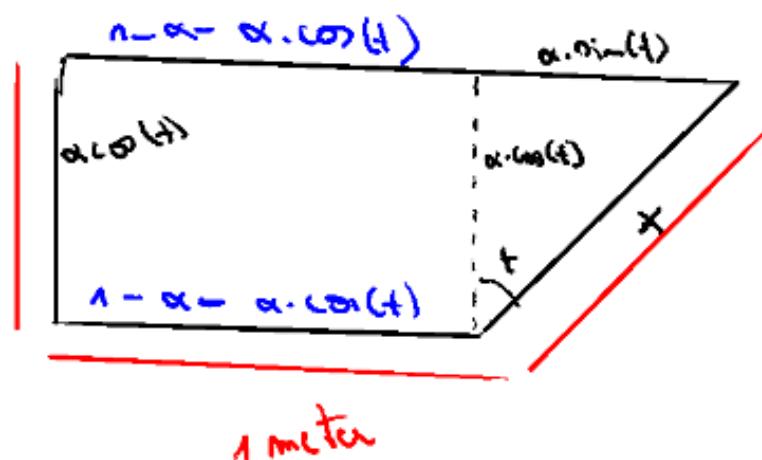
> hessian := Hessian(f(x, y))
      hessian := [ 6xy   3x2 - 3y2 - 1 ]
                  [ 3x2 - 3y2 - 1   -6xy ]                                (4)

> # So now for the first critical point for example:
> Eigenvalues(subs(x = 0, y = 0, hessian))
      [ 1 ]
      [ -1 ]                                (5)

> # So this is a saddle
> # And so forth...

```

Figure 8.63: Exercise 1



$$opp = \frac{(l + L) \cdot h}{2} = \text{via Maple}$$

Figure 8.64: Exercise 2

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus):
SetCoordinates(cartesian[x, t]):
> area := 
$$\frac{(1 - x - x \cdot \cos(t) + 1 - x - x \cdot \cos(t) + x \cdot \sin(t)) \cdot x \cdot \cos(t)}{2}$$


$$area := \frac{(2 - 2x - 2x \cos(t) + x \sin(t)) x \cos(t)}{2} \quad (1)$$

> gradient := simplify(Gradient(area))
gradient := 
$$(-2 \cos(t)^2 x + (x \sin(t) - 2x + 1) \cos(t)) \bar{e}_x + \left( (2x^2 \cos(t) + x^2$$


$$- x) \sin(t) + x^2 \left( \cos(t)^2 - \frac{1}{2} \right) \right) \bar{e}_t \quad (2)$$

```

> # Seems like we do not have a direction in the y direction, whatever

> critical_points := (solve({gradient[1] = 0, gradient[2] = 0}, {x, t}))

critical_points := $\left\{ t = \frac{\pi}{2}, x = 0 \right\}, \left\{ t = \arctan(1, \text{RootOf}(_Z^2 - 3)), x = \frac{4 \text{RootOf}(_Z^2 - 3)}{3} - 2 \right\}, \left\{ t = \frac{\pi}{2}, x = 2 \right\}, \left\{ t = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{2}{3} \right\}$ (3)

> # X needs to be J0, 1[and t J0, pi:2]

> # seems like point 2 is the only valid one

> # Hessian

> hessian := Hessian(area):

> result := evalf(subs(x = $\frac{4 \text{RootOf}(_Z^2 - 3)}{3} - 2$, t = arctan(1, RootOf(_Z^2 - 3)), hessian))

result :=
$$\begin{bmatrix} -2.799038106 & 0.5000000010 \\ 0.5000000010 & -0.1722201661 \end{bmatrix} \quad (4)$$

> Eigenvalues(result)

$$\begin{bmatrix} -2.89099141081943 + 0.1 \\ -0.0802668612805653 + 0.1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

> # These two values are < 0, so they define the maximum, so the second critical point is the maximum area.

> max_area := evalf(subs(t = arctan(1, RootOf(_Z^2 - 3)), x = $\frac{4 \text{RootOf}(_Z^2 - 3)}{3} - 2$, area))

max_area := 0.1339745961 (6)

Figure 8.65: Exercise 2

Huis 5

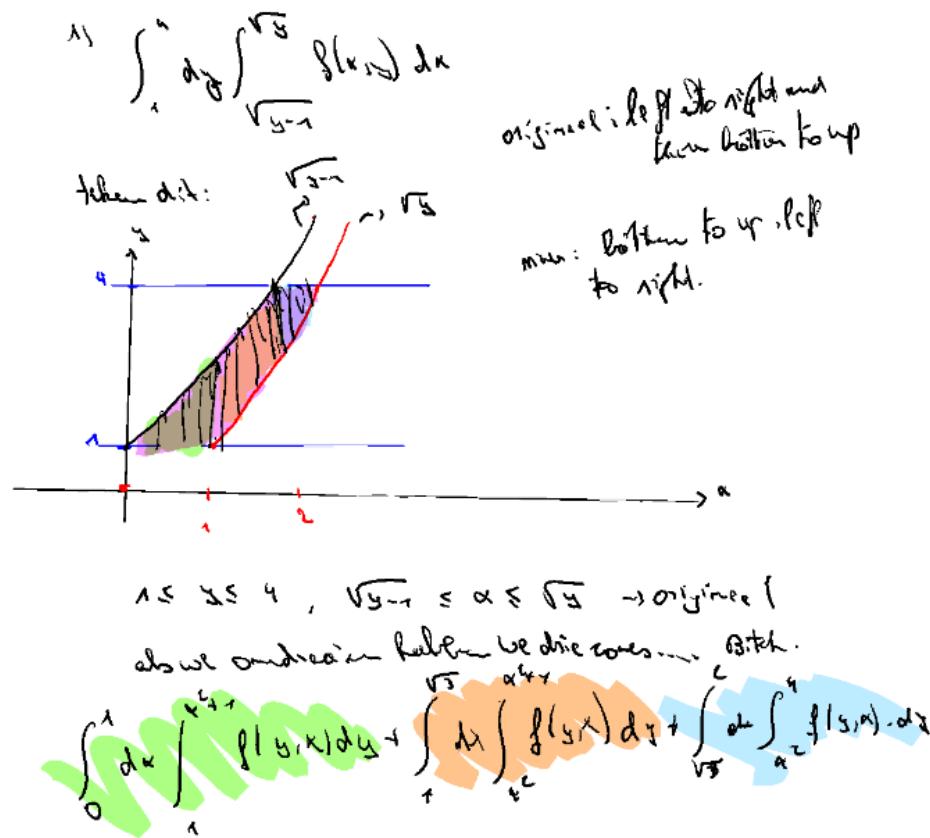


Figure 8.66: Exercise 1

```

> restart: with(VectorCalculus): with(LinearAlgebra):
> J:=Jacobian([r*sin(theta)*cos(phi), r*sin(theta)*sin(phi), r*cos(theta)], [r,
theta, phi])

$$J := \begin{bmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> det:=abs(Determinant(J))
det := |\sin(\theta)^3 \cos(\phi)^2 r^2 + \sin(\theta)^3 \sin(\phi)^2 r^2 + \sin(\theta) \cos(\phi)^2 \cos(\theta)^2 r^2
+ \sin(\theta) \sin(\phi)^2 \cos(\theta)^2 r^2|
> simplify(det)
|r|^2 |\sin(\theta)| \quad (2)
> # et voila ;0
>

```

Figure 8.67: Exercise 2

```

> with(VectorCalculus): with(LinearAlgebra):
> J := Jacobian([a·r·sin(theta)·cos(phi), b·r·sin(theta)·sin(phi), c·r·cos(theta)],
  [r, theta, phi])
      
$$J := \begin{bmatrix} a \sin(\theta) \cos(\phi) & a r \cos(\theta) \cos(\phi) & -a r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ b \sin(\theta) \sin(\phi) & b r \cos(\theta) \sin(\phi) & b r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ c \cos(\theta) & -c r \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J := Determinant(J)
J := a \sin(\theta)^3 \cos(\phi)^2 b r^2 c + b \sin(\theta)^3 \sin(\phi)^2 a r^2 c
      + \sin(\theta) \cos(\phi)^2 \cos(\theta)^2 a b c r^2 + \sin(\theta) \sin(\phi)^2 \cos(\theta)^2 a b c r^2 \quad (2)
> result := simplify(J)
      result := a b c r^2 \sin(\theta) \quad (3)
> # Dit is de jacobiaan bitches
> # In een sferische situatie is r: 0..1, phi:0..2pi, theta:0..pi
> output := int(int(int(result, r = 0..1), theta = 0..Pi), phi = 0..2·Pi)
      output :=  $\frac{4 a b c \pi}{3}$  \quad (4)
> simplify(output)
      
$$\frac{4 a b c \pi}{3} \quad (5)$$


```

Figure 8.68: Exercise 3

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx \quad (\text{dit kan gelijk worden via de substitutie-techniek } "x = -\int \dots", \text{ maar hier gaan we van poolcoordinaten!})$$

$$= 2 \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx$$

als $I^2 = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) \cdot \exp(-y^2) dx dy$

$$= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta$$

this integral is infinite!

$$= \pi$$

$$I = \sqrt{\pi}$$

Figure 8.69: Exercise 4

```
[> with(VectorCalculus): with(LinearAlgebra):
[> integral := int(exp(-x^2), x = -infinity..infinity)
[> integral :=  $\sqrt{\pi}$  (1)
```

Figure 8.70: Exercise 4 Maple

$$1 \quad \overbrace{x^2 + y^2}^g + z^2 = a^2$$

$$z = \rho \cos \theta$$

$$z = \epsilon$$

↳ cilinderconen kast $\Rightarrow \int p \, dp \, dz \, d\theta$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} p \, dp \, dz \, d\theta \right)$$

Conventie

$$= \pi \left(a^2(r - \epsilon) - \frac{r^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} \right)$$

via Maple

Figure 8.71: Exercise 5

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> integral := int(int(int(rho,rho = 0..sqrt(a^2 - z^2)),z = c..b),theta = 0..2*Pi)
          integral := a^2 (b - c) π -  $\frac{b^3 \pi}{3} + \frac{c^3 \pi}{3}$                                 (1)
> simplify(integral)
          π  $\left( a^2 (b - c) - \frac{b^3}{3} + \frac{c^3}{3} \right)$                                (2)
>

```

Figure 8.72: Exercise 5

Bord 5

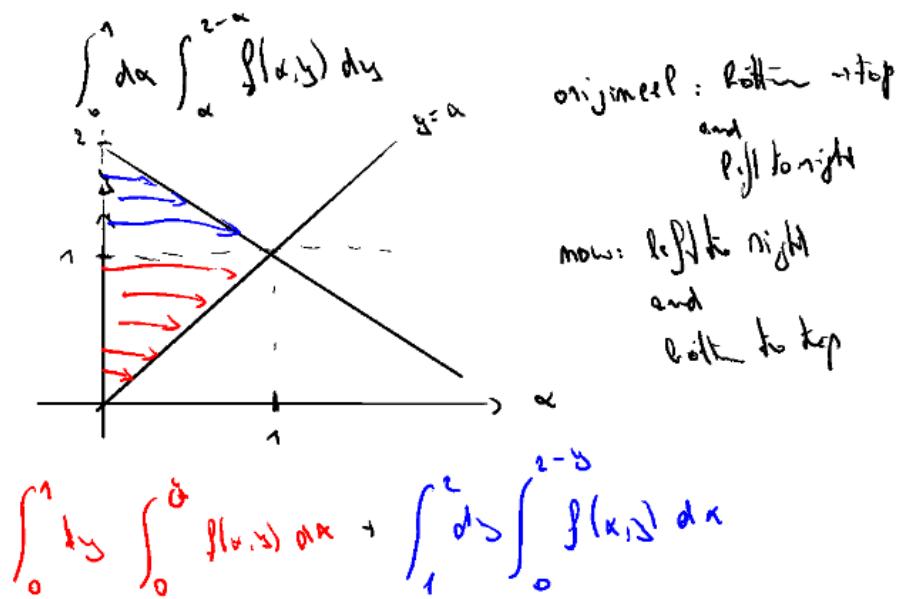
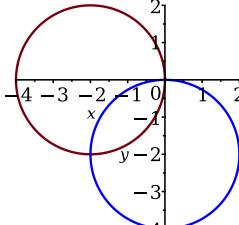


Figure 8.73: Exercise 1

```

> restart: with(plots):
> cr1:=implicitplot((x+2)^2+y^2=4,x=-4..0,y=-2..2,scaling=
  constrained):
cr2:=implicitplot(x^2+(y+2)^2=4,x=-2..2,y=-4..0,scaling=
  constrained, color=blue):
> display(cr1,cr2);


> # dus dy(dx), y gaat van -2 naar 0, x gaat van blauw naar bruin
> # bepaal limieten voor dx
> eq := y^2 + (x + 2)^2 = 4:
> solve(eq,y):
> # we nemen de negatieve versie
> # hierboven is de lowerbound, nu upperbound
> eq := x^2 + (y + 2)^2 = 4:
> solve(eq,y):
> # pak eerste versie, we gaan naar boven
> # dus result gebruikmakend van cartetische coords is:
> result := int(int((x^2 + y^2)^(3/4), x = -sqrt(-x^2 - 4*x) .. (-2 + sqrt(-x^2 + 4))), y
  = -2 .. 0):
> # Maple kan dit niet calculeren, drmp pool coords... [ZIE NOTES]
> evalf(int(int(r * r^(3/2), r = 0 .. -4 * cos(theta)), theta = Pi/4 .. 3 * Pi/2) + int(int(r
  * r^(3/2), r = 0 .. -4 * sin(theta)), theta = Pi .. 5 * Pi/4))
4.270011865

```

(1)

Figure 8.74: Exercise 2

$$\iint_E (x^2 + y^2)^3 \, dx \, dy$$

\downarrow

$$\begin{aligned} & \text{1) } x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{bzw. } x^2 + (y+2)^2 \leq 4 \\ & \text{2) } x = r \cos \theta \\ & y = r \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{1) } r^2 \cos^2 \theta + 4 \cdot r \cos \theta + 4 + r^2 \sin^2 \theta \leq 4 \\ & \Leftrightarrow r^2 + 4 \cdot r \cos \theta + 4 \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow r^2 + 4 \cdot r \cos \theta \leq 0$$

$$\Leftrightarrow r \leq -4 \cos \theta$$

linker
Kreis

$$\text{2differenz, } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\text{2)$$

$$\begin{aligned} & r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + r \sin \theta \cdot 4 + 4 \leq 4 \\ & \Leftrightarrow r^2 \leq -r \sin \theta \cdot 4 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow r \leq 4 \sin \theta \rightarrow \text{rechter Kreis}$$

1. aber kein Vom: $\pi \rightarrow 5\frac{\pi}{4}$



$$\text{dws: } \int_{\pi}^{5\pi/4} d\theta \int_0^{-4 \cos \theta} r \cdot r^3 \, dr + \int_{5\pi/4}^{3\pi/2} d\theta \int_0^{4 \sin \theta} r \cdot r^3 \, dr$$

$$= 4,27 \text{ of 20.}$$

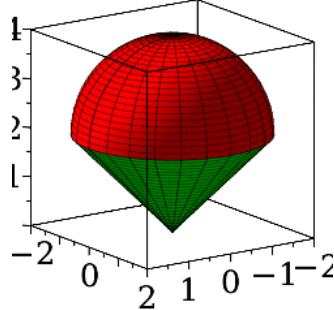
Figure 8.75: Exercise 2

// Exercise 3

```

> restart: with(plots):
> # first draw the plots
> pkegel:=plot3d([r,phi,Pi/4],r=0..2*sqrt(2),phi=0..2*Pi,coords=spherical,color=green):
pbol:=plot3d([4*cos(theta),phi,theta],phi=0..2*Pi,theta=0..Pi/4,coords=spherical,color=red):
> display(pkegel,pbol)

```



```
> # Eerst sferische coordinaten
```

$$x := r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \quad (1)$$

$$y := r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \quad (2)$$

$$z := r \cdot \cos(\theta) \quad (3)$$

$$j := r^2 \cdot \sin(\theta) \quad j := r^2 \sin(\theta) \quad (4)$$

```
> # hoe is onze r? just fill in into sphere eq
```

$$\begin{aligned} \text{sphere_eq} &:= x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2 \\ &\text{sphere_eq} := r^2 \sin(\theta)^2 \cos(\phi)^2 + r^2 \sin(\theta)^2 \sin(\phi)^2 + (r \cos(\theta) - a)^2 = a^2 \end{aligned} \quad (5)$$

```
> result := solve(sphere_eq, r)
```

$$\text{result} := 0, \frac{2 \cos(\theta) a}{\sin(\theta)^2 \cos(\phi)^2 + \sin(\theta)^2 \sin(\phi)^2 + \cos(\theta)^2} \quad (6)$$

```
> simplify(result[2])
```

$$2 \cos(\theta) a \quad (7)$$

```
> # so r goes from 0 to  $2 \cdot \cos(\theta) \cdot a$ 
```

```
> # theta goes from zero to 45 degrees
```

```
> # phi is 360 degrees
```

```
> # so the mass is:
```

$$\begin{aligned} M &:= \text{rho} \cdot \text{int}\left(\text{int}\left(\text{int}(j, r = 0 .. 2 \cdot \cos(\theta) \cdot a), \theta = 0 .. \frac{\pi}{4}\right), \phi = 0 .. 2 \cdot \pi\right) \\ M &:= \rho a^3 \pi \end{aligned} \quad (8)$$

```

> # de massa middelpunten zijn dan (zie formules)
>  $x_- := \frac{1}{M} \cdot \text{int}\left(\text{int}\left(\text{int}(\rho \cdot j \cdot x, r = 0..2 \cdot a \cdot \cos(\theta)), \theta = 0..\frac{\pi}{4}\right), \phi = 0..2\pi\right)$ 
>  $x_- := 0$  (9)

>  $y_- := \frac{1}{M} \cdot \text{int}\left(\text{int}\left(\text{int}(\rho \cdot j \cdot y, r = 0..2 \cdot a \cdot \cos(\theta)), \theta = 0..\frac{\pi}{4}\right), \phi = 0..2\pi\right)$ 
>  $y_- := 0$  (10)

>  $z_- := \frac{1}{M} \cdot \text{int}\left(\text{int}\left(\text{int}(\rho \cdot j \cdot z, r = 0..2 \cdot a \cdot \cos(\theta)), \theta = 0..\frac{\pi}{4}\right), \phi = 0..2\pi\right)$ 
>  $z_- := \frac{7a}{6}$  (11)

> # Nu met cilinder coords, basically hetzelfde.
> restart:
>  $x := r \cdot \cos(\theta)$  (12)
>  $y := r \cdot \sin(\theta)$  (13)
>  $z := z$  (14)
>  $j := r$  (15)

> # De theta doet 360
> # De r is van 0 -> a (simply see formula)
> # voor z, steken we de variabelen in de sphere equation
>  $\text{sphere\_eq} := x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$ 
>  $\text{sphere\_eq} := r^2 \cos(\theta)^2 + r^2 \sin(\theta)^2 + (z - a)^2 = a^2$  (16)

>  $\text{result} := \text{solve}(\text{sphere\_eq}, z)$ 
>  $\text{result} := a + \sqrt{a^2 - r^2}, a - \sqrt{a^2 - r^2}$  (17)

>  $\text{upperbound\_z} := \text{result}[1]$ 
>  $\text{upperbound\_z} := a + \sqrt{a^2 - r^2}$  (18)

> # dus z is van a tot upperbound_z
> # vul in in de vorige equations

```

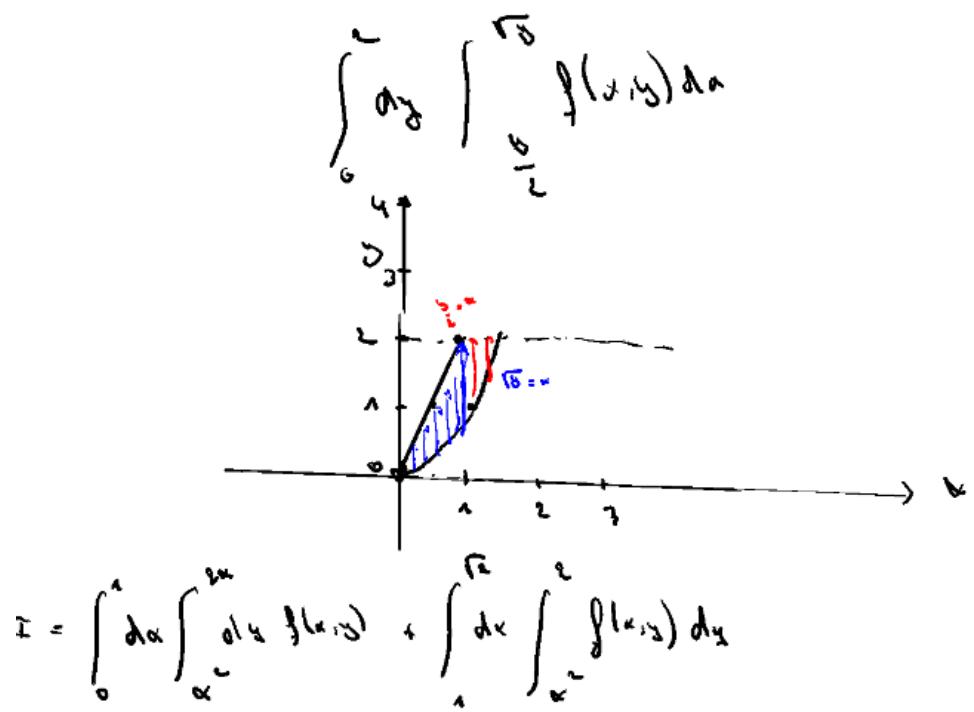


Figure 8.76: Exercise 1

```

> restart: with(plots): with(plottools):
> A := int(int(c*sin(y)/y, y = x..Pi), x = 0..Pi);
                                         A := 2 c
(1)
> solve(A = 1, c)
                                         1
                                         -
                                         2
(2)
> # I don't understand the issue given in the exercise, this is rather simple...
>

```

Figure 8.77: Exercise 2

$$x = a \cos \theta$$

$$y = b \sin \theta$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ 1 & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

→ via maple:

10241

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a abr dr d\theta = ab\pi \checkmark$$

Figure 8.78: Exercise 3

```

> restart: with(VectorCalculus): with(LinearAlgebra):
> j:=Jacobian([a·r·cos(theta), b·r·sin(theta)], [r, theta])
      
$$j := \begin{bmatrix} a \cos(\theta) & -a r \sin(\theta) \\ b \sin(\theta) & b r \cos(\theta) \end{bmatrix}$$
 (1)
> j:=Determinant(j)
      
$$j := a \cos(\theta)^2 b r + a r \sin(\theta)^2 b$$
 (2)
> simplify(j)
      
$$a b r$$
 (3)
> int(int(a·b·r, r = 0..1), theta = 0..2·Pi)
      
$$a b \pi$$
 (4)
>

```

Figure 8.79: Exercise 3 Maple

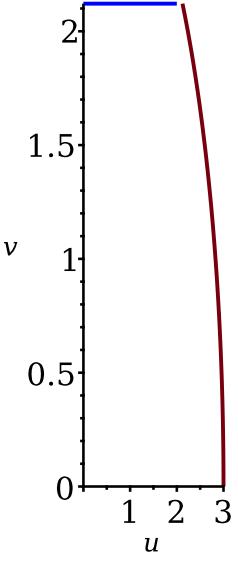
// Exercise 4

```

> restart : with(VectorCalculus) : with(LinearAlgebra) : with(plots) :
> x := r·cos(theta) :
> y := r·sin(theta) :
> z := 'z':
> # Find z upperbound
> z_eq := z =  $\frac{(x^2 - y^2)}{3}$  :
> solve(z_eq, z)

$$\frac{r^2 \cos(\theta)^2}{3} - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{3} \quad (1)$$

> # dit is eigenlijk:  $(r^2 \cdot \cos(2\cdot\theta))$  divided by 3 (ignore this shit formatting)
> j := r:
> plot_1 := implicitplot(u = sqrt(-v^2 + 9), u = 0 .. 3, v = 0 ..  $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ) :
> plot_2 := plot(3/sqrt(2), u = 0 .. 2, color = blue):
    # Not fully aligned but you get the point lol
> display(plot_1, plot_2)


> # De boog (dat rechter stuk) is van 0 tot 3, dit is r.
> # dus per definitie is deze cirkel:  $x^2 + y^2 = 9$  ( $r = 3$ )
> # theta gaat van 0 tot de grens van  $3:\sqrt{2}$ 
> arctan( $\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{\sqrt{2}}}$ )

$$\frac{\pi}{4} \quad (2)$$

> # voor de blauwe kromme zetten we de coords in y:(3:sqrt(2))

```

> $r_blauw_eq := y = \frac{3}{\sqrt{2}}$

> $r_blauw_eq := r \sin(\theta) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (3)

> $solve(r_blauw_eq, r)$

$\frac{3\sqrt{2}}{2 \sin(\theta)}$ (4)

> # dus r gaat van 0 tot het bovenste
 > # voor theta zou dit redelijk duidelijk moeten zijn, we gaan van pi:4 tot pi:2
 > #Dus alles samengenomen (we nemen dz dr dtheta voor de simplificatie)
 > $result := int(int(int(r \cdot j, z = 0 .. \frac{r^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta)}{3}), r = 0 .. 3), \theta = 0 .. \frac{\pi}{4}) + int(int(int(r \cdot j, z = 0 .. \frac{r^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta)}{3}), r = 0 .. \frac{3\sqrt{2}}{2 \sin(\theta)}), \theta = \frac{\pi}{4} .. \frac{\pi}{2})$
 > $result := \frac{243}{32} + \frac{81\sqrt{2} \ln(\sqrt{2} - 1)}{64}$ (5)

i)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) &= \nabla \cdot \left(\begin{vmatrix} i & j & k \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} \right) \\ &= \nabla \cdot ((F_y G_z - F_z G_y) \hat{i} + (F_z G_x - F_x G_z) \hat{j} + (F_x G_y - F_y G_x) \hat{k}) \\ &= \nabla \cdot (F_{yx} G_z - F_{zy} G_y, F_{zx} G_x - F_{xz} G_z, F_{xy} G_y - F_{yx} G_x) \\ &= \frac{\partial F_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial F_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial F_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial F_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial F_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial F_{yx}}{\partial z}\end{aligned}$$

Weidenklichheit: $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{array} \right\}$

$$= \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$$

ii) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0$?

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}}_0 \dots = 0$$

iii) $\nabla \cdot (f(|\vec{x}|) \vec{x})$
 ↗ magnitude of \vec{x} ↗ (x, y, z)

$$= \nabla f(|\vec{x}|) \cdot \vec{x} + f(|\vec{x}|) \cdot \nabla \cdot \vec{x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} = 3$$

$$f'(|\vec{x}|) \cdot \vec{x} \rightarrow = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

$$= f'(|\vec{x}|) \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = f'(|\vec{x}|) \cdot \frac{|\vec{x}|^2}{|\vec{x}|} = f'(|\vec{x}|) |\vec{x}|$$

$$\text{durch} = f'(|\vec{x}|) |\vec{x}| + 3 \cdot f(|\vec{x}|)$$

Figure 8.80: Exercise 1

$$c^2 \cdot \Delta \vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

runnt \vec{E}

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

\downarrow take curl

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times (-\partial_t \vec{B})$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla^2 \cdot \vec{E} = "$$

$$\Leftrightarrow -\nabla^2 \vec{E} = -\partial_t \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$\Leftrightarrow -\nabla^2 \vec{E} = -\partial_t \cdot (\mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E})$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 \vec{E} \rightarrow c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = \partial_t^2 \vec{E}$$

dann \vec{B} :

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \nabla \times \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\partial_t^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{B}$$

$$\Leftrightarrow -\nabla^2 \vec{B} = -\partial_t^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{B}$$

$$\Leftrightarrow -\nabla^2 \vec{B} = -\partial_t^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{B}$$

Figure 8.81: Exercise 2

In het stationair geval krijgen we het volgende:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{v} \times \vec{E} = 0 \\ \vec{v} \times \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

We zien ook dat de graad van $\|B\|$ sterk afneemt.

$$\text{Dus } \|B\| = B \cdot 0$$

De trage van de Russische wortel:

$$J_2^L(B \cdot 0) + J_0^L(B \cdot 0)^2 = (B \cdot B) = A \cdot (B \cdot 0)$$

Hier zie je dat dit moet negatief worden, dus de eigenwaarden blijven positief, dus er vindt geen minimum.

Figure 8.82: Exercise 3

$\vec{v} \times \vec{B} = 0$ = geen rotatie aan brandpunt.

concreet als $a_b = 0$ in ESG!

In dit geval kunnen we dit niet normen passen tot 1 punt!

Omdat de draad in de wegstaat.

Figure 8.83: Exercise 4

5) i) de tornado-golf had hardst hitten op de rand:

$$n_0 = n$$

ii) Maple

iii) Dit is omdat de lichtsignal niet snel wordt!
zie montonen.

iv) $\int \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} v \cdot d\vec{s} d\phi$

$$= 2\pi v$$

Figure 8.84: Exercise 5

```

> with(VectorCalculus): SetCoordinates(cartesian[x,y,z]): 
> r := sqrt(x^2 + y^2):
> v_inside := VectorField([ -alpha*y/r^2, alpha*x/r^2, 0 ]):
> simplify(Curl(v_inside)):
(0)ēx + (0)ēy + (2α/r^2)ēz (1)
> v_outside := VectorField([ -alpha*y/r^2, alpha*x/r^2, 0 ]):
> simplify(Curl(v_outside)):
(0)ēx + (0)ēy + (0)ēz (2)
> # IV
> circle := [r*cos(theta), r*sin(theta), 0]:
> dr := VectorField([diff(circle[1],theta), diff(circle[2],theta), 0])
dr := (-sqrt(x^2 + y^2)*sin(theta))ēx + (sqrt(x^2 + y^2)*cos(theta))ēy + (0)ēz (3)
> v_circle := eval(v_outside . dr, [x = circle[1], y = circle[2]])
v_circle := α*sqrt(x^2 + y^2)*sin(theta)^2 / 
sqrt((x^2 + y^2)*cos(theta)^2 + (x^2 + y^2)*sin(theta)^2) (4)
+ α*sqrt(x^2 + y^2)*cos(theta)^2 / 
sqrt((x^2 + y^2)*cos(theta)^2 + (x^2 + y^2)*sin(theta)^2)
> int_ := int(v_circle, theta = 0..2*Pi)
int_ := 2πα (5)

```

Figure 8.85: Exercise 5

$$\vec{F}(\alpha, \gamma) = \alpha (\alpha^2 - \gamma^2) \hat{e}_x - \gamma (\alpha^2 - \gamma^2) \hat{e}_y$$

1. liegt im \mathbb{R}^2 , also E

z. Rotat:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \stackrel{\text{Maple}}{=} (0, 0, 0)$$

↳
durch Rotation um y

we erhalten dann momentaner rot $\vec{F} = \vec{\nabla} \varphi$

Von Maple ist dies:

$$\varphi = \underbrace{\frac{(\alpha^2 - \gamma^2)^2}{4}}_{\text{willkürliche Integrationskonstante}} + c$$

Figure 8.86: Exercise 6

```

> with(VectorCalculus): SetCoordinates(cartesian[x,y,z]):  

> f:=VectorField([x*(x^2-y^2), -y*(x^2-y^2), 0])  

> f:=(x*(x^2-y^2))e_x+(-y*(x^2-y^2))e_y+(0)e_z  

(1)  

> Curl(f)  

(0)e_x+(0)e_y+(0)e_z  

(2)  

> ScalarPotential(f)  

(x^2-y^2)^2  

(3)

```

Figure 8.87: Exercise 6

$$\vec{F}(\alpha, \varphi, z) = (z^2, \alpha z, \varphi)$$

$\rightarrow F$ nicht continue ableitbar sein, nach ESG rückt
zu divergenter Vektor.

1. wir wollen im \mathbb{R}^3 , also in ESG
2. $\nabla \cdot F = 0 + 0 + 0 = 0 \rightarrow$ also divergenter Vektor.
3. wir tolken die Verkopotential A sodass $F = A \times D$

$$\hookrightarrow \text{Maple: } \text{pot} = \left(\frac{\alpha z^2}{2} - \frac{\varphi^3}{3}, -\frac{z^3}{3}, 0 \right)$$

$\nabla \cdot \text{pot} = \frac{z^2}{2} \rightarrow \neq 0!$ dann we wollen um A die Welt
divergent ist.

$$A' = A + \nabla \psi$$

$$\rightarrow \nabla \cdot A' = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{A} + \Delta \psi = 0$$

$$\hookrightarrow \Delta \psi = -\frac{z^2}{2}$$

$$\rightarrow \psi = -\frac{z^2}{2} + C$$

$$\rightarrow A' = \left(\frac{\alpha z^2}{2} - \frac{\varphi^3}{3}, -\frac{z^3}{3}, -\frac{z^2}{2} + C \right)$$

$$\rightarrow \text{pot} = \left(\frac{\alpha z^2}{2} - \frac{\varphi^3}{3}, -\frac{z^3}{3}, -\frac{z^2}{2} + C, -\frac{z^3}{6} \right)$$

Figure 8.88: Exercise 7

```

> with(VectorCalculus): SetCoordinates(cartesian[x,y,z]):  

> f := VectorField([z^2,x·z,y^2]):  

> vector_potential := VectorPotential(f)  

  vector_potential :=  $\left(\frac{xz^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\hat{e}_x + \left(-\frac{z^3}{3}\right)\hat{e}_y + (0)\hat{e}_z$  (1)  

> # Check if this is actually divergent  

> A_x := vector_potential[1];  

A_y := vector_potential[2];  

A_z := vector_potential[3];  

grad_A_x := diff(A_x, x$1);  

grad_A_y := diff(A_y, y$1);  

grad_A_z := 0;  

A_x :=  $\frac{xz^2}{2} - \frac{y^3}{3}$   

A_y :=  $-\frac{z^3}{3}$   

A_z := 0  

grad_A_x :=  $\frac{z^2}{2}$   

grad_A_y := 0  

grad_A_z := 0 (2)  

> phi_lapl := grad_A_x + grad_A_y + grad_A_z  

phi_lapl :=  $\frac{z^2}{2}$  (3)  

> int(int(phi_lapl, z), z)  $\frac{z^4}{24}$  (4)  

>

```

Figure 8.89: Exercise 7 Maple

$$f = \nabla \varphi + \nabla \alpha A \rightarrow \text{Lohn quadrat}$$

?

$$f = [x^2(x+y-z), y^2(y+z-x), z^2(z+x-y)]$$

$$\nabla F = \Delta \varphi = 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\nabla \varphi = x^3 + y^3 + z^3$$

$$\varphi = \frac{1}{4}(x^4 + y^4 + z^4)$$

$$\Leftrightarrow \nabla \alpha A = F - \nabla \varphi$$

$$\hookrightarrow A' = A + \nabla \psi$$

$$\Leftrightarrow \nabla A' = \nabla A + \nabla \psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta \varphi = x^2 z + y^2 z$$

$$\Leftrightarrow \nabla \psi = \frac{x^3}{3} z + \frac{y^3}{3} z$$

$$\Leftrightarrow \psi = \frac{1}{12}(x^4 + y^4)$$

$$\nabla \psi = \left\{ \dots ; \dots ; \dots \right\}$$

Figure 8.90: Exercise 8

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{\alpha}$$

with: $\vec{f}(x, y, z) = -y \cdot \vec{e}_x + x \cdot \vec{e}_y - \frac{z}{2} \vec{e}_z$

$\vec{\alpha}(t) = \cos t \vec{e}_x + \sin(t) \vec{e}_y + 2t \vec{e}_z, t \in [0, \pi]$

$$\frac{d\alpha \cdot dt}{dt} = dt (\cos t \vec{e}_x + \sin(t) \vec{e}_y + 2t \vec{e}_z) \cdot \underline{\underline{J}}$$

$$d\alpha = dt \cdot (-\sin t \vec{e}_x + \cos t \vec{e}_y + 2 \vec{e}_z)$$

Rech. $\vec{\alpha}(t)$ in \vec{f}

$$\Rightarrow -\sin(t) \vec{e}_x + \cos t \vec{e}_y - \frac{2t}{2} \vec{e}_z$$

$$\Leftrightarrow -\sin(t) \vec{e}_x + \cos t \vec{e}_y - t \vec{e}_z$$

Wu F. $\frac{d\alpha}{dt} = (-\sin t, -\cos t, \cos t + 2 \cdot (-t)) dt$

$$\Leftrightarrow (1 - 2t) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi (1 - 2t) dt = \pi - 2 \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^\pi$$

$$= 2\pi - 4\pi^2$$

Figure 8.91: Exercise 9

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{\omega}$$

$$\vec{F}(x,y) = (x^2 - 2xy) \vec{e}_x + (y^2 - 2xy) \vec{e}_y$$

mit $y = x^2$, dann $(-2,4)$ auf $(1,1)$

$$\text{d.h. } \alpha = t \Rightarrow y = t^2$$

$$\rightarrow n(t) = t \cdot \vec{e}_x + t^2 \cdot \vec{e}_y$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} n(t) = \vec{e}_x + 2t \vec{e}_y}$$

$$\begin{aligned} F(n(t)) \cdot \frac{d}{dt} n(t) &= (t^2 - 2 \cdot t \cdot t^2) \vec{e}_x + (t^4 - 2 \cdot t \cdot t^2) \vec{e}_y \\ &\quad \cdot (\vec{e}_x + 2t \vec{e}_y) \\ &= (t^2 - 2t^3) + (2t^5 - 4t^4) \\ &= \underline{t^2 - 2t^3 - 4t^4 + 2t^5} \end{aligned}$$

$$\text{d.h.: } \int_{-2}^1 (t^2 - 2t^3 - 4t^4 + 2t^5) dt$$

via maple:
 $\frac{-365}{10}$

Figure 8.92: Exercise 10

④

$$M) \int_C z \cdot \underline{dx} = \sqrt{\underline{dx} \cdot \underline{dx}} = \sqrt{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt} = \left\| \frac{dx}{dt} \right\| \cdot dt$$

$$C: \vec{z}(t) = t \cdot (\cos t \vec{e_1} + \sin t \vec{e_2}) + t \cdot \vec{e_3}, 0 \leq t \leq 1$$

$$\wedge \quad z = t$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = (\cos t - t \cdot \sin t) \vec{e_1} + (\sin t + t \cdot \cos t) \vec{e_2} + \vec{e_3}$$

$$\int_0^1 t \cdot \sqrt{(\cos t - t \cdot \sin t)^2 + (\sin t + t \cdot \cos t)^2 + 1} dt$$

Run op Vival Maple.

Figure 8.93: Exercise 11

```
[> restart: with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus):  
=> simplify(int(t*sqrt((cos(t)-sin(t)*t)^2 + (sin(t)+t*cos(t))^2 + 1), t = 0..1))  
=> -2*sqrt(2)/3 + sqrt(3) (1)
```

Figure 8.94: Exercise 11 Maple

$$12) \rho = r, \alpha(\theta) = a(1 + \cos\theta), 0 < \theta \leq \pi, r > 0$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{m} \cdot \int_C \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

Hier is een driedimensionaal \vec{r} , om dat geschreven we ds

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{m} \int_C \vec{\alpha} \rho(\vec{\alpha}) ds$$

$$C: \vec{\alpha}(\theta) = a(\cos\theta(1 + \cos\theta), (\sin\theta)(1 + \cos\theta)), 0 \leq \theta \leq \pi, r > 0$$

$$ds = \left| \left| \frac{d\vec{\alpha}}{d\theta} \right| \right| d\theta$$

$$\frac{d\vec{\alpha}}{d\theta} = \begin{pmatrix} a(-\sin\theta(1 + \cos\theta) - \sin^2\theta \cos\theta) \\ \cos\theta(1 + \cos\theta) - \sin^2\theta \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\pi \alpha(\theta) \cdot \vec{p} \cdot d\theta = \int_0^\pi \alpha(\theta) \cdot \left| \left| \frac{d\vec{\alpha}}{d\theta} \right| \right| \cdot d\theta$$

*Nog dit in Maple (daar voor we een
matrige stappenplan.)*

Figure 8.95: Exercise 12

Here we use $ds = \sqrt{dr \cdot dr + r^2 d\theta}$

```

> restart: with(VectorCalculus): SetCoordinates(cartesian[x,y,z]):  

> r := a·(1 + cos(theta))  


$$r := a (1 + \cos(\theta)) \quad (1)$$
  

> ds := simplify(sqrt( (diff(r, theta$1))^2 + r^2 ))  


$$ds := \sqrt{2} \sqrt{a^2 (1 + \cos(\theta))} \quad (2)$$
  

> M := int(ds, theta = 0..Pi)  


$$M := 4 a \operatorname{csgn}(a) \quad (3)$$
  

> Mx :=  $\frac{1}{M} \cdot \int r \cos(\theta) \cdot ds, \theta = 0..Pi$   


$$Mx := \frac{4 a}{5} \quad (4)$$
  

> My :=  $\frac{1}{M} \cdot \int r \sin(\theta) \cdot ds, \theta = 0..Pi$   


$$My := \frac{4 a}{5} \quad (5)$$
  


```

Figure 8.96: Exercise 12 Maple

$$\vec{B}(\vec{\alpha}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cdot \int_C \frac{d\alpha' \alpha (\vec{\alpha} - \vec{\alpha}')}{||\vec{\alpha} - \vec{\alpha}'||^3}$$

$$C: \alpha'(t) = (0, 0, t), t \in]-\infty, +\infty[$$

$$d\alpha' = (0, 0, 1)$$

$$(\vec{\alpha} - \vec{\alpha}') = (\alpha, y, z-t)$$

$$||\vec{\alpha} - \vec{\alpha}'||^3 = (\alpha^2 + y^2 + (z-t)^2)^{3/2}$$

$$d\alpha' \alpha (\vec{\alpha} - \vec{\alpha}') = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & y & z-t \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ y, -\alpha, 0 \right\}$$

$$\vec{B}_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(\alpha^2 + y^2 + (z-t)^2)^{3/2}} dt$$

$$\vec{B}_y = \textcolor{teal}{\sim} \int -\frac{\alpha}{\dots}$$

$$\vec{B}_z = \textcolor{violet}{\sim} \int 0$$

$$\vec{B} = \left\{ \textcolor{red}{y}, \textcolor{blue}{-\alpha}, 0 \right\}$$

Figure 8.97: Exercise 13

$$(\alpha = 0, \psi = 0, z = r)$$

$$\zeta: \vec{\alpha}(t) = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0), \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\dot{\alpha} = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0)$$

$$\vec{\alpha} - \vec{\alpha}' = (0 - R \cos \theta, 0 - R \sin \theta, 2)$$

$$= (-R \cos \theta, -R \sin \theta, 2)$$

$$\frac{d\alpha(t)}{dt}, \alpha(\vec{\alpha} - \vec{\alpha}') = (2R \cos \theta, 2R \sin \theta, R^2)$$

$$\|\vec{\alpha} - \vec{\alpha}'\|^2 = (R^2 + 2^2)^{1/2}$$

$$B_x = \dots$$

$$B_y = \dots$$

$$B_z = \dots$$

$$B = \{ \dots, \dots, \dots \}$$

Figure 8.98: Exercise 14

1

$$\int_C (\alpha dy - y d\alpha)$$

by Green's:

$$\iint_S \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

$$(\alpha, y) \rightarrow (\alpha \cos \theta, \alpha \sin \theta)$$

$$\int_0^{2\pi} (\alpha \cos \theta \cdot \frac{dy}{d\theta} d\theta - \alpha \sin \theta \cdot \frac{d\alpha}{d\theta} d\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} (\alpha^2 \cos^2 \theta + \alpha^2 \sin^2 \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \alpha^2 \cdot d\theta = \boxed{2\alpha^2 \pi}$$

Figure 8.99: Exercise 1

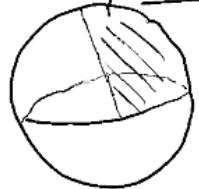
$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

$\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (Kugel obenan)
 $n = \mathbf{k}$ BTW.

$\mathbf{F} = (x, y, 0)$, we get the following combination:

$(x, y, 0) \rightarrow \begin{cases} \text{nimmt } \varphi, \text{ nimmt } r, \text{ nimmt } \theta \\ dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \rightarrow r \text{ wird Weggeometrie} \\ \text{stehen} \end{cases}$

$d\sigma = \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \quad \varphi = \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$



$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

(it will be calculated via the notes right).

$m = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi & -\sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \theta} \propto \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$$

$$= i(\sin \theta \cos \varphi) - j(\sin \theta \sin \varphi) + k(\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi)$$

$$= i(i) - j(j) + k(\cos \theta \cos \varphi) \rightarrow \sqrt{a^2 + r^2 + z^2}$$

$$\|\mathbf{m}\| = \sin \theta$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} [\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, 0] \cdot \frac{M}{\sin \theta} \sin \theta d\theta d\varphi$$

$\boxed{\iint \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{m}\|} d\omega d\varphi}$ Jacobian

$$= \frac{\pi}{3}$$

Figure 8.100: Exercise 2

```

> restart: with(VectorCalculus): with(LinearAlgebra):
    SetCoordinates(cartesian[x,y,z]):
>
> v1 := VectorField([diff(sin(theta)·cos(phi), theta), diff(sin(theta)·sin(phi),
    theta), diff(cos(theta), theta)]):
>
> v2 := VectorField([diff(sin(theta)·cos(phi), phi), diff(sin(theta)·sin(phi),
    phi), diff(cos(theta), phi)]):
> cross := CrossProduct(v1,v2):
> n := sqrt(cross[1]^2 + cross[2]^2 + cross[3]^2):
> int(int(sin(theta)·VectorField([sin(theta)·cos(phi), sin(theta)·sin(phi), 0])
    .  $\frac{cross}{n}$ , theta = 0 ..  $\frac{\text{Pi}}{2}$ ), phi = 0 ..  $\frac{\text{Pi}}{2}$ )

$$\frac{\pi}{3}$$


```

(1)

Figure 8.101: Exercise 2

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

$$\vec{r}(x, y, z) = (0, -z, y)$$

$$\alpha(x, y) = (x \cdot \cos(u), x \sin(u), v), 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq a$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \cdot d\sigma \rightarrow \text{richtung vom Stoßen}$$

normalvektor folgt aus der Rektan-

trekken Regel.

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -x \sin(u) + \cos(u) & x \sin(u) + \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\approx (-x \sin(u) + \cos(u), x \sin(u) + \cos(u), 0) \end{aligned}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -z & y \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$\text{d.h. } \int_0^{\pi/2} \int_0^a (0, 0, 0) \cdot (-x \sin(u) + \cos(u), x \sin(u) + \cos(u), 0) dv du$$

(Maple)

$$\left(= \frac{\pi a^2}{2} - 2 \right)$$

Figure 8.102: Exercise 3

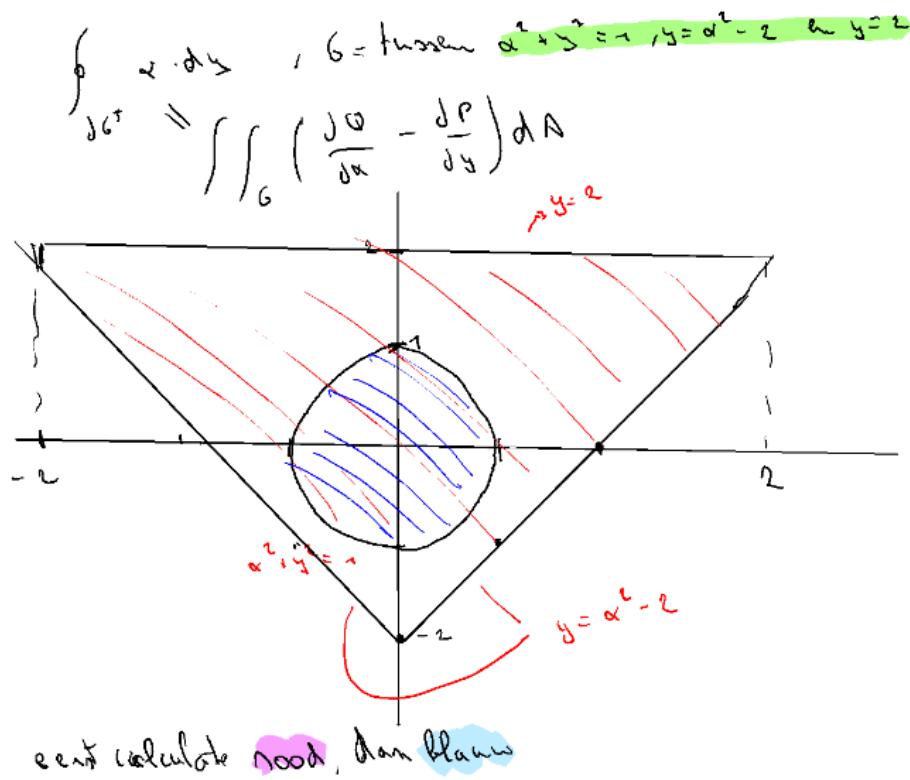
```

> restart: with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus):
> SetCoordinates(cartesian[x,y,z]):
> # First define n_k = normaal vector met rechterhand
> v_1 := VectorField([-u.sin(u) + cos(u), sin(u) + u.cos(u), 0]):
> v_2 := VectorField([0, 0, 1]):
> n := CrossProduct(v_1, v_2)
n := ( $\sin(u) + u \cos(u)$ ) $\hat{e}_x$  + ( $u \sin(u) - \cos(u)$ ) $\hat{e}_y$  + (0) $\hat{e}_z$  (1)
> # Nu grad x F
> F := VectorField([0, -z, y]):
> curl := Curl(F)
curl := (2) $\hat{e}_x$  + (0) $\hat{e}_y$  + (0) $\hat{e}_z$  (2)
> # Dus
> int(int(DotProduct(curl, n), v = 0..u), u = 0.. $\frac{\text{Pi}}{2}$ )
-2 +  $\frac{\pi^2}{2}$  (3)
> # et voila
>

```

Figure 8.103: Exercise 3 Maple

Bord 7



$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \iint_A 1 \cdot dA \rightarrow \text{area of } G$$

■ $A_1 = \int_{-2}^2 (2 - (x^2 - 2)) dx = \frac{32}{3}$

\downarrow
Want van $x^2 + y^2 = 1$, $y = x^2 - 2$

■ $A_2 = \int_0^{\pi} \int_0^1 r dr d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{\pi}{2}$

dus $\frac{32}{3} + \frac{\pi}{2}$

Figure 8.104: Exercise 1

Problem Overview

1. You have a sphere S defined by $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$.
2. This sphere is cut by a plane η with the equation $y = \beta$, where $0 < \beta < \alpha$. This cutting plane creates a spherical cap on the surface of S .
3. Points on S are constrained by $y \geq \beta$.
4. The surface D is the projection of S onto the plane η .
5. G is the volume enclosed between S and D .
6. \mathbf{n}^u represents the outward-pointing unit normal vector on the surfaces.

The exercise asks you to calculate the following integrals, where $\mathbf{x} = (x, y, z)$:

1. $\int_S \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^u d\sigma$
2. $\int_D \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^u d\sigma$
3. $\int_{\partial G} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^u d\sigma$

For part (iii), you also need to compute the integral explicitly using the Divergence Theorem.

Solution Approach

(i) Integral over S : $\int_S \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^u d\sigma$

For the spherical cap surface S :

- Since \mathbf{n}^u is the outward unit normal vector to S , we can use the fact that $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^u$ is simply the radial component of \mathbf{x} , and for a sphere of radius α , $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^u = \alpha$.
- Therefore, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^u = \alpha$ is constant over S .

To find $\int_S \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^u d\sigma$, integrate α over the area of the spherical cap surface S .

(ii) Integral over D : $\int_D \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^u d\sigma$

For the surface D , which is the projection onto the plane $y = \beta$:

- Here, \mathbf{n}^u would point perpendicular to the plane $y = \beta$ along the y -axis.
- The integral $\int_D \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^u d\sigma$ would evaluate the component of \mathbf{x} in the y -direction over the circular area in the $y = \beta$ plane (a circle of radius derived from the intersection with the sphere).

(iii) Integral over ∂G : $\int_{\partial G} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^u d\sigma$

This integral represents the flux of \mathbf{x} across the boundary ∂G , which is the union of the surfaces S and D . You can evaluate this integral directly using the Divergence Theorem, which states:

$$\int_{\partial G} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^u d\sigma = \iiint_G (\nabla \cdot \mathbf{x}) dV$$

Since $\nabla \cdot \mathbf{x} = 3$ (the divergence of $\mathbf{x} = (x, y, z)$ is $\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$), this becomes:

$$\iiint_G 3 dV = 3 \text{ Volume}(G)$$

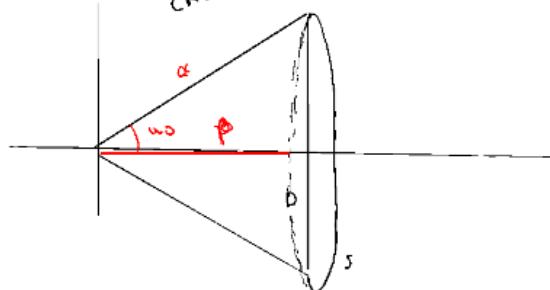
Figure 8.105: Alternative explanation for Exercise 2

x)

$$\Leftrightarrow 0.8x$$

$$\int_S \alpha \cdot n^m d\sigma \quad \Rightarrow \alpha(u_0) = \frac{\beta}{a}$$

CAS: (min outiger
Maxim.)



i) $S: \alpha(u, v) = \left[a \sin(u) \cos(v), a \cos(u) \cos(v), a \sin(u) \sin(v) \right]$

$$\|\frac{\partial \alpha}{\partial u} \times \frac{\partial \alpha}{\partial v}\| = a^2 \sin u$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\arcsin(\frac{B}{a})} a^2 \sin u \cdot a \cdot du dv = 2\pi a^2 (\alpha - \beta)$$

jacobian.

ii) $\int_S x \cdot n^m d\sigma$

$\theta: \alpha(u, w) = [\alpha \cos(u), \beta, \alpha \sin(u)]$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} \times \frac{\partial \alpha}{\partial w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(u) & 0 & \sin(u) \\ \alpha \sin(u) & 0 & \alpha \cos(u) \end{vmatrix} = [0, -\alpha, 0]$$

$$\int_0^{\alpha} \int_0^{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} [\alpha \cos(u), \beta, \alpha \sin(u)] \cdot [0, -\alpha, 0] du dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} -\alpha \beta du dv = \beta \pi (\beta^2 - \alpha^2)$$

iii) $\int_G (\nabla \cdot \alpha) dV = \int_0^{\alpha} \int_0^{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \int_{\cos^{-1}(\beta/\alpha)}^{\alpha} 3 \alpha^2 \sin \theta d\theta d\phi$

jacobian

Figure 8.106: Exercise 2

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_S (\nabla \times F) \cdot n^k d\sigma$$

$$F = (y, z, x)$$

$$C: \alpha(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v) \quad \text{and } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq u \leq \pi, \\ 0 \leq v \leq 1 + \sin(u) \end{array} \right\}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$\nabla \times F = [-1, -1, -1]$$

$$\text{dans : } \int_0^\pi \int_0^{1+\sin(u)} (-1, -1, -1) \cdot (\cos u, \sin u, 0) dv du$$

$$\approx -\frac{\pi}{2} - 2$$

Figure 8.107: Exercise 3

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus):
> SetCoordinates(cartesian[x,y,z]):
> v_1 := VectorField([-sin(u), cos(u), 0]):
> v_2 := VectorField([0, 0, 1]):
> n_k := CrossProduct(v_1, v_2)
      n_k := (cos(u))ex + (sin(u))ey + (0)ez          (1)

> F := VectorField([y, z, x]):
> curl := Curl(F)
      curl := (-1)ex + (-1)ey + (-1)ez           (2)

> # dus
> int(int(DotProduct(curl, n_k), v = 0..1 + sin(u)), u = 0..Pi)
      -2 - π/2                                (3)

```

Figure 8.108: Exercise 3 Maple

Huis 7

$$\text{ellips: } x^2 + y^2 + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

$$S: \alpha(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$\theta \in [-\pi, \pi], \phi \in [0, 2\pi]$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left| \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \times \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \right| \right| d\theta d\phi$$

↳ zichtbaar

$$\approx 42,95$$

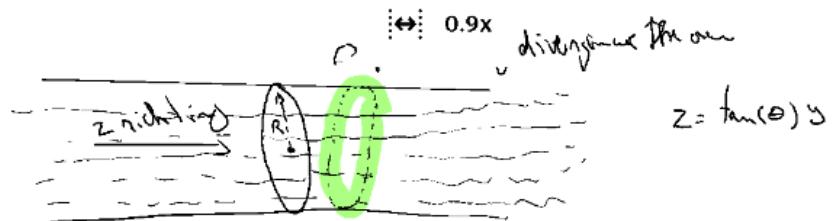
Figure 8.109: Exercise 1

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus):
> SetCoordinates(cartesian[r,theta,phi]):
> v_1 := VectorField([diff(sin(theta)·cos(phi),theta), diff(sin(theta)·sin(phi),
theta), diff(2·cos(theta),theta)])
      v_1 := ( $\cos(\theta) \cos(\phi)$ ) $\hat{e}_r$  + ( $\cos(\theta) \sin(\phi)$ ) $\hat{e}_{\theta}$  + (- $2 \sin(\theta)$ ) $\hat{e}_{\phi}$           (1)
> v_2 := VectorField([diff(sin(theta)·cos(phi),phi), diff(sin(theta)·sin(phi),
phi), diff(2·cos(theta),phi)])
      v_2 := (- $\sin(\theta) \sin(\phi)$ ) $\hat{e}_r$  + ( $\sin(\theta) \cos(\phi)$ ) $\hat{e}_{\theta}$  + (0) $\hat{e}_{\phi}$           (2)
> n := CrossProduct(v_1,v_2):
> n_norm := sqrt(n[1]^2 + n[2]^2 + n[3]^2):
> result := int(int(n_norm, theta = -Pi..Pi), phi = 0..2·Pi)
      result :=  $4\pi + \frac{16\sqrt{3}\pi^2}{9}$           (3)
> result_float := evalf(result)
      result_float := 42.95687068          (4)

```

Figure 8.110: Exercise 1



$$\vec{F}(x, y, z) = z - \tan \theta \mathbf{x} = 0$$

$$\hat{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$$

$$\hat{n} = \{0, -\tan \theta, 1\}$$

$$|\hat{n}| = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\hat{n} = \{0, -\sin \theta, \cos \theta\}$$

$$\vec{v}(\text{is pmu z direkt}) = \left(0, 0, v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right)$$

$$\vec{v} \cdot \hat{n} = v_0 n_z = \left(0, 0, v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cos \theta\right)$$

$$dS = \frac{dx dy}{\cos \theta}$$

$$D = \int p_0 (v \cdot \hat{n}) dS = \int_{x^2 + y^2 \leq R^2} p_0 \left[v_0 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}\right) \cos \theta \cdot \frac{dx dy}{\cos \theta}\right]$$

werk dit nu om af van θ !!!

$$D = p_0 v_0 \alpha \frac{\pi R^2}{2}$$

Nu bewijzen we dat met divergentie:

$$\boxed{\int_S \vec{v} \cdot \hat{n} \cdot dS \rightarrow \int_V \nabla \cdot \vec{v} \cdot dV} \rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

fully independent of θ !

Figure 8.111: Exercise 2

```

> restart: with(VectorCalculus): with(LinearAlgebra):
    SetCoordinates(cylindrical[rho,theta,z]):
> v1 := VectorField([diff(rho·cos(theta),rho), diff(rho·sin(theta),rho), diff(rho
·tan(theta)·sin(theta),rho)]):
> v2 := VectorField([diff(rho·cos(theta),theta), diff(rho·sin(theta),theta),
diff(rho·tan(theta)·sin(theta),theta)]):
> cross := CrossProduct(v1,v2)
cross :=  

[[sin(theta) (ρ (1 + tan(theta)^2) sin(theta) + ρ tan(theta) cos(theta))
- tan(theta) sin(theta) ρ cos(theta)],
[-cos(theta) (ρ (1 + tan(theta)^2) sin(theta) + ρ tan(theta) cos(theta)) - tan(theta) sin(theta)^2 ρ],
[cos(theta)^2 ρ + sin(theta)^2 ρ]]  

(1)  

> assume(rho R 0):
n :=  $\frac{\text{simplify}(\sqrt{(\text{cross}[1]^2 + \text{cross}[2]^2 + \text{cross}[3]^2)})}{\rho}$   

# we doen de jacobiaan weg en voegen hem ergens anders toe  

n :=  $\sqrt{-2 + 2 \sec(\theta)^2 + \sec(\theta)^4}$   

(2)  

> # eerst calculeren we de rho gedeelte
> assume(theta R 0, theta ≤ 2*Pi);
res1 := int( $\rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)$ , rho = 0 .. R)
res1 :=  $\frac{R^2}{4}$   

(3)  

> res2 := int(n, theta = 0 .. 2*Pi)
res2 :=  $\int_0^{2\pi} \sqrt{-2 + 2 \sec(\theta)^2 + \sec(\theta)^4} d\theta$   

(4)  

> res1 · res2 · v0 · rho0
 $\frac{R^2 \left( \int_0^{2\pi} \sqrt{-2 + 2 \sec(\theta)^2 + \sec(\theta)^4} d\theta \right) v0 \rho0}{4}$   

(5)  

>

```

Figure 8.112: Exercise 2 Maple

$$\int \exp(-x) \cos y \, dx - \exp x \sin y \, dx$$

Gren wgt : $\iint \frac{P}{J_x} - \frac{Q}{J_y} \, dA$

$$= \iint_{\substack{-\pi \\ -\pi \\ 0}} \left((\exp(x) \cdot \cos y - \exp(x) \sin y) \right) \, dx \, dy$$

$\boxed{I = 0}$

Figure 8.113: Exercise 3

```
[> restart: with(VectorCalculus): with(LinearAlgebra):
    SetCoordinates(cylindrical[rho,theta,z]):
[> int(int(exp(x)·sin(y) + exp(x)·cos(y),y=-Pi..Pi),x=-2..2)
0
]
] (1)
```

Figure 8.114: Exercise 3 Maple

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z > 0)$$

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$
X dit is hetzelfde voor een bol!
 $\hookrightarrow dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$

→ evenredig met hoogte boven het x,y -vlak

$$\Rightarrow M_x = 0, M_y = 0$$

en bereken we de massa:

$$M = \int_S \rho \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r \cdot r \cos\theta \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= k \pi^3$$

$$z\text{-component} = \frac{1}{M} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{r \cos\theta}_{2} \cdot \underbrace{\frac{k \pi}{2}}_{P} \cdot \underbrace{r^2 \sin\theta}_{dS} d\theta d\phi$$

$$= \frac{2k}{3}$$

Figure 8.115: Exercise 4

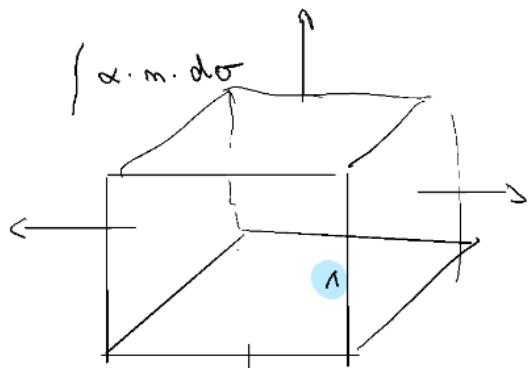
```

> restart: with(VectorCalculus): with(LinearAlgebra):
    SetCoordinates(cylindrical[rho,theta,z]):
> v1 := VectorField([diff(a.sin(theta).cos(phi),theta), diff(a.sin(theta)
    .sin(phi), theta), diff(a.cos(theta),theta)]):
> v2 := VectorField([diff(a.sin(theta).cos(phi), phi), diff(a.sin(theta).sin(phi),
    phi), diff(a.cos(theta), phi)]):
> cross := CrossProduct(v1, v2)
    cross := 
$$\begin{bmatrix} a^2 \sin(\theta)^2 \cos(\phi) \\ a^2 \sin(\theta)^2 \sin(\phi) \\ a^2 \cos(\theta) \cos(\phi)^2 \sin(\theta) + a^2 \cos(\theta) \sin(\phi)^2 \sin(\theta) \end{bmatrix}$$
 (1)
> dS := simplify(sqrt(cross[1]^2 + cross[2]^2 + cross[3]^2));
    dS :=  $\sqrt{\sin(\theta)^2 a^4}$  (2)
> M := int(int(k*a*cos(theta)*a^2*sin(theta), theta = 0..Pi/2), phi = 0..2*Pi)
    M := k a^3 \pi (3)
> Mz := 1/M * int(int(a*cos(theta)*k(a*cos(theta))*a^2*sin(theta), theta = 0..Pi/2),
    phi = 0..2*Pi)
    Mz := 
$$\frac{2 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cos(\theta) k(a \cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta \right)}{k a^3}$$
 (4)
> Mz := a/Pi * int(1, phi = 0..2*Pi) * int(cos^2(theta)*sin(theta), theta = 0..Pi/2)
    Mz :=  $\frac{2a}{3}$  (5)

```

Figure 8.116: Exercise 4 Maple

⑥



gauß divergence theorem:

$$\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint (\nabla \cdot \mathbf{f}) \cdot dV$$

$$\mathbf{f} = (x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iiint z \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 z \, dx \, dy \, dz$$

$$= 3$$

Figure 8.117: Exercise 5

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

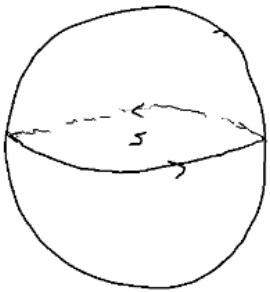
$$u(x,y,z) = x^3 - y^3 + z^2, \nabla u(x,y,z) = (x^2, -y^2, 2z)$$

•

$$\int_S (\nabla u \times \nabla v) \cdot n \cdot d\sigma$$

$\nabla u \times \nabla v = \nabla \times (u \nabla v)$, Stokes

$$\int_S (\nabla u \times \nabla v) \cdot n \cdot d\sigma = \int_C \overbrace{u \nabla v}^{\text{orange}} \cdot ds.$$



$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = 0 \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array} \right\}$$

• $d\gamma = \text{diff}(\cos \theta, \sin \theta, 0) = \underline{(-\sin \theta, \cos \theta, 0)}$

$$u = (r^3 \cos^3 \theta, -r^3 \sin^3 \theta)$$

$$\nabla v = \{1, 1, 1\}$$

\Rightarrow alles in Maple

Figure 8.118: Exercise 6

```

> restart: with(VectorCalculus): With(LinearAlgebra):
> SetCoordinates(spherical[r,theta,phi]):
> u := cos(theta)^3 -sin(theta)^3:
> v_curl := VectorField([1,1,1]):
> dr := VectorField([-sin(theta),cos(theta),0]):
> integrandum := u.v_curl.dr
    integrandum := -(cos(theta)^3 - sin(theta)^3) sin(theta) + (cos(theta)^3 - sin(theta)^3) cos(theta)  (1)
> int(integrandum, theta = 0..2.Pi)
                                         3π
                                         2

```

(2)

Figure 8.119: Exercise 6 Maple

Huis 8

1)

$$y(x) = \exp\left[-\int p(\alpha) d\alpha\right] \left\{ \int^x \exp\left(\int^s p(\alpha') d\alpha'\right) q(s) ds + C \right\}$$

↳ oplossing van $\frac{dy(x)}{dx} + p(x) y(x) = q(x)$

weten we de oplossing zien als twee functies die een product vormen.

$$y(x) = e^{-\int p(\alpha) d\alpha} \cdot q(x)$$

$$\text{dus: } \frac{dy(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[e^{-\int p(\alpha) d\alpha} \right] \cdot \left\{ \int^x \exp\left(\int^s p(\alpha') d\alpha'\right) q(s) ds + C \right\}$$

$$+ e^{-\int p(\alpha) d\alpha} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \int^x \exp\left(\int^s p(\alpha') d\alpha'\right) q(s) ds + C \right\}$$

$$= -p(x) \cdot e^{-\int p(\alpha) d\alpha} \cdot \left\{ \int^x \exp\left(\int^s p(\alpha') d\alpha'\right) q(s) ds + C \right\} + e^{-\int p(\alpha) d\alpha} \cdot \exp\left(\int^x p(\alpha') d\alpha'\right) \cdot q(x) = q(x)$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = -p(x) \cdot y(x) + q(x)$$

Figure 8.120: Exercise 1

2)

$$\frac{dy(x)}{dx} + f(x) y(x) = g(x) \cdot y''(x)$$

$$w(x) = y^{(n-m)}(x)$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = (n-m) y^{(n)}(x) \cdot \frac{dy^{(n)}}{dx}$$

$$= (n-m) y^{(n)}(x) \cdot (g(x) - f(x))$$

$$= (n-m) \frac{y^{(n)}(x) \cdot g(x) \cdot y(x) - y^{(n)}(x) \cdot f(x)}{g(x)}$$

$$\approx (n-m) \cdot \left(g(x) - w(x) \cdot f(x) \right) \stackrel{x=1}{=} (n-m) w(x) f(x) + \frac{dw(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dw(x)}{dx} + (n-m) w(x) f(x) = g(x) \cdot (1-n)$$

Figure 8.121: Exercise 2

$$3) y'' - \nu y' + l y = 0$$

part 1: $y(x) = e^{nx}$, $y' = ne^{nx}$
 $y'' = n^2 e^{nx}$

$$\Rightarrow n^2 - \nu n - l = 0 \quad \boxed{D = n^2 - \nu n - l} \\ \Rightarrow n^2 - \nu n + l = 0 \quad \boxed{n_1 = \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 4l}}{2}, n_2 = \frac{\nu - \sqrt{\nu^2 + 4l}}{2}}$$

$\nu^2 > 4l \rightarrow y_1(x) = e^{\frac{\nu+x}{2}}, y_2(x) = e^{\frac{\nu-x}{2}} \stackrel{= \sqrt{\lambda}}{=} \sqrt{\lambda}$

$\nu^2 < 4l \rightarrow y_1(x) = c_1 e^{\frac{\nu+x}{2}}, y_2(x) = c_2 e^{\frac{\nu-x}{2}} \mid y_2(x) = c_2 e^{\frac{\nu-x}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4l-\nu^2}}{2}x\right)$

$\nu = 4l \rightarrow y_1(x) = \exp\left(\frac{\nu x}{2}\right) \rightarrow$ gleichzeitig vollaufig
numerische opt. gewählt

part 2: $y(x) = x e^{nx}$
 $y' = n x e^{nx} + e^{nx}$
 $y'' = n^2 x e^{nx} + n e^{nx}$

$$\Rightarrow n^2 x e^{nx} + n e^{nx} - \nu x e^{nx} + \nu e^{nx} + l x e^{nx} + d \cdot x e^{nx} = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 x e^{nx} - \nu x e^{nx} + l x e^{nx} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(n^2 - \nu n + l) + l n - \nu = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - \nu n + l = 0 \quad (\text{sie part 1}), \quad \begin{cases} n = \frac{\nu}{2} \\ n = \frac{\nu - \sqrt{\nu^2 - 4l}}{2} \end{cases}$$

$\nu > 4l \Rightarrow y(x) = c_1 e^{\frac{\nu+x}{2}} + c_2 e^{\frac{\nu-x}{2}}$

$\nu < 4l \Rightarrow y(x) = c_1 e^{\frac{\nu+x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{4l-\nu^2}}{2}x\right) + c_2 e^{\frac{\nu-x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4l-\nu^2}}{2}x\right)$

$\nu = 4l \Rightarrow y(x) = c_1 e^{\frac{\nu+x}{2}} + c_2 x e^{\frac{\nu+x}{2}}$

Figure 8.122: Exercise 3

$$4) \quad y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_2 = 0$$

$$i) \quad w' + p(x)w = 0$$

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

$$\begin{aligned} w' &= y_1 \cancel{y_1'} + y_1 \cancel{y_2'} - (\cancel{y_1'y_1'} + \cancel{y_2y_1}) \\ &= y_1y_2'' - y_2y_1'' \end{aligned}$$

antwoerd punt

$$\begin{cases} y_2'' = -p(x)y_2' - q(x)y_2 \\ y_1'' = -p(x)y_1' - q(x)y_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} dw' &= y_1(-p(x)y_2' - q(x)y_2) - y_2(-p(x)y_1' - q(x)y_1) \\ &= -p(x)y_1y_2' - q(x)y_1y_2 + p(x)y_2y_1' + q(x)y_1y_2 \\ &= -p(x)y_1y_2' + p(x)y_2y_1' \\ &= -p(x)(y_1y_2' - y_2y_1') = -p(x) \cdot w \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{typische lineare vorm } (y(x) = ce^{-\int p(x) dx})$$

$$\rightarrow w(x) = C \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

$$\text{Toon aan dat } \left(\frac{y_2}{y_1} \right)' = \frac{w(y_1, y_2)}{y_1^2}$$

$$\frac{y_1'y_1 - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_1'y_2}{y_1^2} = w(x)$$

$$y_1'y_1 - y_1'y_2 = w \cdot y_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{w}{y_1^2} = \frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_1'y_2}{y_1^2}$$

$$w(x) = \frac{w}{y_1^2} \Rightarrow w(x) = \int \frac{w}{y_1^2} \cdot dx$$

$$\therefore y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{w}{y_1^2} \cdot dx$$

Figure 8.123: Exercise 4

veronderstel $w = \begin{pmatrix} w_0 & w_1 & \dots \\ w'_0 & w'_1 & \dots \\ \vdots & & \\ w^{(m)}_0 & w^{(m)}_1 & \dots \end{pmatrix}$, if $w \neq 0 \rightarrow$ lineair onafhankelijk.

verbeterde enkele afgeleide van partculaire oplossing $y_p(x)$

$$y_p(x) = \sum_{i=0}^m (w_i(x) \cdot y_i(x) + w'_i(x) \cdot y'_i(x))$$

met deelbare kenmerken:

$$y''_p(x) = \sum_{i=0}^m w^{(i)}(x) y_i(x) + 2 \cdot w'(x) \cdot y'_i(x) + w(x) \cdot y''_i(x)$$

derde, ...

$$y^{(m)}_p(x) = \sum_{i=0}^m \dots$$

we behouden wel de hogere orde termen voor simpelificatie:

$$\sum_{i=0}^m w^{(i)}(x) \cdot y^{(i)}(x) = g(x)$$

\downarrow van m tot $m+1$

$$w(w_0, \dots, w_m) = \begin{pmatrix} w_0(x) & w_1(x) & \dots & w^{(m)}(x) \\ w'_0(x) & \dots & \dots & w'_{m-1}(x) \\ \vdots & & & \\ w^{(m)}_0(x) & & & \end{pmatrix}$$

$$w \cdot \begin{pmatrix} w_0(x) \\ \vdots \\ w^{(m)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

so nu we nove $w'_i(x)$:

$$\begin{pmatrix} w_0(x) \\ \vdots \\ w^{(m)}(x) \end{pmatrix} = w^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{pmatrix}$$

$$w_i(x) = \int w_i(x) \cdot dx + C$$

\hookrightarrow partculaire oplossing

$$y_p(x) = \sum_{i=0}^m w_i(x) \cdot y_i(x) \quad \text{met } w_i(x) = \int w'_i(x) \cdot dx + C$$

\Rightarrow Rechthoeksgemengdolution is then y_h

$$= \sum_{i=0}^m c_i y_i(x) \quad (\text{per definitie})$$

\Rightarrow algemee oplossing: $y_p + y_h$

$$= \sum_{i=0}^m c_i y_i(x) + \sum_{i=0}^m w_i(x) \cdot y_i(x) \quad \text{met } w_i(x) = \int w'_i(x) \cdot dx + C$$

Figure 8.124: Exercise 5
286

$$6) \quad \omega''(t) + \gamma \omega'(t) + k \omega(t) = 0$$

$$\ddot{z} + \gamma z + k = 0$$

$$\frac{z}{\alpha^2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4k}}{2}$$

$\omega_b < \omega_h \rightarrow$ overdamped

$$\rightarrow \text{damped oscillation: } \left(\frac{\dot{z} - \sqrt{\gamma^2 - 4k}}{2} \right) \alpha$$

$$\omega(t) = C_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$\omega_b > \omega_h \rightarrow$ underdamped

$$\omega(t) = C_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{4k - \gamma^2}}{2} \alpha\right) + C_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{4k - \gamma^2}}{2} \alpha\right)$$

$\omega_b = \omega_h \rightarrow$ neutral

$$\omega(t) = C_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

critical damping: higher we lie $\gamma \geq \omega_b$

$$\rightarrow \gamma = 2\sqrt{k}$$

Figure 8.125: Exercise 6

```

> restart;

# Parameters
k := 4:
u0 := 2:
v0 := 1:

# Time range
t_range := 0 .. 5:

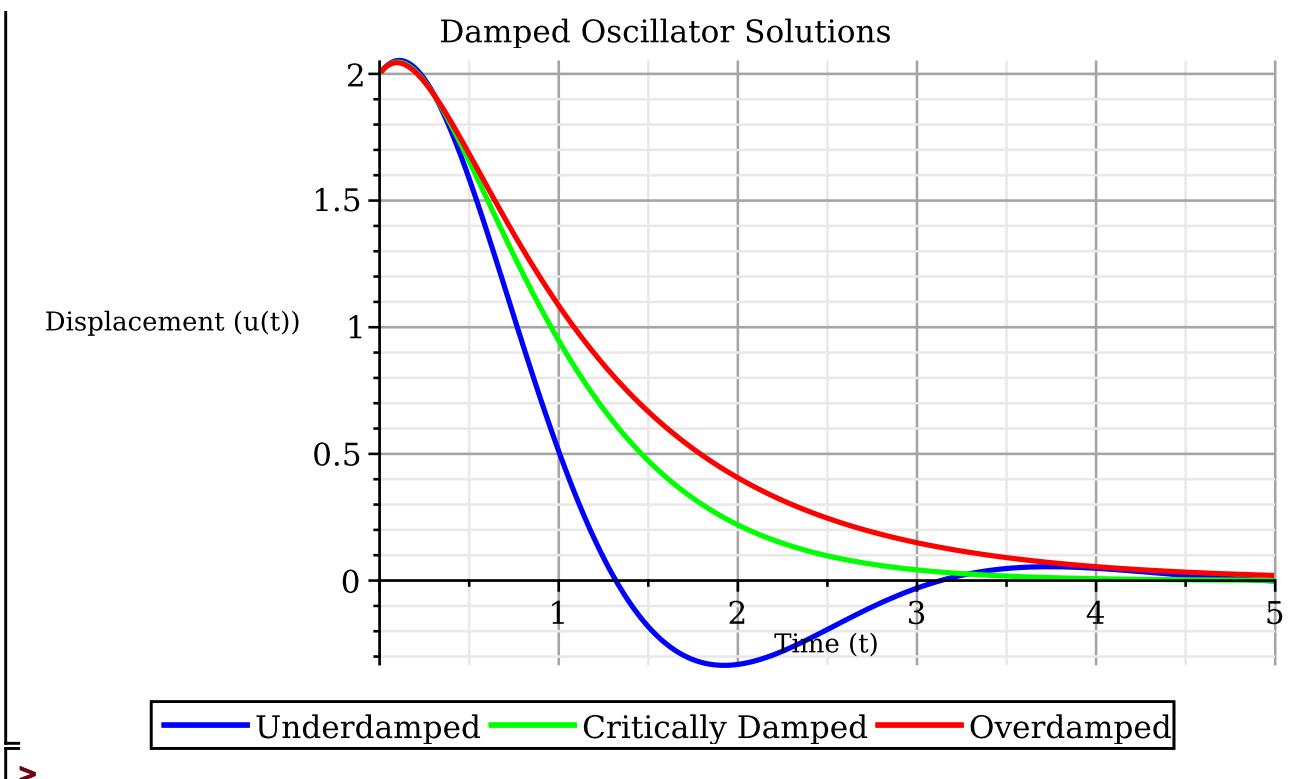
# Underdamped case ( $\gamma^2 < 4k$ )
gamma1 := 2:
omega := sqrt(4*k - gamma1^2)/2:
u_underdamped := u0*exp(-gamma1*t/2)*cos(omega*t) +
    (v0 + (gamma1/2)*u0)*exp(-gamma1*t/2)*sin(omega*t):
/omega:

# Critically damped case ( $\gamma^2 = 4k$ )
gamma2 := 2*sqrt(k):
u_critical := (u0 + (v0 + gamma2*u0/2)*t)*exp(-gamma2*t/2):

# Overdamped case ( $\gamma^2 > 4k$ )
gamma3 := 5:
r1 := (-gamma3 - sqrt(gamma3^2 - 4*k))/2:
r2 := (-gamma3 + sqrt(gamma3^2 - 4*k))/2:
u_overdamped := ((u0*r2 - v0)/(r2 - r1))*exp(r1*t) +
    ((v0 - u0*r1)/(r2 - r1))*exp(r2*t):

# Plot the three cases
plots[display](
    [plot(u_underdamped, t = t_range, color = blue, thickness = 2, legend =
        "Underdamped"),
     plot(u_critical, t = t_range, color = green, thickness = 2, legend =
        "Critically Damped"),
     plot(u_overdamped, t = t_range, color = red, thickness = 2, legend =
        "Overdamped")],
    title = "Damped Oscillator Solutions",
    labels = ["Time (t)", "Displacement (u(t))"],
    gridlines = true
);

```



```

> restart;

# Define parameters
lambda1 := lambda[1];
lambda2 := lambda[2];
N0 := N[0];

# Define the system of differential equations with explicit functions
eq1 := diff(N1(t), t) = -lambda1 * N1(t);
eq2 := diff(N2(t), t) = lambda1 * N1(t) - lambda2 * N2(t);

# Solve the first differential equation for N1(t)
sol1 := dsolve({eq1, N1(0) = N0}, N1(t));

# Extract the solution for N1(t)
N1_sol := rhs(sol1);

# Substitute the solution for N1(t) into the second equation
eq2_sub := subs(N1(t) = N1_sol, eq2);

# Solve the second differential equation for N2(t) with initial condition
N2(0) = 0
sol2 := dsolve({eq2_sub, N2(0) = 0}, N2(t));

# Display the solutions
sol1, (sol2);

N1(t) = N0 e-λ1 t, N2(t) = - 
$$\frac{N_0 \lambda_1 (e^{-t(\lambda_1 - \lambda_2)} - 1) e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$
 (1)

```

Figure 8.126: Exercise 7

Bord 8

$$\frac{dK}{dt} = 0,001 K(t) + 0,0001 M(t) \quad (1)$$

$$\frac{dM}{dt} = 0,01 M(t) - k(t) \quad (2)$$

(a) wekken en differentiëren we klink effanger van $M(t)$

$$M''(t) = 0,01 M'(t) - k'(t)$$

$$\begin{aligned} M''(t) &= 0,01 M'(t) - 0,001 K(t) - 0,0001 M(t) \\ &= 0,01 M'(t) - 0,001 (0,01 M(t) - M'(t)) - 0,0001 M(t) \\ M''(t) &= 0,01 M'(t) - 0,0001 M(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} M(0) = 2000, \\ M'(0) = 0,01 \cdot 3000 - 15 = 15 \end{array} \right. \end{aligned}$$

stek in maple:

168 dayen

$$(b) M''(t) = 0,01 M'(t) - 0,0001 M(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} M'(0) = 0,01 M(0) - k \\ M(0) = 3000 \end{array} \right.$$

stek in maple:

minimum 36 dayen

Figure 8.127: Exercise 1

```
> restart:
```

```
# A
```

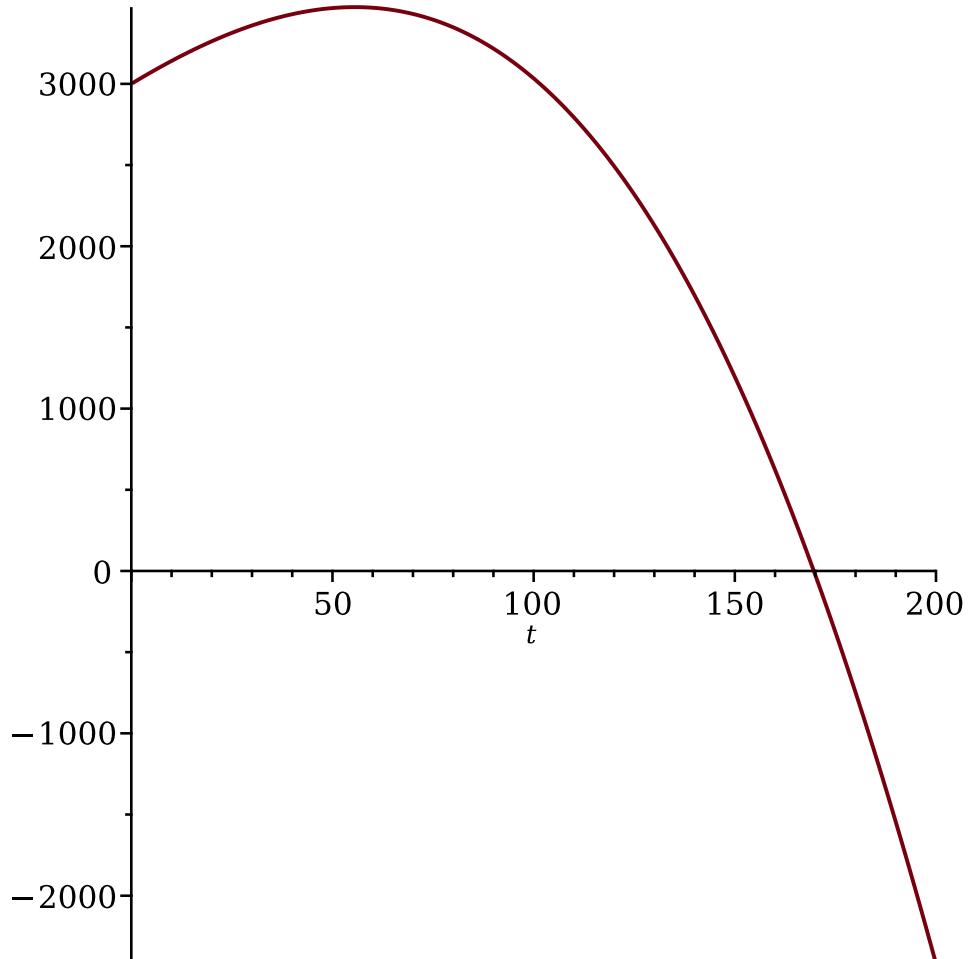
$$eq := D(D(M))(t) = 0.011 \cdot D(M)(t) - 0.00011 \cdot M(t)$$

$$eq := D^{(2)}(M)(t) = 0.011 D(M)(t) - 0.00011 M(t) \quad (1)$$

```
> sol := rhs(dsolve(\{D(M)(0) = 15, M(0) = 3000, eq\}))
```

$$sol := -\frac{3000 e^{\frac{11 t}{2000}} \left(\sqrt{319} \sin \left(\frac{\sqrt{319} t}{2000}\right) - 319 \cos \left(\frac{\sqrt{319} t}{2000}\right)\right)}{319} \quad (2)$$

```
> plot(sol, t = 0 .. 200)
```



```
> evalf(solve(sol = 0, t))
```

$$169.6323664 \quad (3)$$

```
#B
```

```
restart:
```

```
> eq := D(D(M))(t) = 0.011 \cdot D(M)(t) - 0.00011 \cdot M(t)
```

$$eq := D^{(2)}(M)(t) = 0.011 D(M)(t) - 0.00011 M(t) \quad (4)$$

```
> sol := rhs(dsolve(\{D(M)(0) = 30 - k, M(0) = 3000, eq\}))
```

$$sol := -\frac{2000 e^{\frac{11 t}{2000}} \left(\sqrt{319} \left(-\frac{27}{2}+k\right) \sin \left(\frac{\sqrt{319} t}{2000}\right)-\frac{957 \cos \left(\frac{\sqrt{319} t}{2000}\right)}{2}\right)}{319} \quad (5)$$

> $sol := subs(t = 100, sol)$

$$sol := -\frac{2000 e^{\frac{11}{20}} \left(\sqrt{319} \left(-\frac{27}{2}+k\right) \sin \left(\frac{\sqrt{319}}{20}\right)-\frac{957 \cos \left(\frac{\sqrt{319}}{20}\right)}{2}\right)}{319} \quad (6)$$

> $evalf(solve(sol = 0, k))$

$$35.06599836 \quad (7)$$

>

a) $y_p(x) = w_1(x) \cdot y_1(x)^T w_2(x) \cdot y_2(x)$

↳ erste Affine Schicht:

$$\begin{aligned} y'_p(x) &= \underbrace{w_1^T(x) \cdot y_1(x)}_{=0} + w_2(x) \cdot \underbrace{y_2^T(x)}_{=0} \\ &= w_1(x) \cdot y_1^T(x) + w_2(x) \cdot y_2^T(x) \end{aligned}$$

↳ zweite Rechteckschicht:

$$\begin{aligned} y''_p(x) &= \underbrace{w_1^T(x) \cdot y_1(x)}_{=0} + w_2(x) \cdot \underbrace{y_1^T(x)}_{=0} + w_3(x) \cdot y_2^T(x) \\ &= g(x) + w_2(x) \cdot \underbrace{y_1^T(x) + w_3(x) \cdot y_2^T(x)}_{=0} \\ &= g(x) + w_2(x) \cdot (y_{21}^T(x) + p_1(x) \cdot y_{11}^T(x) + \text{Polyn.}_1(x)) \\ &\quad + w_3(x) \cdot (y_{22}^T(x) + p_1(x) \cdot y_{12}^T(x) + p_0(x) \cdot y_{12}^T(x)) = g(x) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow g(x) = g(x) \blacksquare$

b) $w_1^T(x) y_1(x) + w_2^T(x) y_2(x) = 0$

 $\Leftrightarrow w_1^T(x) = -\frac{w_2^T(x) y_2(x)}{y_1(x)}$

Multiplikation:

$$\frac{-w_2^T(x) y_2(x)}{y_1(x)} \cdot y_1'(x) + w_2^T(x) y_2'(x) = g'(x)$$
 $\Leftrightarrow w_2^T(x) \left(\frac{-y_2(x) \cdot y_1'(x) + y_2'(x) \cdot y_1(x)}{y_1(x)} \right) = g'(x)$
 $\Leftrightarrow w_2^T(x) \cdot \left(\frac{y_1(x)}{y_1(x)} \right) = g'(x) \quad \Leftrightarrow w_2^T(x) = \frac{g'(x) \cdot y_1(x)}{y_1(x)}$

daraus: $w_2(x) = \int_0^x -\frac{y_1(m) g'(m)}{w(y_1, y_2)} dm + c_2$

 $w_1(x) = \int_0^x \frac{y_1(m) g(m)}{w(y_1, y_2)} dm + c_1$

c) Maple

Figure 8.128: Exercise 2

> *restart*: with(VectorCalculus) : with(LinearAlgebra) :
> $LL := \text{diff}(y(x), x\$2) + 2 * \text{diff}(y(x), x) + 4 * y(x);$

$$LL := \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 2 \frac{d}{dx} y(x) + 4 y(x) \quad (1)$$

> $g := x \rightarrow x^2 :$
> $y_0 := 5 : dy_0 := 1 :$
> $\text{dsolve}(LL = 0, y(x))$

$$y(x) = c_1 e^{-x} \sin(\sqrt{3} x) + c_2 e^{-x} \cos(\sqrt{3} x) \quad (2)$$

> # Homogene oplossingen
> $y1 := x \rightarrow \exp(-x) * \sin(\sqrt{3} x) :$
 $y2 := x \rightarrow \exp(-x) * \cos(\sqrt{3} x) :$
> # Wronskiaan
> $\text{simplify}(\text{Determinant}(\text{Wronskian}([y1(x), y2(x)], x))) ;$
 $Wr := x \rightarrow -\exp(-2x) * \sqrt{3} ;$

$$Wr := x \mapsto -e^{-2x} \cdot \sqrt{3} \quad (3)$$

> # We can now solve u1 and u2
> $u1 := \text{simplify}(\text{int}(-y2(x) * g(x) / Wr(x), x)) + C1;$
 $u2 := \text{simplify}(\text{int}(y1(x) * g(x) / Wr(x), x)) + C2;$

$$\begin{aligned} u1 &:= \frac{e^x ((x^2 + x - 1) \cos(\sqrt{3} x) + \sin(\sqrt{3} x) \sqrt{3} x (x - 1)) \sqrt{3}}{12} + C1 \\ u2 &:= \frac{e^x \sqrt{3} ((-x^2 - x + 1) \sin(\sqrt{3} x) + \cos(\sqrt{3} x) x \sqrt{3} (x - 1))}{12} + C2 \end{aligned} \quad (4)$$

> # The particular solution is
> $yp := u1 * y1(x) + u2 * y2(x);$
 $yp := \left(\frac{e^x ((x^2 + x - 1) \cos(\sqrt{3} x) + \sin(\sqrt{3} x) \sqrt{3} x (x - 1)) \sqrt{3}}{12} + C1 \right) e^{-x} \sin(\sqrt{3} x) + \left(\frac{e^x \sqrt{3} ((-x^2 - x + 1) \sin(\sqrt{3} x) + \cos(\sqrt{3} x) x \sqrt{3} (x - 1))}{12} + C2 \right) e^{-x} \cos(\sqrt{3} x)$
> $y0 := \text{simplify}(\text{subs}(x = 0, yp));$
 $dy0 := \text{simplify}(\text{subs}(x = 0, \text{diff}(yp, x)));$

$$\begin{aligned} y0 &:= C2 \\ dy0 &:= -\frac{1}{4} + \sqrt{3} C1 - C2 \end{aligned} \quad (6)$$

> $sol := solve(\{y0 = y_0, dy0 = dy_0\}, \{C1, C2\});$

$$sol := \left\{ C1 = \frac{25\sqrt{3}}{12}, C2 = 5 \right\} \quad (7)$$

> $solution := simplify(subs(sol, yp));$

$$solution := \frac{x^2}{4} + \frac{25 e^{-x} \sin(\sqrt{3} x) \sqrt{3}}{12} - \frac{x}{4} + 5 e^{-x} \cos(\sqrt{3} x) \quad (8)$$

$$3) \quad \vec{y}'(\alpha) + 2\vec{y}(\alpha) + 4\vec{y}_3(\alpha) = \vec{\alpha}$$

(a) $\frac{d}{d\alpha} \vec{y}(\alpha) = A \vec{y}(\alpha) + \vec{b}(\alpha)$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\alpha} \begin{pmatrix} \vec{y}_1(\alpha) \\ \vec{y}_2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{y}_1(\alpha) \\ \vec{y}_2(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) $\vec{x}'(\alpha) = e^{A\alpha} (-A\vec{x}(\alpha)) \vec{y}(\alpha)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \vec{x}(\alpha) &= e^{A\alpha} (-A\vec{x}(\alpha) \cdot A + \frac{d}{d\alpha} \vec{y}(\alpha)) \\ &= e^{A\alpha} \cdot (-A\vec{x}(\alpha) \cdot A + A\vec{x}(\alpha) + \vec{b}(\alpha)) \\ &= e^{A\alpha} \cdot (\vec{b}(\alpha)) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(c) mögl.

Figure 8.129: Exercise 3

> `restart;`
`with(LinearAlgebra) :`

Initial values

`y_0 := 5 :`
`dy_0 := 1 :`

Define matrix A and function b(x)

`A := Matrix([[-2, -4], [1, 0]]):`
`b := x → Vector([x^2, 0]):`

*# Compute MatrixExponential(-A*x) . b(x)*

`vec_expr := MatrixExponential(-A*x) . b(x) :`

Integrate each component of the vector separately

`integral_result := Vector([`
`int(vec_expr[1], x),`
`int(vec_expr[2], x)`
`]):`

Combine the terms

`sol := simplify(`
`MatrixExponential(A*x) . integral_result`
`+ MatrixExponential(A*x) . Vector([C1, C2])`
`);`

Verify the solution at x = 0

`vgl := simplify(subs(x = 0, sol)) = Vector([dy_0, y_0));`

$$sol := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3} e^{-x} (C1 + 4 C2) \sin(x\sqrt{3})}{3} + C1 e^{-x} \cos(x\sqrt{3}) + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3} e^{-x} (C1 + C2) \sin(x\sqrt{3})}{3} + C2 e^{-x} \cos(x\sqrt{3}) + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \end{bmatrix}$$

$$vgl := \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} + C1 \\ C2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> `solve(vgl, {C1, C2})`

$$\left\{ C1 = \frac{5}{4}, C2 = 5 \right\}$$

(2)

5)

i) $m\ddot{u} + k u = 0 \rightarrow$ gereduceerd differentiaal vergelijking

$$\Leftrightarrow m\ddot{u} + k = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{-\frac{k}{m}} \rightarrow \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ we noemen } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Free basis oplossingen zijn dan:

$$\phi_1(t) = \cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)$$

$$\phi_2(t) = \cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} \text{Algemene oplossing: } u(t) &= c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t) \\ &= (c_1 + c_2) \cos(\omega_0 t) + i(c_1 - c_2) \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

enkel geïnterpreteerd in reële oplossingen.

$\hookrightarrow c_1$ en c_2 zijn daarna complex toegevoegde

$$\bar{\phi}_1^R = \cos(\omega_0 t), \bar{\phi}_2^R = \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{dus we bekennen } u(t) = D_1 \cos(\omega_0 t) + D_2 \sin(\omega_0 t), D_i \in \mathbb{R}$$

Figure 8.130: Exercise 4 Part 1

- (ii) We starten met het bepalen van een particulaire oplossing van de complete differentiaalvergelijking. Om een particulaire oplossing van $mu'' + ku = A \sin(\omega t)$ te bepalen, stellen wij een kandidaat voorop. We onderscheiden twee gevallen:

– $\omega \neq \omega_0$

Wij laten ons hierbij inspireren door het rechterlid $A \sin(\omega t)$. Een goede kandidaat is $v(t) = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)$. Door substitutie in de complete DV bekomen wij

$$m[-\alpha\omega^2 \sin(\omega t) - \beta\omega^2 \cos(\omega t)] + k[\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)] = A \sin(\omega t),$$

wat dient te gelden voor elke $t \in \mathbb{R}$. Voor $t = 0$ bekomen wij $-m\beta\omega^2 + k\beta = 0$, zodat $\beta = 0$. Verder dient dan voor $t = \frac{\pi}{2\omega}$ te gelden dat $-m\alpha\omega^2 + k\alpha = A$, zodat $\alpha = \frac{A}{k-m\omega^2}$ ($k - m\omega^2 \neq 0$). Merk op dat de functie $u^*(t) := \frac{A}{k-m\omega^2} \sin(\omega t)$ voor elke $t \in \mathbb{R}$ aan de complete differentiaalvergelijking voldoet en dus een particulaire oplossing is. Merk op dat deze oplossing echter enkel geldig is voor $k - m\omega^2 \neq 0$ m.a.w. de oplossing geldt enkel wanneer $\omega \neq \omega_0$.

– $\omega = \omega_0$

In dit geval stellen we onze kandidaat gelijk aan $v(t) = t(\alpha \sin(\omega_0 t) + \beta \cos(\omega_0 t))$. Substitutie in de complete differentiaalvergelijking om de constanten te bepalen, leidt in dit geval tot

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{-A}{2m\omega_0},$$

samen met de gestelde voorwaarde $\omega = \omega_0$. Derhalve is $u^*(t) = \frac{-A}{2m\omega_0} t \cos(\omega_0 t)$ een particulaire oplossing.

Figure 8.131: Exercise 4 Part 2

▼ (ii)

$\omega \neq \omega_0$

```
> dsolve(diff(u(t),t$2) + w0**2*u(t) = A/m*sin(omega*t), u(t));
u(t) = sin(w0 t) c2 + cos(w0 t) c1 + 
$$\frac{A \sin(\omega t)}{m (-\omega^2 + w0^2)}$$
 (4.1.1.1)
```

```
> u_verschillend:=A/(k-m*omega^2)*sin(omega*t) + D1*cos(omega[0]*t) + D2*
sin(omega[0]*t);
u_verschillend := 
$$\frac{A \sin(\omega t)}{-m \omega^2 + k} + D1 \cos(\omega_0 t) + D2 \sin(\omega_0 t)$$
 (4.1.1.2)
```

```
> solve(simplify(subs(t=0, u_verschillend=u0)), D1);
u0
```

```
> solve(simplify(subs(t=0, diff(u_verschillend,t)=u1)), D2);

$$-\frac{m \omega^2 u1 + A \omega - k u1}{(-m \omega^2 + k) \omega_0}$$
 (4.1.1.4)
```

$\omega = \omega_0$

Merk op dat als $\omega = \omega_0$ de oplossing er anders uitziet:

```
> restart;
> dsolve(diff(u(t),t$2) + w0**2*u(t) = A/m*sin(w0*t), u(t));
u(t) = sin(w0 t) c2 + cos(w0 t) c1 + 
$$\frac{A (\sin(w0 t) - \cos(w0 t) t w0)}{2 m w0^2}$$
 (4.1.2.1)
```

```
> u_gelijk:=-A/(2*m*omega[0])*t*cos(omega[0]*t) + D1*cos(omega[0]*t) +
D2*sin(omega[0]*t);
u_gelijk := 
$$-\frac{A t \cos(\omega_0 t)}{2 m \omega_0} + D1 \cos(\omega_0 t) + D2 \sin(\omega_0 t)$$
 (4.1.2.2)
```

```
> solve(simplify(subs(t=0, u_gelijk=u0)), D1);
u0
```

```
> solve(simplify(subs(t=0, diff(u_gelijk,t)=u1)), D2);

$$\frac{2 m u1 \omega_0 + A}{2 m \omega_0^2}$$
 (4.1.2.4)
```

Defining 5

Figure 8.132: Exercise 4 Part 2 Maple

Part III en IV:

Given the differential equation:

$$mu''(t) + ku(t) = A \sin(\omega t),$$

where m is the mass, k is the spring constant, and $A \sin(\omega t)$ is the external forcing term. The goal is to:

- (i) Find the general solution to the reduced homogeneous differential equation.
- (ii) Find the particular solution to the complete differential equation.
- (iii) Solve the initial value problem.
- (iv) Analyze the asymptotic behavior of the solution, including resonance.

Part (i): General Solution to the Homogeneous Equation

The homogeneous equation is:

$$mu''(t) + ku(t) = 0.$$

Step 1: Solve the characteristic equation.

The characteristic equation is:

$$mr^2 + k = 0 \implies r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Let $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, the natural frequency of the system. The roots become $r = \pm i\omega_0$.

Step 2: General homogeneous solution.

The general solution to the homogeneous equation is:

$$u_h(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t),$$

where C_1 and C_2 are arbitrary constants.

Alternatively, using complex exponentials:

$$u_h(t) = D_1 e^{i\omega_0 t} + D_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

Part (ii): Particular Solution to the Complete Equation

For the forcing term $A \sin(\omega t)$, assume the particular solution:

$$u_p(t) = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t),$$

where α and β are constants to be determined.

Case 1: $\omega \neq \omega_0$

Substituting $u_p(t)$ into the differential equation:

$$mu_p''(t) + ku_p(t) = A \sin(\omega t),$$

and separating terms in $\sin(\omega t)$ and $\cos(\omega t)$, we obtain:

$$-m\alpha\omega^2 + k\alpha = A, \quad -m\beta\omega^2 + k\beta = 0.$$

Solving for α and β :

$$\alpha = \frac{A}{k - m\omega^2}, \quad \beta = 0.$$

Thus, the particular solution is:

$$u_p(t) = \frac{A}{k - m\omega^2} \sin(\omega t).$$

Case 2: $\omega = \omega_0$ (Resonance)

When $\omega = \omega_0$, the forcing frequency matches the natural frequency. Assume:

$$u_p(t) = \gamma t \cos(\omega_0 t),$$

where γ is to be determined. Substituting into the differential equation, we find:

$$\gamma = -\frac{A}{2m\omega_0}.$$

Thus, the particular solution is:

$$u_p(t) = -\frac{A}{2m\omega_0} t \cos(\omega_0 t).$$

Part (iii): Initial Value Problem

The general solution is the sum of the homogeneous and particular solutions:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t).$$

Case 1: $\omega \neq \omega_0$

$$u(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{k - m\omega^2} \sin(\omega t).$$

Using the initial conditions $u(0) = u_0$ and $u'(0) = u_1$:

$$\begin{aligned} u(0) &= C_1 = u_0, \\ u'(0) &= C_2\omega_0 + \omega \frac{A}{k - m\omega^2} = u_1 \implies C_2 = \frac{u_1 - \omega \frac{A}{k - m\omega^2}}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Case 2: $\omega = \omega_0$

$$u(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) - \frac{A}{2m\omega_0} t \cos(\omega_0 t).$$

Using the initial conditions:

$$\begin{aligned} u(0) &= C_1 = u_0, \\ u'(0) &= C_2\omega_0 - \frac{A}{2m\omega_0} = u_1 \implies C_2 = \frac{u_1 + \frac{A}{2m\omega_0}}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Part (iv): Asymptotic Behavior

Case 1: $\omega \neq \omega_0$

For large t , the transient terms (from the homogeneous solution) decay, leaving the steady-state solution:

$$u(t) \rightarrow \frac{A}{k - m\omega^2} \sin(\omega t).$$

Case 2: $\omega = \omega_0$ (**Resonance**)

For large t , the amplitude of the oscillation grows linearly due to the $-\frac{A}{2m\omega_0} t \cos(\omega_0 t)$ term. This is resonance, where the system experiences unbounded oscillations.

A₀ : homogene oplossing.

$$m\ddot{w}(t) + \gamma \dot{w}(t) + k w(t) = A \cdot \sin(\omega t)$$

Step 1: calculate A₀ (without forcing term):

$$w_0(t) = c_1 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \sin\left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4km}}{2m} t\right) + c_2 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \cos\left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4km}}{2m} t\right)$$

Step 2: particular:

$$w_p(t) = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)$$

$$\text{LHS: } m\ddot{w}_p(t) + \gamma \dot{w}_p(t) + k w_p(t) = A \sin(\omega t)$$

calculate the derivatives:

$$\ddot{w}_p(t) = \alpha \omega \cos(\omega t) - \beta \omega \sin(\omega t)$$

$$\dot{w}_p(t) = -\alpha \omega^2 \sin(\omega t) - \beta \omega^2 \cos(\omega t)$$

Left for $\sin(\omega t)$:

$$-\mu \alpha \cdot \omega^2 + \beta \omega \gamma + k \alpha = A$$

Voor $\cos(\omega t)$:

$$-\mu \beta \omega^2 - \alpha \omega \gamma + k \beta = 0$$

Steek dit in μ in and solve for α and β .

\rightarrow nu kunnen we partculieren invullen omdat: $w_p(t) = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)$

Figure 8.133: Exercise 5

> # Define the homogeneous equation
 $LL := m * \text{diff}(u(t), t\$2) + \text{gamma} * \text{diff}(u(t), t) + k * u(t);$

Solve the homogeneous equation
 $\text{hom_sol} := \text{dsolve}(LL = 0, u(t)) \text{ assuming gamma}^2 < 4 * k * m;$

$$LL := m \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + \gamma \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) + k u(t)$$

$$\text{hom_sol} := u(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \sin \left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4km}}{2m} t \right) + c_2 e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \cos \left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4km}}{2m} t \right) \quad (1)$$

> $\text{part_sol_coeff} := \text{solve}(\{-m * \text{alpha} * \omega^2 + \text{beta} * \omega * \gamma + k * \text{alpha} = A,$
 $-m * \text{beta} * \omega^2 - \text{alpha} * \omega * \gamma + k * \text{beta} = 0\},$
 $\{\text{alpha}, \text{beta}\});$

$$\text{part_sol_coeff} := \begin{cases} \alpha = \frac{(-m\omega^2 + k)A}{m^2\omega^4 + \gamma^2\omega^2 - 2km\omega^2 + k^2}, \beta \\ = \frac{\gamma\omega A}{m^2\omega^4 + \gamma^2\omega^2 - 2km\omega^2 + k^2} \end{cases} \quad (2)$$

> # Dus de particuliere oplossing is dan:
> $\text{particuliere_oplossing} := \text{rhs}(\text{part_sol_coeff}[1] \cdot \sin(\omega \cdot t) + \text{part_sol_coeff}[2] \cdot \cos(\omega \cdot t))$

$$\text{particuliere_oplossing} := \frac{\sin(\omega t) (-m\omega^2 + k) A}{m^2\omega^4 + \gamma^2\omega^2 - 2km\omega^2 + k^2} + \frac{\cos(\omega t) \gamma\omega A}{m^2\omega^4 + \gamma^2\omega^2 - 2km\omega^2 + k^2} \quad (3)$$

> # De algemene oplossing is dan
> # Solve the full equation
 $\text{full_sol} := \text{dsolve}(LL = A * \sin(\omega \cdot t), u(t)) \text{ assuming gamma}^2 < 4 * k * m;$

$$\text{full_sol} := u(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \sin \left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4km}}{2m} t \right) c_2 + e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \cos \left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4km}}{2m} t \right) c_1 + \frac{A ((-m\omega^2 + k) \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \gamma\omega)}{m^2\omega^4 + (\gamma^2 - 2km)\omega^2 + k^2} \quad (4)$$

WC 8

$$\text{a)} \quad \leftrightarrow 0.7x \quad \text{in ambient temperature}$$

- i) The cooling of the coffee
of the room.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_{\text{ambient}})$$

\Rightarrow important: die Temperatur sinkt exponentiell und die Differenz zwischen der Koffeintemperatur und der Raumtemperatur sinkt.

$$\text{c.a. } \dot{T}(t) = -k \cdot T(t) + k \cdot T_{\text{ambient}}$$

$$T(0) = 40, T(0) = 70, T_{\text{amb}} = 20$$

De homogene oplossing

$$\Leftrightarrow T'(t) + k \cdot T(t) = 0 \quad (\text{kt}) \Rightarrow T(t) \\ \Rightarrow \text{Rückw. Volgl. } C \cdot e^{-kt} \Rightarrow T(t)$$

die allgemeine oplossing:

$$T(t) = T_{\text{ambient}} + C \cdot e^{-kt}$$

die partikuläre oplossung

$$\partial_t \cdot C \cdot T(t) = 0 \\ \Leftrightarrow k \cdot T(t) = k \cdot T_{\text{ambient}}$$

$$\Rightarrow T(t) = 20 + 50 \cdot e^{-kt}$$

$$\left. \begin{array}{l} T(0) = 20 + C \cdot 1 \quad C = 50 \\ T(\infty) = 20 + C \cdot e^{-k \cdot \infty} \\ \Leftrightarrow 20 = 50 \cdot e^{-k \cdot \infty} \quad \Leftrightarrow k = -\frac{\ln(1/5)}{\infty} \end{array} \right\}$$

$$\text{ii) } T_2(t) = k(\omega - T_2(t))$$

$$\Leftrightarrow T_2(t) = k\omega - kT_2(t)$$

homogen:

$$T_2(t) + kT_2(t) = 0 \rightarrow C \cdot e^{kt}$$

partikulär:

$$\Leftrightarrow T_2(t) = \omega$$

\Rightarrow die allgemeine oplossung

$$C \cdot e^{-kt} \quad (\omega = T_2(t))$$

\Leftrightarrow op. fikt. Volgl.:

$$C \cdot 1 + \omega = 40 \quad \Leftrightarrow C = 40 - \omega$$

viele "k": k abhängt von ω !

$$\ln(\frac{\omega}{40}) \cdot k_0$$

$$(40 - \omega) \cdot k_0 + \omega = 70$$

$$\Leftrightarrow \omega = 90$$

Figure 8.134: Exercise 1

▼ (iii)

```
> Temp := t -> piecewise(0 < t and t < 10, T1(t), 10 <= t and t < 20, T2(t  
- 10));  
> plot(Temp(t), t = 0 .. 20, discont);
```

Figure 8.135: Exercise 1 Part 3

2. Een vloeistoftank met een capaciteit van V liter bevat aanvankelijk W liter ($W < V$) water, waarin Z kilogram zout is opgelost.

Tijdens de eerste fase stroomt zuiver water de tank binnen aan een debiet van s l/min. Het door roeren homogeen mengsel verlaat de tank met een debiet van r l/min ($r < s$). De eerste fase stopt op het moment dat de tank volledig gevuld is.

Tijdens de tweede fase bevat het instromend water zout met een concentratie van k kg/l dewelke groter is dan de bij start van de tweede fase aanwezige concentratie zout. Het uitstroomdebiet blijft onveranderd, terwijl het instroomdebiet teruggebracht wordt tot eveneens r l/min.

- (i) Bepaal op elk ogenblik van de eerste fase de hoeveelheid zout in de tank.
- (ii) Bepaal op elk ogenblik van de tweede fase de hoeveelheid zout in de tank.
- (iii) Bepaal op elk ogenblik de hoeveelheid vloeistof $v(t)$ en de hoeveelheid zout $z(t)$ in de tank.
- (iv) Voorspel de waarde van $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t)$.
- (v) Hoelang moet de tweede fase duren om de hoeveelheid zout die in de tank aanwezig was na het beëindigen van de eerste fase te verdrievoudigen?
- (vi) Visualiseer het volledige verloop van de hoeveelheid zout in de tank in het geval waar $V = 500$, $W = 100$, $Z = 70$, $s = 15$, $r = 5$ en $k = 0,2$.

Solution: Stel $v_i(t)$ de hoeveelheid vloeistof in de tank, en $z_i(t)$ de hoeveelheid zout, tijdens fase $i = 1, 2$.

- (a) De ogenblikkelijke verandering in de hoeveelheid vloeistof is

$$v'_1(t) = s - r, \quad v_1(0) = W \quad \xrightarrow{\text{M}} \quad v_1(t) = (s - r)t + W.$$

Dit duurt tot het tijdstip t_1 waarop de tank vol is, dus $v_1(t_1) = V$. We vinden $t_1 \stackrel{\text{M}}{=} \frac{V-W}{s-r}$.

De ogenblikkelijke verandering in de hoeveelheid zout is

$$z'_1(t) = -r \frac{z_1(t)}{v_1(t)}, \quad z_1(0) = Z \quad \xrightarrow{\text{M}} \quad z_1(t) = Z W^{-\kappa} (-rt + st + W)^\kappa, \quad \kappa := \frac{r}{r-s}.$$

Wanneer de eerste fase eindigt is de hoeveelheid zout $z_1(t_1) = Z_1 \stackrel{\text{M}}{=} V^\kappa W^{-\kappa} Z$.

- (b) Tijdens de tweede fase is het instroom- en uitstroomdebiet gelijk. Derhalve is $v_2(t) = V$.

De ogenblikkelijke verandering in de hoeveelheid zout is

$$\begin{aligned} z'_2(t) &= -r \frac{z_2(t)}{v_2(t)} + kr, \quad z_2(t_1) = Z_1 \\ &\xrightarrow{\text{M}} z_2(t) = e^{\frac{-\kappa(rt-st+V-W)}{V}} V^\kappa W^{-\kappa} Z - e^{\frac{-\kappa(rt-st+V-W)}{V}} V k + V k. \end{aligned}$$

(c) De hoeveelheid vloeistof is

$$v : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} v_1(t) & 0 \leq t \leq t_1 \\ v_2(t) & t_1 \leq t \end{cases}.$$

De hoeveelheid zout is

$$z : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} z_1(t) & 0 \leq t \leq t_1 \\ z_2(t) & t_1 \leq t \end{cases}.$$

(d) Na heel lang wachten is de concentratie in het vat dezelfde als de instroomconcentratie:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = kV.$$

(e) We zoeken het tijdstip $t_2 > t_1$ waarvoor $z(t_2) = Nz(t_1) = NZ_1$ met $N = 3$. De gevraagde duur is dan

$$t_2 - t_1 \stackrel{\text{M}}{=} \frac{V}{r} \ln \frac{ZV^\kappa - kVW^\kappa}{NZV^\kappa - kVW^\kappa}.$$

We controleren nog of het argument van \ln wel positief is. Er is gegeven dat $Z_1/V < k$ zodat

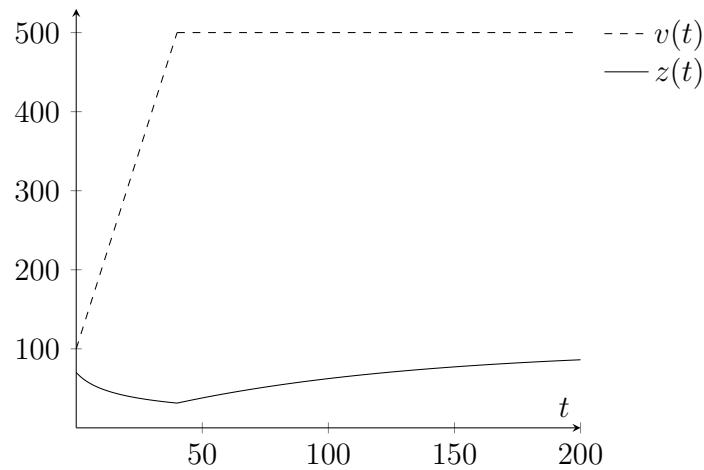
$$V^\kappa W^{-\kappa} Z < kV \implies ZV^\kappa - kVW^\kappa < 0.$$

Merk op dat fysisch $NZ_1 < kV$ dient te zijn, zie ook (d), zodat

$$NV^\kappa W^{-\kappa} Z < kV \implies NZV^\kappa - kVW^\kappa < 0.$$

Indien $NZ_1 \geq kV$ is de duur onmogelijk te bepalen.

(f) De grafiek.



```

> vglvloei:=D(v1)(t)=s-r;
> solv:=dsolve({vglvloei,v1(0)=W});
> v1:=unapply(rhs(solv),t);
> t1:=solve(v1(t)=V,t);
> vglzout:=D(z1)(t)=-r*z1(t)/v1(t);
> solz:=dsolve({vglzout,z1(0)=Z});
> z1:=unapply(rhs(solz),t);
> Z1:=simplify(z1(t1));
> vglzout:=D(z2)(t)=k*r-r*z2(t)/v2(t);
> solz:=dsolve({vglzout,z2(t1)=Z1});
> z2:=unapply(rhs(solz),t);
> v2:=t->V > v:=t->piecewise(t<0,0,0<=t and t< t1,v1(t),t1< t,v2(t)): v(t);
> z:=t->piecewise(t<0,0,0<=t and t< t1,z1(t),t1< t,z2(t)): z(t);
> limit(z(t),t=+infinity);
> t2:=solve(z2(t)=3*Z1,t); duur:=simplify(t2-t1);
> V:=500; W:=100; s:=15; r:=5; k:=0.2; Z:=70;
> v(t),z(t);
> evalf(3*Z1)<evalf(k*V),evalf(Z1)<evalf(k*V),evalf(duur);
> plot([v(t),z(t)],t=0..t2,color=[blue,red],legend=["vloeistof","zout"]);

```

Werkcollege 8

► Oefening 1

▼ Oefening 2

```
[> restart;
```

Vloeistoftank met een capaciteit van V liter bevat aanvankelijk W liter ($W < V$) water, waarin Z kilogram zout is opgelost.

FASE 1: IN s l/min (zuiver water) // UIT r l/min (homogeen), ($r < s$) // STOP als tank vol is (tijd t_1).

FASE 2: IN r l/min (zout water, k kg/l, k groter dan einde fase 1) // UIT r l/min

▼ Deel (a)

Bepaal op elk ogenblik van de eerste fase de hoeveelheid zout in de tank.

```
[> vloei1:= D(v1)(t)=s-r;
> sysv1:= {vloei1,v1(0)=W};
> dsolve(sysv1);
> v1:= unapply(rhs(%),t);
> t1:= solve(v1(t)=V,t);
> zout1:= D(z1)(t)=-r*z1(t)/v1(t);
> sysz1:= {zout1, z1(0)=Z};
> dsolve(sysz1);
> z1:=simplify(unapply(rhs(%),t));
> kappa:=r/(r-s);
```

Hoeveelheid zout op het einde van fase 1

```
[> Z1:=simplify(z1(t1));
```

▼ Deel (b)

Bepaal op elk ogenblik van de tweede fase de hoeveelheid zout in de tank.

```
[> v2:=t->V;
> zout2:= D(z2)(t) = -r*z2(t)/v2(t) + k*r;
> sysz2:= {zout2, z2(t1)=Z1};
> dsolve(sysz2);
> z2:= simplify(unapply(rhs(%),t));
```

▼ Deel (c)

Bepaal op elk tijdstip de hoeveelheid vloeistof $v(t)$ en de hoeveelheid zout $z(t)$ in de tank.

```
[> v:=t->piecewise(t<0,0, 0<=t and t<=t1,v1(t), v2(t));
[> z:=t->piecewise(t<0,0, 0<=t and t<=t1,z1(t), z2(t));
```

▼ Deel (d)

Voorspel de waarde van $\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t))$.

```
[> limit(z2(t),t=+infinity);
```

▼ Deel (e)

Hoelang moet de tweede fase duren om de hoeveelheid zout die in de tank aanwezig is na het beëindigen van de eerste fase te verdrievoudigen?

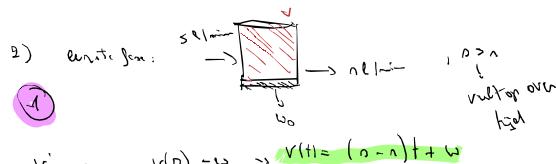
Zoek tijdstip $t_2 > t_1$ waarvoor $z(t_2) = Nz(t_1)$ met $N = 3$. De gevraagde duur is dan het verschil in tijd $t_2 - t_1$.

```
[> t2:= solve(z2(t)=3*Z1,t);
[> duur:=simplify(t2-t1);
```

▼ Deel (f)

Visualiseer het volledige verloop (
 $V = 500, W = 100, Z = 10, s = 15, r = 5, k = 0.2$)

```
[> V:=500;
  W:=100;
  Z:=10;
  s:=15;
  r:=5;
  k:=0.2;
[> v(t);
[> z(t);
[> evalf(3*Z1) < evalf(k*V);
[> evalf(Z1)<evalf(k*V);
[> evalf(duur);
[> evalf(t1);
[> plot([v(t),z(t)],t=0..200, color=[blue,red], legend=
  ["vloeistof","zout"]);
[> limit(z(t),t=+infinity);
  k*V;
```

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h, V(t) = \omega \Rightarrow V(t) = (\pi \cdot r^2) \cdot h + w$$

Optimal initial tank vol.: $V(t_0) = (\pi \cdot r^2) \cdot h_0 + w$

$$\Leftrightarrow t_0 = \frac{V(t_0) - w}{\pi \cdot r^2}$$

Regarding cost:

$$\textcircled{1} z^1(t) = -n \cdot \frac{z^1(t)}{v(t)}, z_1(0) = Z$$

$$\textcircled{2} \frac{z^1(t)}{z_1(t)} = -n \cdot \frac{z^1(t)}{v(t)} \Rightarrow \int \frac{1}{z_1(t)} dz_1 = -n \cdot \int \frac{1}{v(t)} dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{z_1(t)} dz_1 = -n \cdot \left[\frac{1}{v(t)} \right] dt$$

Using Maple:

$$z_1(t) = e^{C((n-n)t + w)}$$

$$\text{with } z(0) = Z \Rightarrow Z = e^C \cdot w$$

$$\Leftrightarrow C = Z \cdot \ln(n-n)$$

$$\text{then: } z_1(t) = Z \cdot w^{n-n} \cdot ((n-n)t + w)^{n-n} \quad \text{and } k = \frac{n}{n-n}$$

$$\textcircled{3} \text{ d}V: z_2'(t) = -\frac{n \cdot z_1(t)}{v(t)} + k \cdot n \quad \text{not containing}$$

$$\Leftrightarrow z_2(t) = z_2(t_0) \quad \text{without } k$$

we substitute in DV:

$$k \cdot n = z_2'(t) + n \cdot z_2(t)$$

homogeneous solution

$$z_2'(t) + n \cdot z_2(t) = 0 \Rightarrow z_2(t) = C \cdot e^{-\frac{n}{n-n} t}$$

particular

$$\text{with } z_2(t_0) = A \Rightarrow A = k \cdot V$$

Algorithm:

$$z_2(t) = C \cdot e^{-\frac{n}{n-n} t} + V \cdot k \quad \text{initial condition}$$

$$\Leftrightarrow C = (z_2(t_0) - V \cdot k) e^{\frac{n}{n-n} t}$$

$$\text{thus: } z_2(t) = [z_2(t_0) - V \cdot k \cdot e^{\frac{n}{n-n} t}] e^{-\frac{n}{n-n} t} + V \cdot k$$

$$\textcircled{4} \quad V: [0, \infty] \rightarrow \begin{cases} V_1(t): 0 \leq t \leq t_1 \\ V_2(t): t_1 \leq t \end{cases}$$

$$z: [0, \infty] \rightarrow \begin{cases} z_1(t): 0 \leq t \leq t_1 \\ z_2(t): t_1 \leq t \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad l: \underset{t \rightarrow +\infty}{\lim} z(t) = k \cdot V$$

We take $t_2 > t_1$, we know $z(t_2) = N \cdot z(t_1)$, with $N = 3$

$$N \cdot z_1(t_2) = [z_1(t_1) - V \cdot k \cdot e^{-\frac{n}{n-n} t_1}] e^{-\frac{n}{n-n} (t_2 - t_1)} + V \cdot k$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{n}{n-n} (t_2 - t_1)} = \frac{2V - k \cdot V \cdot e^{-\frac{n}{n-n} t_1}}{N \cdot V - k \cdot V \cdot e^{-\frac{n}{n-n} t_1}} \quad \text{and } k = \frac{V}{n-n}$$

$$t_2 - t_1 = -\frac{V}{n} \ln \left(\frac{2V - k \cdot V \cdot e^{-\frac{n}{n-n} t_1}}{N \cdot V - k \cdot V \cdot e^{-\frac{n}{n-n} t_1}} \right)$$

$\frac{V}{n}$ needs to be positive:

$$-2V + k \cdot V \cdot e^{-\frac{n}{n-n} t_1} > 0$$

$$-N \cdot V \cdot e^{-\frac{n}{n-n} t_1} + k \cdot V \cdot e^{-\frac{n}{n-n} t_1} > 0$$

so for $N > 2$, $k \cdot V$, $t_2 - t_1$ would negative, thus not

satisfy.

6) zie msp.

Huis 9

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sin((2m+1)\alpha)}{2m+1} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & ; 0 < \alpha < \pi \\ -\frac{\pi}{2} & ; -\pi < \alpha < 0 \end{cases}$$

Even terms (even) $a_m = 0$, odd harmonics $2m+1$

coefficients $\frac{1}{2m+1}$

for a periodic function, with period π :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} \cdot \sin((2m+1)x) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin((2m+1)x) \cdot dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cdot \sin((2m+1)x) \cdot dx + \int_{-\pi}^0 -\frac{1}{2} \cdot \sin((2m+1)x) \cdot dx \right) \\ b_m &= \frac{1}{2m+1} \end{aligned}$$

Figure 8.136: Exercise 1

```

> f := x → piecewise(0 < x and x < Pi, Pi/4, -Pi < x and x < 0, -Pi/4);

```

$$f := x \mapsto \begin{cases} \frac{\pi}{4} & 0 < x < \pi \\ -\frac{\pi}{4} & -\pi < x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

```

> b := n →  $\frac{1}{\text{Pi}} \cdot \text{int}(f(x) \cdot \sin((2 \cdot n + 1) \cdot x), x = -\text{Pi}.. \text{Pi})$ 

```

$$b := n \mapsto \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin((2 \cdot n + 1) \cdot x) dx}{\pi} \quad (2)$$

```

> b0 := b(0) b0 := 1

```

$$b0 := 1 \quad (3)$$

```

> b1 := b(1) b1 :=  $\frac{1}{3}$ 

```

$$b1 := \frac{1}{3} \quad (4)$$

```

> b2 := b(2) b2 :=  $\frac{1}{5}$ 

```

$$b2 := \frac{1}{5} \quad (5)$$

```

> # Hier zien we dus dan  $b(n) = 1:(2n+1)$ 
> # Construct the Fourier series
fourier_series := n → Sum(b(n) * sin((2 * n + 1) * x), n = 0 .. infinity);

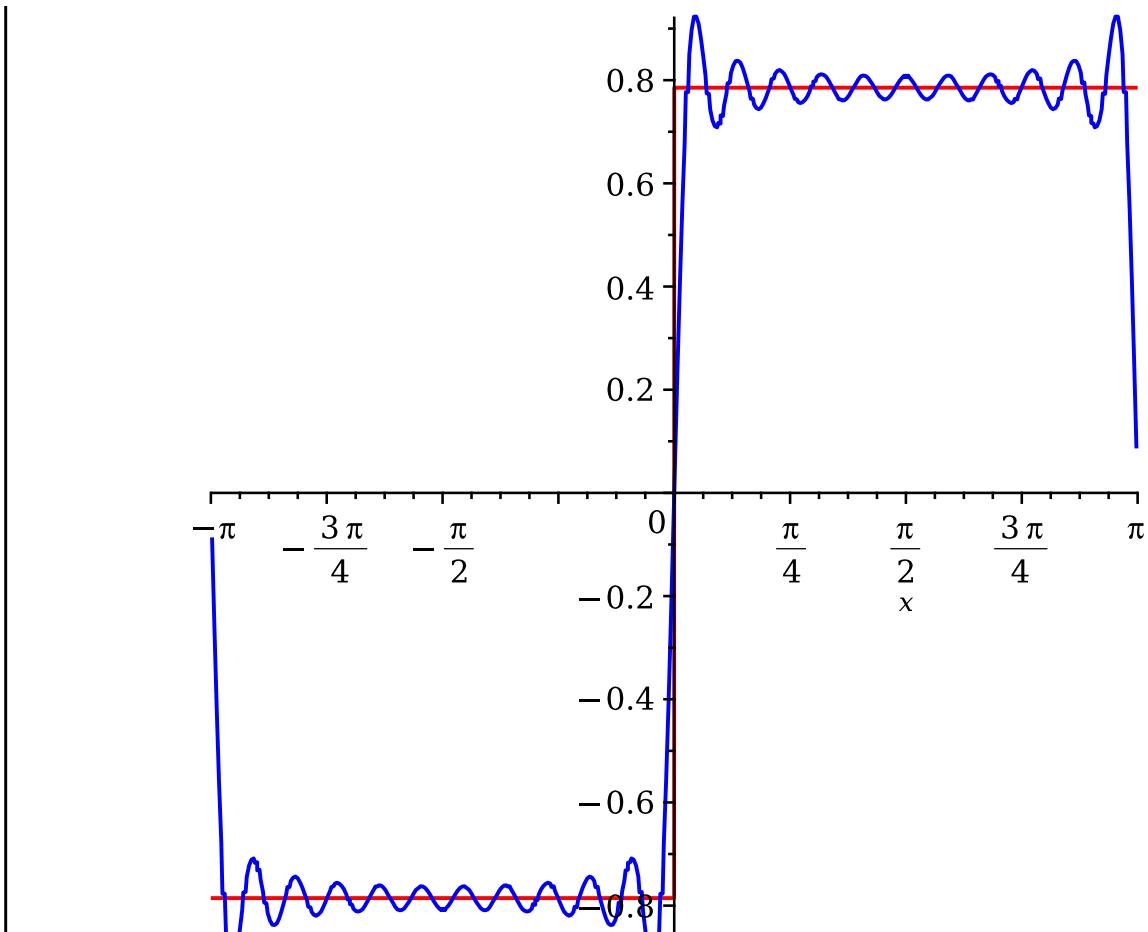
```

$$\text{fourier_series} := n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b(n) \cdot \sin((2 \cdot n + 1) \cdot x) \quad (6)$$

```

> # Show convergence in Pi:4
> plot([f(x), add(b(n) * sin((2 * n + 1) * x), n = 0 .. 10)], x = -Pi .. Pi, color = [red, blue]);

```



> $\text{evalf}\left(\frac{\text{Pi}}{4}\right)$

0.7853981635

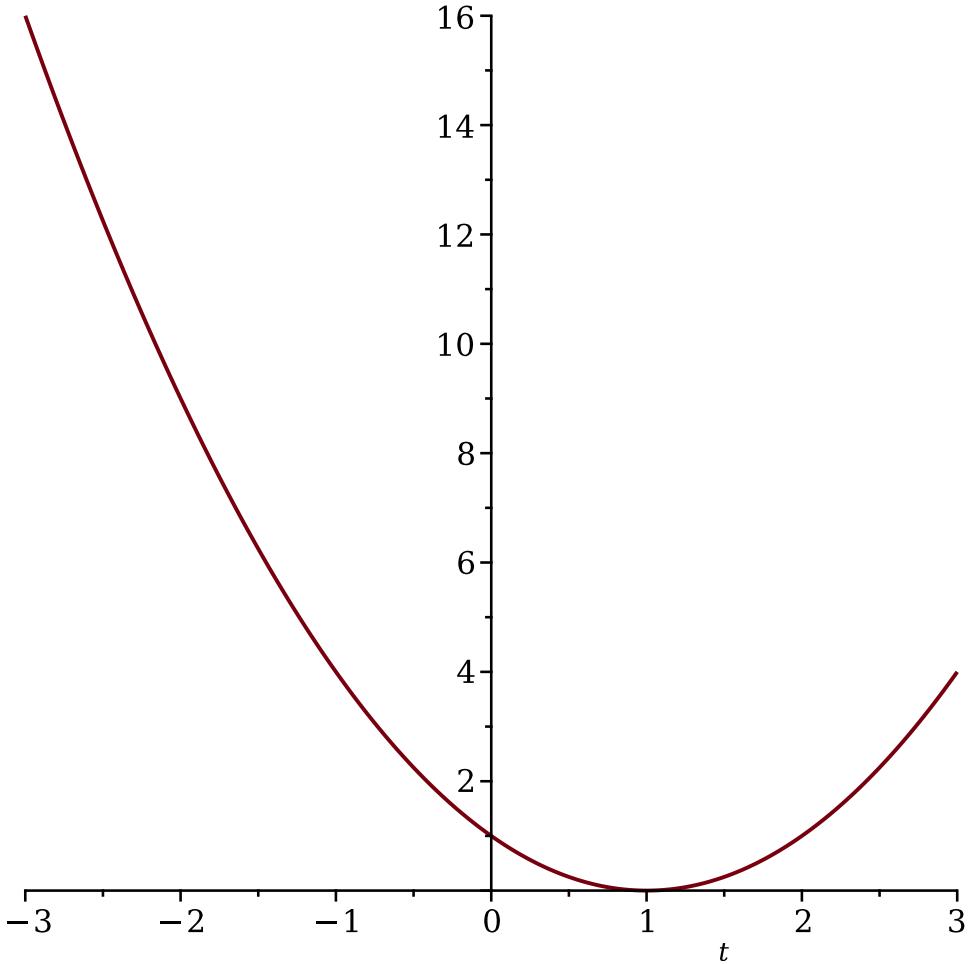
(7)

> #Hupa you see it is correct.


```

> restart: with(plots):
> f := t→(t - 1)^2:
> plot(f(t), t = -3..3)

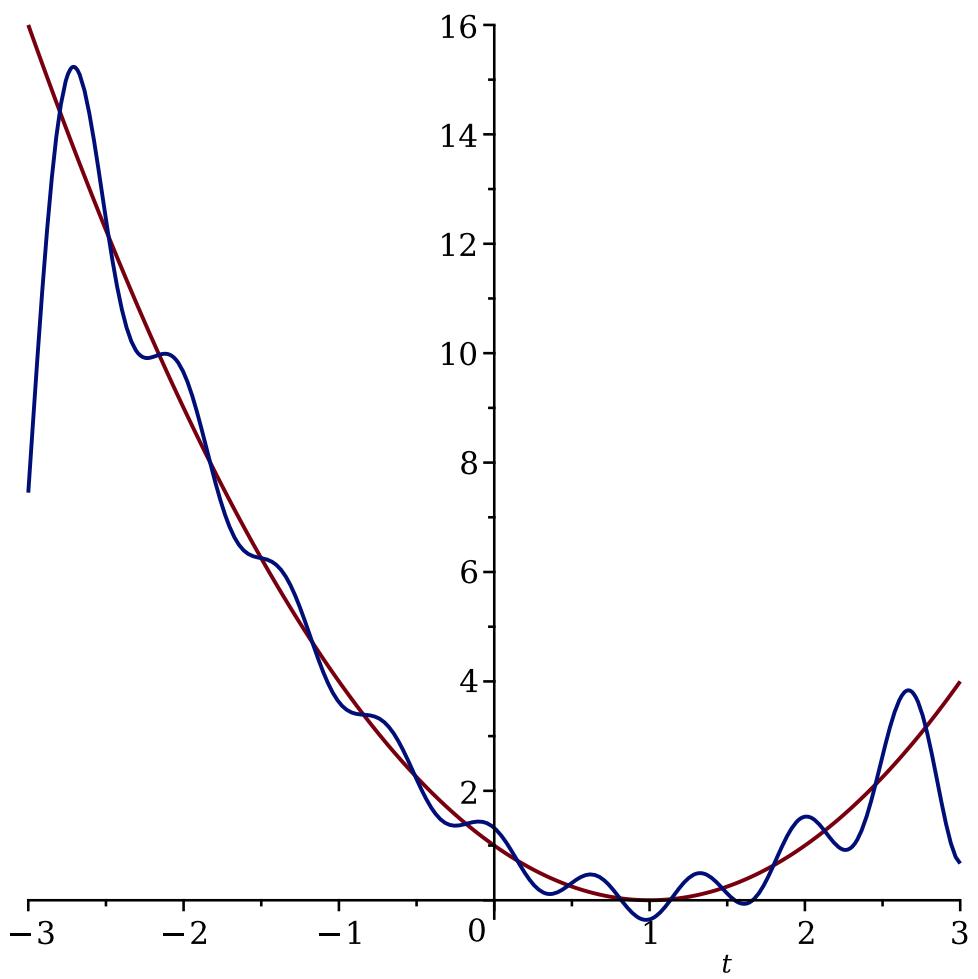
```



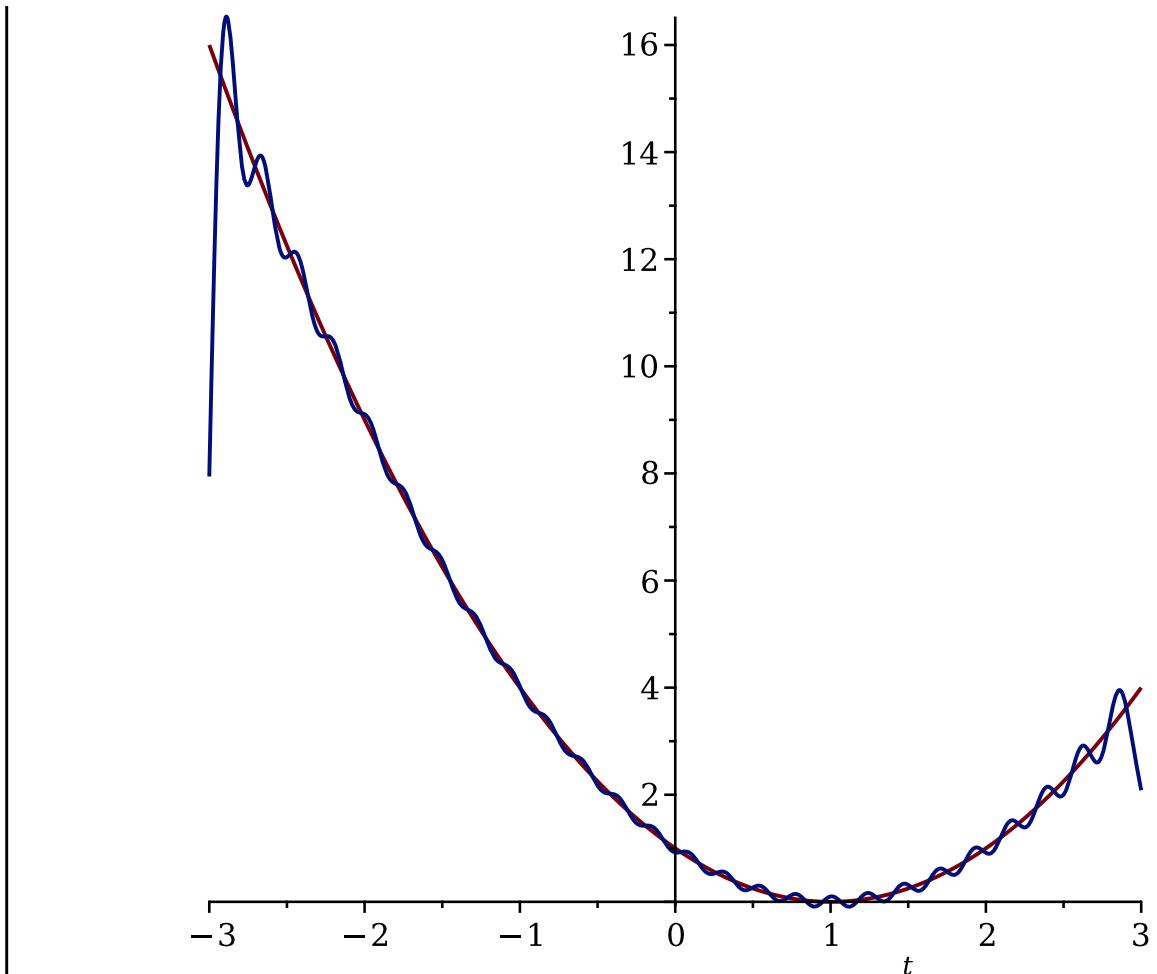
```

> # We need to calculate both a_n and b_n
> a_n := n→1/Pi · int(f(t)·cos(n·t), t = -3..3):
> b_n := n→1/Pi · int(f(t)·sin(n·t), t = -3..3):
> f_approx := a_n(0)/2 + add(b_n(n)·sin(n·t) + a_n(n)·cos(n·t), n = 1..9):
> plot([f(t), f_approx], t = -3..3)

```



```
> f_approx :=  $\frac{a_n(0)}{2} + \text{add}(b_n(n) \cdot \sin(n \cdot t) + a_n(n) \cdot \cos(n \cdot t), n = 1..27) :$ 
> \text{plot}([f(t), f_{\text{approx}}], t = -3..3)
```



► # We can see the divergence in the end points (gibbs)

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right) \quad , \quad g(t) = \frac{f\left(\frac{t}{2}\right) + f\left(\frac{t}{2} + \pi\right)}{2} \\
 f\left(\frac{t}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{2}\frac{t}{2}\right) \quad , \quad f\left(\frac{t}{2} + \pi\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos\left(k\left(\frac{t}{2} + \pi\right)\right) \\
 g(t) &= \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right) + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos\left(k\left(\frac{t}{2} + \pi\right)\right)}{2} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right) + \cos\left(k\frac{t}{2} + k\pi\right) \right) / 2
 \end{aligned}$$

we note that $\cos(k\pi) = (-1)^k$, $\sin(k\pi) = 0$ and $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$, $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$.

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right) \cdot \left(1 + (-1)^k \right) / 2 \\
 \text{if even: } g(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} \cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right) \\
 \text{if odd: } g(t) &= 0
 \end{aligned}$$

Figure 8.137: Exercise 3

4) **i)** erster Fourierreihe: ungerade Funktion:

$$\text{dann } f(-x) = -f(x) \text{ für } x \in [0, 1]$$

Original Funktion auf $[0, 1]$

\hookrightarrow auf $[-1, 0]$

\Rightarrow cos-Funktionen ragen aus. no $f_f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \cos(n \cdot t)$

ii) periodisch nahe Schierlauer, gezeigt $f(-x) = f(x)$

A: punktweise Konvergenz: (fiktiv) unregelmäßig pointwise to the Funktion at every point in the interval.

B: Discontinuation and Gibbs phenomenon:

for odd: discontinuities happen at: 1, 3, 5, ...

for even: 2, 4, ...

C: uniform convergence:

if the function is pointwise smooth and continuous, it converges uniformly in each point except for the discontinuation

Figure 8.138: Exercise 4

die Formel ist: $\tilde{\alpha}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m \cdot e^{i \frac{2\pi m k}{N}}$

Proof: $\tilde{\alpha}_{N-k} = \tilde{\alpha}_k$ als gezeigt hat: $\alpha_n = \alpha^*$

[wir wollen zeigen: $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \cdot e^{i \frac{2\pi m k}{N}}$

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{N-k} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{\alpha}_m \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi m}{N} (N-k)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{\alpha}_m \cdot \exp\left(i \frac{-2\pi m}{N} + i \frac{2\pi m k}{N}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{\alpha}_m \cdot \exp\left(i \frac{2\pi m k}{N}\right) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Figure 8.139: Exercise 5

$$\left(\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2 \right) \text{ to proof.}$$

$$\text{with } f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{imt}$$

$$c_m \text{ given by } \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-imt} dt \quad \text{conjugate}$$

$$1) |f(t)|^2 = f(t) \cdot \overline{f(t)}$$

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{imt}, \quad \overline{f(t)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m^* e^{-imt}$$

$$|f(t)|^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_m c_n^* e^{i(m-n)t}$$

$$2) \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m c_n^* e^{i(m-n)t} dt$$

, omdat we kunnen tegen m en n omwisselen!

$$\Rightarrow \sum_m \sum_n c_m c_n^* \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} dt$$

thus each gathering term

$$m = n$$

$$\Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2$$

Figure 8.140: Exercise 6

The odd function:

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ -f(-x), & x \notin [-\pi, 0] \end{cases}$$

Fourier series:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(mx) \cdot dx$$

$$\text{and } b_m = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \sin(mx) \cdot dx$$

$$\text{and } f(x) = x^3$$

$$b_m = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^3 \cdot f(x) \cdot \sin(mx) \cdot dx$$

Stability region:

A) en is pointwise convergence (met niet in $[-\pi, \pi]$)

B) at disjoint intervals, the series converges to the average of the left-hand

and right-hand limits of the function.

C) $f(x) = x^3$ is continuous, so it converges between $[-\pi, \pi]$

Figure 8.141: Exercise 7

```

> # Define the function
f := x → x^3:

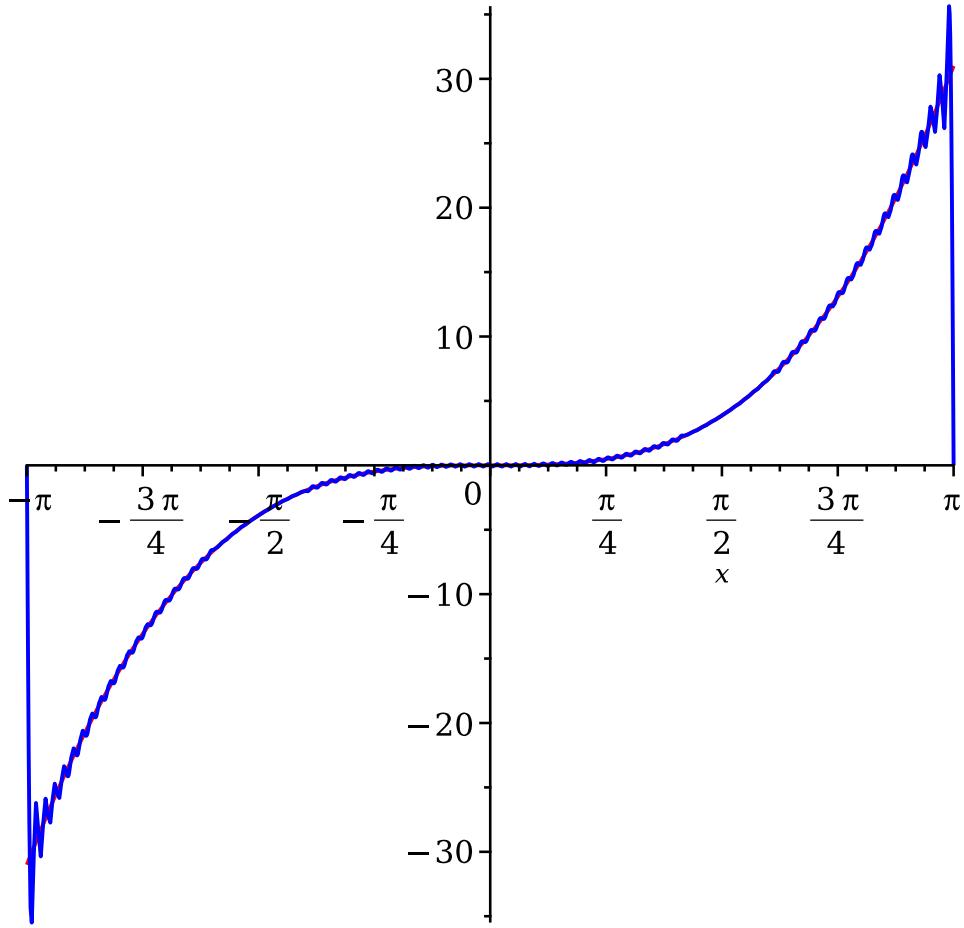
# Compute the Fourier sine coefficients
b := n → (2/Pi) * int(f(x) * sin(n*x), x = 0 .. Pi):

# Truncate the sine series to N terms
N := 100: # Change N for more terms
f_sine := sum(b(n) * sin(n*x), n = 1 .. N):

# Plot the original function and the sine series approximation
plot([f(x), f_sine], x = -Pi .. Pi, color = [red, blue], title
      = "Fourier Sine Series Approximation");

```

Fourier Sine Series Approximation



>

Exercise 8

Starting with the definition of \tilde{X}_k :

$$\tilde{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{i2\pi kn}{N}}.$$

Using the symmetry property $x_n = x_{N-n-1}$, we can substitute:

$$\tilde{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_{N-n-1} e^{-\frac{i2\pi kn}{N}}.$$

Let us make a change of variables. Let $m = N - n - 1$. Then as n goes from 0 to $N - 1$, m goes from $N - 1$ to 0. To keep the limits in ascending order, we can reverse the order of summation:

$$\tilde{X}_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-\frac{i2\pi k(N-m-1)}{N}}.$$

Simplify the exponent:

$$\begin{aligned} -\frac{i2\pi k(N-m-1)}{N} &= -\frac{i2\pi kN}{N} + \frac{i2\pi km}{N} + \frac{i2\pi k}{N} \\ &= -i2\pi k + \frac{i2\pi km}{N} + \frac{i2\pi k}{N}. \end{aligned}$$

Since $e^{-i2\pi k} = e^{-i2\pi k} = 1$ (because $e^{-i2\pi k} = e^{-i2\pi k \bmod 2\pi} = 1$), we have:

$$e^{-i2\pi k} = 1.$$

Therefore, the exponential term simplifies to:

$$e^{-\frac{i2\pi k(N-m-1)}{N}} = e^{\frac{i2\pi km}{N}} e^{\frac{i2\pi k}{N}}.$$

Pulling out constants from the summation:

$$\tilde{X}_k = e^{\frac{i2\pi k}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{\frac{i2\pi km}{N}}.$$

Notice that:

$$e^{\frac{i2\pi km}{N}} = e^{-\frac{i2\pi(-k)m}{N}} = e^{-\frac{i2\pi(N-k)m}{N}}.$$

But since $N - k$ is equivalent to $-k \bmod N$, we can write:

$$\tilde{X}_k = e^{\frac{i2\pi k}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-\frac{i2\pi(N-k)m}{N}}.$$

Recognize that the sum is the DFT of x_n at index $N - k$:

$$\tilde{X}_{N-k} = \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-\frac{i2\pi(N-k)m}{N}}.$$

Therefore:

$$\tilde{X}_k = e^{\frac{i2\pi k}{N}} \tilde{X}_{N-k}.$$

We have shown that:

$$\tilde{X}_k = e^{\frac{i2\pi k}{N}} \tilde{X}_{N-k}.$$

This completes the proof.

$$\begin{aligned}
 \alpha_k &= \begin{cases} e^{i\theta}, & k=1 \\ \tilde{e}^{i\theta}, & k=N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \text{and } k &= 0, 1, \dots, N-1 \\
 \alpha_m &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k e^{\frac{i2\pi k m}{N}} \\
 \alpha_m &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\alpha_1 \cdot e^{\frac{i2\pi 1 \cdot m}{N}} + \alpha_{N-1} \cdot e^{\frac{i2\pi (N-1) \cdot m}{N}} \right) \\
 \text{and } \alpha_1 &= e^{i\theta}, \quad \alpha_{N-1} = e^{-i\theta} \\
 &\quad = e^{\frac{-i2\pi m}{N}} \\
 \Rightarrow \alpha_m &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(e^{i\theta} \cdot e^{\frac{i2\pi 1 \cdot m}{N}} + e^{-i\theta} \cdot e^{\frac{i2\pi (N-1) \cdot m}{N}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(e^{i\theta} \cdot e^{\frac{i2\pi m}{N}} + e^{-i\theta} \cdot e^{\frac{-i2\pi m}{N}} \right) = (\cos \theta \cdot 2) \\
 &\quad \text{want } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\
 &= \frac{2 \cos \left(\frac{2\pi m}{N} + \theta \right)}{\sqrt{N}}
 \end{aligned}$$

Figure 8.142: Exercise 9

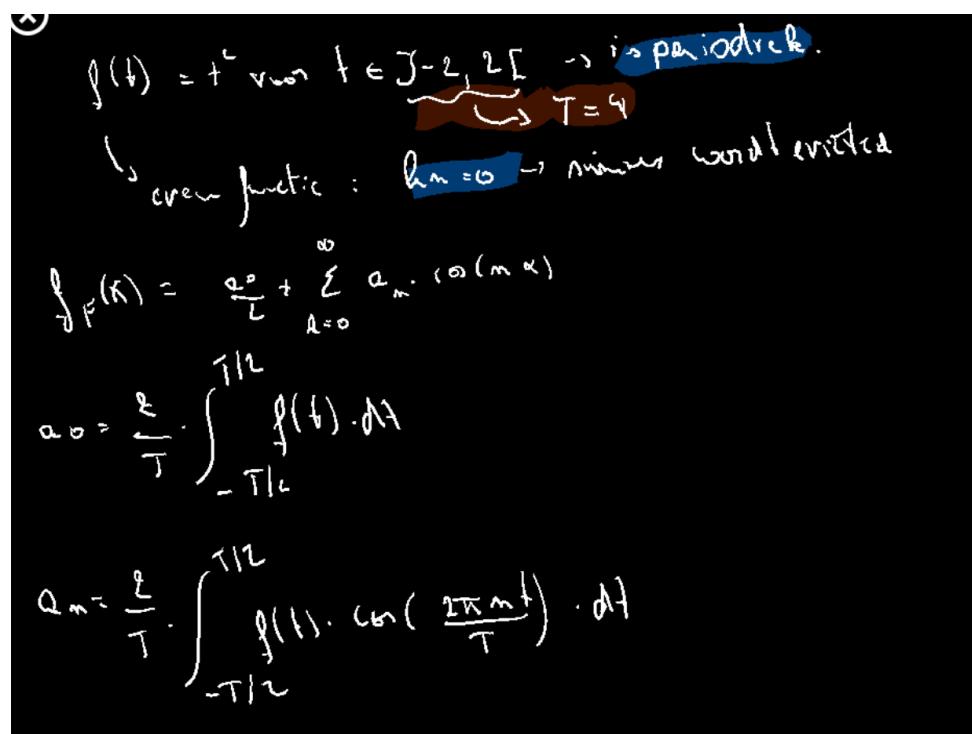


Figure 8.143: Exercise 1

2 signals:

$$\alpha_m = \cos\left(2\pi \cdot \frac{f_1}{f_s} \cdot m\right), \quad \alpha'_m = \cos\left(2\pi \cdot \frac{f_1'}{f_s} \cdot m\right)$$

- we need to calculate f' mod f_s in aliasing problem

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{f_s} &= \frac{f_1'}{f_s} + m \quad \text{modulo}, \\ \frac{f_1}{f_s} &\approx -\left(\frac{f_1'}{f_s} + m\right) \end{aligned}$$

, odd and red negative } get reduced to non-negative.

Case 1: $\frac{f_1}{f_s} = \frac{f_1'}{f_s} + m \Leftrightarrow f_1 = f_1' + m \cdot f_s$ aliasing?

Case 2: $\frac{f_1}{f_s} = -\left(\frac{f_1'}{f_s} + m\right) \Leftrightarrow f_1 = -f_1' - m \cdot f_s$, with $m = -1$

$$(\Rightarrow m = -1 \Rightarrow f_1 - f_1' = f_1)$$

$$\boxed{\text{thus: } \frac{f_1}{2} < f_1' < \frac{f_1}{2}}$$

Figure 8.144: Exercise 2

Oefening: Discrete fourier transform

```
[> restart: with(plots):with(DiscreteTransforms):
```

Analytische uitdrukking voor

```
[> part := (k, N, II) -> limit((exp(Pi*I*(l-k))/exp(Pi/N*I*(l-k))) * (sin(Pi*(l-k))/sin(Pi/N*(l-k))) + (exp(-Pi*I*(l+k))/exp(-Pi/N*I*(l+k))) * (sin(Pi*(l+k))/sin(Pi/N*(l+k))), l=II):  
> X_an := (k, N, II) -> evalf(1/(2*sqrt(N))*part(k, N, II)):
```

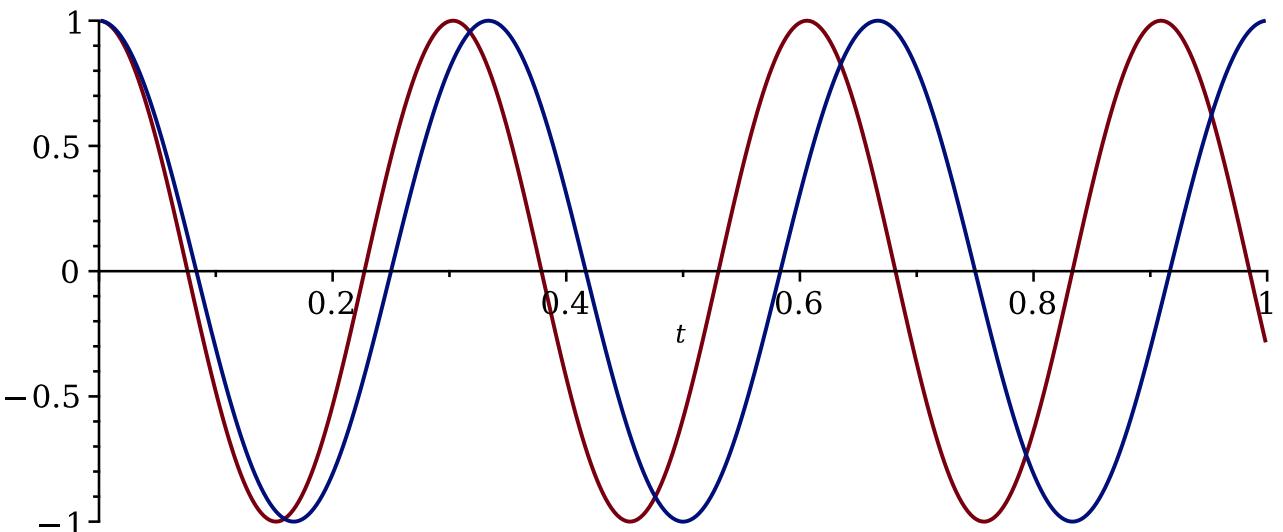
Periodieke functie

We zullen discrete samples nemen van de cosinus functie met een bepaalde frequentie f

```
[> T := 1:  
> g :=(t,f) -> cos(2*Pi*f*t);  
g := (t, f)  $\mapsto \cos(2\pi f t)$  (1)
```

We nemen 2 frequenties f1 en f2

```
[> f1 := 3/T;  
f2 := 3.3/T;  
f1 := 3  
f2 := 3.3  
> plot({g(t,f1), g(t,f2)},t=0..T); (2)
```



Sampling: N samples

We definieren het aantal samples, de sampling frequentie en sampling periode:

```
[> N := 20;  
fS := N/T;  
dt := 1/fS;  
N := 20  
fS := 20
```

$$dt := \frac{1}{20} \quad (3)$$

We steken de discrete sample punten in een lijst

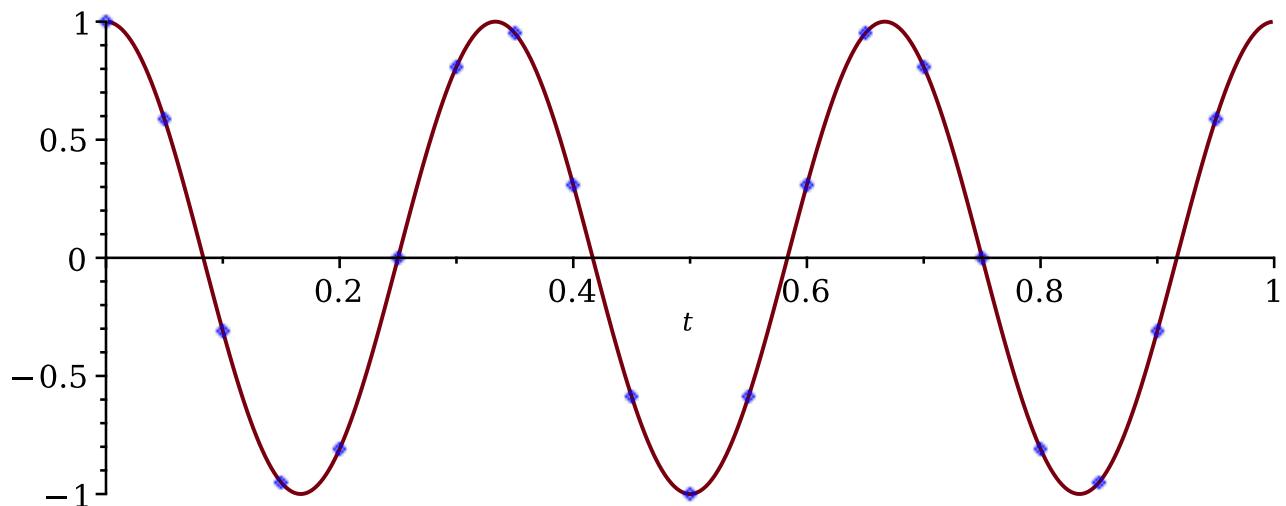
```
> samples1 := [seq(g(i*dt, f1), i=0..N-1)];
```

En bepalen de **discrete fourier transform** van de discrete datapunten

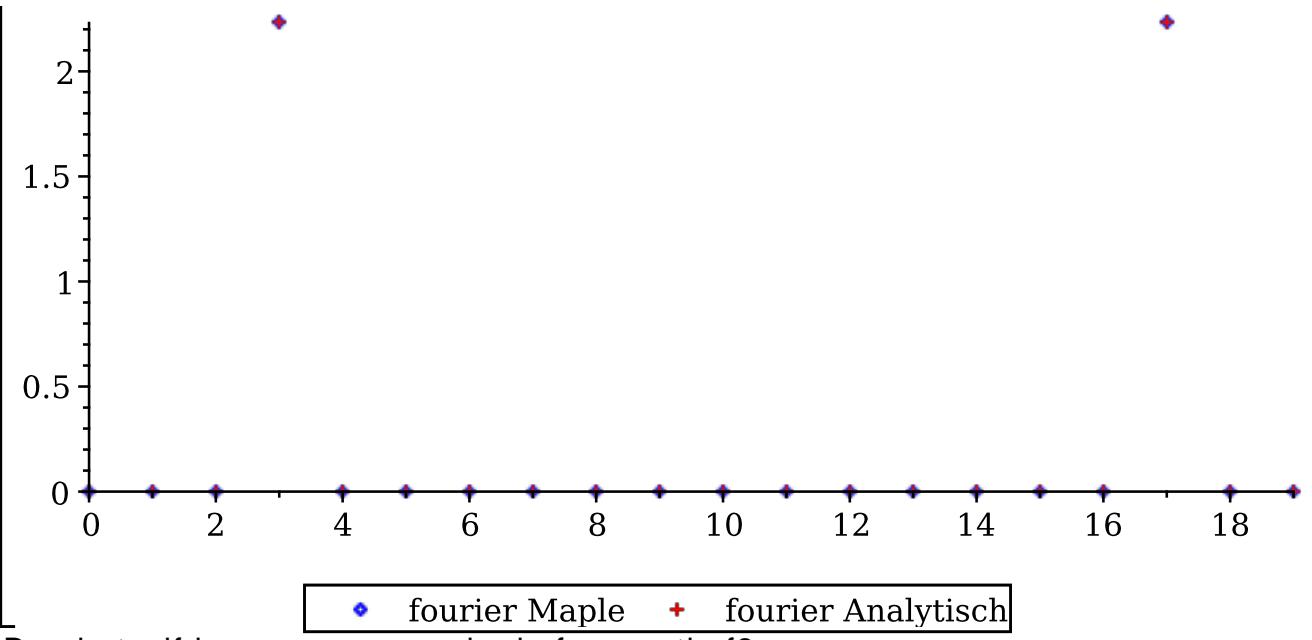
```
> F1      := FourierTransform(Vector(samples1));
> F1_an  := [seq(X_an(k, N, 3), k=0..N-1)];
```

Visualisatie:

```
> samplesplot1 := pointplot({seq([i*dt-dt,samples1[i]],i=1..N)},
  color=blue);
> plot1       := plot(g(t,f1),t=0..1);
display(plot1, samplesplot1 );
```

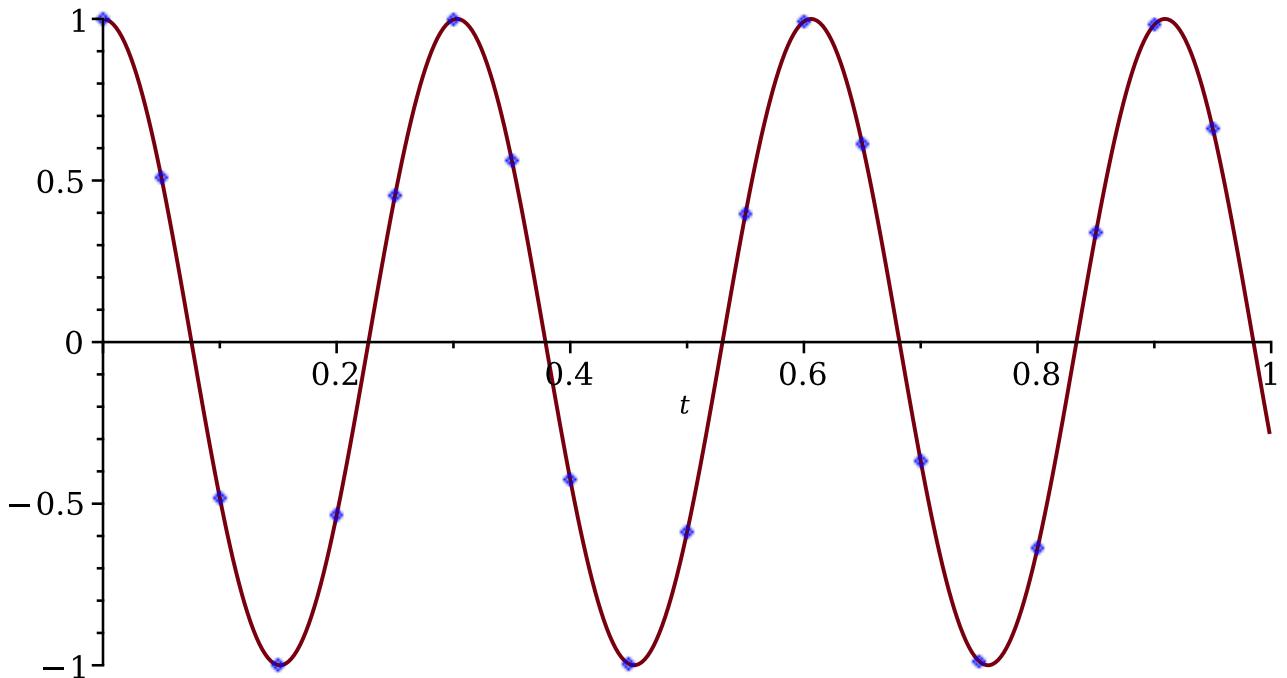


```
> fourierplot1  := pointplot({seq([i-1,abs(F1[i])],i=1..N)},
  color=blue ,legend="fourier Maple");
> fourier_an_plot1 := pointplot({seq([i-1,abs(F1_an[i])],i=1..N)},
  color=red, legend="fourier Analytisch",symbol=cross);
display(fourierplot1, fourier_an_plot1);
```



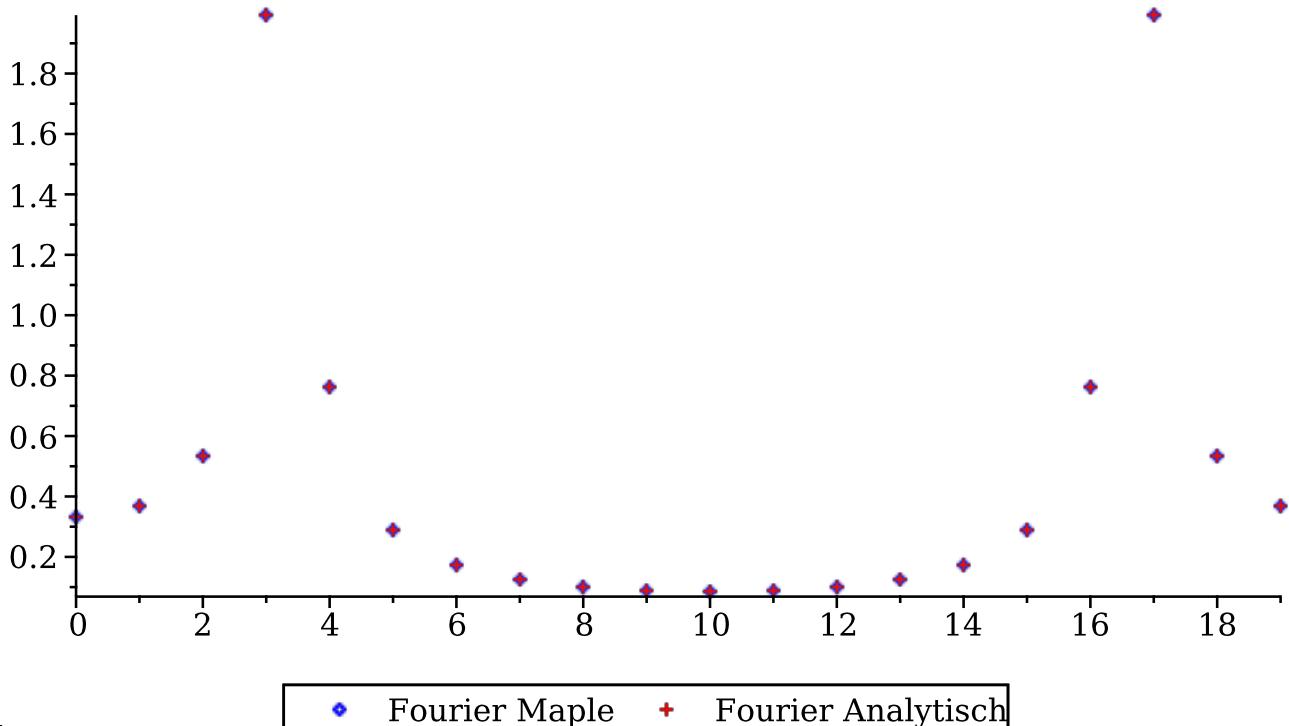
Doe hetzelfde voor een sample de frequentie f2

```
> samples2 := [seq(g(i*dt, f2), i=0..N-1)]:
> F2 := FourierTransform(Vector(samples2)):
> F2analytic := [seq(X_an(k, N, 3.3), k=0..N-1)]:
> samplesplot2 := pointplot({seq([i*dt-dt,samples2[i]],i=1..N)}, color=blue):
plot2 := plot(g(t,f2),t=0..1):
display(plot2, samplesplot2);
```



```
> fourierplot2 := pointplot({seq([i-1,abs(F2[i])],i=1..N)}, color=blue, legend="Fourier Maple"):
fourier_an_plot2 := pointplot({seq([i-1,abs(F2analytic[i])],i=1..
```

```
N}),color=red, legend="Fourier Analytisch",symbol=cross):
display(fourierplot2, fourier_an_plot2);
```



Aliasing

Neem nu de frequentie $f_3 = 12.1/T$, groter dan de nyquist frequentie: $f_N = f_S/2$

```
> fN:=fS/2;
fN := 10
(4)
```

```
> f3 := 12.1/T;
f3 := 12.1
(5)
```

```
> samples3 := [seq(g(i*dt,f3), i=0..N-1)]:
samples_alias := [seq(g(i*dt,fS-f3), i=0..N-1)]:
```

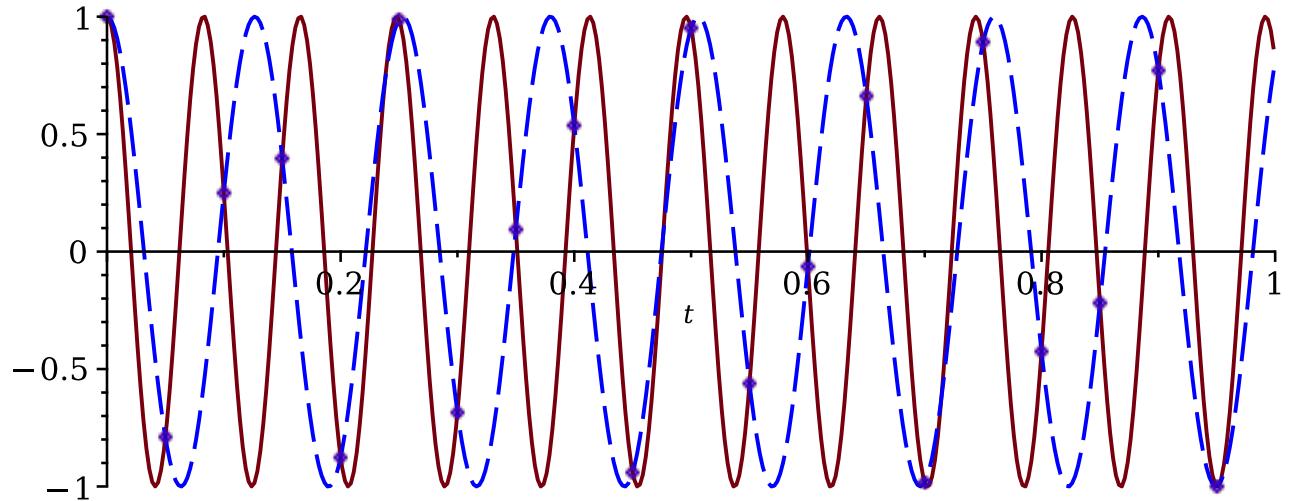
En bepalen de **discrete fourier transform** van de discrete datapunten

```
> F3 := FourierTransform(Vector(samples3)):
> Falias := FourierTransform(Vector(samples_alias)):
```

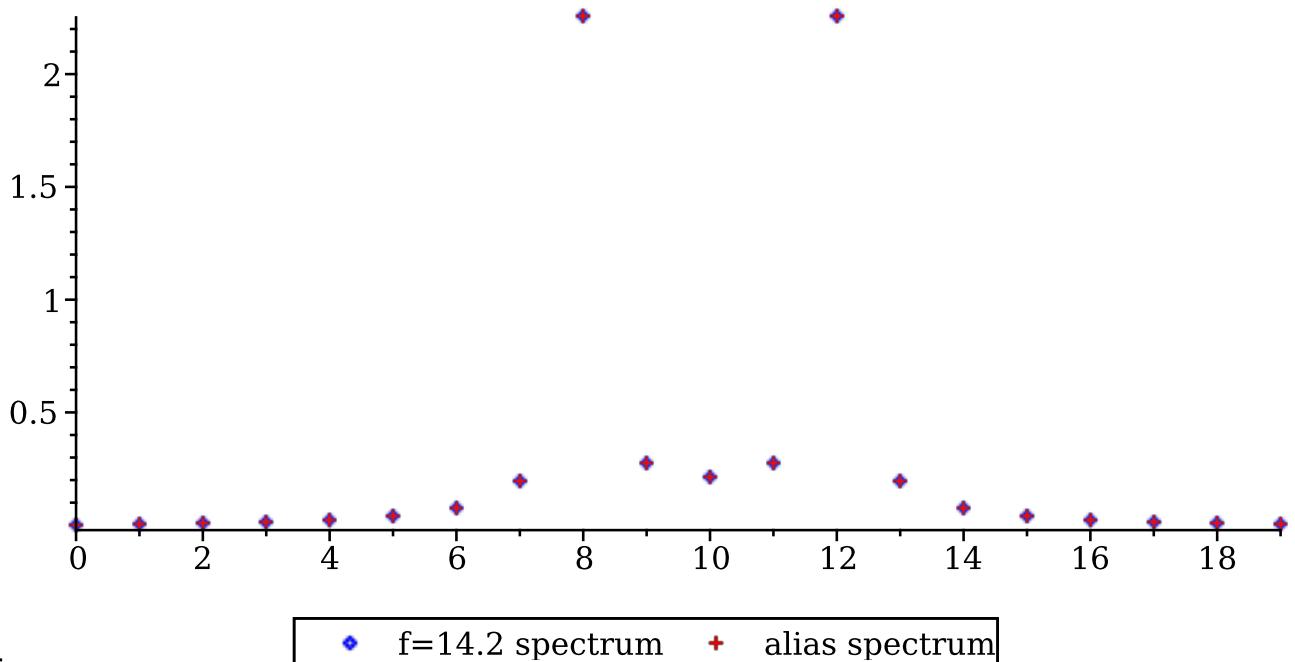
Visualisatie:

```
>
samples_alias_plot := pointplot({seq([i*dt-dt,samples3[i]],i=1..N)},color=blue):
samples_plot := pointplot({seq([i*dt-dt,samples_alias[i]],i=1..N)},color=red):
plot3 := plot(g(t,f3),t=0..1):
plotalias := plot(g(t,fS-f3),t=0..1, color=blue,
linestyle="dash"):
```

```
display(plot3 ,plotalias, samples_plot, samples_alias_plot);
```



```
> spec1 := pointplot({seq([i-1,abs(F3[i])],i=1..N)}, color=blue, legend="f=14.2 spectrum");
aliaspec := pointplot({seq([i-1,abs(Falias[i])],i=1..N)},color=red, legend="alias spectrum",symbol=cross);
display(spec1, aliaspec);
```



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x} = \begin{cases} \frac{1}{2}(T-x) & \text{for } 0 < x \leq T \\ -\frac{1}{2}(T-x) & \text{for } -T \leq x < 0 \end{cases} \quad T \in [0, \pi]$$

↳ von rechts abwärts a_m zu ∞

$$b_m = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2\pi}t\right) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi}}_{0} (T-t) \cdot \sin(m t) dt = \frac{1}{m}, \quad b_0 = 0$$

Figure 8.145: Exercise 4

```
[> restart:  
=> b := simplify(  $\frac{1}{\text{Pi}} \cdot \text{int}((\text{Pi} - x) \cdot \sin(n \cdot x), x = 0 .. \text{Pi})$  assuming (n, posint) )  
=>  $b := \frac{1}{n}$  (1)
```

$f(t)$ is odd, thus $a_m = 0$)

Wanneer we now $x=1$ zet is b_m non zero want odd indices.

$$\text{dus: } b_{2m+1} \neq 0$$

$$b_{2m+1} \neq 0$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \cdot \sin\left(\frac{(2n+1)\pi \cdot t}{T}\right)$$

Naar maken we $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_{2n+1}$ tekenen.

$$1) t=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n+1} \cdot \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{T}\right) = (-1)^m$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n+1} \cdot \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n+1} \cdot (-1)^m \text{ dit van } f(1) \text{ dus}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n+1} \cdot (-1)^m = 1$$

Figure 8.146: Exercise 5

Bord 9

$$f(t) = \frac{t}{\pi}, \quad]-\pi, \pi[\quad , \quad T = 2\pi$$

Definieer: $f_0(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$

met $a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) \cdot dt$

en $b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(nt) \cdot dt$

Onderstaande $\Rightarrow a_n = 0$

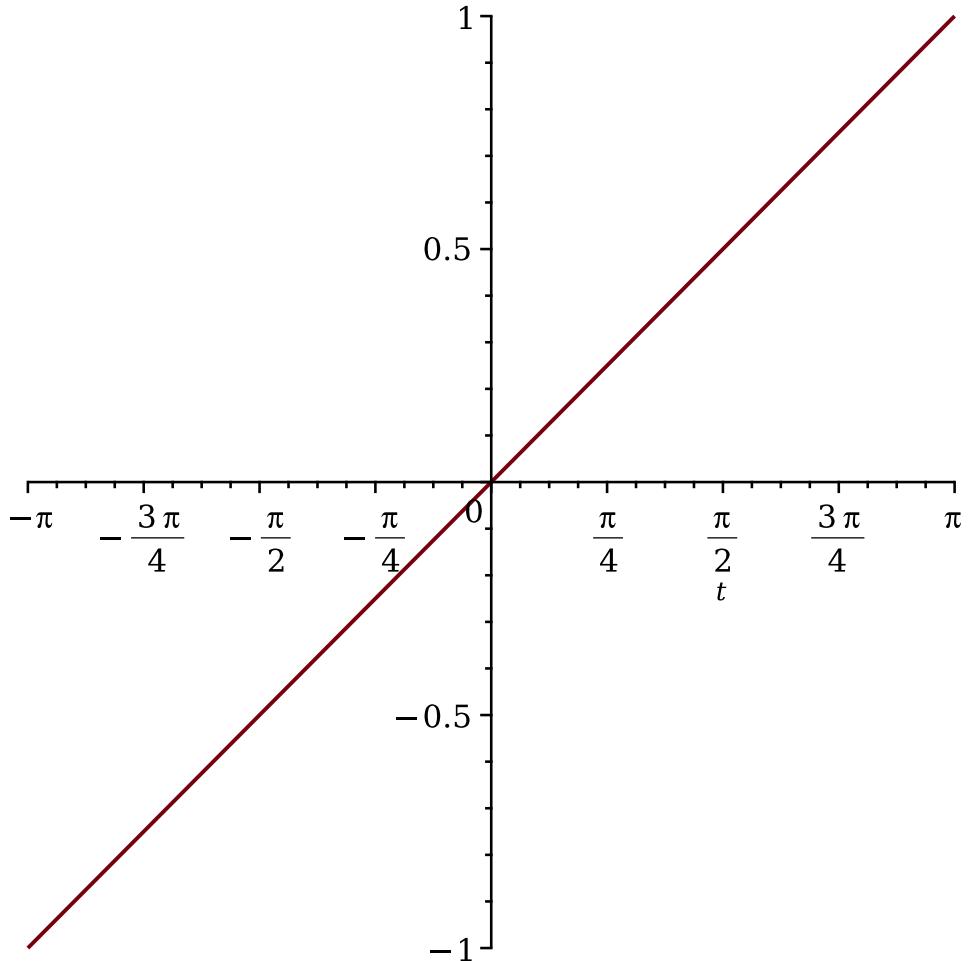
The rest is Maple

Figure 8.147: Exercise 1

```

> restart: with(plots):
> f := t-> $\frac{t}{\text{Pi}}$ :
> plot(f(t), t = -Pi..Pi)

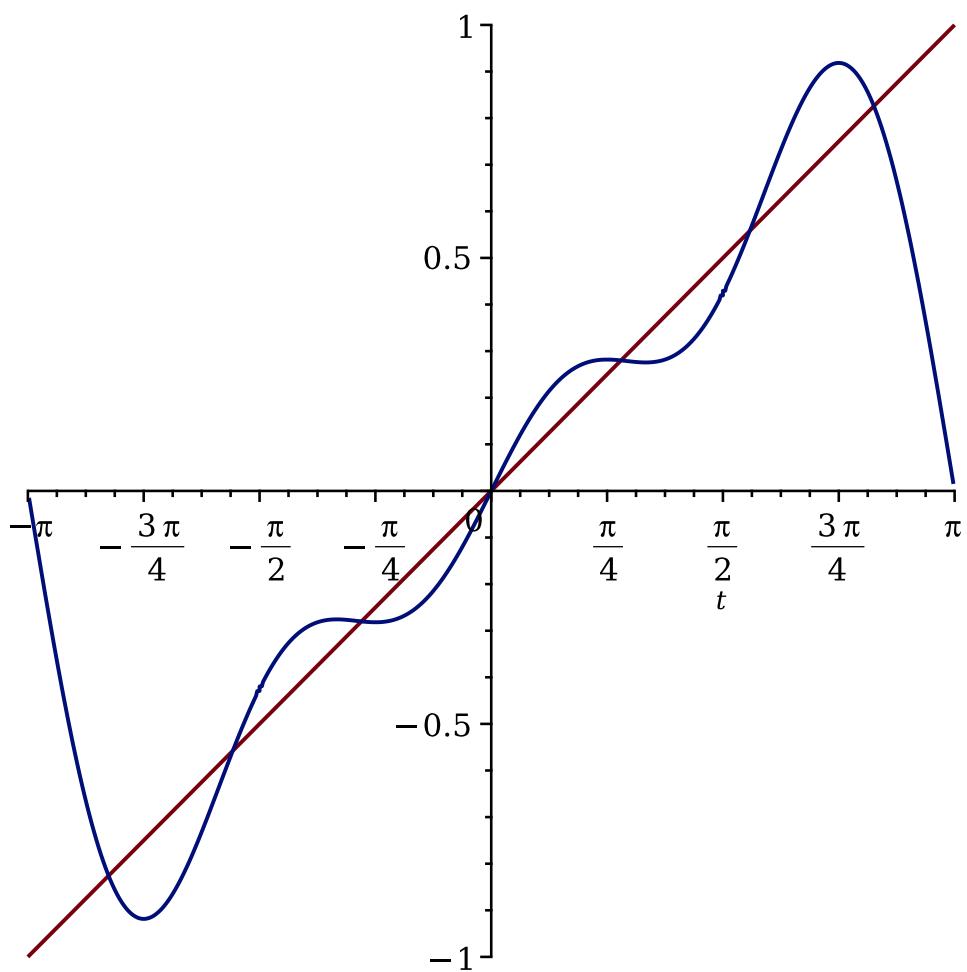
```



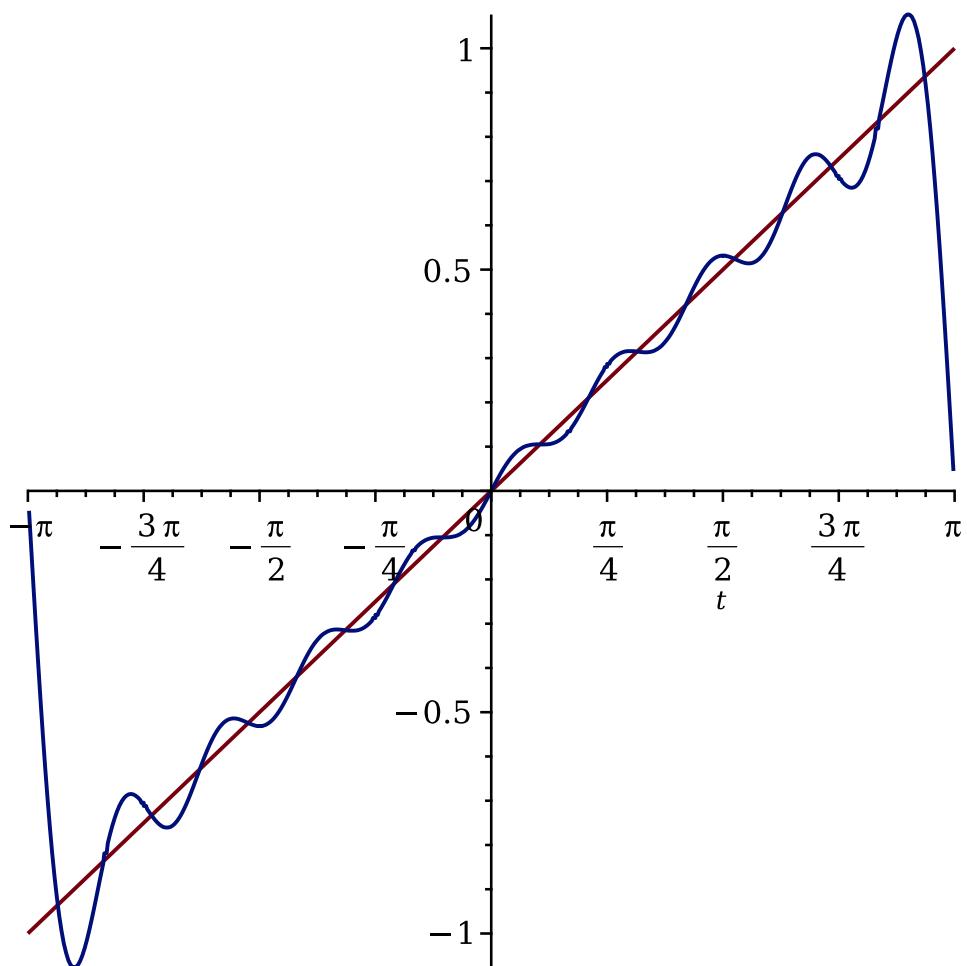
```

> # Odd function! So  $a_n = 0$ 
b := n->simplify( $\left(\frac{1}{\text{Pi}} \cdot \text{int}(f(t) \cdot \sin(n \cdot t), t = -\text{Pi}..\text{Pi})\right)$ ):
> N := 3: # Number of terms
f_approx := eval(add(b(n)*sin(n*t), n = 1 .. N)):
> plot([f(t), f_approx], t = -Pi..Pi)

```



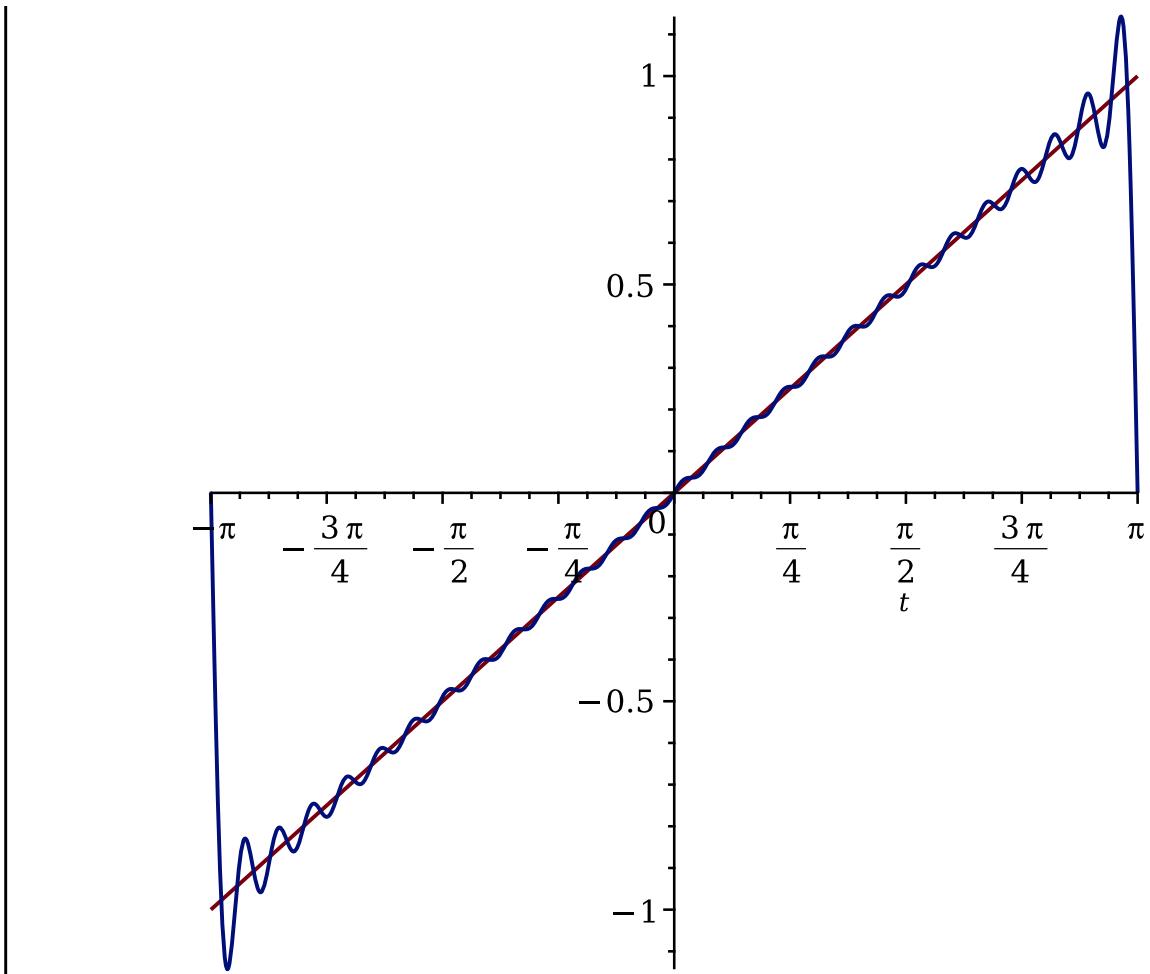
```
> N := 9 : # Number of terms  
f_approx := eval(add(b(n)*sin(n*t), n = 1 .. N)) :  
  
> plot([f(t), f_approx], t = -Pi..Pi)
```



```

> N := 27 : # Number of terms
f_approx := eval(add(b(n)*sin(n*t), n = 1 .. N)) :
> plot([f(t), f_approx], t = -Pi..Pi)

```



► # We see that the higher N , the better the approximation, but on the edge points Pi and $-\text{Pi}$ we diverge, this is the law of Gibbs

$$f_F(t) = (t-a)^2 + 1, \quad t \in [0, 1]$$

a) door te hanteren wortels voor dat er een sprongpunkt ontstaat.

Door stelling c zal de reeks convergeren naar het gemiddelde van linker / rechterlimiet in de sprongpunten. We verwachten Gibbs in de randpunten.

b) opties kunnen we niet afleiden, dus A en B gelden. (elkekeuze)

c) alleen geldt
(zie bovenstaande figuur)

Figure 8.148: Exercise 2

Wiskundige modellering in de ingenieurswetenschappen: bordoefeningenles 9

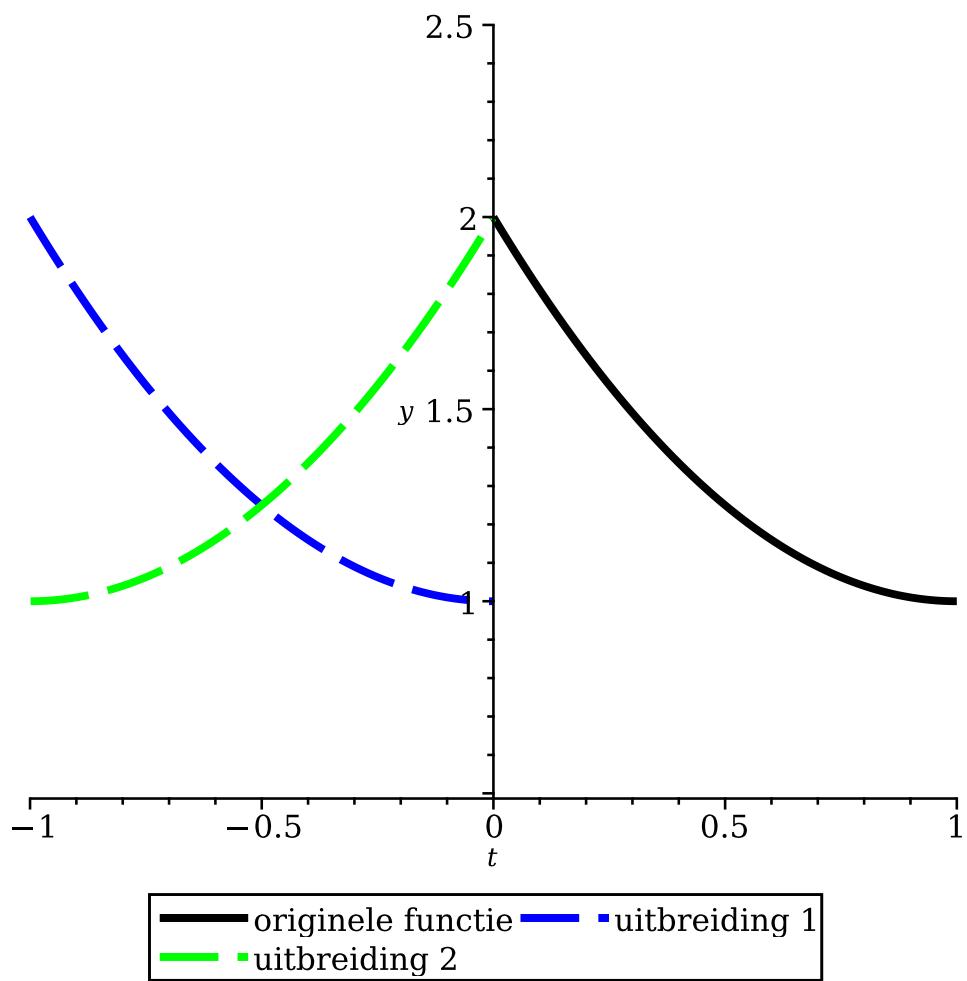
► Theorie Fourierreeksen

► Oefening 1:

▼ Oefening 2:

```
> restart:with(plots):
> L := 1:
> f := t-> (t-1)**2+1;
f:= t-> (t-1)2+1
(3.1)

> fplot := plot(f(t),t=0..1, y=0.5..2.5, legend="originele
functie", color="black", thickness=3):
f1plot := plot(f(t+1), t=-1..0,color=blue, legend="uitbreiding
1", linestyle="dash", thickness=3):
f2plot := plot(f(abs(t)), t=-1..0,color=green, legend=
"uitbreiding 2", linestyle="dash", thickness=3):
display(fplot, f1plot, f2plot);
```

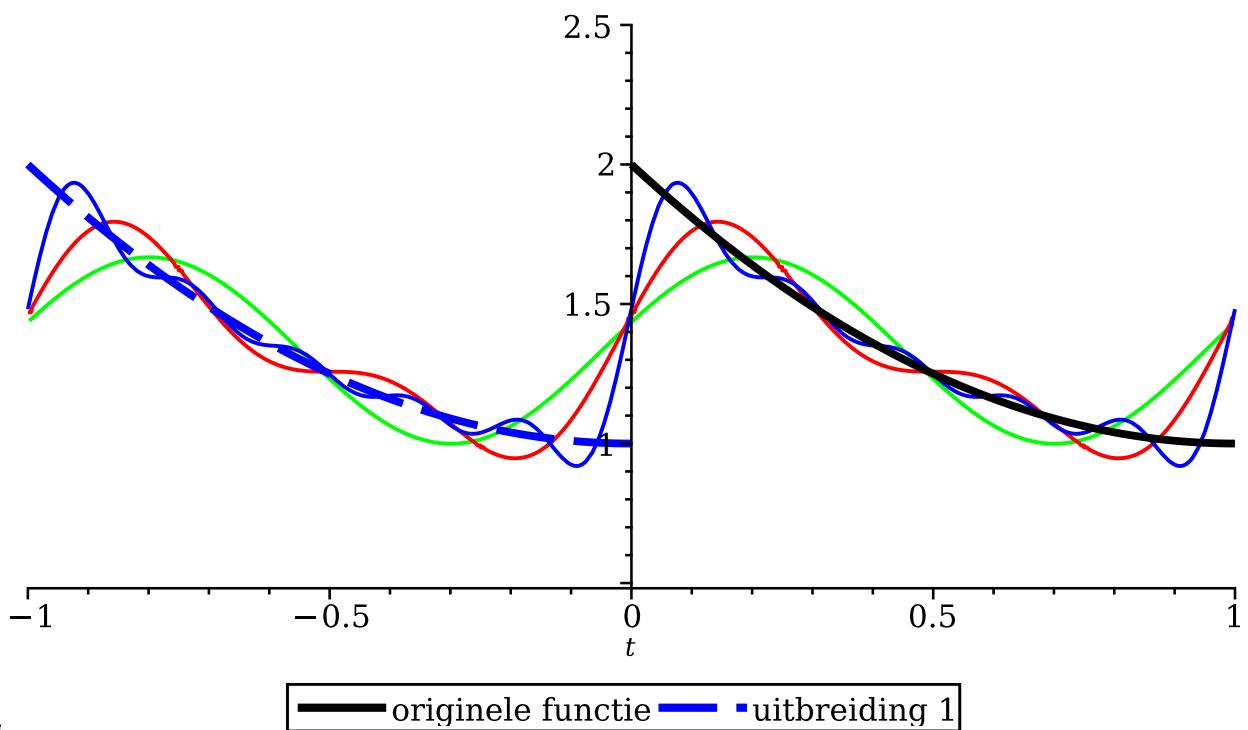


Fourier uitbreidings 1

```

> a01 := simplify(int(f(t+1), t=-L..0) + int(f(t), t=0..L));
> a1 := k->int(f(t+1)*cos(k*t*Pi/L), t = -L .. 0)/L+int(f(t)*cos(k*t*Pi/L), t = 0 .. L);
b1 := k->int(f(t+1)*sin(k*t*Pi/L), t=-L..0)/L+int(f(t)*sin(k*t*Pi/L), t = 0 .. L);
> F1 := (t, N) -> a01/2+sum(a1(k)*cos(k*Pi*t/L)+b1(k)*sin(k*Pi*t/L), k = 1 .. N);
> p1 := plot({F1(t,2),F1(t,5),F1(t,10)}, t=-L..L, color=[green, red, blue]);
display(p1, fplot, f1plot);

```



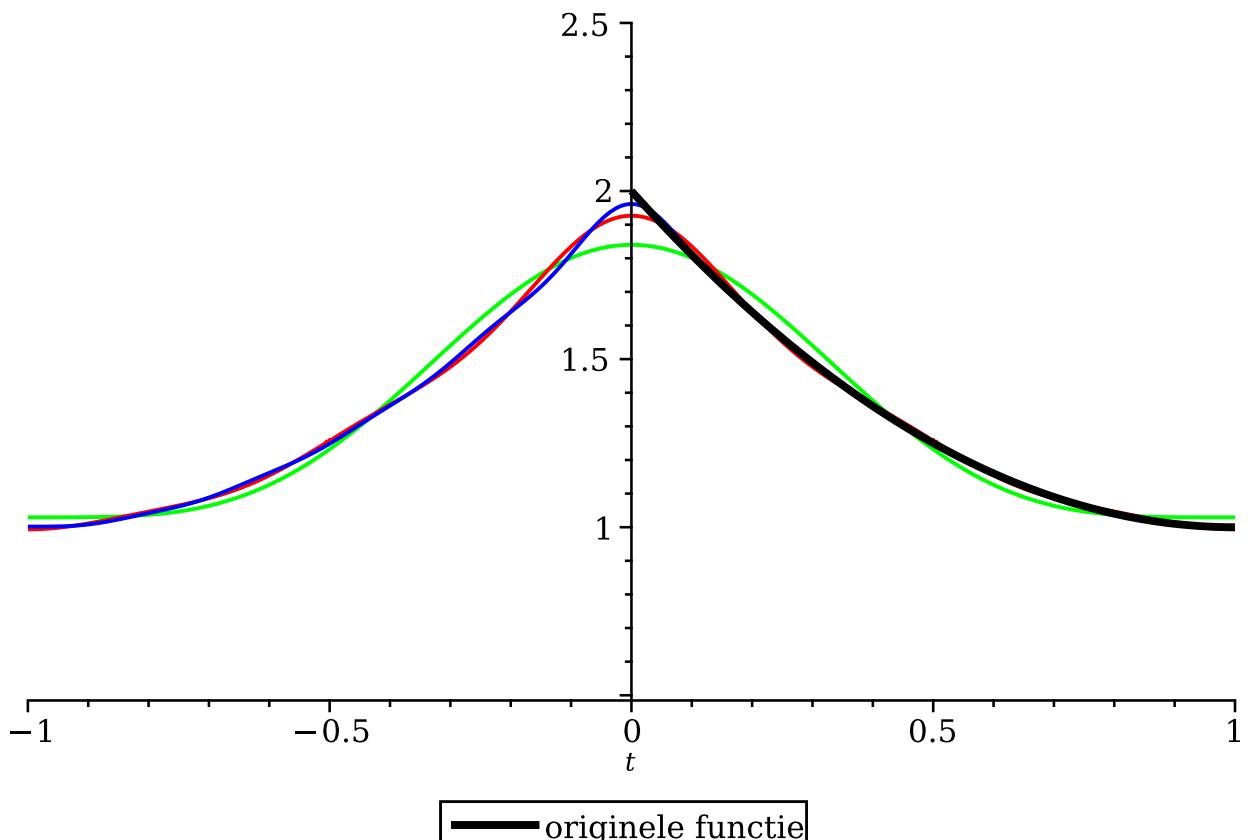
— originele functie — uitbreidings 1

Fourier uitbreiding 2

```

> a02 := simplify(int(f(abs(t)), t=-L..0) + int(f(t), t=0..L)):
> a2 := k->int(f(abs(t))*cos(k*t*Pi/L), t = -L .. 0)/L+int(f(t)*
  cos(k*t*Pi/L), t = 0 .. L)/L:
  b2 := k->int(f(abs(t))*sin(k*t*Pi/L), t=-L..0)/L+int(f(t)*sin
  (k*t*Pi/L), t = 0 .. L)/L:
> F2 := (t, N) -> a02/2+sum(a2(k)*cos(k*Pi*t/L)+b2(k)*sin(k*Pi*
  t/L), k = 1 .. N):
> p2 := plot({F2(t,2),F2(t,5),F2(t,10)}, t=-L..L, color=[green,
  red, blue]):
  display(p2, fplot);

```



Fourier uitbreiding 3

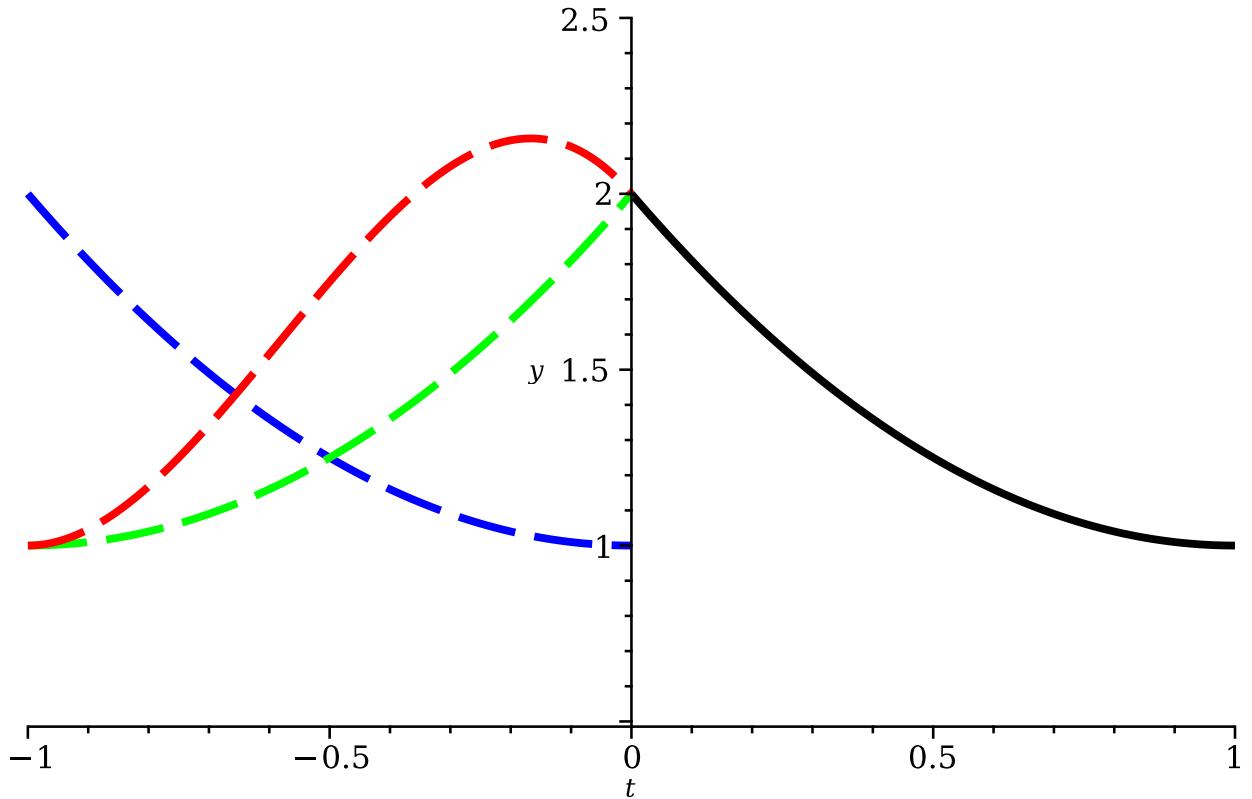
Bepaling $g(t)$:

$$> g := t \rightarrow a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d; \quad g := t \mapsto a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d \quad (3.2)$$

$$> \text{sols} := \text{solve}(\{g(0) = f(0), g(-1) = f(1), D(g)(0) = D(f)(0), D(g)(-1) = D(f)(1)\}, \{a, b, c, d\}); \quad \text{sols} := \{a = -4, b = -7, c = -2, d = 2\} \quad (3.3)$$

$$> g_{\text{sol}} := t \rightarrow \text{subs}(\text{sols}, g(t)); \quad g_{\text{sol}} := t \mapsto \text{subs}(\text{sols}, g(t)) \quad (3.4)$$

```
> gplot := plot(g_{sol}(t), t=-1..0, color=red, legend="uitbreiding
3", linestyle="dash", thickness=3):
display(fplot, f1plot, f2plot, gplot);
```

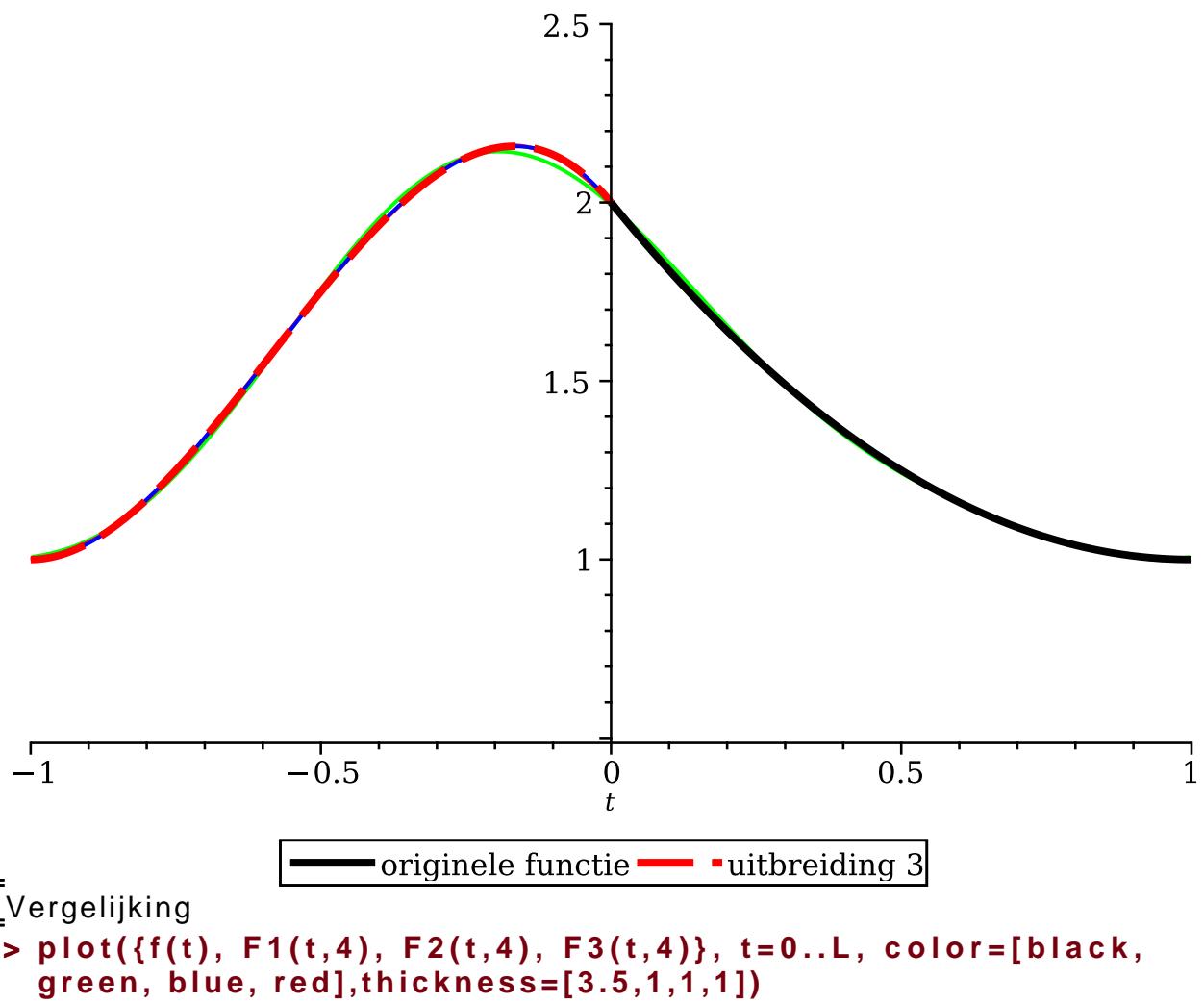


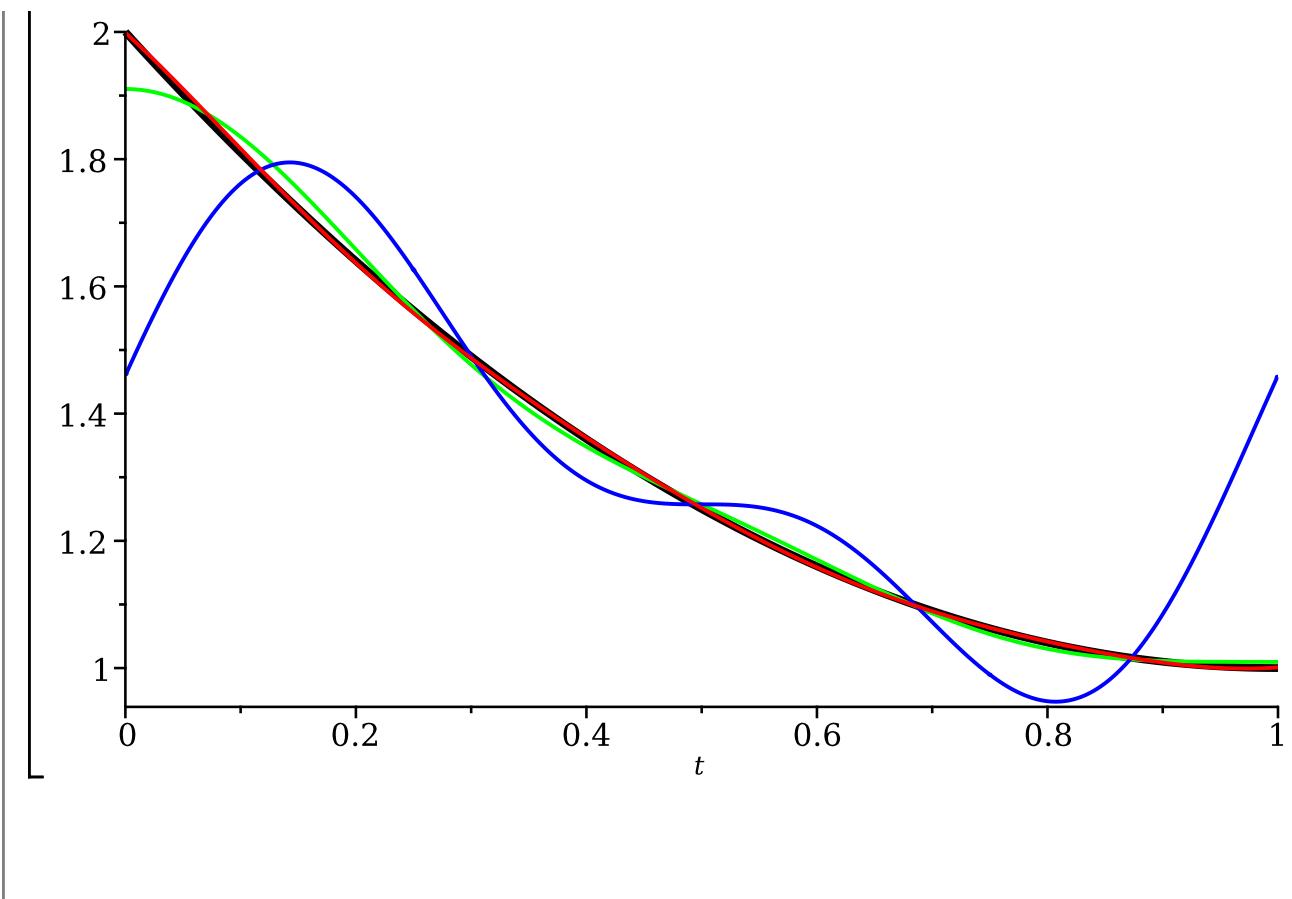
	originele functie	uitbreidung 1	uitbreidung 2
	uitbreidung 3		

```

> a03 := simplify(int(g_sol(t), t=-L..0) + int(f(t), t=0..L)):
> a3 := k ->int(g_sol(t)*cos(k*t*Pi/L), t = -L .. 0)/L+int(f(t)*
  cos(k*t*Pi/L), t = 0..L)/L:
  b3 := k->int(g_sol(t)*sin(k*t*Pi/L), t=-L..0)/L+int(f(t)*sin
  (k*t*Pi/L), t = 0..L)/L:
> F3 := (t, N) -> a03/2+sum(a3(k)*cos(k*Pi*t/L)+b3(k)*sin(k*Pi*
  t/L), k = 1 .. N);
  F3 := (t, N) -> 
$$\frac{a03}{2} + \sum_{k=1}^N \left( a3(k) \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot t}{L}\right) + b3(k) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot t}{L}\right) \right)$$
 (3.5)
> p3 := plot({F3(t,2),F3(t,5),F3(t,10)}, t=-L..L, color=[green,
  red, blue]):
  display(p3, fplot, gplot);

```





► Oefening 3:

► Oefening 5:

Werkbaar en uitbreide vinden dat $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)$
 $L \in [0, L]$

$$f_F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

We willen $\begin{cases} a_m = 0 \\ b_m \neq 0 \end{cases}$, we willen ook $L = 4L$

$$f_R(x) = \sum b_m \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right)$$

$$\text{met } b_m = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} f_R(x) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) dx$$

if $m \neq 0$ $b_m = 0$! Because these sinus terms are multiples of

$$\begin{aligned} b_{2m+1} &= \frac{1}{2L} \int_{-2L}^{2L} f_F(x) \cdot \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} f_F(x) \cdot \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L f_F(x) \cdot \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) dx \end{aligned}$$

dus:

1) we breiden van $[0, L]$ naar $[-2L, 2L]$ en uitbreiden

$$T = 4L$$

2) we introduceren via $x \geq 0$ zodat alle cosinus wegvalt
 (omdat)

3) we introduceren even voor $x = L$ omdat de even sinus wegvalt.

4) En uitleggen wel b_{2m+1} via de symmetrie eigenschap.

Figure 8.149: Exercise 3

- We beginnen met discrete samples te schrijven in exponentiële vorm

$$x_n = \frac{e^{2\pi i \frac{f}{f_s} n} + e^{-2\pi i \frac{f}{f_s} n}}{2}$$

zodat

$$\begin{aligned}\tilde{x}_k &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i \frac{f}{f_s} n} + e^{-2\pi i \frac{f}{f_s} n} \right) e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i (\frac{f}{f_s} - \frac{k}{N}) n} + e^{-2\pi i (\frac{f}{f_s} + \frac{k}{N}) n} \right)\end{aligned}$$

In de volgende stap kunnen we gebruik maken van de formule voor de partieelsom

$$\sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

4



$$\begin{aligned}\tilde{x}_k &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \left(\frac{1 - e^{2\pi i (N \frac{f}{f_s} - k)}}{1 - e^{2\pi i (\frac{f}{f_s} - \frac{k}{N})}} + \frac{1 - e^{-2\pi i (N \frac{f}{f_s} + k)}}{1 - e^{-2\pi i (\frac{f}{f_s} + \frac{k}{N})}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \left(\frac{e^{\pi i (N \frac{f}{f_s} - k)} e^{-\pi i (N \frac{f}{f_s} - k)} - e^{\pi i (N \frac{f}{f_s} - k)}}{e^{\pi i (\frac{f}{f_s} - \frac{k}{N})} e^{-\pi i (\frac{f}{f_s} - \frac{k}{N})} - e^{\pi i (\frac{f}{f_s} - \frac{k}{N})}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-\pi i (N \frac{f}{f_s} + k)} e^{\pi i (N \frac{f}{f_s} + k)} - e^{-\pi i (N \frac{f}{f_s} + k)}}{e^{-\pi i (\frac{f}{f_s} + \frac{k}{N})} e^{\pi i (\frac{f}{f_s} + \frac{k}{N})} - e^{-\pi i (\frac{f}{f_s} + \frac{k}{N})}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \left(\frac{e^{\pi i (N \frac{f}{f_s} - k)} \sin(\pi(N \frac{f}{f_s} - k))}{e^{\pi i (\frac{f}{f_s} - \frac{k}{N})} \sin(\pi(\frac{f}{f_s} - \frac{k}{N}))} + \frac{e^{-\pi i (N \frac{f}{f_s} + k)} \sin(\pi(N \frac{f}{f_s} + k))}{e^{-\pi i (\frac{f}{f_s} + \frac{k}{N})} \sin(\pi(\frac{f}{f_s} + \frac{k}{N}))} \right)\end{aligned}$$

Wanneer we algemeen

$$f = l \frac{f_s}{N}$$

(met l hier nog $\in \mathbb{R}$) invullen vinden we

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{2\sqrt{N}} \left(\frac{e^{\pi i (l-k)} \sin(\pi(l-k))}{e^{\frac{\pi}{N} i (l-k)} \sin(\frac{\pi}{N}(l-k))} + \frac{e^{-\pi i (l+k)} \sin(\pi(l+k))}{e^{-\frac{\pi}{N} i (l+k)} \sin(\frac{\pi}{N}(l+k))} \right)$$

Deze uitdrukking is geldig voor alle frequenties f .

Figure 8.150: Exercise 4 Part 1

- Als volgt nemen we $l \in \mathbb{Z}$ en bepalen \tilde{x}_k . We hebben een som van 2 termen. De teller van elk van deze termen wordt steeds 0, aangezien $l, k \in \mathbb{Z}$. De noemer is verschillend van 0 voor $l \neq k$.
- Wanneer

$$\begin{aligned} k = l &\quad \text{of} & k &= -l \bmod N \\ &&&= N - l \end{aligned}$$

wordt de noemer van eerste of tweede term ook 0. We krijgen het onbepaalde geval $\frac{0}{0}$, wat verder uitgewerkt kan worden door bv. de limiet te nemen, l'Hôpital toe te passen of de Taylor ontwikkeling rond 0 in zowel teller als noemer in te vullen. We vinden dan

$$\tilde{x}_k = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{\sqrt{N}}{2} & k = l \\ \frac{\sqrt{N}}{2} & k = N - l \end{cases}$$

Dit laatste resultaat is ook nog op een andere, eenvoudigere, manier af te leiden. De samples voldoen aan

$$\begin{aligned} x_n &= \cos\left(2\pi \frac{f}{f_s} n\right) \\ &= \cos\left(2\pi \frac{l}{N} n\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{\sqrt{N}}{2} e^{2\pi i \frac{l}{N} n} + \frac{\sqrt{N}}{2} e^{-2\pi i \frac{l}{N} n} \right) \end{aligned}$$

Zodat we onmiddelijk de coëfficiënten $\tilde{x}_{k=l}$ en $\tilde{x}_{k=N-l}$ kunnen aflezen. Al de andere coëfficiënten zijn 0.

ie werkcollege voor verificatie met Maple.

Figure 8.151: Exercise 4 Part 2

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2}, f(\alpha) = \underbrace{\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}_{\text{even function. } (b_m=0)}, -\pi < \alpha < \pi$$

$$e_m = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cdot \cos \left(\frac{m\pi \alpha}{2\pi} \right) \cdot d\alpha$$

we can see that $a_{2m}=0$!

\therefore

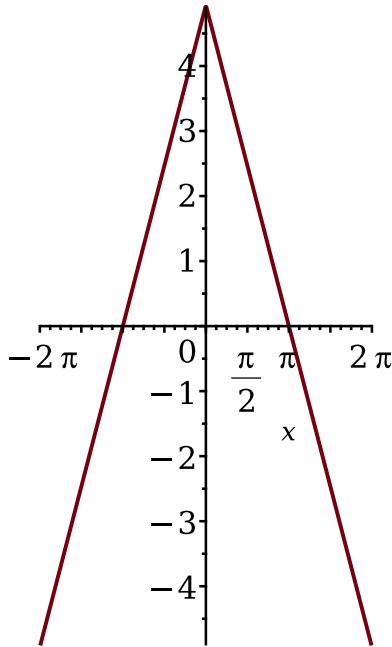
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2} = \frac{\pi^2}{2}$$

Figure 8.152: Exercise 5

```
> restart:
```

```
> f := x ->  $\frac{\pi^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{\text{abs}(x)}{\text{Pi}}\right)$ :
```

```
> plot(f(x), x = -2·Pi..2·Pi)
```



```
> a := n ->  $\frac{1}{2 \cdot \text{Pi}} \cdot \text{int}\left(f(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot x}{2}\right), x = -2 \cdot \text{Pi}..2 \cdot \text{Pi}\right)$   
a := n -> 
$$\frac{\int_{-2 \cdot \pi}^{2 \cdot \pi} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot x}{2}\right) dx}{2 \cdot \pi}$$

```

(1)

```
> a(0)
```

$$0$$

(2)

```
> a(1)
```

$$4$$

(3)

```
> a(2)
```

$$0$$

(4)

```
> a(3)
```

$$\frac{4}{9}$$

(5)

```
> odd_a := simplify(a(2·n + 1) assuming (n, posint))
```

$$odd_a := \frac{4}{(2n+1)^2}$$

(6)

```
> f_approx := evalf(add(odd_a · cos(n · x / 2), n = 0 .. 1000)):
```

```
> simplify(subs(x = 0, f_approx))
```

```
| 4.933803198 (7)
|> evalf( π² )
| 4.934802202 (8)
|=
```

Huis 10

$$u(\alpha, \sigma) = f(\lambda) \\ = 3 \cos^2 \frac{\pi \alpha}{2l}, \quad 0 \leq \alpha \leq l$$

i) want to solve: $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ isolated ends: $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u(\alpha, t) \cdot d\alpha \\ = \int_0^l \frac{\partial u(\alpha, t)}{\partial t} \cdot d\alpha = \int_0^l \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot d\alpha = 0$$

iii) we need to reach equilibrium

$$\int_0^l T_c \cdot d\alpha = T_c \cdot l \rightarrow \text{mod. diff. eqn. form} \int_0^l f(x) \cdot d\alpha$$

$\Rightarrow T_c \cdot l = \frac{3}{2} l \Rightarrow T_c = \frac{3}{2}$

iv) 1) Separation of variables:

$$u(\alpha, t) = \alpha(\alpha) \cdot T(t)$$

$$\Rightarrow 1) \frac{\partial T}{\partial t} + \lambda^2 T = 0$$

$$\left(1) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \alpha = 0 \text{ met } \lambda^2 = \frac{l^2}{\alpha^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \lambda^2 \alpha = 0 \rightarrow \alpha(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$$

if $\alpha = 0$: $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -A \lambda \sin(\lambda x) + B \lambda \cos(\lambda x)$
 $\Rightarrow B \lambda = 0 \Rightarrow B = 0$

if $\alpha = l$: $\frac{\partial \alpha}{\partial x} \Big|_{x=l} = -A \lambda \sin(\lambda l) = 0$

undat $\frac{\partial \alpha}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow \sin(\lambda l) = 0 \Rightarrow \lambda l = n \cdot \pi \Rightarrow \lambda = \frac{n \cdot \pi}{l}$

$$\alpha(n) = A \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}\right)$$

now for: $\frac{\partial T}{\partial t} + \lambda^2 T = 0$ (erste orde diff. glg)

$$\Rightarrow T(t) = C \cdot e^{-\lambda^2 t} \quad \text{met } \lambda^2 = \alpha^2 k^2 = \alpha^2 \cdot \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \\ \Rightarrow T(t) = C \cdot e^{-\frac{m^2 \pi^2}{l^2} t}$$

algemeen oplossing in dms:

$$u(\alpha, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot t}{l}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l f(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}\right) dx, \quad \text{met } f(x) = 3 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

$$= 6 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad \text{met } A_0 =$$

$$\frac{1}{l} \int_0^l f(x) \cdot dx = \frac{3}{2}$$

> # Define initial velocity

> $g := x \rightarrow \sin(\pi \cdot x)^2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x);$

$$g := x \mapsto \sin(\pi \cdot x)^2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x) \quad (1)$$

> $t_n := n \rightarrow (2 / (n * \pi)) * \text{int}(g(x) * \cos(n * \pi * x), x = 0 .. 1);$

$$t_n := n \mapsto \frac{2 \cdot \left(\int_0^1 g(x) \cdot \cos(\pi \cdot n \cdot x) \, dx \right)}{\pi \cdot n} \quad (2)$$

>

> # Maar eerst moesten we de algemene oplossing vinden

> $pde := \text{diff}(u(x, t), t\$2) = \text{diff}(u(x, t), x\$2);$

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad (3)$$

> # Define boundary conditions

$bc := D[1](u)(0, t) = 0, D[1](u)(1, t) = 0;$

$$bc := D_1(u)(0, t) = 0, D_1(u)(1, t) = 0 \quad (4)$$

> # Define initial conditions

$ic := u(x, 0) = 0, D[2](u)(x, 0) = \sin(\pi \cdot x)^2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x);$

$$ic := u(x, 0) = 0, D_2(u)(x, 0) = \sin(\pi x)^2 \cos(2 \pi x) \quad (5)$$

> $sol := \text{pdsolve}([pde, bc, ic], u(x, t));$

$$sol := u(x, t) = -\frac{t}{4} + \frac{\cos(2 \pi x) \sin(2 \pi t)}{4 \pi} - \frac{\cos(4 \pi x) \sin(4 \pi t)}{16 \pi} \quad (6)$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) &= 0 & \int_0^L u(x, 0) = \sin^2(\pi x) \cos(L\pi x) \\ \int_0^L u(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

$$u(x, L) = X(x) \cdot T(t)$$

$$\text{jetzt Vgl: } \int_0^L u(x, t) = C^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

$$\begin{aligned} \therefore T''(x) &= C^2 \cdot X''(T) \\ \Leftrightarrow T'' &= C^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} X \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T'' = C^2 \cdot L \cdot T \\ X'' = x \cdot L \end{array} \right\} \end{aligned}$$

homogene ODERES:

$$\begin{aligned} X'' &= x \cdot L, L \text{ heißt } 3 \text{ gewählt:} \\ X(x) &= A \cos(\sqrt{L} x) + B \sin(\sqrt{L} x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'(0) &= 0 \Leftrightarrow B = 0 \\ X'(L) &= 0 \Leftrightarrow -A \sin(\sqrt{L} x) = 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{L} &= m\pi \\ \Leftrightarrow L &= (m\pi)^2 \\ \rightarrow X_m &= \cos(m\pi x) \quad c = ?! \end{aligned}$$

$$T'' = C^2 \cdot (m\pi)^2 \cdot T$$

$$T_m = n_m \cdot \cos(m\pi x) + t_m \cdot \sin(m\pi x)$$

$$\begin{aligned} u_g(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos(m\pi x) \cdot (n_m \cdot \cos(m\pi t) + t_m \cdot \sin(m\pi t)) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos(m\pi x) \cdot (n_m \cdot \cos(m\pi t) + t_m \cdot \sin(m\pi t)) \end{aligned}$$

find n_m und t_m .
 $n_m = 0$ durch die linke Welle.

$$\text{daraus: } u_h(x, t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \cos(m\pi x) \cdot (t_m \cdot \sin(m\pi t))$$

$$\int_0^L u_h(x, 0) = \sin^2(\pi x) \cos(L\pi x)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \underbrace{\sin^2(\pi x) \cdot \cos(L\pi x)}_{g(x)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos(m\pi x) \cdot t_m \cdot m\pi \\ \Leftrightarrow g(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos(m\pi x) \cdot t_m \cdot m\pi \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 g(x) \cdot \cos(m\pi x) \cdot dx = t_m \cdot m\pi \cdot \frac{1}{L}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi\pi} \cdot \int_0^1 g(x) \cdot \cos(m\pi x) \cdot dx = t_m$$

$$\Leftrightarrow t_m = -\frac{4 \cdot \sin(m\pi) \cdot (m^2 + 8)}{m^2 \pi^2 (m^4 - 4m^2 + 64)}$$

WC 10

Werkcollege 10: oplossing

- Beschouw een snaar met lengte 1. De uitwijking van de snaar op elke positie x en tijdstip t wordt gegeven door $u(x, t)$. De uitwijking voldoet aan een golfvergelijking met dempingsterm:

$$\partial_t^2 u + \partial_t u = \partial_x^2 u$$

De snaar hangt vast aan beide uiteinden op een hoogte 0. De initiële uitwijking wordt gegeven door $f(x)$. De initiële snelheid wordt gegeven door $g(x)$.

Gebruik scheiding der veranderlijken om de uitwijking $u(x, t)$ op elke positie $x \in [0, 1]$ en elk tijdstip $t \in [0, +\infty]$ te bepalen.

- Neem nu

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x(x - 1) \\ g(x) &= 2 \sin(5\pi x)x \end{aligned}$$

en visualiseer de uitwijking (neem bv. 80 modes in de ontwikkeling) in functie van x op tijden $t = 0, 0.2, 0.5, 0.95$. Wat wordt de uitwijking indien $t \rightarrow +\infty$?

Solution:

- Scheiden der veranderlijken $u = X(x)T(t)$ levert vergelijking

$$XT'' + XT' = TX''$$

wat we herschrijven naar

$$\frac{T''}{T} + \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}$$

Beide leden moeten gelijk zijn aan een constante zodat we 2 gewone differentiaalvergelijkingen krijgen

$$\begin{aligned} X'' &= \sigma X \\ T'' + T' &= \sigma T \end{aligned}$$

We lossen de eerste op met homogene randvoorwaarden. (Merk op dat het gestelde probleem ook homogene randvoorwaarden heeft zodat we geen particuliere oplossing erbij moeten optellen.) Rekening houden met de homogene randvoorwaarden vinden we

$$X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

end de mogelijke waarden voor de constante σ

$$\sigma_n = -(n\pi)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De 2e differentiaal vergelijking (voor elke waarde van n) wordt

$$T_n'' + T_n' + (n\pi)^2 T_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

We lossen dit explicet op door de karakteristieke vergelijking op te stellen, m.a.w. we vullen de oplossing: $T_n(t) = e^{zt}$ in en gaan op zoek naar de mogelijke waarden van z . We vinden

$$z^2 + z + (n\pi)^2 = 0$$

Met als oplossingen

$$z_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}}{2}$$

Zodat de oplossingen voor $T_n(t)$ gevonden worden als (na het nemen van de juiste lineaire combinaties, zie les gewone differentiaalvergelijkingen)

$$T_n(t) = s_n e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}}{2} t\right) + t_n e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}}{2} t\right)$$

Als totale homogene oplossing vinden we de superpositie

$$u_h(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(s_n e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}}{2} t\right) + t_n e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}}{2} t\right) \right) \sin(n\pi x)$$

wat ook onmiddelijk de volledige oplossing is aangezien we werken met homogene randvoorwaarden. Om de coëfficiënten s_n, t_n te bepalen kijken we naar de beginvoorwaarden. De initiële uitwijking levert

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \sin(n\pi x)$$

De orthogonaliteitsrelaties leveren

$$s_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx$$

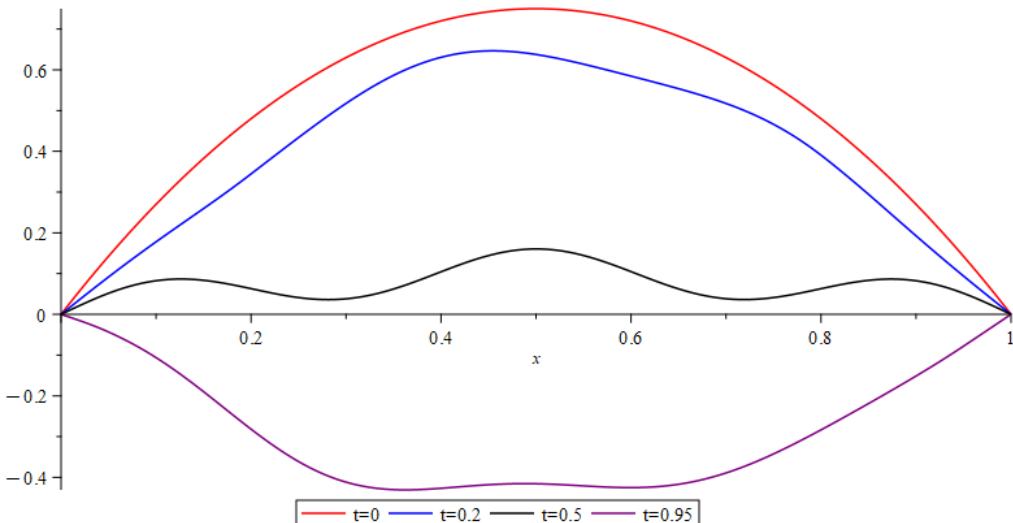
Voor de beginsnelheid vinden we (let hierbij op de **twee** termen in het rechterlid!)

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, 0) &= g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} s_n + t_n \frac{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}}{2} \right) \sin(n\pi x) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \sin(n\pi x) + \sum_{n=1}^{+\infty} t_n \frac{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}}{2} \sin(n\pi x) \end{aligned}$$

Op de laatste regel kennen we de fourierontwikkeling van $f(x)$ zodat we vinden

$$\begin{aligned} g(x) + \frac{1}{2} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} t_n \frac{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}}{2} \sin(n\pi x) \\ t_n &= \frac{4}{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}} \int_0^1 (g(x) + \frac{1}{2} f(x)) \sin(n\pi x) dx \end{aligned}$$

- De uitwijkingen op de gevraagde tijden worden in onderstaande plot gevisualiseerd



2. • Beschouw een staaf van lengte L met materiaalconstante α^2 . Het linkeruiteinde wordt vastgehouden op temperatuur T_0 , terwijl het rechteruiteinde geïsoleerd is. De begintemperatuur van de staaf wordt gegeven door de functie $g(x)$. Bepaal het temperatuursverloop $u(x, t)$ van de staaf voor elke $x \in [0, L]$ en $t \geq 0$.
Bespreek het limietgedrag voor $t \rightarrow +\infty$?
- Pas toe en visualiseer met Maple in het geval dat $L = 2$, $T_0 = 1.5$ en $\alpha = 0.3$

$$g(x) = \frac{3}{2}x - x^2 + 1.5$$

Geef ook de coëfficiënten s_n in hun meest eenvoudige vorm.

- Doe hetzelfde voor een initiële verdeling

$$g(x) = \begin{cases} 1.5 & x < 1 \\ 0.5 & x > 1 \end{cases}$$

Je kan hiervoor opnieuw gebruik maken van Maple commando

$$g := x -> piecewise(x < 1, 1.5, x > 1, 0.5);$$

Solution:

- We kunnen heel analoog als in het bordcollege te werk gaan. De temperatuursverdeling in een staaf wordt beschreven door de warmtevergelijking

$$\partial_t u(x, t) = \alpha^2 \partial_x^2 u(x, t)$$

Wat we verkort zullen noteren als

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

Voor dit geval liggen de plaats- en tijdsvariabelen in intervallen

$$x \in [0, L], \quad t \in [0, +\infty[$$

De rand- en beginvoorwaarden lezen respectievelijk

$$\begin{cases} u(0, t) = T_0 & t > 0 \\ u_x(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

We beginnen opnieuw met de oplossing te schrijven als som van particulier en homogeen deel, waarbij het eerste deel voor de inhomogene zorgt heeft en het tweede homogene randvoorwaarden heeft.

$$u(x, t) = u_p(x) + u_h(x, t)$$

Beide delen moeten opnieuw voldoen aan de golfvergelijking.

Stap 1: Scheiden der veranderlijken Voor het homogene deel we stellen een oplossing van de vorm

$$u_h(x, t) = X(x)T(t)$$

voorop en vullen deze in in de warmtevergelijking. Dit levert ..

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t)$$

of nog

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Aan deze vergelijking moet voldaan zijn voor elke $x \in [0, L]$ en $t \in \mathbb{R}^+$. Aangezien het linkerlid onafhankelijk is van x en het rechterlid onafhankelijk van t moeten beide gelijk zijn aan een constante C , hier gekozen als $C = \alpha^2 \sigma$ met σ een andere constante:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = C = \alpha^2 \sigma$$

wat we kunnen schrijven als 2 gewone differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} X''(x) = \sigma X(x) \\ T'(t) = \alpha^2 \sigma T(t) \end{cases}$$

Stap 2: Bepaling normale modes Als $X(x)$ voldoet aan bepaalde homogene (Neumann of Dirichlet) randvoorwaarden zal $u_h(x, t) = X(x)T(t)$ aan diezelfde homogene randvoorwaarden voldoen. We gaan dus eerst op zoek naar de oplossingen van $X'' = \sigma X$ met homogene randvoorwaarden. Als 2e stap verwerken we dan de inhomogene randvoorwaarden.

– Homogene randvoorwaarden

We zoeken oplossingen van

$$X''(x) = \sigma X(x), \quad X(0) = 0, \quad X'(L) = 0$$

We hebben dus een Dirichletrand voorwaarde in $x = 0$ en een Neumannrand voorwaarde in $x = L$.

De op te lossen vergelijking is een gewone differentiaalvergelijking met 3 types oplossingen, afhankelijk van (het teken van) σ

1) $\sigma > 0$

$$X_1(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}$$

2) $\sigma = 0$

$$X_2(x) = c_1 + c_2 x$$

3) $\sigma < 0$

$$X_3(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx) \quad \text{met } k^2 = -\sigma$$

Voor zowel X_1 als X_2 impliceren de rand voorwaarden dat $c_1 = c_2 = 0$ (ga dit zelf eens na!).

Voor X_3 vinden we voor de rand voorwaarde in $x = 0$

$$X_3(0) = c_1 = 0$$

Voor de rand voorwaarde in $x = L$ vinden we

$$X'(L) = kc_2 \cos(kL) = 0$$

of dus $c_2 = 0$ **tenzij (!)**

$$k = \frac{(2n+1)\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(Merk op dat hier n ook gelijk kan zijn aan 0 !)

De enige niet-triviale oplossingen van deze gewone differentiaalvergelijking met homogene rand voorwaarden zijn dus

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

of nog

$$\sigma_n = -\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

De niet-triviale oplossing X_n legt dus meteen ook de mogelijke waarden voor de constante σ vast.

Voor elk van deze keuzes van n vinden we een onafhankelijke oplossing voor de vergelijking $T' = \alpha^2 \sigma_n T$. Deze zijn

$$T_n(t) = e^{-(\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2L})^2 t}$$

Dit geeft ons voor elke n een *normale mode*

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-(\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2L})^2 t} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right), \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Elke lineaire combinatie van normale modes zal ook een oplossing zijn van de (lineaire) warmtevergelijking met bovenstaande homogene randvoorwaarden. De meest algemene oplossing leest dus

$$u_h(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n e^{-(\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2L})^2 t} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)$$

met s_n nog te bepalen reële constantes.

- Inhomogene randvoorwaarden

In een volgende stap gaan we op zoek naar het particuliere deel, met inhomogene randvoorwaarden.

In dit geval hebben we

$$\begin{aligned} u(0, t) &= T_0 & t \geq 0 \\ u'(L, t) &= j_L = 0 & t \geq 0 \end{aligned}$$

We vinden (tijdsonafhankelijke) oplossing

$$u_p(x) = T_0 + j_L x = T_0$$

Deze oplossing voldoen ook aan de warmtevergelijking. Als algemene oplossing vinden we

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_p(x) + u_h(x, t) \\ u(x, t) &= T_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} s_n e^{-(\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2L})^2 t} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right) \end{aligned}$$

Stap 3: Verwerking beginvoorwaarde Tot slotte moeten de constantes s_n bepaald worden. Hiertoe gebruiken we de beginvoorwaarde $u(x, 0) = g(x)$. Herschreven wordt dit

$$\begin{aligned} g(x) - \tilde{u}(x) &= u_h(x, 0) \\ g(x) - T_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right) \end{aligned}$$

De coëfficiënten s_n kunnen nu bepaald worden met behulp van de orthogonaleitrelaties voor cosinussen en sinussen, in dit concrete geval gebruiken we (7.3.37). Dit levert

$$s_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)(g(x) - T_0)dx$$

Alles samen gevatt vinden

$$u(x, t) = T_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} s_n e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)$$

met

$$s_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)(g(x) - T_0)dx$$

Tot slot zien w dat de tijdsafhankelijkheid gevatt zit in (dalende) exponentiëlen. De *modes* met grootste factor in exponent zullen het snelst uitsterven, de mode met kleinste factor overleeft het langst. Als $t \rightarrow +\infty$ sterven alle modes uit zodat enkel de particuliere oplossing T_0 overblijft. We verwachten een constante eindverdeling.

- Zie Maple file voor implementatie.
- We zien opnieuw een Gibbsverschijnsel in de buurt van de discontinuïteit. Echter, bij de warmtevergelijking verdwijnt dit Gibbsverschijnsel onmiddelijk, in tegenstelling tot de warmtevergelijking. De warmteverdeling gaat zeer snel over tot een gladde verdeling.

$$A) \quad \int f(u) + \int f(u) = \int u^2 u$$

condition

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$u(\alpha, 0) = f(x)$$

$$\frac{du}{dt} (\alpha, 0) = g'(x)$$

dt

Scheiding van variabelen.

$$u(u, t) = X(u) \cdot T(t)$$

$$\Rightarrow T'' X + T' X = X'' T \quad \left. \begin{array}{l} \text{dus door } \frac{1}{T} \\ \text{dus } \frac{T''}{T} + \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} \end{array} \right\} \begin{array}{l} T'' + T' = \sigma \cdot T \\ X'' = X \cdot \sigma \end{array}$$

en nu $X(x)$

$$\alpha \in 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \alpha = \pi, \text{ d.h. we kunnen } \alpha = \sin(m\pi x)$$

$$\Rightarrow \text{als } \alpha = 0 \Rightarrow \sin(\alpha) = 0, \sin \alpha = 1 \Rightarrow \sin(0) = 0$$

$$\text{dus: } \int f \sin(m\pi x) = \sin(m\pi x) \cdot \sigma$$

$$\Leftrightarrow -(\pi m)^2 \cdot \sin(m\pi x) = \sin(m\pi x) \cdot \sigma$$

$$\Leftrightarrow \sigma = -(\pi m)^2$$

nu $T(t)$

$$T'' + T' = \sigma \cdot T$$

$$\Leftrightarrow T'' + T' + (\pi m)^2 \cdot T = 0$$

$$\Rightarrow z^2 + z + (\pi m)^2 = 0 \rightarrow \text{Via Maple } \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{4m^2\pi^2 + 1}}{2}$$

$$\Rightarrow T(m) = c_m \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{4m^2\pi^2 + 1}}{2}t\right) + f_m \cdot e^{-\frac{1}{2}it} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4m^2\pi^2 + 1}}{2}t\right)$$

Algemene oplossing:

$$u_p(u, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(n_m \cdot e^{i\pi m t} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{4m^2\pi^2 + 1}}{2}t\right) + f_m \cdot e^{-i\pi m t} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4m^2\pi^2 + 1}}{2}t\right) \right) \sin(m\pi x)$$

Vervolgen algemene oplossing vinden we c_m en f_m .

→ we kiezen nu beginvoorwaarden:

$$1) \quad u(x, 0) = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} n_m \cdot \sin(m\pi x). \text{ Gebruik orthogonale relatie}$$

om dit te bewijzen.

$$\int_0^1 f(x) \cdot \sin(m\pi x) \cdot dx \Leftrightarrow n_m = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) \cdot \sin(m\pi x) \cdot dx$$

$$2) \quad \int_0^1 u_t(x, 0) \approx g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} n_m + f_m \cdot \sqrt{\frac{4m^2\pi^2 + 1}{2}} \right) \sin(m\pi x)$$

$$\Leftrightarrow g(x) + \frac{1}{2} f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \cdot \sin(m\pi x)$$

(a), integreer en vermenigvuldig met $\sin(m\pi x)$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(g(x) + \frac{1}{2} f(x) \right) \sin(m\pi x) \cdot dx = f_m \cdot \underbrace{\int_0^1 \sin^2(m\pi x) \cdot dx}_{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{4m^2\pi^2 + 1}} \cdot \int_0^1 \left(g(x) + \frac{1}{2} f(x) \right) \sin(m\pi x) \cdot dx = f_m$$

$\sin(m\pi x), m \in \mathbb{N}$
 $= \frac{1}{2} (2\pi)$ Orthogonaliteit

Wiskundige modellering in de ingenieurswetenschappen: Werkcollege 10

Oefening 2.1 ($g(x) = -x^2 + 1.5x + 1.5$)

```
> restart:with(plots):
```

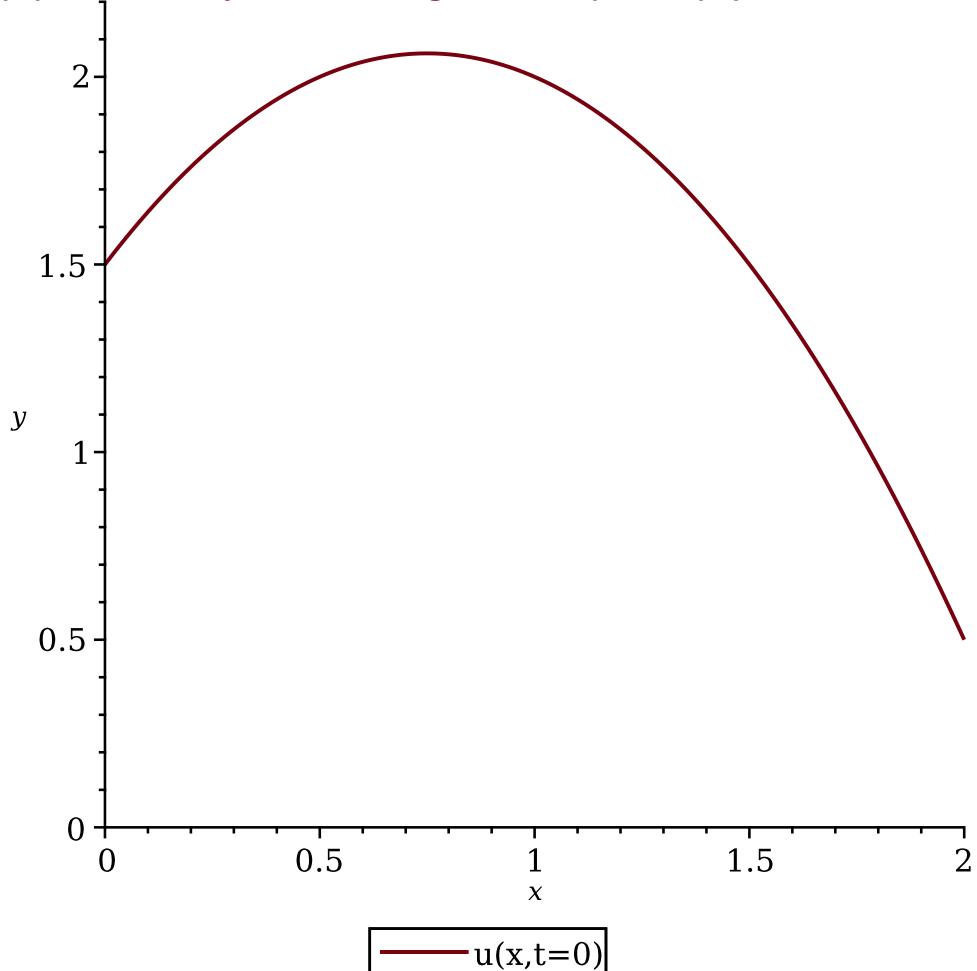
Invoeren gegevens:

```
> L := 2;  
T0 := 1.5;  
a := 0.3;
```

$$\begin{aligned}L &:= 2 \\ T0 &:= 1.5 \\ a &:= 0.3\end{aligned}\tag{1.1}$$

```
> g := x -> -x**2+1.5*x+1.5;  
g := x \mapsto -x^2 + 1.5 \cdot x + 1.5\tag{1.2}
```

```
> plot(g(x), x=0..L, y=0..2.2, legend="u(x,t=0)")
```



Coefficienten s_n

$$> s := n \rightarrow 2/L * \text{int}(\sin(((2*n+1)*\pi*x)/(2*L))*(g(x)-T0), x=0..L);$$
$$s := n \mapsto \frac{2 \cdot \left(\int_0^L \sin\left(\frac{(2 \cdot n + 1) \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot L}\right) \cdot (g(x) - T0) dx \right)}{L} \quad (1.3)$$

$$> (\text{simplify}(s(n)) \text{ assuming}(n, \text{posint}));$$
$$\frac{4.128196410 + (-8.105694697 n - 4.052847348) (-1)^n}{(2 \cdot n + 1.)^3} \quad (1.4)$$

Normal Modes

$$> nmode := (n, x, t) \rightarrow \exp(-((2*n+1)*\pi*a/(2*L))^2 * t) * \sin((2*n+1)*\pi*x)/(2*L)$$
$$nmode := (n, x, t) \mapsto e^{-\frac{(2 \cdot n + 1)^2 \cdot \pi^2 \cdot a^2 \cdot t}{4 \cdot L^2}} \cdot \sin\left(\frac{(2 \cdot n + 1) \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot L}\right) \quad (1.5)$$

Homogene oplossing

$$> uh := (x, t, N) \rightarrow \sum_{n=0}^N s(n) \cdot nmode(n, x, t);$$
$$uh := (x, t, N) \mapsto \sum_{n=0}^N s(n) \cdot nmode(n, x, t) \quad (1.6)$$

Tijdsonafhankelijke inhomogene oplossing

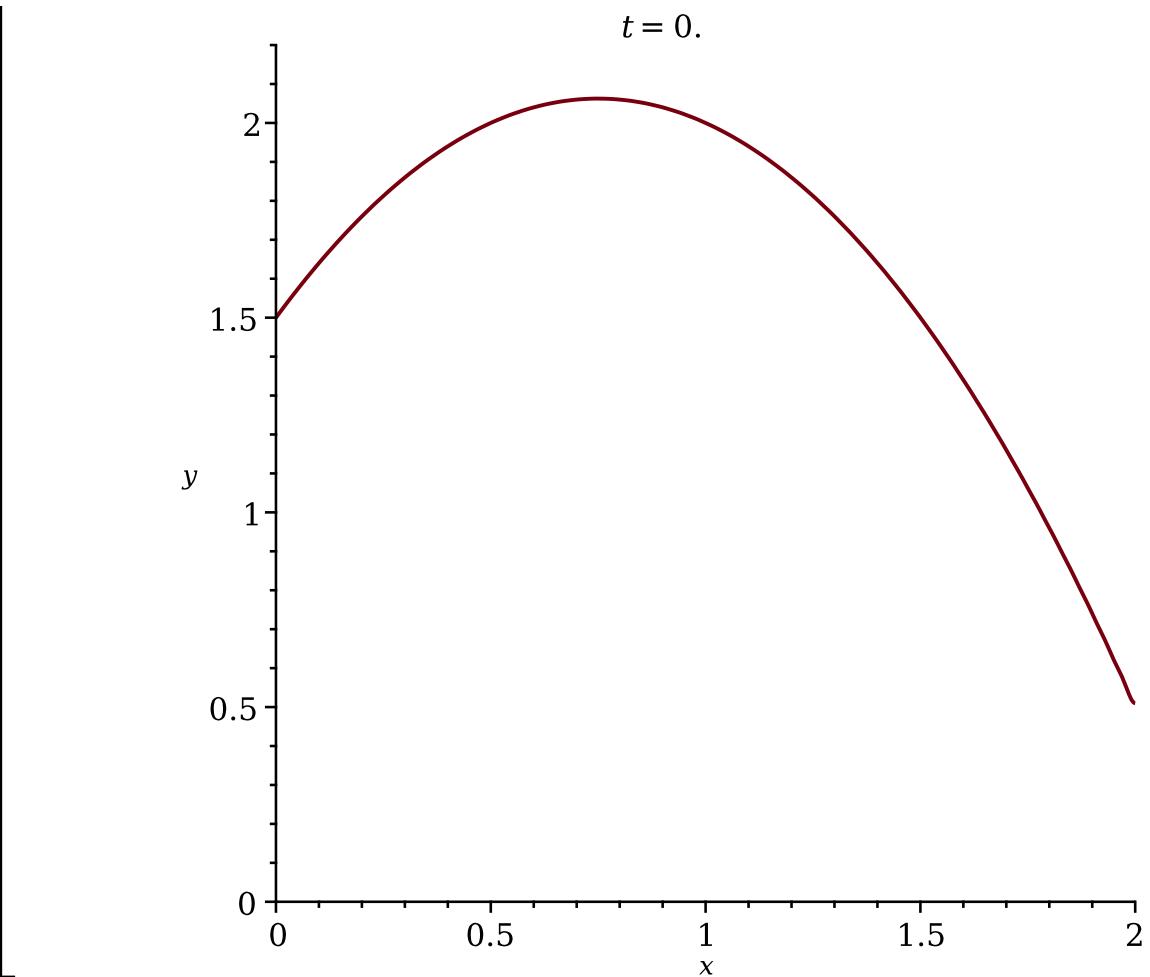
$$> ut := x \rightarrow T0;$$
$$ut := x \mapsto T0 \quad (1.7)$$

Algemene oplossing

$$> u := (x, t, N) \rightarrow ut(x) + uh(x, t, N);$$

Visualisatie

$$> N := 100;$$
$$N := 100 \quad (1.8)$$
$$> \text{animate}(\text{plot}, [u(x, t, N), x = 0 .. L, y=0..2.2], t = 0 .. 10, \text{frames}=50);$$



```
[> dens := (t,x,y,N)-> u(x,t,N);
> animate(densityplot, [dens(t,x,y,50), x=0..L, y=0..1,
restricttoranges=true], t = 0 .. 20, frames=50);
```

Oefening 2.2 ($g(x)$ = stapfunctie)

```
[> restart:with(plots):
```

Invoeren gegevens:

```
[> L := 2;
T0 := 1.5;
a := 0.3;
```

$$L := 2$$

$$T0 := 1.5$$

$$a := 0.3$$

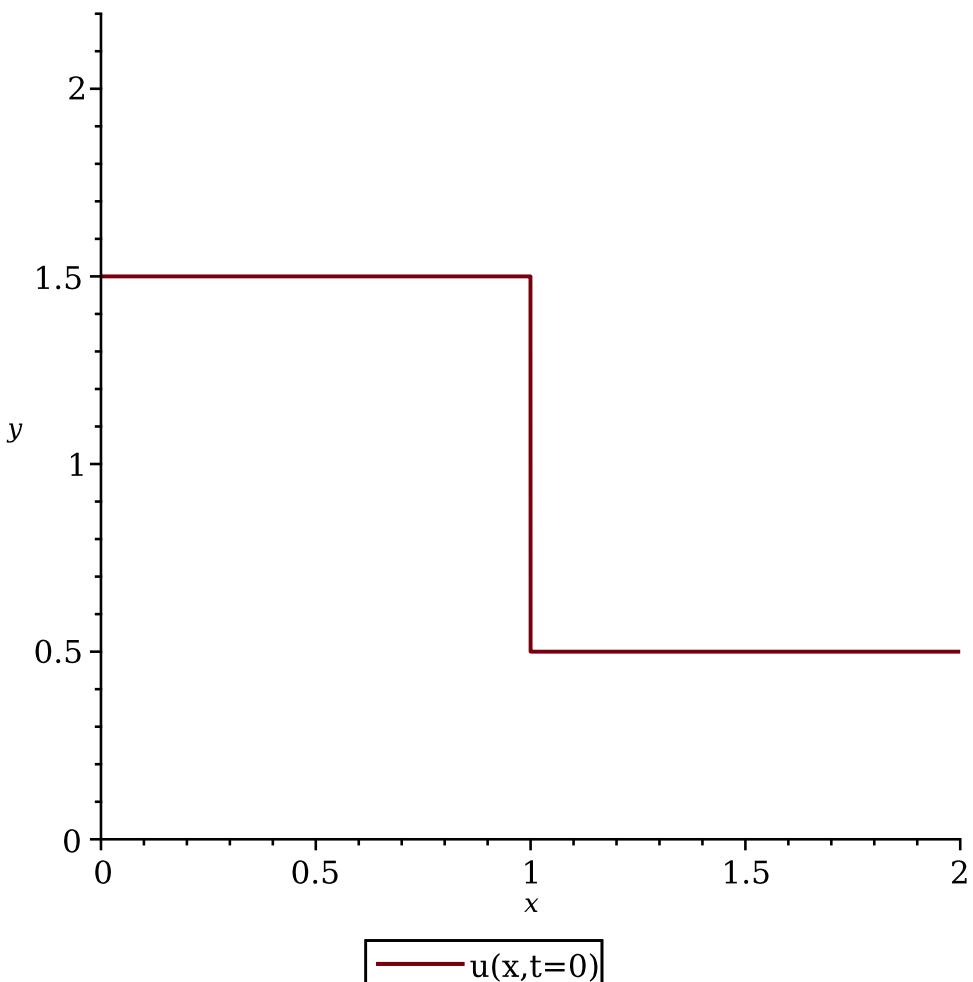
(2.1)

```
[> g := x-> piecewise(x<1,1.5, x>1,0.5);
```

$$g := x \mapsto \begin{cases} 1.5 & x < 1 \\ 0.5 & 1 < x \end{cases}$$

(2.2)

```
[> plot(g(x), x=0..L, y=0..2.2, legend="u(x,t=0)")
```



Coefficienten s_n

$$s := n \mapsto \frac{2 \cdot \left(\int_0^L \sin\left(\frac{(2 \cdot n + 1) \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot L}\right) \cdot (g(x) - T_0) dx \right)}{L} \quad (2.3)$$

$$> (simplify(s(n)) assuming(n, posint)); \\ \frac{1.273239545 \cos(1.570796327 n + 0.7853981634)}{2 \cdot n + 1.} \quad (2.4)$$

Normal Modes

$$nmode := (n, x, t) \mapsto \exp\left(-((2 \cdot n + 1) \cdot \pi \cdot x / (2 \cdot L))^2 \cdot t\right) \cdot \sin\left((2 \cdot n + 1) \cdot \pi \cdot x / (2 \cdot L)\right) \quad (2.5)$$

Homogene oplossing

$$> uh := (x, t, N) \mapsto \sum(s(n) * nmode(n, x, t), n=0..N);$$

$$uh := (x, t, N) \mapsto \sum_{n=0}^N s(n) \cdot nmode(n, x, t) \quad (2.6)$$

Tijdsonafhankelijke inhomogene oplossing

```
> ut := x-> T0;
      ut := x-> T0 \quad (2.7)
```

Algemene oplossing

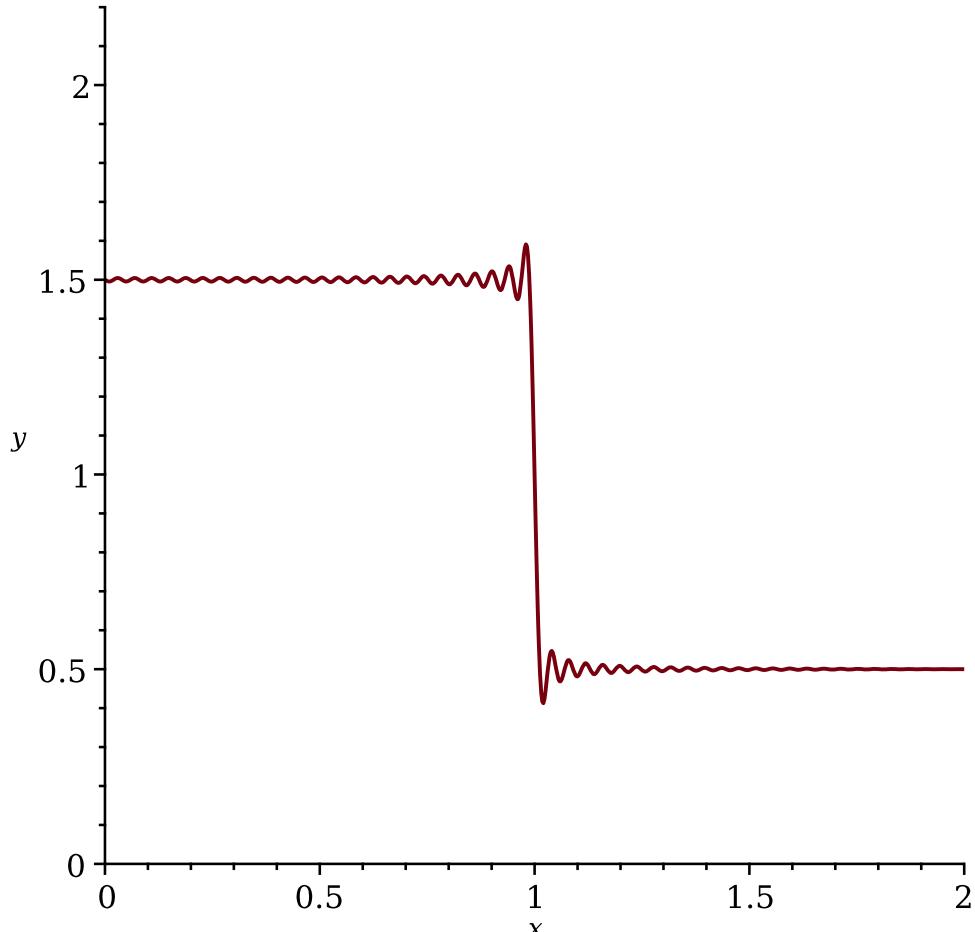
```
> u := (x,t,N) -> ut(x) + uh(x,t,N);
```

Visualisatie

```
> N := 100;
      N := 100 \quad (2.8)
```

```
> animate(plot, [u(x,t,N), x = 0 .. L, y=0..2.2], t = 0 .. 10,
frames=50);
```

$t = 0.$



```
> dens := (t,x,y,N)-> u(x,t,N);
> animate(densityplot, [dens(t,x,y,50), x=0..L, y=0..1,
restricttoranges=true], t = 0 .. 20, frames=50);
```

Oefening 1

```
> restart:with(plots):
```

Oplossing differentiaalvergelijking: karakteristieke vergelijking

```
> solve(z**2+z+(n**2*Pi**2)=0, z) assuming(n,posint);
```

$$\frac{-1}{2} + \frac{I\sqrt{4\pi^2 n^2 - 1}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{4\pi^2 n^2 - 1}}{2} \quad (3.1)$$

Beginvoorwaarden

```
> f := x -> -3*x*(x-1);
```

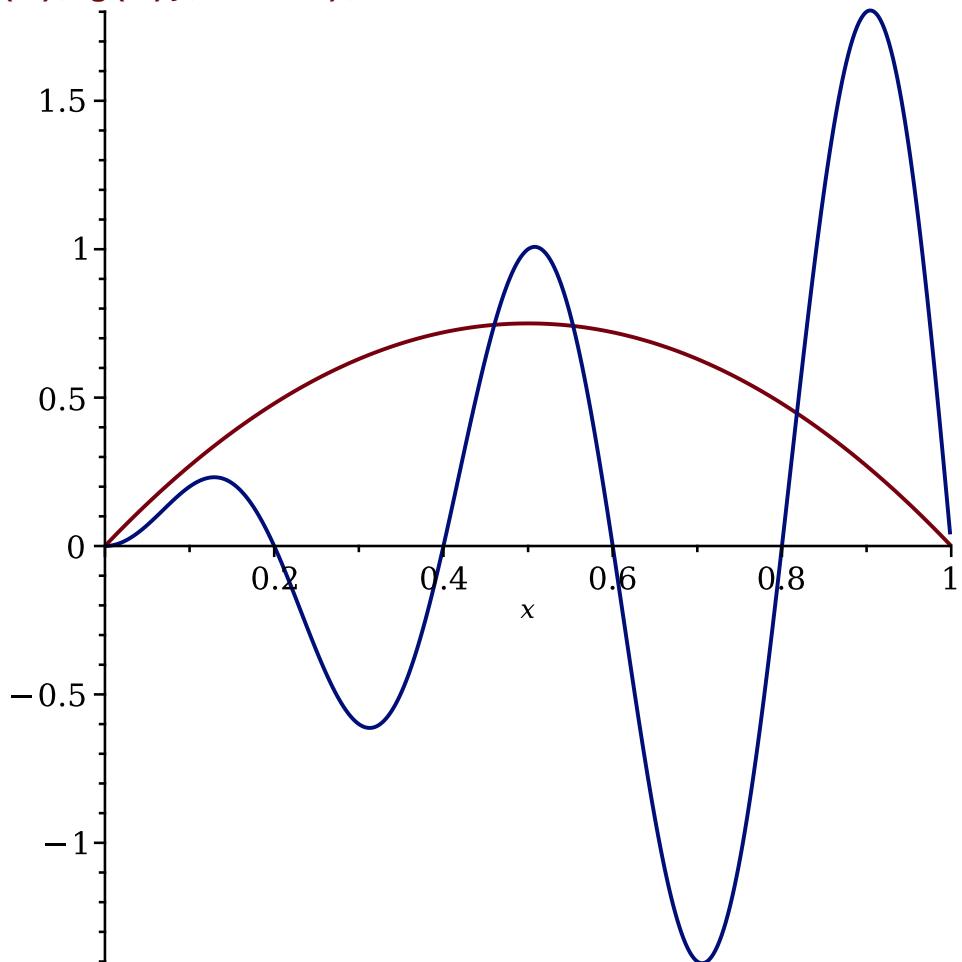
```
g := x -> sin(5*Pi*x)*2*x;
```

$$f := x \mapsto -3 \cdot x \cdot (x - 1)$$

$$g := x \mapsto 2 \cdot \sin(5 \cdot \pi \cdot x) \cdot x$$

(3.2)

```
> plot({f(x), g(x)}, x=0..1);
```



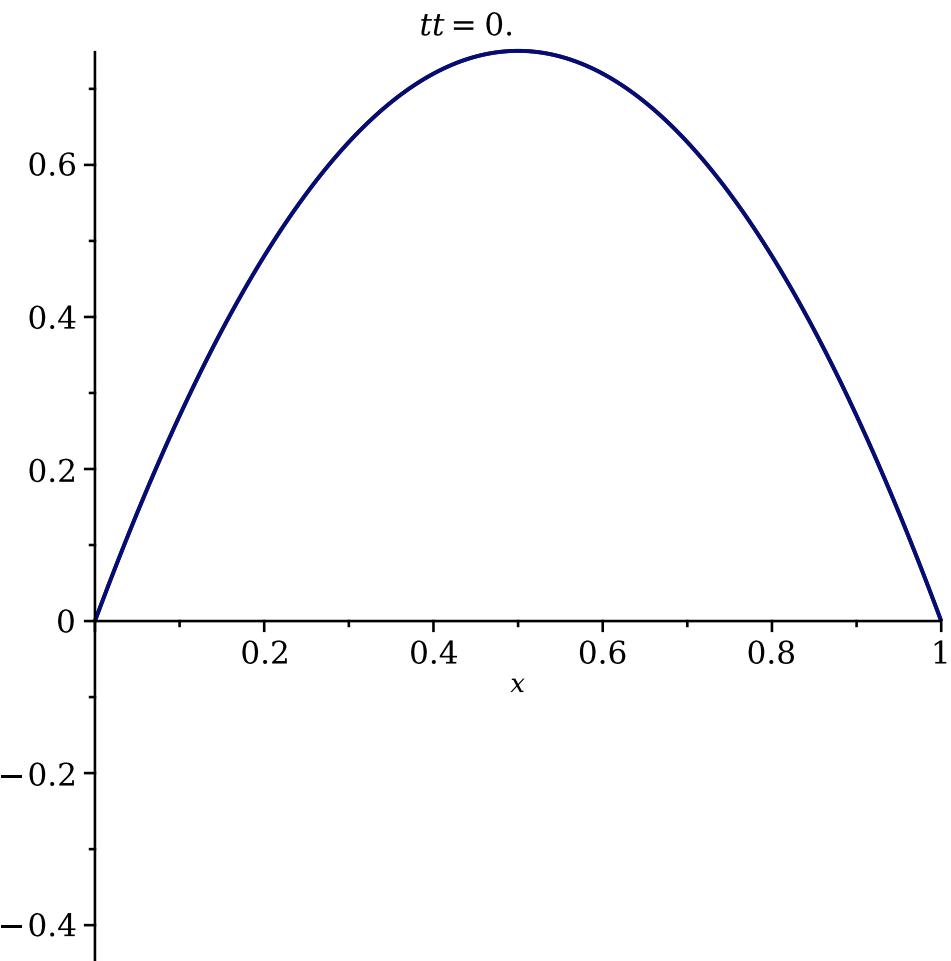
```
> s := n -> 2*int(sin(n*Pi*x)*f(x), x=0..1):
```

```
c := n -> 4/sqrt(4*n**2*Pi**2-1)*int(sin(n*Pi*x)*(g(x)+1/2*f(x)), x=0..1):
```

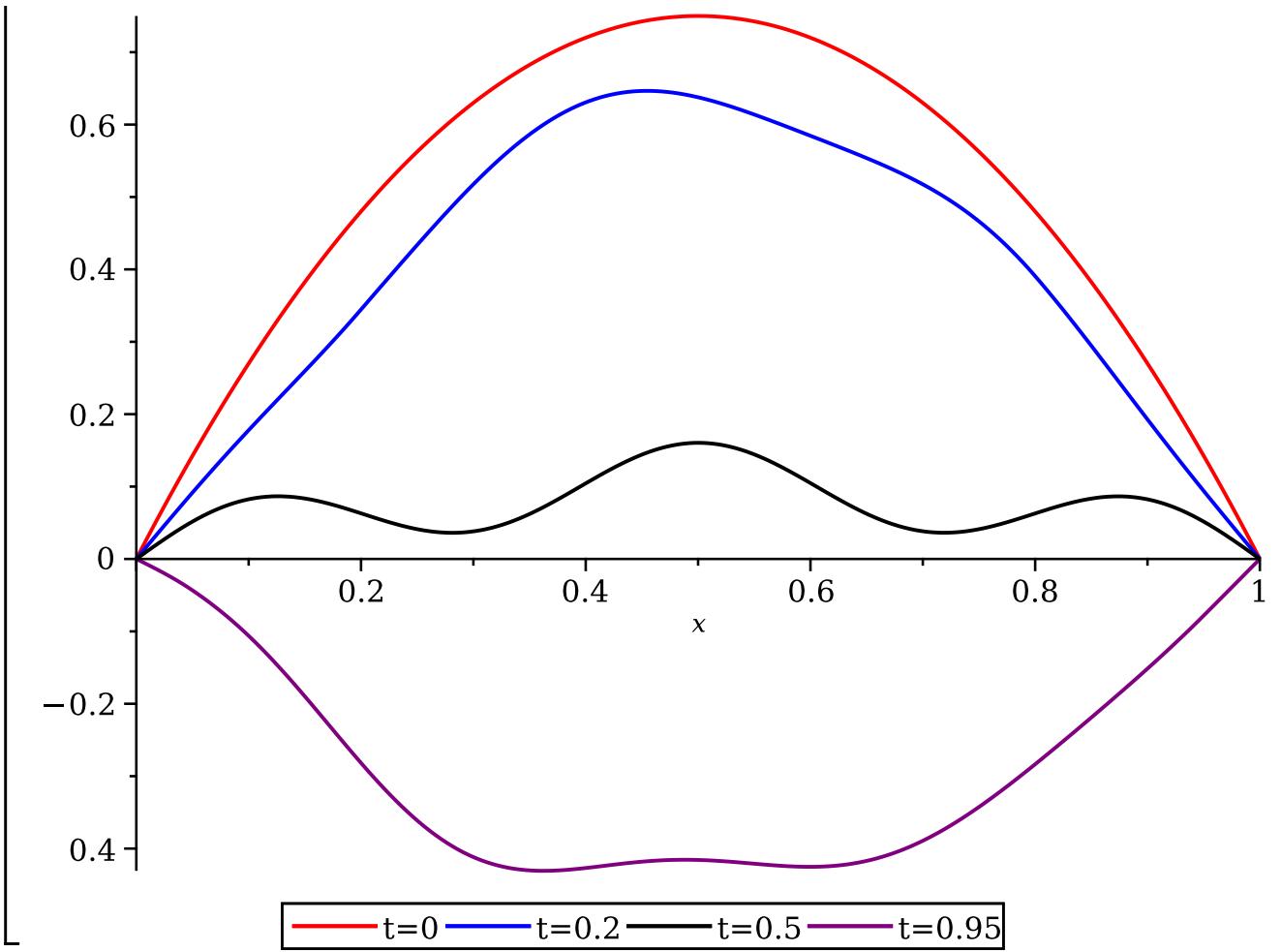
```
> u := (x,t,N) -> sum((s(n)*cos(sqrt(4*n**2*Pi**2-1)/2 * t) + c(n)*
```

```
sin(sqrt(4*n**2*Pi**2-1)/2 * t))*exp(-t/2)*sin(n*Pi*x), n=1..N):
```

```
> animate(plot, [{u(x,tt,80),f(x)}, x=0..1], tt=0..15, frames=80);
```



```
> plot0 := plot(u(x,0.80), x=0..1, color=red, legend="t=0"):
plot1 := plot(u(x,0.2,80), x=0..1, color=blue, legend="t=0.2"):
plot2 := plot(u(x,0.5,80), x=0..1, color=black, legend="t=0.5"):
plot3 := plot(u(x,0.95,80), x=0..1, color=purple, legend="t=0.95"):
> display(plot0, plot1, plot2, plot3);
```



Bord 10

Wiskundige modellering in de ingenieurswetenschappen: bordoefeningenles 10

Oefening 2:

```
> restart:with(plots):
```

Gegevens

```
> h0 := 1;  
L := 4;  
c := 1;
```

$h_0 := 1$
 $L := 4$
 $c := 1$

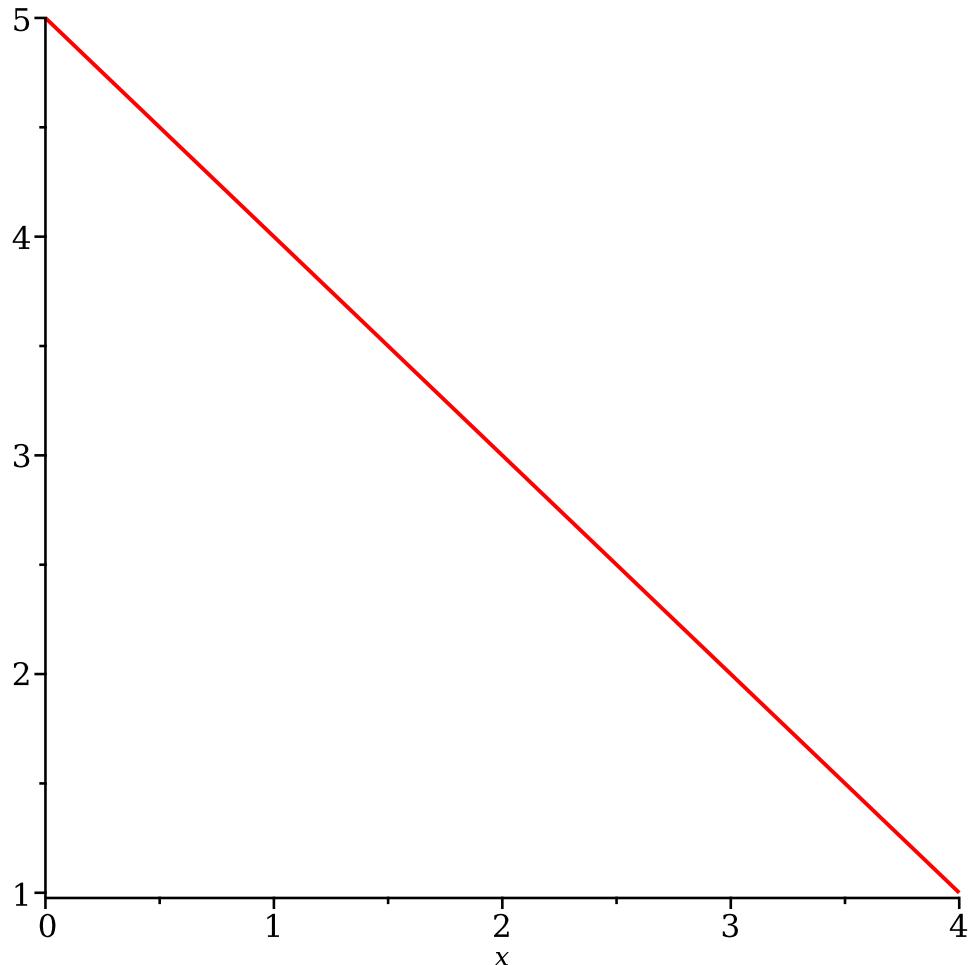
(1.1)

```
> f := x-> -x+5;  
g := x-> x^2;
```

$f := x \mapsto -x + 5$
 $g := x \mapsto x^2$

(1.2)

```
> plot(f(x),x=0..L, color=red);
```



Particuliere oplossing

```
> ut := x-> h0;  $ut := x \mapsto h0$  (1.3)
```

Homogene oplossing: Coefficiënten

```
> s := n -> 2/L * int(cos((2*n+1)*Pi*x/(2*L))*(f(x)-ut(x)), x=0..L);
 $s := n \mapsto \frac{2 \cdot \left( \int_0^L \cos\left(\frac{(2 \cdot n + 1) \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot L}\right) \cdot (f(x) - ut(x)) \, dx \right)}{L}$  (1.4)
```

```
> t := n -> 4/((2*n+1)*Pi) * int(cos((2*n+1)*Pi*x/(2*L))*(g(x)-diff(ut(x),x)), x=0..L);
 $t := n \mapsto \frac{4 \cdot \left( \int_0^L \cos\left(\frac{(2 \cdot n + 1) \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot L}\right) \cdot \left(g(x) - \frac{d}{dx} ut(x)\right) \, dx \right)}{(2 \cdot n + 1) \cdot \pi}$  (1.5)
```

Homogene oplossing: Oplossing

```
> uh := (x,t,N) -> sum( (s(n)*cos(c*(2*n+1)*Pi*t/(2*L)) + t(n)*sin
```

$$(c*(2*n+1)*Pi*t/(2*L))*cos((2*n+1)*Pi*x/(2*L)), n=0..N);$$

$$uh := (x, t, N) \rightarrow \sum_{n=0}^N \left(s(n) \cos\left(\frac{1}{2} \frac{c(2n+1)\pi t}{L}\right) + t(n) \sin\left(\frac{1}{2} \frac{c(2n+1)\pi t}{L}\right) \right) \cos\left(\frac{1}{2} \frac{(2n+1)\pi x}{L}\right)$$
(1.6)

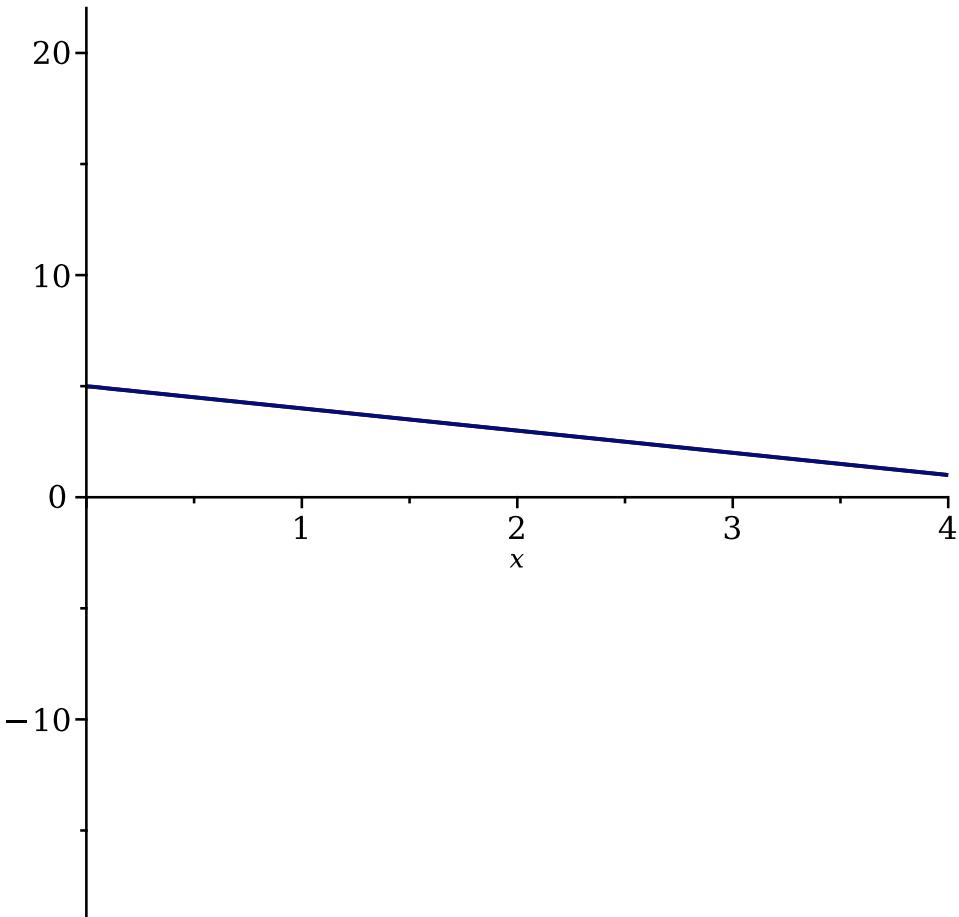
Oplossing

$$> u := (x, t, N) \rightarrow ut(x) + uh(x, t, N);$$

$$u := (x, t, N) \mapsto ut(x) + uh(x, t, N)$$
(1.7)

Visualisatie

$$> animate(plot, [\{u(x, t, 50), f(x)\}, x=0..L], t=0..20, frames=100);$$



```
> plot(\{u(x, 5*32, 50), u(x, 16, 50), u(x, 0, 50)\}, x=0..L);
Error, (in plot) expecting a real constant as range endpoint but
received L
```

Oefening 3:

> restart:with(plots):

Gegevens

```

> h0 := 1;
L := 4;
c := 1;

```

(2.1)

```

> f := x-> piecewise(x<2,5, x>2,1);
g := x-> x^2;

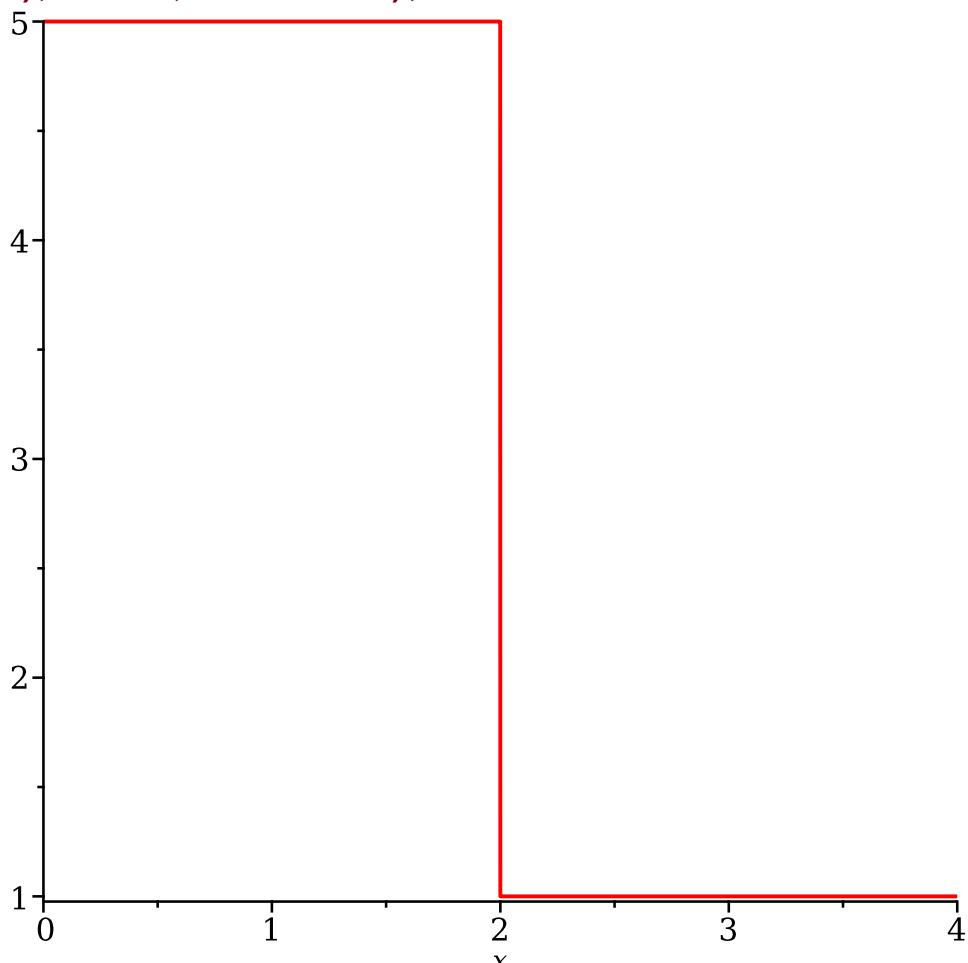
```

$$f := x \mapsto \begin{cases} 5 & x < 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

$$g := x \mapsto x^2$$

(2.2)

```
> plot(f(x),x=0..L, color=red);
```



Particuliere oplossing

```

> ut := x-> h0;

```

ut := $x \mapsto h0$ (2.3)

Homogene oplossing: Coefficiënten

```
> s := n -> 2/L * int(cos((2*n+1)*Pi*x/(2*L))*(f(x)-ut(x)), x=0..L)
```

;

$$s := n \mapsto \frac{2 \cdot \left(\int_0^L \cos\left(\frac{(2 \cdot n + 1) \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot L}\right) \cdot (f(x) - u_t(x)) dx \right)}{L} \quad (2.4)$$

```
> t := n -> 4/((2*n+1)*Pi) * int(cos((2*n+1)*Pi*x/(2*L))*(g(x)-diff(u_t(x),x)), x=0..L);
```

$$t := n \mapsto \frac{4 \cdot \left(\int_0^L \cos\left(\frac{(2 \cdot n + 1) \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot L}\right) \cdot \left(g(x) - \frac{d}{dx} u_t(x)\right) dx \right)}{(2 \cdot n + 1) \cdot \pi} \quad (2.5)$$

Homogene oplossing: Oplossing

```
> uh := (x,t,N) -> sum( (s(n)*cos(c*(2*n+1)*Pi*t/(2*L)) + t(n)*sin(c*(2*n+1)*Pi*t/(2*L)))*cos((2*n+1)*Pi*x/(2*L)), n=0..N);
```

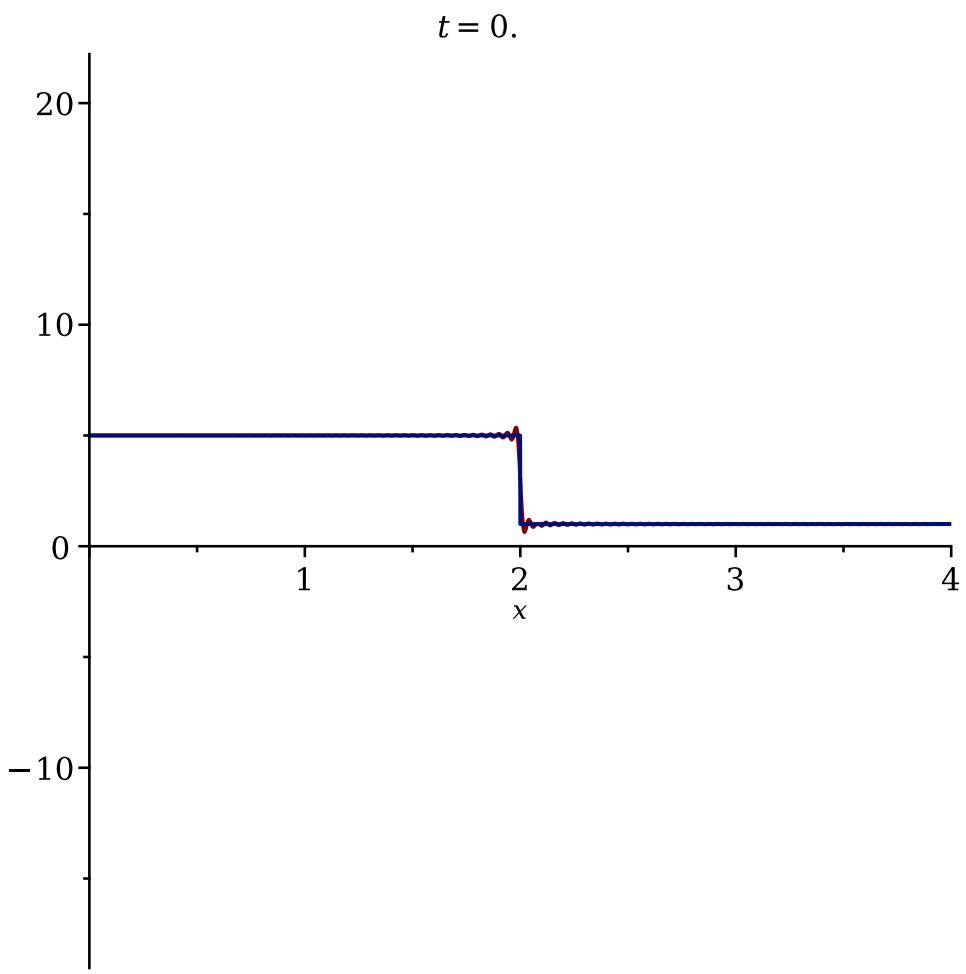
$$uh := (x, t, N) \rightarrow \sum_{n=0}^N \left(s(n) \cos\left(\frac{1}{2} \frac{c(2n+1)\pi t}{L}\right) + t(n) \sin\left(\frac{1}{2} \frac{c(2n+1)\pi t}{L}\right) \right) \cos\left(\frac{1}{2} \frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) \quad (2.6)$$

Oplossing

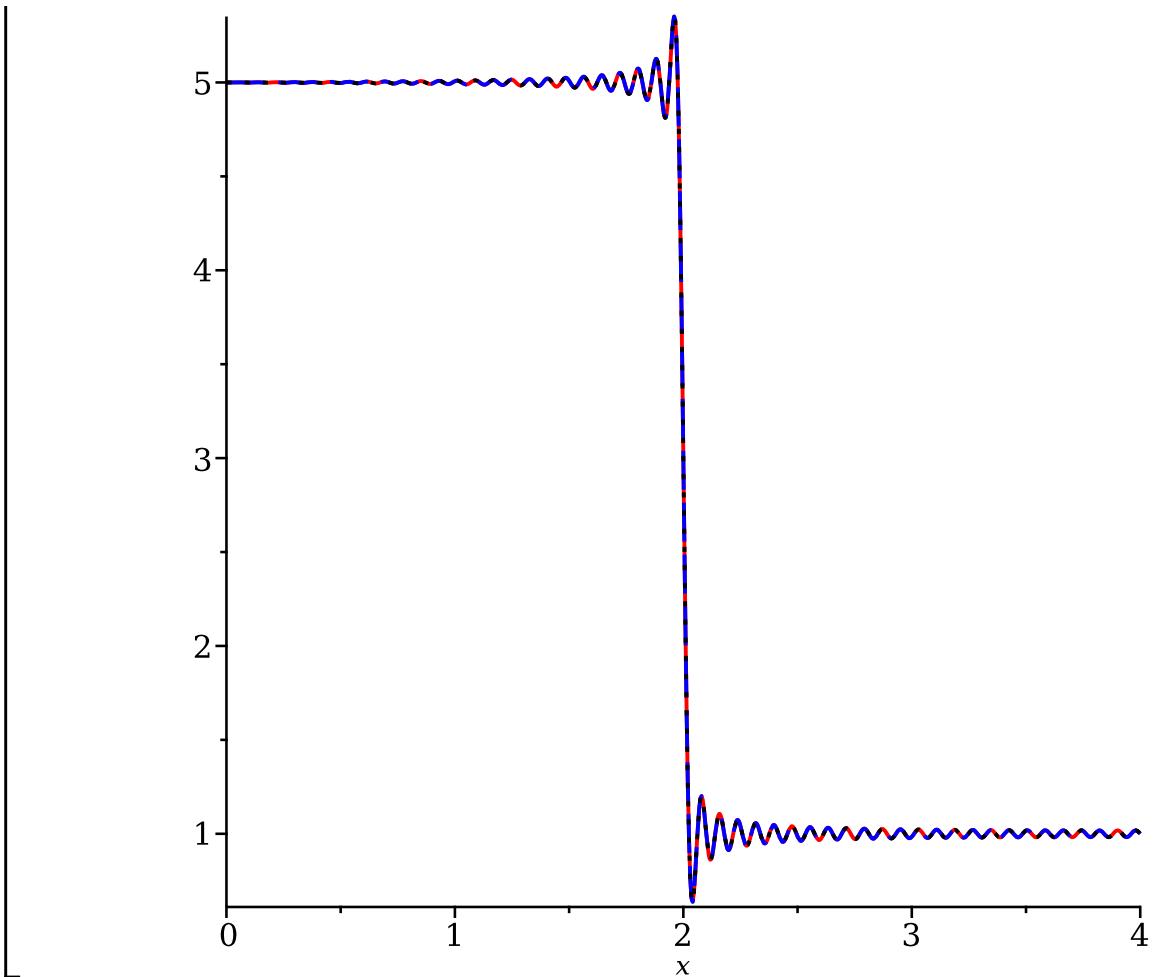
```
> u := (x,t,N) -> u_t(x) + uh(x,t,N);  
u := (x, t, N) \mapsto u_t(x) + uh(x, t, N)
```

Visualisatie

```
> animate(plot, [{u(x,t,200),f(x)}, x=0..L], t=0..20, frames=100);
```

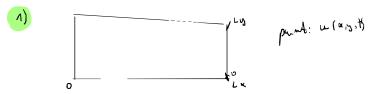


```
> plot0 := plot(u(x,0,100), x=0..L, color=red):
plot1 := plot(u(x,16,100), x=0..L, color=blue, linestyle="dash"):
plot2 := plot(u(x,5*16,100), x=0..L, color=black, linestyle=
"dot"):
display(plot0, plot1, plot2);
```



Huis 11

Bord 11



$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, L_x, t) = 0 \\ \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(x, L_x, t)}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0, 0) = g(x, 0) \\ \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial t} = g(x, 0) \end{array} \right. \quad \text{zu: } u(x, 0, t)$$

1) 2D DGLP mit obigen c: $\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2}$

in Karte matrix: $c \cdot (u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}$

Rechte Seite: $\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} g(x, y) dx dy$
 $\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0, t) = 0 \\ u(x, L_x, t) = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u(x, L_x, t)}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u(x, L_x, t)}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$

Beispiel: $\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0, 0) = g(x, 0) \\ \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial t} = g(x, 0) \end{array} \right. \quad \text{zu: } u(x, 0, t) = g(x, 0)$

Step 1: Schreibweise von Vektoren:

$$u(x, y, t) = X(x) Y(y) T(t) \quad \text{zu: } \frac{\partial u}{\partial x} = X'(x) Y(y) T(t), \frac{\partial u}{\partial y} = X(x) Y'(y) T(t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x) Y(y) T(t)$$

zu weiteren: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X''(x) Y(y) T(t) + X(x) Y''(y) T(t) = T''(t) X(x) Y(y)$

teil durch $X Y T \rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{T''(t)}{T(t)}$

dann ist Lösung $\frac{d}{dt} T(t) = 0$:

$$T(t) = C_1 + C_2 t$$

$$Y(y) = C_3 + C_4 y$$

$$X(x) = C_5 + C_6 x$$

zu lesen (1) zu (2) nach oben aufgeschlagen: Randbedingungen

Die Funktionen sind voneinander unabhängig werden aufgeschlagen.

zu lesen von unten auf (1) nach unten auf geschlagen.

$$X''(x) = X(x) \cdot 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(L_x) = 0$$

$$Y''(y) = Y(y) \cdot 0, \quad Y'(0) = 0, \quad Y'(L_y) = 0$$

dann: $X(x) = A_1 \sin(\frac{n \pi x}{L_x}) + B_1 \cos(\frac{n \pi x}{L_x}) \quad \text{mit } B_1 = 0, \quad \text{da } X(0) = 0 \Rightarrow B_1 = 0$

$$\text{dann } \alpha_m(x) = \cos(\frac{n \pi x}{L_x}), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{und } b_m(x) = \sin(\frac{n \pi x}{L_x}), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

rech: $\sigma_{m_k} = -\left(\frac{n \pi}{L_x}\right)^2, \quad \sigma_{m_0} = -\left(\frac{n_0 \pi}{L_x}\right)^2$

mit d. d. die erwartete Reihenfolge ist dann nach (3):

$$T_{m_0, m_1}(t) = C_1 + \left(\frac{n \pi}{L_x} \alpha_0 + \frac{n_1 \pi}{L_y} \beta_1\right) T_{m_0, m_1}(t)$$

(aus der d. d. Reihenfolge, gleich wie
berechnet am rechten)

$$T_{m_0, m_1}(t) = n_{0, 1} \cos(\pi \sqrt{\frac{n_0^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n_1^2 \pi^2}{L_y^2}} t) \cdot \sin(\pi \sqrt{\frac{n_0^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n_1^2 \pi^2}{L_y^2}} t)$$

diverse obige gleichen:

$$u_{m_0, m_1}(x, y, t) = X_{m_0}(x) Y_{m_1}(y) T_{m_0, m_1}(t)$$

$$= \cos\left(\frac{n \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_1 \pi y}{L_y}\right) \cdot n_{0, 1} \cos(\pi \sqrt{\frac{n_0^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n_1^2 \pi^2}{L_y^2}} t)$$

Step 2: normieren:

$$\sum_{n_0=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} (\cos\left(\frac{n \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_1 \pi y}{L_y}\right))^2 \cdot n_{0, 1}^2 = n_{0, 1}^2 \cdot \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} \cos^2\left(\frac{n \pi x}{L_x}\right) dx = n_{0, 1}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot L_x = n_{0, 1}^2 \cdot L_x$$

Step 3: (aus Vektoren):

$$(1) f(x, y) = \sum_{m_0=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} (\cos\left(\frac{n \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_1 \pi y}{L_y}\right)) n_{0, 1} \cdot \sqrt{\frac{n_0^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n_1^2 \pi^2}{L_y^2}}$$

$$(2) g(x, y) = \sum_{m_0=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} (\cos\left(\frac{n \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_1 \pi y}{L_y}\right)) n_{0, 1} \cdot \sqrt{\frac{n_0^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n_1^2 \pi^2}{L_y^2}} \cdot u_{m_0, m_1}$$

[ohne numerische und geometrische Angaben]

(3): $\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} f(x, y) g(x, y) dx dy = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \sum_{m_0=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} (\cos\left(\frac{n \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_1 \pi y}{L_y}\right)) n_{0, 1} \cdot \sqrt{\frac{n_0^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n_1^2 \pi^2}{L_y^2}} \cdot \sum_{m_0'=0}^{\infty} \sum_{m_1'=0}^{\infty} (\cos\left(\frac{n' \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n'_1 \pi y}{L_y}\right)) n'_{0, 1} \cdot \sqrt{\frac{n'^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n'^2 \pi^2}{L_y^2}} dx dy$

für genau wie in der 3. Dimension:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \sum_{m_0=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_0'=0}^{\infty} \sum_{m_1'=0}^{\infty} (\cos\left(\frac{n \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_1 \pi y}{L_y}\right)) n_{0, 1} \cdot \sqrt{\frac{n_0^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n_1^2 \pi^2}{L_y^2}} \cdot (\cos\left(\frac{n' \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n'_1 \pi y}{L_y}\right)) n'_{0, 1} \cdot \sqrt{\frac{n'^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n'^2 \pi^2}{L_y^2}} dx dy \\ &\text{ausrechnen: } \sum_{m_0=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} (\cos\left(\frac{n \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_1 \pi y}{L_y}\right)) n_{0, 1} \cdot \sqrt{\frac{n_0^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n_1^2 \pi^2}{L_y^2}} \cdot \sum_{m_0'=0}^{\infty} \sum_{m_1'=0}^{\infty} (\cos\left(\frac{n' \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n'_1 \pi y}{L_y}\right)) n'_{0, 1} \cdot \sqrt{\frac{n'^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n'^2 \pi^2}{L_y^2}} \\ &\text{d. h.: } \sum_{m_0=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_0'=0}^{\infty} \sum_{m_1'=0}^{\infty} (\cos\left(\frac{n \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_1 \pi y}{L_y}\right)) n_{0, 1} \cdot (\cos\left(\frac{n' \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n'_1 \pi y}{L_y}\right)) n'_{0, 1} \end{aligned}$$

zu lesen wie in der 3. Dimension:

$$= \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} \sum_{m_0=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} (\cos\left(\frac{n \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_1 \pi y}{L_y}\right)) n_{0, 1} \cdot \sum_{m_0'=0}^{\infty} \sum_{m_1'=0}^{\infty} (\cos\left(\frac{n' \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n'_1 \pi y}{L_y}\right)) n'_{0, 1} dx$$

$$= \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} \sum_{m_0=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} (\cos\left(\frac{n \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_1 \pi y}{L_y}\right)) n_{0, 1} \cdot \sum_{m_0'=0}^{\infty} \sum_{m_1'=0}^{\infty} (\cos\left(\frac{n' \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n'_1 \pi y}{L_y}\right)) n'_{0, 1} dx$$

$$= \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} \sum_{m_0=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} (\cos\left(\frac{n \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_1 \pi y}{L_y}\right)) n_{0, 1} \cdot \sum_{m_0'=0}^{\infty} \sum_{m_1'=0}^{\infty} (\cos\left(\frac{n' \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n'_1 \pi y}{L_y}\right)) n'_{0, 1} dx$$

die Integrale gleich zu best:

$$u(x, y, t) = \sum_{m_0=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_0'=0}^{\infty} \sum_{m_1'=0}^{\infty} (\cos\left(\frac{n \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_1 \pi y}{L_y}\right)) n_{0, 1} \cdot (\cos\left(\frac{n' \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n'_1 \pi y}{L_y}\right)) n'_{0, 1} \cdot \sqrt{\frac{n_0^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n_1^2 \pi^2}{L_y^2} + \frac{n'^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n'^2 \pi^2}{L_y^2}}$$

```

[> restart: with(inttrans): assume(t > 0): assume(sigma > 0): assume(d > 0):
[> initial := n0·exp(-x^2/σ^2):
[> phi0 := simplify(fourier(initial, x, k))

$$\phi_0 := n_0 e^{-\frac{k^2 \sigma^2}{4}} \sigma \sim \sqrt{\pi} \quad (1)$$

[> PHI := exp(-d·k^2·t)·exp(-d·K^2·t)·phi0

$$PHI := e^{-d k^2 t} e^{-d K^2 t} n_0 e^{-\frac{k^2 \sigma^2}{4}} \sigma \sim \sqrt{\pi} \quad (2)$$

[> simplify(invfourier(PHI, k, x))

$$\frac{n_0 \sigma e^{\frac{-4 K^2 d^2 t^2 - K^2 d \sigma^2 t - x^2}{4 d t + \sigma^2}}}{\sqrt{4 d t + \sigma^2}} \quad (3)$$

[>

```

WC 11

$$\int \hat{J}^2 \cdot \varphi(\alpha, t) - c^2 \int_{\alpha}^2 \varphi(\alpha, t) = 0$$

1. Fouriertransform :

- $\int_{\alpha}^2 \cdot \varphi(\alpha, t) \rightarrow -k^2 \cdot \hat{\varphi}(k, t)$

- $\int \hat{J}^2 \varphi(\alpha, t) \rightarrow \int \hat{\varphi}^2(k, t)$

$$\rightarrow \int \hat{\varphi}^2 + c^2 \cdot k^2 \cdot \hat{\varphi}(k, t) = 0 \quad (\text{müssen wir Fourierreihen transformieren})$$

↳ - the basic formula is

$$\hat{\varphi}(k, t) \approx a(k) \cdot \cos(c k t) + b(k) \cdot \sin(c k t)$$

$$J \hat{J} \varphi(k, t)$$

$$R \cdot c$$

= Vn allein in

↳ inverse Fourier.

= Zie nepte

$$J \hat{J} = -c k \cdot a(k) \cdot \sin(0)$$

$$+ c k \cdot b(k) \cdot \cos(0)$$

$$\Rightarrow c k \cdot b(k) = \dots$$

transformations of $x(t)$:

1. A shift of $x(t)$ by $-a$ (i.e., $x(t+a)$).
2. A time reversal and shift of $x(t)$ by $-a$ (i.e., $x(-t-a)$).

The goal is to find the Fourier Transform $\mathcal{F}\{y(t)\}(\omega)$ in terms of $\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega)$, denoted as $X(\omega)$.

Fourier Transform Basics

The Fourier Transform of a function $f(t)$ is defined as:

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

For linear combinations of signals, the Fourier Transform is linear:

$$\mathcal{F}\{f_1(t) + f_2(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\}(\omega) + \mathcal{F}\{f_2(t)\}(\omega)$$

Solution Steps

1. Express the Fourier Transform of $y(t)$

From the given $y(t)$, we apply the definition of the Fourier Transform:

$$\mathcal{F}\{y(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-i\omega t} dt$$

Substituting $y(t) = x(t+a) + x(-t-a)$:

$$\mathcal{F}\{y(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+a)e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} x(-t-a)e^{-i\omega t} dt$$

2. Change of Variables

To evaluate each term, we perform a substitution.

- For $x(t+a)$: Let $u = t+a$, so $t = u-a$ and $dt = du$. The integral becomes:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t+a)e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-i\omega(u-a)} du \\ &= e^{ia\omega} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-i\omega u} du \\ &= e^{ia\omega} X(\omega) \end{aligned}$$

- For $x(-t-a)$: Let $v = -t-a$, so $t = -v-a$ and $dt = -dv$. The integral becomes:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(-t-a)e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(v)e^{-i\omega(-v-a)} (-dv) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(v)e^{i\omega v} e^{i\omega a} dv \\ &= e^{i\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} x(v)e^{i\omega v} dv \\ &= e^{i\omega a} X(-\omega) \end{aligned}$$

3. Combine Results

Adding the two results:

$$\mathcal{F}\{y(t)\}(\omega) = e^{ia\omega} X(\omega) + e^{i\omega a} X(-\omega)$$

$$\mathcal{F}\{y(t)\}(\omega) = e^{ia\omega} [X(\omega) + X(-\omega)]$$

(↓)

Figure 8.153: Exercise 4

Bord 12

$$\begin{aligned} L[y'] &= s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) = 4(s) \\ L[y] &= s Y(s) - y(0) \\ L[y(t)] &= Y(s) \end{aligned}$$

↳ minimaal:

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + 4(s)Y(s) - 4 + 4Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) - s - 1 + 4sY(s) - 4 + 4Y(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{s^2 + s}{s^2 + 4s + 4} = Y(s) \rightarrow \text{inverse Laplace:}$$

\$y(t) = (2t+1) e^{-2t} \cdot \Theta(t)\$

→ voor dat & enkel in particulier kant staat.

Figure 8.154: Exercise 1

$$L[f(t)](s) = \frac{s+5}{s^2 + 4s + 4}$$

(Maple)

$\frac{1}{s+2}$ $\frac{3}{(s+2)^2}$

$e^{-2t} \cdot \Theta(t)$ $3 + e^{-2t} \cdot \Theta(t)$

$e^{6t} \Theta(t) (1 + 3)$

Figure 8.155: Exercise 2

```
[> with(inttrans): with(plots):
```

```
[> eq :=  $\frac{(z+5)}{z^2 + 4 \cdot z + 4}$ 
```

$$eq := \frac{z+5}{z^2 + 4z + 4} \quad (1)$$

```
[> convert(eq, parfrac)
```

$$\frac{1}{z+2} + \frac{3}{(z+2)^2} \quad (2)$$

```
[> invlaplace( $\frac{3}{(z+2)^2}, z, t$ )
```

$$3t e^{-2t} \quad (3)$$

```
[>
```

$$4) \quad a) \quad \dot{A} = -4A$$

$$\dot{B} = 3A - 2B$$

$$\dot{C} = A + 2B$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(0) = A_0, \quad B(0) = 0, \quad C(0) = 0 \\ A_0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \tilde{A}(0) - \tilde{A}(0) = -4\tilde{A}(0)$$

$$\Leftrightarrow (n+4)\tilde{A}(n) = A_0$$

$$\therefore \tilde{A}(s) = \frac{A_0}{s+4}$$

$$\tilde{B}(0) - B(0) = 3 \frac{A_0}{n+4} - 2 \cdot \tilde{B}(n)$$

$$\Leftrightarrow (n+2)\tilde{B}(n) = \frac{3A_0}{n+4} \quad \therefore \tilde{B}(n) = \frac{3A_0}{(n+4)(n+2)}$$

$$\tilde{C}(0) - C(0) = \frac{A_0}{n+4} + \frac{2 \cdot 3A_0}{(n+4)(n+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_0 n + A_0 L + 6A_0}{(n+4)(n+2)} = \frac{A_0(n+2)}{n+4}$$

$$(b) \quad \text{inverse } C(n) = \text{Matrize } \dots \\ (\hookrightarrow \text{Autorenname von B2ied}) \quad A_0$$

Figure 8.156: Exercise 4

```

> restart: with(inttrans): with(VectorCalculus):
> A :=  $\frac{AO}{s+4}$ 

$$A := \frac{AO}{s+4} \tag{1}$$

> B :=  $\frac{3 \cdot A}{s+2}$ 

$$B := \frac{3AO}{(s+4)(s+2)} \tag{2}$$

> C := simplify( $\frac{(A + 2 \cdot B)}{s}$ )

$$C := \frac{AO(s+8)}{(s+4)(s+2)s} \tag{3}$$

> # We weten C nu in laplace space, convert to time space
> c := invlaplace(C, s, t)

$$c := AO(1 - e^{-3t}(\cosh(t) + 2 \sinh(t))) \tag{4}$$

> # Nu pakken we de limiet van t naar oneindig
> l := limit(c, t = infinity)

$$l := AO \tag{5}$$


```

$$\begin{aligned}
 5) \quad & f\left(\underbrace{\frac{e^{i\omega} \sin(\omega t)}{a}}_{\text{Laplace nach } s = i\omega}, \theta(t)\right)(\omega) = \frac{1}{a^2 + \omega^2 + 2i\omega - \omega^2} \\
 & = L\left(\underbrace{\frac{i e^{i\omega} \sin(\omega t)}{a}}_{\text{Laplace nach } s = i\omega}\right)(\omega) \\
 & = \frac{1}{a} \cdot L\left(e^{i\omega} \sin(\omega t)\right)(\omega) \\
 & = \frac{1}{a} \cdot \underbrace{\frac{a}{(z+i\omega)^2 + a^2}}_{\text{now substitute } z=i\omega} \cdot \underbrace{\frac{1}{(z+i\omega)^2 + a^2}}_{\text{now substitute } z=i\omega} \\
 & \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{(i\omega + i\omega)^2 + a^2}}_{\text{?}}
 \end{aligned}$$

Figure 8.157: Exercise 5

Mock Exam

Mock-examen: opgaven

- Examenduur: 3h15min (4h voor studenten die door een BST recht hebben op een langere examentijd)
- Open boek: pdf file van cursus en file met Maple-commando's kan via PC worden geraadpleegd
- Ook Maple-file met commando's kan worden gebruikt
- Maple: kan als hulpmiddel worden gebruikt, maar antwoorden worden schriftelijk gegeven. Schrijf in je antwoord waarvoor Maple gebruikt.

1. (3 punten) Voor algemene vierkante matrices \mathbf{A} definiëren we $\sin(\mathbf{A})$, via de machtreeks van de sinus-functie:

$$\text{Defin.} \quad \sin(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \mathbf{A}^{2n+1}.$$

- Bepaal via matrixdiagonalisatie een compacte uitdrukking (sommeer eventuele machtreetksen) voor de matrix $\sin(\mathbf{A})$, waarbij $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
 - Bepaal nu ook voor $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ een compacte uitdrukking voor $\sin(\mathbf{A})$.
2. (6 punten) Beschouw het gedeelte R van de cilinder $x^2 + z^2 = 1$ met $z \leq 0$ begrepen tussen de vlakken $y = -1$ en $y = 1$. Noteer met D_1 het grondvlak van de halve cilinder, en met D_2 het bovenvlak. Beschouw het oppervlak $\mathcal{S} = R \cup D_1 \cup D_2$. De rechthoek \mathcal{C} in het XY -vlak is de rand van \mathcal{S} . Gegeven is het vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2 \mathbf{e}_x - x \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$.

- Maak een schets van de beschreven meetkundige situatie. Duid alle namen (R , D_1 , D_2 , \mathcal{S} en \mathcal{C}) aan die bij deze schets passen.
- Gebruik de stelling van Stokes om de lijnintegraal

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

om te zetten in een oppervlakte-integraal over \mathcal{S} . De zin op \mathcal{C} mag door uzelf gekozen worden maar moet duidelijk aangegeven worden op de figuur.

$$1) \quad \text{dim}(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)} \cdot A^{2m+1}$$

$$\text{dim}(A) = M \cdot \underbrace{\text{dim}(D)}_1 \cdot \underbrace{M^T}_{\text{rechtsvektor}} \rightarrow \text{rechtsdrehung}$$

$\begin{pmatrix} \text{dim}(A) & 0 \\ 0 & \text{dim}(A) \end{pmatrix}$

// Maple

we calculate the Jordan form

$$J, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{then } \text{dim}(A) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{dim}(2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^T // \text{Maple}$$

$= \frac{\text{dim}(2)}{4} \cdot A, \text{ with } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Ansatz } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{dim}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{dim}(2) \end{pmatrix} = \text{dim}(2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \tilde{x} + \tilde{z}^2 = 1 \text{ und } z \in 0,$$

$$F(x, y, z) = (-\tilde{x}), -\alpha, 1)$$

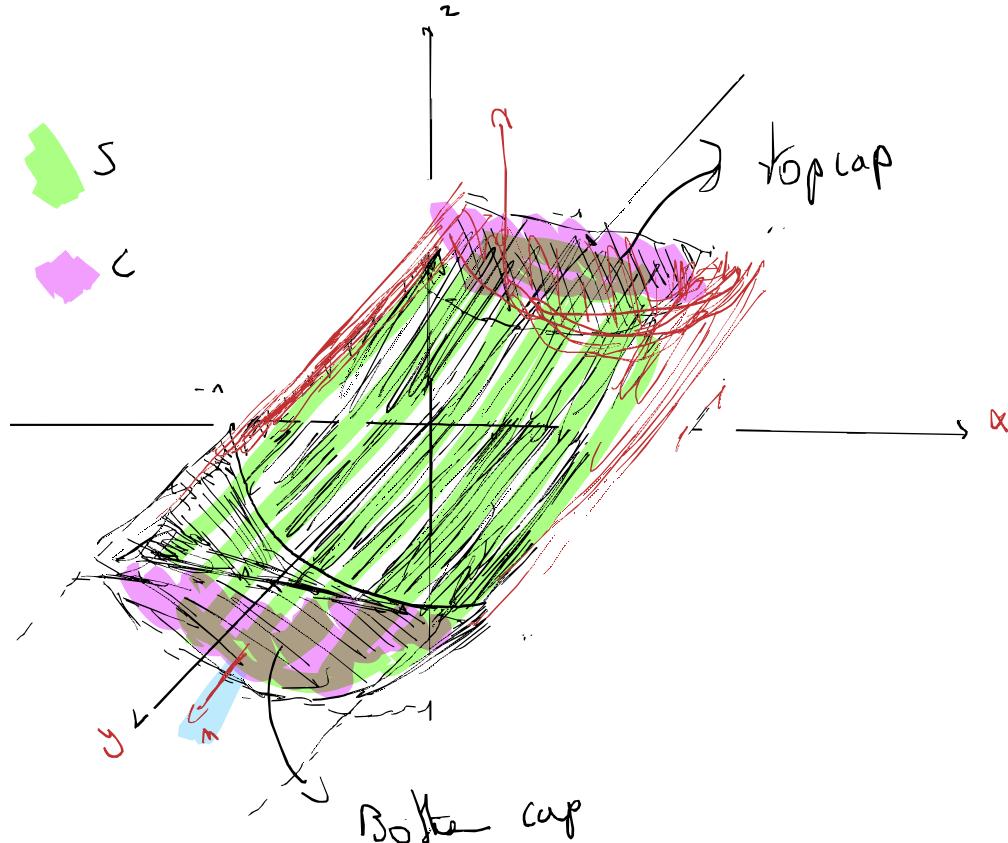
$$\vec{x} = (R \cos \theta, R \sin \theta, z), \text{ und } R = \alpha$$

zylinderkoordinaten

$$\tilde{x} + \tilde{z}^2 = 1 \text{ in einem zylinder mit halber H.}$$



via Maple fñhren wir:



$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_S d\vec{\alpha} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = (0, 0, -1+2y)$$

somit berechnen wir die curl im Maple:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \overset{\text{normal}}{m} \cdot dS = (0, -1, 0)$$

$m = \boxed{\nabla f}$

$$= \iint_{S'} (0, 0, -1+2y) \cdot (0, -1, 0) \, dx \, dy = 0$$

- c. Bereken de bekomen oppervlakte-integraal.
3. **(6 punten)** Beschouw de uitwijking van een bepaalde snaar met lengte $L = 2$. De partiële differentiaalvergelijking die de uitwijking $u(x, t)$ van de snaar in kwestie beschrijft leest (bemerk de tweede extra 'wrijvingsterm' in het linkerlid):
- $$\partial_t^2 u(x, t) + \partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t)$$
- De uitwijking $u(x, t)$ voldoet ook aan randvoorwaarden
- $$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ \partial_x u(x, t)|_{x=2} = 0 \end{cases}$$
- Op het begintijdstip $t = 0$ voldoen de uitwijking en snelheid van de snaar aan
- $$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ \partial_t u(x, t)|_{t=0} = \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)^3 \end{cases}$$
- Vind de oplossing $u(x, t)$ voor $(x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty[$ met behulp van scheiden der veranderlijken. Schrijf deze als superpositie van reële (!) normale modes en bepaal de expansiecoëfficiënten in hun meest compacte vorm.
 - Bespreek het limiet gedrag voor $t \rightarrow +\infty$.
4. **(3 punten)** Op N regelmatig verdeelde tijdstippen $t_n = nh$ ($n = 0, 1, \dots, N - 1$) wordt de hoogte $y(t_n) \equiv y_n$ van een voorwerp gemeten, met h de tijd tussen twee metingen. De exacte positie van het voorwerp wordt gegeven door $y(t)$. Men wil nu, gebruik makend van de meetpunten y_n , de snelheid op de tijdstippen t_n zo goed mogelijk bepalen.

Gegeven is een eindige differentie-formule voor de snelheid in t_n voor $n = 0, 1, 2, \dots, N - 3$.

$$y'(t_n) \approx v_n = \frac{Ay_n + By_{n+1} + Cy_{n+2}}{h}$$

Bepaal de coëfficiënten A, B en C zodat de bovengrens op de absolute fout $|y'(t_n) - v_n|$ kwadratisch schaalt met de stapgrootte h . (Je kan hierbij veronderstellen dat $y(t)$ voldoende braaf is.)

5. **(2 punten)** Beschouw het continue signaal

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

We bekomen een discreet signaal door deze functie te samplen als

$$x_n = f(n\Delta t), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

Toon analytisch aan dat de discrete fourier componenten \tilde{x}_k gegeven worden door

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{2i\sqrt{N}} \left(e^{i(\frac{\omega}{2}\Delta t - \pi\frac{k}{N})(N-1)} \frac{\sin\left((\frac{\omega}{2}\Delta t - \frac{\pi}{N}k)N\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\Delta t - \frac{\pi}{N}k\right)} - e^{-i(\frac{\omega}{2}\Delta t + \frac{\pi}{N}k)(N-1)} \frac{\sin\left((\frac{\omega}{2}\Delta t + \frac{\pi}{N}k)N\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\Delta t + \frac{\pi}{N}k\right)} \right)$$

Hiervoor kan je gebruik maken van

$$\sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

4) Verfijnen van formule en controleren.

$$y_m = y(t_m)$$

$$y_{m+1} = y(t_m + h) \quad (1)$$

$$y_{m+2} = y(t_m + 2h) \quad (2)$$

$$(1) = y(t_m) + h \cdot y'(t_m) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(t_m) + \frac{h^3}{6} \cdot y'''(t_m) + O(h^4)$$

$$(2) = y(t_m) + 2h \cdot y'(t_m) + \frac{(2h)^2}{2} \cdot y''(t_m) + \frac{8h^3}{6} \cdot y'''(t_m) + O(h^4)$$

$$\begin{aligned} y'(t_m) \approx v_m &= \frac{A y_m + B y_{m+1} + C y_{m+2}}{h} \\ &= A y(t_m) + B(y(t_m) + h \cdot y'(t_m)) + \frac{h^2}{2} y''(t_m) + \frac{h^3}{6} y'''(t_m) + O(h^4) \\ &\quad + C(y(t_m) + 2h \cdot y'(t_m) + \frac{(2h)^2}{2} \cdot y''(t_m) + \frac{8h^3}{6} \cdot y'''(t_m) + O(h^4)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{standaardvorm:} \\ &= \frac{y(t_m)}{h} \cdot (A + B + C) + h \cdot y'(t_m) (B + 2C) + h^2 y''(t_m) \left(\frac{1}{2} B + \frac{4}{3} C \right) \\ &\quad + h^3 \cdot y'''(t_m) \left(\frac{1}{6} B + \frac{4}{3} C \right) + O(h^4) \end{aligned}$$

om de formule standaard te maken moet

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B+C=0 \\ B+2C=1 \\ \frac{1}{2}B+\frac{4}{3}C=0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} \text{want dit de vorm is van functie die} \\ \text{we willen maken.} \end{array}$$

niet oplossen in maple:

$$\left\{ \begin{array}{l} A=-\frac{3}{2} \\ B=2 \\ C=-\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$5) \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}$$

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{-i 2\pi k n / N}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \text{ also } c_n = \sin(\omega n \Delta t) \\ &\Rightarrow \frac{e^{i\omega n \Delta t} - e^{-i\omega n \Delta t}}{2i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k &= \frac{1}{2i\sqrt{N}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{i\omega n \Delta t} - e^{-i\omega n \Delta t} \right) \cdot e^{-i \frac{2\pi k n}{N}} \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{N}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{i\omega \left(n \Delta t - \frac{k \pi}{N} \right)} - e^{-i\omega \left(n \Delta t - \frac{k \pi}{N} \right)} \right) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1-z^N}{1-z}$$

$$\begin{aligned} \text{Woraus: } z_1 &= e^{i\omega \left(\Delta t - \frac{k \pi}{N} \right)} & \text{so } \tilde{c}_k &= \frac{1}{2i\sqrt{N}} \cdot \left[\frac{1-z_1^N}{1-z_1} - \frac{1-z_2^N}{1-z_2} \right] \\ z_2 &= e^{-i\omega \left(\Delta t - \frac{k \pi}{N} \right)} \\ & \vdots \\ & \text{jedank er!} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha} u(\alpha, t) + \int_{\alpha} u(\alpha, t) = \int_{\alpha} u(\alpha, t)$$

Nun NVW:

$$\begin{cases} u(\alpha, 0) = 0 \\ \int_{\alpha} u(x, 0) |_{x=0} = 0 \end{cases}$$

Beschränkung:

$$\begin{cases} u(\alpha, 0) = 0 \\ \int_{\alpha} u(x, 0) |_{x=0} = (\sin(\frac{\pi}{4}\alpha))^3 \end{cases}$$

$$u(\alpha, t) = X(\alpha) \cdot T(t)$$

$$\Leftrightarrow T'(t) \times X(\alpha) + T(t) \times X'(\alpha) = X(\alpha) \cdot T(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{T''(t)}{T(t)}, \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(\alpha)}{X(\alpha)}$$

$$(i) \int_0^{\alpha} u(\alpha, t) dt = X(\alpha) + \sigma \cdot X(\alpha) = 0$$

$$(ii) \int_0^{\alpha} T(t) dt = T''(t) + T'(t) + \sigma T(t) = 0$$

$$(i) \text{ if } \sigma > -1: X(\alpha) = A \sin(\theta \alpha) + B \cos(\theta \alpha)$$

$$\text{apply } X(0) \Rightarrow 0 + B = 0, \text{ so}$$

$$X(\alpha) = A \sin(\theta \alpha)$$

$$\text{apply } X'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} X'(0) &= -B \sin(\theta \alpha) + A \theta \cos(\theta \alpha) = 0 \\ &\Rightarrow \cos(\theta \alpha) = 0 \Leftrightarrow \theta \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi + 2n\pi}{2\alpha} \end{aligned}$$

$$\text{so } X(\alpha) = A \sin\left(\frac{\pi + 2n\pi}{2\alpha} \alpha\right)$$

$$(ii) T''(t) + T'(t) + \sigma T(t) = 0 \quad \text{and } \sigma = \theta^2$$

$$\Rightarrow T''(t) + T'(t) + \theta^2 T(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + z + \theta^2 = 0$$

$$T_n(t) = e^{-\frac{1}{2}\theta^2 t} \left(c_1 \cos\left(\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{4}} t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{4}} t\right) \right)$$

so the normal modes:

$$u(\alpha, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(c_1 \cos\left(\sqrt{\theta_m^2 - \frac{1}{4}} t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\theta_m^2 - \frac{1}{4}} t\right) \right) \sin(\theta_m \alpha)$$

Nun schaue ich mir die beginnen an:

die beginnen annehmen werden:

$$\begin{cases} u(\alpha, 0) = 0 \\ \int_{\alpha} u(x, 0) |_{x=0} = (\sin(\frac{\pi}{4}\alpha))^3 \end{cases}$$

$$i) u(\alpha, 0) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin(\theta_m \alpha) = 0 \quad c_1 = 0.$$

$$m \in \mathbb{N}$$

$$ii) \int_{\alpha} u(x, 0) |_{x=0} = (\sin(\frac{\pi}{4}\alpha))^3$$

$$\Rightarrow u(\alpha, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta_m^2 t} \left(c_1 \cos\left(\sqrt{\theta_m^2 - \frac{1}{4}} t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\theta_m^2 - \frac{1}{4}} t\right) \right) \sin(\theta_m \alpha)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cdot \sqrt{\theta_m^2 - \frac{1}{4}} \cdot \sin(\theta_m \alpha) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\alpha\right) \right)$$

$$\text{so } u(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cdot \sqrt{\theta_m^2 - \frac{1}{4}} \cdot \sin(\theta_m \alpha)$$

$$\text{also } t = \infty \rightarrow u(x, \infty) = 0! \quad (\text{zweite Verwachung})$$

Chapter 9

Most Important Exercises

9.1 Week 1

9.1.1 Huis

```
[> restart: with(LinearAlgebra):
> t := taylor(sqrt(x+4)^3, x = 0, 3);
v := sqrt(y+4)^3;
t := 8 + 3x +  $\frac{3}{16}x^2 + O(x^3)$ 
v :=  $(y+4)^{3/2}$  (1)

=> # voor  $5^{\frac{3}{2}}$  nemen we x = 1
> x_1 := evalf( $8 + 3 + \frac{3}{16}$ )
x_1 := 11.18750000 (2)

=> # Wat is de fout? Wel, dat zal de derde term zijn ( $O(x^3)$ )
> error_1 := abs( $\frac{x^3}{6} \cdot \text{diff}(v, y\$3)$ );
error_1 := evalf(subs(y=0, x=1, error_1))
error_1 :=  $\frac{|x|^3}{16|y+4|^{3/2}}$ 
error_1 := 0.007812500000 (3)

=> # voor  $6^{\frac{3}{2}}$  nemen we x = 2
> x_2 := evalf( $8 + 3 \cdot 2 + \frac{3}{16} \cdot 2^2$ )
x_2 := 14.75000000 (4)

=> error_2 := abs( $\frac{x^3}{6} \cdot \text{diff}(v, y\$3)$ )
error_2 :=  $\frac{|x|^3}{16|y+4|^{3/2}}$  (5)

=> error_2 := evalf(subs(x=2, y=0, error_2))
error_2 := 0.06250000000 (6)

=> # Waarom nemen we y = 0? Omdat dit de grootste fout zou maken, we
nemen altijd max. Dus fout |element {0, 1, 2}|
```

9.1.2 WC

```

> p := x→x·(x - 1) - a
       $p := x \mapsto x \cdot (x - 1) - a$  (1)

> # i
> p_i := subs(a = 0, p(x))
       $p_i := x \cdot (x - 1)$  (2)

> solve(p_i = 0)
      0, 1 (3)

> # Dus lambda = 0, en lambda = 1
> # Benader naar x = 0
> x_0 := 0 + u·a + v·a2
       $x_0 := va^2 + ua$  (4)

> p_subs_0 := subs(x = x_0, p(x))
       $p_{subs\_0} := (va^2 + ua) \cdot (va^2 + ua - 1) - a$  (5)

> p_expand_0 := expand(p_subs_0)
       $p_{expand\_0} := a^4 v^2 + 2 a^3 u v + a^2 u^2 - v a^2 - u a - a$  (6)

> coeff_1_0 := coeff(p_expand_0, a, 1)
       $coeff_{1\_0} := -u - 1$  (7)

> coeff_2_0 := coeff(p_expand_0, a, 2)
       $coeff_{2\_0} := u^2 - v$  (8)

> solve_0 := solve({coeff_1_0 = 0, coeff_2_0 = 0}, {u, v})
       $solve_0 := \{u = -1, v = 1\}$  (9)

> result_0 := subs(u = rhs(solve_0[1]), v = rhs(solve_0[2]), x_0)
       $result_0 := a^2 - a$  (10)

>
> # Benader 1
> x_1 := 1 + u·a + v·a2
       $x_1 := va^2 + ua + 1$  (11)

> p_subs_1 := subs(x = x_1, p(x))
       $p_{subs\_1} := (va^2 + ua + 1) \cdot (va^2 + ua) - a$  (12)

> p_expand_1 := expand(p_subs_1)
       $p_{expand\_1} := a^4 v^2 + 2 a^3 u v + a^2 u^2 + va^2 + ua - a$  (13)

> coeff_1_1 := coeff(p_expand_1, a, 1)
       $coeff_{1\_1} := u - 1$  (14)

> coeff_1_2 := coeff(p_expand_1, a, 2)
       $coeff_{1\_2} := u^2 + v$  (15)

> solve_1 := solve({coeff_1_1 = 0, coeff_1_2 = 0}, {u, v})
       $solve_1 := \{u = 1, v = -1\}$  (16)

> result_1 := subs(u = rhs(solve_1[1]), v = rhs(solve_1[2]), x_1)

```

Figure 9.2: Exercise 1

$$y''(t_n) \approx a_m = \frac{y_{m+1} + y_{m-1} - 2y_m}{h^2}$$

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot y'_m + \frac{h^2}{2!} y''_m + \frac{h^3}{3!} y'''_m + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}_m + O^5(h)$$

$$y_{m-1} = y_m - h \cdot y'_m + \frac{h^2}{2!} y''_m - \frac{h^3}{3!} y'''_m + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}_m - O^5(h)$$

$$\cancel{y_{m+1} + h \cdot y'_m + \frac{h^2}{2!} y''_m + \frac{h^3}{3!} y'''_m + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}_m + O^5(h)} +$$

$$\cancel{y_m - h \cdot y'_m + \frac{h^2}{2!} y''_m - \frac{h^3}{3!} y'''_m + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}_m - O^5(h)} - 2y_m$$

$$= y''_m + \frac{h^2}{12} y^{(4)}_m \pm O^5(h)$$

folgt: $|a_m - y''_m| = \frac{h^2}{12} (+C) \rightarrow$ quadratisch

ii) zielbild:

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{\cos(t+h) + \cos(t-h) - 2\cos(t)}{h^2} \right|$$

Figure 9.3: Exercise 2

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$v_2 = \frac{v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1}{\text{Norm}(v_2)}$$

$$u_2 = \frac{v_3 - (u_1 \cdot v_3) \cdot u_1 - (u_2 \cdot v_3) \cdot u_2}{\text{Norm}(v_3)}$$

$$u_3 = \frac{v_4 - (u_1 \cdot v_4) \cdot u_1 - (u_2 \cdot v_4) \cdot u_2 - (u_3 \cdot v_4) \cdot u_3}{\text{Norm}(v_4)}$$

Steckende Menge:

ii) Projektion:

$$y'' = (u_1 \cdot w) \cdot u_1 + (u_2 \cdot w) \cdot u_2$$

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> v1 := Vector([2·I, -1, 0, 0]):
> v2 := Vector([I, 0 , 3, 1]):
> v3 := Vector([1 , 1 - I, 0, 1]):
> v4 := Vector([0, 0, 0, I]):
> u1 := simplify( $\frac{v1}{\text{Norm}(v1, 2)}$ ):
> u2 := simplify( $\frac{(v2 - (u1 \cdot v2) \cdot u1)}{\text{Norm}(v2 - (u1 \cdot v2) \cdot u1, 2)}$ )

```

$$u2 := \begin{bmatrix} \frac{I}{255} \sqrt{255} \\ \frac{2\sqrt{255}}{255} \\ \frac{\sqrt{255}}{17} \\ \frac{\sqrt{255}}{51} \end{bmatrix} \quad (1)$$

```

> u3 := simplify( $\frac{(v3 - (u1 \cdot v3) \cdot u1 - (u2 \cdot v3) \cdot u2)}{\text{Norm}(v3 - (u1 \cdot v3) \cdot u1 - (u2 \cdot v3) \cdot u2, 2)}$ ):
> u4 := simplify( $\frac{(v4 - (u1 \cdot v4) \cdot u1 - (u2 \cdot v4) \cdot u2 - (u3 \cdot v4) \cdot u3)}{\text{Norm}(v4 - (u1 \cdot v4) \cdot u1 - (u2 \cdot v4) \cdot u2 - (u3 \cdot v4) \cdot u3, 2)}$ )

```

$$u4 := \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{559} - \frac{9I}{1118}\right) \sqrt{559} \\ \left(-\frac{9}{559} - \frac{6I}{559}\right) \sqrt{559} \\ \left(\frac{3}{1118} - \frac{11I}{1118}\right) \sqrt{559} \\ \frac{3I}{86} \sqrt{559} \end{bmatrix} \quad (2)$$

```

> # Projectie
> W := Vector([3, 1 - I, 2 + I, 1]):
> y_proj := simplify((u1 · W) · u1 + (u2 · W) · u2)

```

(3)

$$y_{proj} := \begin{bmatrix} \frac{100}{51} - \frac{13I}{51} \\ \frac{25}{51} + \frac{55I}{51} \\ \frac{37}{17} + \frac{10I}{17} \\ \frac{37}{51} + \frac{10I}{51} \end{bmatrix} \quad (3)$$

9.1.3 Bord

```

> p := x→x·(x-1)·(x-2)·(x-4) - a
      p := x→x·(x-1)·(x-2)·(x-4) - a
                                         (1)
> x_0 := u·a + v·a2
      x_0 := v a2 + u a
                                         (2)
> p_subs := subs(x=x_0, p(x))
      p_subs := (v a2 + u a) (v a2 + u a - 1) (v a2 + u a - 2) (v a2 + u a - 4) - a
                                         (3)
> p_expand := expand(p_subs)
      p_expand := a8 v4 + 4 a7 u v3 + 6 a6 u2 v2 - 7 a6 v3 + 4 a5 u3 v - 21 a5 u v2 + a4 u4
      - 21 a4 u2 v + 14 a4 v2 - 7 a3 u3 + 28 a3 u v + 14 a2 u2 - 8 v a2 - 8 u a - a
                                         (4)
> # Only keep the 1st order and second order
>
> coeff_1 := coeff(p_expand, a, 1)
      coeff_1 := -8 u - 1
                                         (5)
> coeff_2 := coeff(p_expand, a, 2)
      coeff_2 := 14 u2 - 8 v
                                         (6)
> solve({coeff_1 = 0, coeff_2 = 0}, {u, v})
      {u = -1/8, v = 7/256}
                                         (7)
>

```

Figure 9.4: Exercise 1

$$2) \text{ i) } y'(t_n) \approx v_m = \frac{y_{m+1} - y_m}{h}$$

$$\begin{cases} c = t_m \\ t_{m+1} = t_m + h \end{cases}$$

$$y(t_{m+1}) = y(t_m) + h \cdot y'(t_m) + \frac{h^2}{2} \tilde{y}''(f) \quad f \in [t_m, t_{m+1}]$$

$$\Rightarrow v_m = \frac{y_{m+1} - y_m}{h} = \frac{y(t_m) + h \cdot y'(t_m) + \frac{h^2}{2} \tilde{y}''(f) - y(t_m)}{h} \\ = y'(t_m) + \frac{h}{2} \tilde{y}''(f)$$

$$\text{found: } |y'(t_m) - v_m| = \frac{h}{2} \tilde{y}''(f) = \frac{h}{2} c \rightarrow \text{linear.}$$

\hookrightarrow calculated via numerical 2nd.

ii)

$$y'(t_m) = v_m = \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2h}$$

$$- y(t_{m+1}) = y(t_m) + h \cdot y'(t_m) + \frac{h^2}{2} \tilde{y}''(t_m) + \frac{h^3}{6} \tilde{y}'''(f) \quad f \in [t_m, t_{m+1}]$$

$$- y(t_{m-1}) = y(t_m) - h \cdot y'(t_m) + \frac{h^2}{2} \tilde{y}''(t_m) - \frac{h^3}{6} \tilde{y}'''(f) \quad f \in [t_{m-1}, t_m]$$

$$y'(t_m) = v_m = \cancel{y(t_m)} + h \cancel{y'(t_m)} + \frac{h^2}{2} \cancel{\tilde{y}''(t_m)} + \frac{h^3}{6} \tilde{y}'''(f) \\ - (\cancel{y(t_{m+1})} - h \cancel{y'(t_m)} + \frac{h^2}{2} \cancel{\tilde{y}''(t_m)} - \frac{h^3}{6} \tilde{y}'''(f)) \\ = y'(t_m) + \frac{h^2}{12} (2 \tilde{y}'''(f_+) + \tilde{y}'''(f_-))$$

$$|y'(t_m) - v_m| = \frac{h^2}{6} |\tilde{y}'''(f)| \leq \frac{h^2}{6} C \rightarrow \text{using max over one section.}$$

Figure 9.5: Exercise 2

```

> restart;
> with(plots):
>
> y := t->cos(t)
y := t-> cos(t)                                         (1)

> exact_speed := t->-sin(t)
exact_speed := t-> -sin(t)                                (2)

> t_val := evalf( $\frac{\text{Pi}}{2}$ )
t_val := 1.570796327                                     (3)

>
> forward_difference := (t, h)-> $\frac{(y(t+h) - y(t))}{h}$ 
forward_difference := (t, h)->  $\frac{y(t+h) - y(t)}{h}$                                (4)

> central_difference := (t, h)-> $\frac{(y(t+h) - y(t-h))}{2 \cdot h}$ 
central_difference := (t, h)->  $\frac{y(t+h) - y(t-h)}{2 \cdot h}$                          (5)

>
> forward_error := h->abs(exact_speed(t_val) - forward_difference(t_val, h))
forward_error := h->|exact_speed(t_val) - forward_difference(t_val, h)|      (6)

> central_error := h->abs(exact_speed(t_val) - central_difference(t_val, h))
central_error := h->|exact_speed(t_val) - central_difference(t_val, h)|      (7)

> loglogplot([central_error(h), forward_error(h)], h = 10-8..1, color = [red, blue])

```

Figure 9.6: Exercise 2 part 2 Maple

$$3) \vec{v}_1 = (2, 3, 0) \text{ und } \vec{v}_2 = (1, -2, 3) \quad \text{inner product} = \text{dot product}$$

$$i) \vec{u}_1 = \vec{v}_1$$

$$2) \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \cdot \vec{u}_1$$

$$3) \vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \cdot \vec{u}_1 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_2\|^2} \cdot \vec{u}_2$$

$\left\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right\rangle = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \rightarrow \text{daarvan verder doen}$

$$\boxed{\vec{u}_k = \vec{v}_k - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{v}_k, \vec{u}_l \rangle}{\|\vec{u}_l\|^2} \cdot \vec{u}_l}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{(2, 3, 0)}{\sqrt{13}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, 0 \right) = \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, 0 \right)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1}{\| \vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 \|}, \text{ in maple:}$$

$$\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, 0 \right) \cdot (1, -2, 3)$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{6\sqrt{13}}{13}, 0 \right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, 0 \right)$$

$$= \left(\frac{52}{169}, -\frac{117}{169}, 0 \right)$$

ii) zit maple

iii) berechnen \vec{u}_1 und \vec{u}_2 durch Vektoren mit
geparametrischen \vec{v}_1 von \vec{v}_2 herstellen we:

$$\vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_2$$

$$\text{dann } \vec{y}^\perp = \vec{y} - \vec{y}^{\parallel 418} \Rightarrow \vec{y} = \vec{y}^{\parallel} + \vec{y}^{\perp}$$

Figure 9.7: Exercise 3

```

restart;
with(plottools): with(plots);

{annulus, arc, arrow, circle, cone, cuboid, curve, cutout, cylinder, dtkz, dodecahedron, ellipse, ellipticArc, exportplot, extrude, getdata, hemisphere, hexahedron, homothety, hyperbola, icosahedron, importplot, line, octahedron, parallelepiped, pieSlice, point, polygon, polyhedronByName,
prism, project, rectangle, reflect, rotate, scale, sector, semitorus, sphere, stellate, tetrahedron, torus, transform, translate, triangulate}

v1 := (2|3|0)
v2 := (1, -2, 3)

v1 := [ 2 3 0 ]
v2 := [ 1
         -2
          3 ]

u1 := ( 2*sqrt(13) | 3*sqrt(13) | 0 )
u1 := [ 2*sqrt(13) 3*sqrt(13) 0 ]

u2 := ( 52 | -18*sqrt(13) | 0 )
u2 := [ 4
           -18
            13
             0 ]

origin := (0|0|0);

line_v1 := line(origin, v1, color=blue);
line_v2 := line(origin, v2, color=red);
line_u1 := line(origin, u1, color=green);
line_u2 := line(origin, u2, color=yellow);

# Display the lines together
display(line_v1, line_v2, line_u1, line_u2, axes=normal, scaling=constrained);

origin := [ 0 0 0 ]
line_v1 := CURVES([ [ 0. 0. 0. ], [ 2. 3. 0. ] ], COLOUR(RGB, 0., 0., 1.0000000))
line_v2 := CURVES([ [ 0. 0. 0. ], [ 1. -2. 3. ] ], COLOUR(RGB, 1.0000000, 0., 0.))
line_u1 := CURVES([ [ 0. 0. 0. ], [ 0.554700196225229 0.832050294337844 0. ] ], COLOUR(RGB, 0., 1.0000000, 0.))
line_u2 := CURVES([ [ 0. 0. 0. ], [ 0.307692307692308 -1.38461538461538 0. ] ], COLOUR(RGB, 1.0000000, 1.0000000, 0.))

```

Figure 9.8: Exercise 3 - plot

```
> restart;
```

```
> with(LinearAlgebra): with(plottools): with(plots):
```

```
> #i
```

```
v_1 := Vector([2, 3, 0])
```

$$v_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
> v_2 := Vector([1, -2, 3])
```

$$v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

```
> u_1 := \frac{v_1}{Norm(v_1, 2)}
```

$$u_1 := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

```
> u_2 := \frac{(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1)}{Norm(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1, 2)}
```

$$u_2 := \begin{bmatrix} \frac{21\sqrt{2158}}{2158} \\ -\frac{7\sqrt{2158}}{1079} \\ \frac{3\sqrt{2158}}{166} \end{bmatrix} \quad (4)$$

```
> # ii
```

```
> null_vector := Vector([0, 0, 0])
```

$$null_vector := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

```
> line_v1 := line(null_vector, v_1, color = purple)
```

$$line_v1 := CURVES\left(\begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 2. & 3. & 0. \end{bmatrix}, COLOUR(RGB, 0.50196078, 0., \right) \quad (6)$$

```

0.50196078)

```

> $line_v2 := line(null_vector, v_2, color = orange)$

$$line_v2 := CURVES\left(\begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 1. & -2. & 3. \end{bmatrix}, COLOUR(RGB, 0.80000000, 0.19607843), (7)$$

```

0.19607843)

```

> $line_u1 := line(null_vector, u_1, color = blue)$

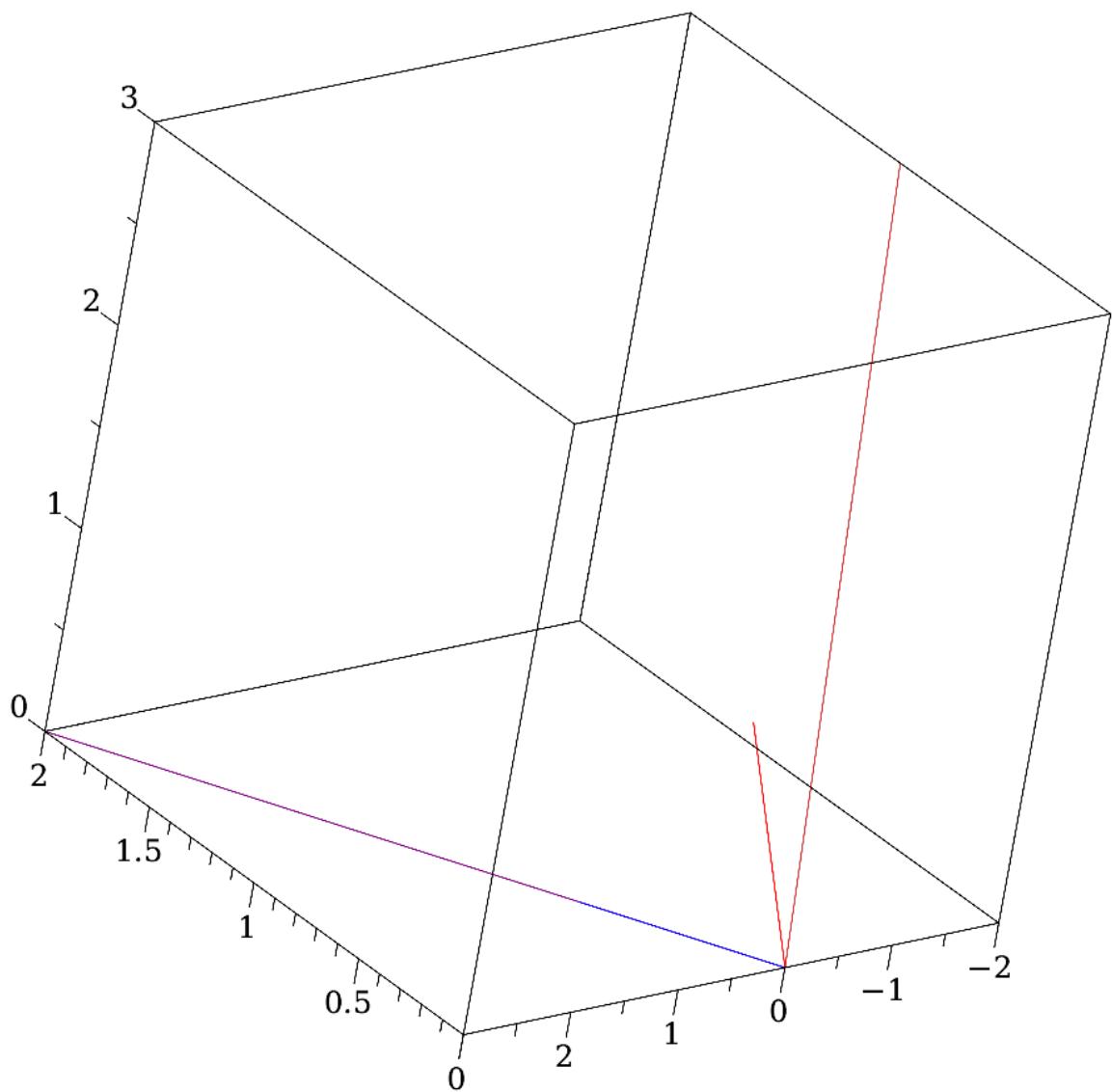
$$line_u1 := CURVES\left(\begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 0.554700196225229 & 0.832050294337844 & 0. \end{bmatrix}, COLOUR(RGB, 0., 0., 1.00000000)\right) (8)$$

```

>  $line\_u2 := line(null\_vector, u\_2, color = red)$ 
line_u2 := CURVES([[0., 0., 0.],
[0.452057391355098, -0.301371594236732, 0.839535155373754]],
COLOUR(RGB, 1.00000000, 0., 0.))

```

> $display(line_v1, line_v2, line_u1, line_u2)$



►

9.1.4 Exams

$$y_{m+1} = y_m + h y'_m + \frac{h^2}{2!} y''_m + \frac{h^3}{3!} y'''_m + \frac{h^4}{4!} \cdot y^{(4)}_m + O^5(\xi)$$

$$y_{m+2} = y_m + 2hy'_m + 2h^2 y''_m + \frac{8}{6} h^3 y'''_m + \frac{8}{3} h^4 y^{(4)}_m + O^6(\xi)$$

Dann gilt für $\xi \rightarrow 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B + C = 0 \\ B + 2C = 1 \rightarrow \text{Solvierbar linear unbestimmt} \\ \frac{B}{2} + 2C = 0 \end{array} \right.$$

(, Regel

$$\left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{3}{2} \\ B = 2 \\ C = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

9.2 Week 2

9.2.1 Huis

4) $A \vec{\alpha} = \vec{y}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(0) & \cos(0) \\ \cos(1) & \cos(2) \\ \cos(2) & \cos(4) \\ \cos(3) & \cos(6) \\ \cos(4) & \cos(8) \\ \cos(5) & \cos(10) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,04 \\ 1,05 \\ -0,2 \\ -2 \\ -0,2 \\ 1,11 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\alpha} = (A^T A)^{-1} \cdot A^T \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 1,04 \\ -0,34 \end{pmatrix}$$

↓

draw using maple:

- 1) pointplot
- 2) plot(f1)

should be quite close

Figure 9.9: Huis 2 Exercise 4

```

# First define the data
> x := [0.04, 1.05, -0.2, -2, -0.2, 1.11];
x := [0.04, 1.05, -0.2, -2, -0.2, 1.11]

> t := [0, 1, 2, 3, 4, 5]
t := [0, 1, 2, 3, 4, 5]

> # Construct the matrix A
> A := Matrix([[cos(0), cos(0)], [cos(1), cos(2)], [cos(2), cos(4)], [cos(3), cos(6)], [cos(4), cos(8)], [cos(5), cos(10)]])
A := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \cos(1) & \cos(2) \\ \cos(2) & \cos(4) \\ \cos(3) & \cos(6) \\ \cos(4) & \cos(8) \\ \cos(5) & \cos(10) \end{bmatrix}$$


> # Perform kleinste quadraten fit: x = (A'A)^{-1}A^T
> c := LeastSquares(A, Vector(x))
c := 
$$\begin{bmatrix} 1.040593609 \\ -0.9362867375 \end{bmatrix}$$


> x_function := t->c[1]*cos(t) + c[2]*cos(2*t);
x_function := t->c_1*cos(t) + c_2*cos(2*t)

> plot_points := pointplot([seq([t[i], x[i]], i=1..6)], color=red):
plot_fit := plot(x_function(t_), t_=0..5, color=blue):
display(plot_points, plot_fit)

```

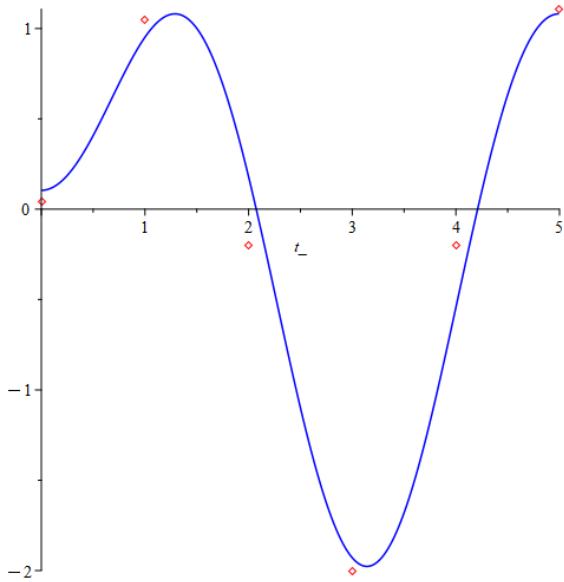


Figure 9.10: Huis 2 Exercise 4 Maple

6) Hier moeten we matrix A vinden waarmee twee vectoren

$v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 2, 0)$ in de ruimte liggen,
waarvan de Nullruimte orthogonaal is (relatief) van de
rijruimte.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, we moeten aantonen dat
 $\{k_1, k_2\}$ lineaire combinatie is
van K_A . Als dit het geval is is
dit deel van rijruimte.

Wat is b ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 2 = 2c_2 \rightarrow b = -4 \\ 2 = c_1 \end{cases}$$

$1c_2$ is lineaire combinatie die behoort niet tot
nullruimte

Figure 9.11: Huis 2 Exercise 6: Uit de cursus weten we dat er geen basis kan gevonden worden voor $K(A^T)$ en $N(A)$

9.2.2 Bord

$$(t_1, b_1) = (10, 10, 1)$$

$$(t_2, b_2) = (21, 7, 4 \text{ m})$$

$$(t_3, b_3) = (31, -5, 2)$$

1) $y(t) = \sqrt{t} \cdot -\frac{\delta}{2} t^2 \quad | A \propto = y$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 1 \\ -\frac{\delta}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 10 & 1 \\ 7 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

→ check in maple

2) proof: $A^T (\tilde{y} - y) = 0$

$$\Leftrightarrow A^T \tilde{y} - A^T y = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T \tilde{y} - \underbrace{A^T A}_{= I} (\underbrace{A^T A}_{= I})^{-1} A^T \tilde{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T \tilde{y} - \underbrace{A^T A}_{= I} (\underbrace{A^{-1} A^T}_{= I}) A^T \tilde{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T \tilde{y} - \underbrace{A^T}_{= I} \underbrace{A^T}_{= I} A^T \tilde{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \quad \square$$

Figure 9.12: Bord 2 Exercise 1

Wiskundige modellering in de ingenieurswetenschappen: Bordoeefingenenies 2

Oefening 1

```
> restart: with(plots):with(LinearAlgebra):with(plottools):  
oorsprong := <0,0,0>;
```

Constructie matrix A en vector y:

```
> K1 := <1,2,3>;  
K2 := <1,4,9>;  
A := <K1|K2>;  
y := <10.1,7.4,-5.2>;
```

$$K1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$K2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$y := \begin{bmatrix} 10.1 \\ 7.4 \\ -5.2 \end{bmatrix}$$

(1.1)

Heeft dit stelsel een oplossing?

```
> solve(A.<v0, -g/2>)=y, {v0,g});  
> Determinant(<K1|K2|y>);
```

5.8

(1.2)

We bepalen de kleinste kwadraten benadering en fit:

De onbekenden x bepalen kan op 2 manieren:

- met een stelsel (meest efficiënt)

```
> solve((A^%T.A).<v0,-g/2>)=A^%T.y,{v0,g});  
{g = 11.42631579, v0 = 15.35526316}
```

(1.3)

- met behulp van de matrix inverse

```
> x := MatrixInverse(A^%T.A).A^%T.y;
```

```

v0 := x[1];
g := -2*x[2];
x := [ 15.3552631578947
      -5.71315789473684 ]
v0 := 15.3552631578947
g := 11.4263157894737

```

(1.4)

De kleinste kwadraten benadering vinden we als

```

> y_kk := A.x;
y_com := y-y_kk;

y_kk := [ 9.64210526315790
          7.85789473684211
          -5.35263157894736 ]

```

(1.5)

Visualisatie kolomruimte $K(A) +$ nulruimte $N(A^T)$

```

> KA1 := plot3d(h*K1+v*K2, h=-8..8,v=-9..9,
                 color=green, numpoints=20,style=surface, axes=
                 normal);
KA2 := implicitplot3d(<xx,yy,zz>).y_com=0, xx=-5..5,
yy=-5..5,zz=-5..5, color=green, numpoints=20,style=surface,
axes=normal);

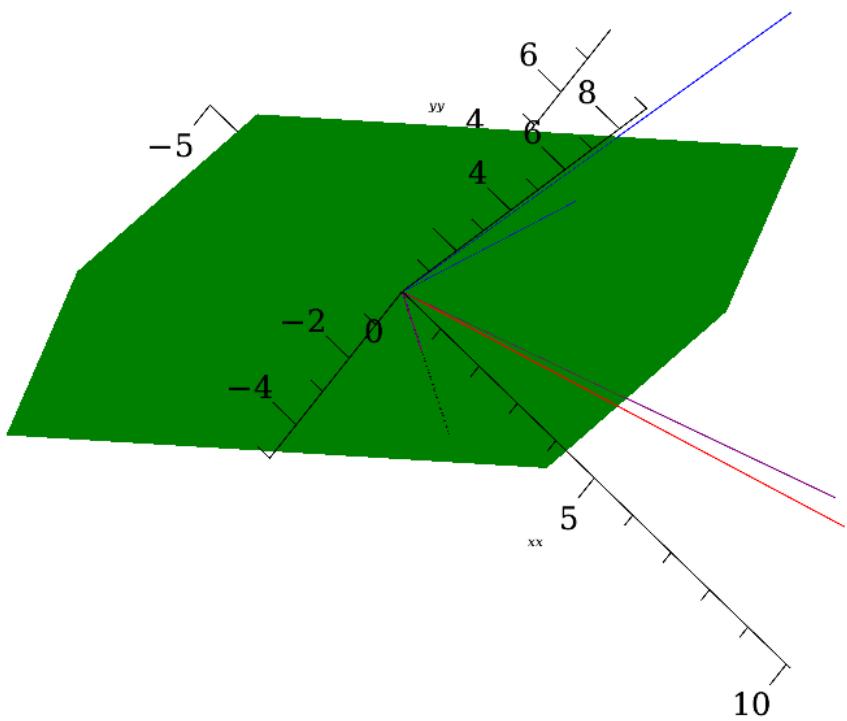
NAT := plot3d(t*y_com,t=-5..5, linestyle="dot");

K1_lijn := line(oorsprong,K1, color=blue);
K2_lijn := line(oorsprong,K2, color=blue);

y_lijn := line(oorsprong,y, color=red);
y_kk_lijn := line(oorsprong,y_kk, color=purple);
y_com_lijn := line(oorsprong,2*y_com, color=purple);

display(KA2, NAT, K1_lijn, K2_lijn, y_lijn, y_kk_lijn,
y_com_lijn, scaling=constrained);

```

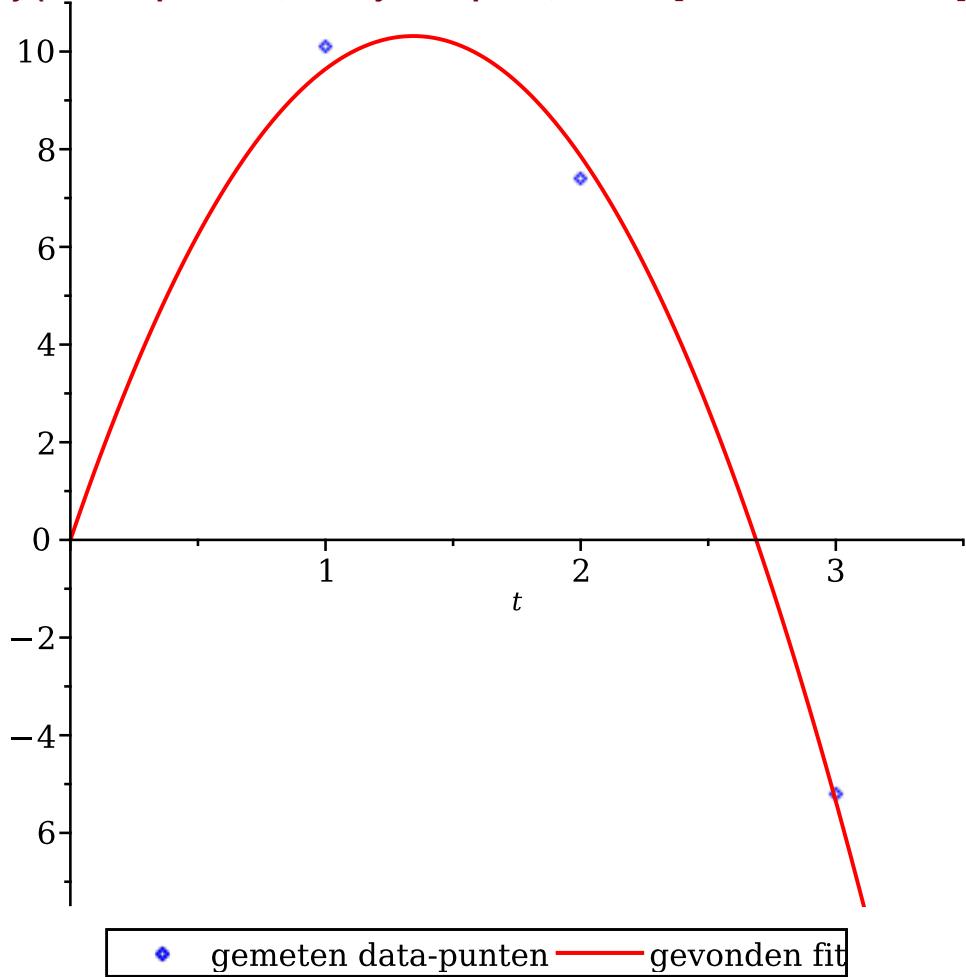


Ten slotte visualiseren we de gevonden fit oplossingen met de datapunten:
We beginnen met de gemeten en geprojecteerde data punten te visualiseren:

```
> data_points := pointplot(K1, y, color=blue, legend="gemeten data-punten");
```

Daarna plotten we het traject (=de gevonden fit):

```
> traject := t->v0*t-g/2*t**2:  
  
> traject_plot := plot(traject(t),t=0..4.5, color=red, legend=  
"gevonden fit");  
  
> display(data_points, traject_plot,view=[0..3.5,-7.5..11]);
```



- ▶ **Oefening 5**
- ▶ **Oefening 2**
- ▶ **Oefening 3**
- ▶ **Oefening 4**

$$3) \quad A = V_1 V_1^T + V_3 V_3^T$$

$$1) \quad K(A) = \text{span} \{ V_1, V_3 \}$$

$$2) \quad K(A^T) = \text{span} \{ V_2, V_1 \}$$

$$3) \quad N(A) : \quad A\alpha = (V_1 V_1^T + V_3 V_3^T) \alpha = 0$$

$$= V_1 (V_1^T \alpha) + V_3 (V_3^T \alpha) = 0$$

These need to be null, no look in direction on V_3 , thus

$$N(A) = \text{span} \{ V_3 \}$$

4) $N(A^T)$: we want to solve:

$$A^T y = (V_2 V_1^T + V_1 V_3^T) y = 0$$

$$= V_2 (V_1^T y) + V_1 (V_3^T y) = 0$$

$$\Rightarrow N(A^T) = \{ V_2 \}$$

Figure 9.13: Bord 2 Exercise 3

4)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T)$$

1. Is A symmetric?

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) ; A^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_2 e_1^T + e_1 e_2^T) \quad \checkmark$$

2. $A^L = A^R$:

$$\begin{aligned} A^L &= \frac{1}{2} \cdot (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T)^2 \\ &= \frac{1}{2} (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) \\ &= \frac{1}{2} (e_1 e_2^T e_1 e_2^T + e_1 e_2^T \cdot e_2 e_1^T + e_2 e_1^T e_1 e_2^T \\ &\quad + \underbrace{e_2 e_1^T \cdot e_2 e_1^T}_0) \\ &= \frac{1}{2} (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) \neq A \rightarrow \text{green projection} \end{aligned}$$

Figure 9.14: Bord 2 Exercise 4

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot g(t) \cdot dt$$

$\text{span} \langle 1, \cos(\beta t), \sin(\beta t) \rangle$ met $\beta \in [1, +\infty]$

dus de componenten zijn $1, \cos(\beta t)$ en $\sin(\beta t)$

we merken:

$$\langle 1, 1 \rangle = \sqrt{2\pi}$$

$$\langle \cos(\beta t), \cos(\beta t) \rangle = \sqrt{\pi}$$

$$\langle \sin(\beta t), \sin(\beta t) \rangle = \sqrt{\pi}$$

dus onze vectoren die de basis vormen zijn:

$$\left\{ c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad c_k = \frac{\cos(\beta_k t)}{\sqrt{\pi}}, \quad n_k = \frac{\sin(\beta_k t)}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

a) de projectie f_0 is calculated with:

$$f_0 = \langle c_0, f \rangle c_0 + \sum \langle c_k, f \rangle \cdot c_k + \langle n_k, f \rangle \cdot n_k$$

$$\langle c_0, f \rangle = \frac{\sqrt{2\pi}}{3}$$

$$\langle c_k, f \rangle = 4\sqrt{\pi} \frac{(-1)^k}{k^2} \rightarrow f_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{3} + 4\sqrt{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{k^2}$$

$$\langle n_k, f \rangle = 0$$

b) de afstand is definit door: $\sqrt{\langle f_0 - f, f_0 - f \rangle}$

$$\begin{aligned} &= \| f(t) - f_0 \|^2 = \langle f(t), f(t) \rangle \\ &\quad - 2 \cdot \langle f(t), f_0 \rangle \\ &\quad + \langle f_0, f_0 \rangle \end{aligned}$$

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> inproduct := (f, g)→int(conjugate(f)·g, t = -Pi..Pi):
> NORM := f→sqrt(inproduct(f, f)):
> simplify(NORM(1))

$$\sqrt{2} \sqrt{\pi} \quad (1)$$


> assume(k, 'integer');
simplify(NORM(cos(k*t)), symbolic);

$$\sqrt{\pi} \quad (2)$$


> simplify(NORM(sin(k·t)), symbolic);

$$\sqrt{\pi} \quad (3)$$


> # ii
> t1 := inproduct( $\frac{1}{\sqrt{2 \pi}}$ , t^2)

$$t1 := \frac{\sqrt{2} \pi^{5/2}}{3} \quad (4)$$


> t2 := simplify(inproduct( $\frac{\cos(k \cdot t)}{\sqrt{\pi}}$ , t^2), symbolic)

$$t2 := \frac{4 \sqrt{\pi} (-1)^k}{k^2} \quad (5)$$


> simplify(inproduct( $\frac{\sin(k \cdot t)}{\sqrt{\pi}}$ , t^2), symbolic)

$$0 \quad (6)$$


> f0 := simplify(t1 + t2)

$$f0 := \frac{\sqrt{\pi} (\sqrt{2} \pi^2 k^2 + 12 (-1)^k)}{3 k^2} \quad (7)$$


> distance := simplify(inproduct(t^2, t^2)^2 - 2·inproduct(t^2, f0) + inproduct(f0, f0)^2, symbolic)
distance := 
$$\frac{1}{81 k^8} \left( 16 \left( -\frac{9 \pi^{5/2} \sqrt{2} k^8}{4} - 27 (-1)^k k^6 \sqrt{\pi} \right. \right. \quad (8)$$


$$+ \left( 24 \pi^2 (-1)^k k^2 (\pi^4 k^4 + 72) \sqrt{2} + 5184 + \left( \pi^8 + \frac{81}{100} \pi^6 \right) k^8 \right. \\ \left. \left. + 432 \pi^4 k^4 \right) \pi^3 \right)$$


> limit(distance, k = infinity)

$$\frac{16 \pi^{12}}{81} + \frac{4 \pi^{10}}{25} - \frac{4 \sqrt{2} \pi^{11/2}}{9} \quad (9)$$


> eval(distance, k = 100000); # we can see it going to null

```

Figure 9.16: Bord 2 Exercise 5 Maple

9.2.3 WC

A)

$$l_m(u(t)) = l_m(a) - ct^2 - bt$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \\ 1 & t_5 & t_5^2 \end{pmatrix}, \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} l_m(a) \\ -c \\ -b \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} l_m(y_1) \\ l_m(y_2) \\ l_m(y_3) \\ l_m(y_4) \\ l_m(y_5) \end{pmatrix}$$

Stoch im Graph: $\vec{\alpha}' = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y}$

$\therefore a = 5, 20, b = 0, 35, c = 0, 32$

plot same as homework.

Figure 9.17: WC 2 Exercise 1

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> inproduct := (f, g) → integrate(f*g, t = -infinity ..infinity);
NORM   := f → sqrt(inproduct(f, f)):

inproduct := (f, g) → integrate(g·f, t = -∞ ..∞)          (1)
> f0 := exp(-t^2/2)/NORM(exp(-t^2/2)):

> w1 := t*exp(-t^2/2)-f0*inproduct(f0, t*exp(-t^2/2));
f1 := w1/NORM(w1):
w1 :=  $t e^{-\frac{t^2}{2}}$                                          (2)

> w2 := t^2*exp(-t^2/2)-f1*inproduct(t^2*exp(-t^2/2), f1)-f0
      *inproduct(t^2*exp(-t^2/2), f0);
f2 := w2/NORM(w2):
w2 :=  $t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{2}$            (3)

> w3 := t^3*exp(-t^2/2)-f2*inproduct(t^3*exp(-t^2/2), f2)-f1
      *inproduct(t^3*exp(-t^2/2), f1)-f0*inproduct(t^3*exp(-t^2/2),
      f0);
f3 := w3/NORM(w3):
w3 :=  $t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{3 t e^{-\frac{t^2}{2}}}{2}$            (4)

> w4 := t^4*exp(-t^2/2)-f3*inproduct(t^4*exp(-t^2/2), f3)-f2
      *inproduct(t^4*exp(-t^2/2), f2)-f1*inproduct(t^4*exp(-t^2/2),
      f1)-f0*inproduct(t^4*exp(-t^2/2), f0);
f4 := w4/NORM(w4):
w4 :=  $t^4 e^{-\frac{t^2}{2}} - 3 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{3 e^{-\frac{t^2}{2}}}{4}$      (5)

> # i: de orthonormale basis is dus de span van <f_0, w_1, w_2, w_3, w_4, ...>
> # ii: zie notes

```

Figure 9.18: WC 2 Exercise 2

Lange oplossing

```
> g0 := fn(0)*inproduct(fn(0),g);
g1 := fn(0)*inproduct(fn(0),g)+fn(1)*inproduct(fn(1),g);
g2 := fn(0)*inproduct(fn(0),g)+fn(1)*inproduct(fn(1),g)+fn(2)*inproduct(fn(2),g);
g3 := fn(0)*inproduct(fn(0),g)+fn(1)*inproduct(fn(1),g)+fn(2)*inproduct(fn(2),g)+fn(3)*inproduct(fn(3),g);
g4 := fn(0)*inproduct(fn(0),g)+fn(1)*inproduct(fn(1),g)+fn(2)*inproduct(fn(2),g)+fn(3)*inproduct(fn(3),g)+fn(4)*inproduct(fn(4),g);
```

Korte oplossing (niet te kennen)

```
> g_n := n -> add(fn(i)*inproduct(fn(i),g),i=0..n);
Warning, (in g_n) `i` is implicitly declared local
```

Visualisatie

```
> app0 := plot(g_n(1), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=blue, legend="projectie op W[0]");
app1 := plot(g_n(1), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=black, linestyle="dot", legend="projectie op W[1]", thickness=3);
app2 := plot(g_n(2), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=red, legend="projectie op W[2]");
app3 := plot(g_n(3), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=purple, linestyle="dot", legend="projectie op W[3]", thickness=3);
app4 := plot(g_n(4), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=coral, legend="projectie op W[4]");
> gplot := plot(g, t=-5..5, thickness=1, color=black, legend="g(t)", thickness=2);
> display(gplot,app0, app1, app2, app3, app4);
```

Figure 9.19: WC 2 Exercise 2 Maple

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> e_1 := Vector([1, 0, 0])

$$e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> e_2 := Vector([0, 1, 0])

$$e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

> A :=  $\frac{1}{2} \cdot (e_1 \cdot \text{Transpose}(e_1) + e_2 \cdot \text{Transpose}(e_2) + e_1 \cdot \text{Transpose}(e_2)$ 

$$+ e_2 \cdot \text{Transpose}(e_1))$$


$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

> # Is A = Transpose(A)?
> Transpose(A)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

> # YES!
> # Is A = A^2?
> A^2

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

> # YEHAAAHHH
> # The subspace is thus e_1 + e_2

```

Figure 9.20: WC 2 Exercise 3 Maple

9.3 Week 3

9.3.1 Huis

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[3, 4], [1, 0]])

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = ['J','Q'])

$$J, Q := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad (2)$$

> recursie_relatie := Q * MatrixPower(J, n) * Q-1 * Vector([1, 1])

$$\text{recursie\_relatie} := \begin{bmatrix} -\frac{3(-1)^n}{5} + \frac{84^n}{5} \\ \frac{3(-1)^n}{5} + \frac{24^n}{5} \end{bmatrix} \quad (3)$$

> limit_eq := recursie_relatie[1] / recursie_relatie[2]

$$\text{limit\_eq} := \frac{-\frac{3(-1)^n}{5} + \frac{84^n}{5}}{\frac{3(-1)^n}{5} + \frac{24^n}{5}} \quad (4)$$

> limit(limit_eq, n = infinity)

$$4 \quad (5)$$


```

Figure 9.21: Huis 3 Exercise 1

$$y_{n+1} = 3y_n + 4y_{n-1}$$

$$y_0 = y_1 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n}$$

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{via maple}} \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De recursieve relatie zegt: $\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} = Q D^{n-1} Q^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$

(via maple)

$$= \dots \left(\begin{array}{c} \text{circle} \\ \text{heart} \\ \text{circle} \end{array} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{c} \text{circle} \\ \text{heart} \\ \text{circle} \end{array} \right) = q$$

Figure 9.22: Huis 3 Exercise 1

```

> restart : with(LinearAlgebra) : with(plots) : with(plottools) :
> A := Matrix([[1, 1], [1, 0]]) :
> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q']) :
> AK := Q • MatrixPower(J, k) • MatrixInverse(Q) • Vector([ (1 - sqrt(5)) / 2, 1 ]) :
> recursion := AK[1] / AK[2] :
> limit(recursion, k = infinity)

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \tag{1}$$

> # Nu met een kleine epsilon toegevoegd
> AK := Q • MatrixPower(J, k) • MatrixInverse(Q) • Vector([ (1 - sqrt(5)) / 2
+ epsilon, 1 + epsilon ]) :
> recursion := AK[1] / AK[2] :
> limit(recursion, k = infinity)

$$\frac{3\sqrt{5} + 5}{5 + \sqrt{5}} \tag{2}$$


```

$$\begin{pmatrix} \alpha_{m+1} \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\alpha_{m+1} = \alpha_m + \alpha_{m-1}}$$

$$A^k = Q \cdot J^k \cdot Q^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lim \frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_m} = \dots$$

iii) nun da es halbzeit moan verändert.

```

> # We doen de uitdagende bijvraag niet aangezien dit wordt geskipped door
   professor.
> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([ [ 8/10, 3/10 ], [ 2/10, 7/10 ] ])
      A := 
$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$
 (1)

> J, Q := JordanForm(A, output = [ 'J', 'Q' ])
      J, Q := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$
 (2)

> # Lambda_1 = 1, lam_2 =  $\frac{1}{2}$ ,
   obviously gaat lambda_1 domineren wanneer we exponentiële vorm
   nemen.
> # Aka,  $v_1 = \left[ \frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right]$  is het asymptotische vector. Let's proof this shit
> JK := Matrix([ [ 1, 0 ], [ 0, (1/2)^k ] ])
      JK := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix}$$
 (3)

> result := Q * JK * MatrixInverse(Q)
      result := 
$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^k}{5} & \frac{3}{5} - \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^k}{5} \\ \frac{2}{5} - \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^k}{5} & \frac{2}{5} + \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^k}{5} \end{bmatrix}$$
 (4)

> # In this form, we can see if k -> infinity, then we get the answer we were
   looking for. Prove accepted.

```

Figure 9.23: Huis 3 Exercise 4

mit dragen:

Algebraisch: $\begin{bmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{bmatrix}$, mit Fixpunkt $\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}$

$\rightarrow J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} \frac{-b}{a-b-1} \\ \frac{a-1}{a-b-1} \end{bmatrix}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-b}{a-b-1} = 0,6 \\ \frac{a-1}{a-b-1} = 0,4 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$b = -\frac{3}{2}a + \frac{3}{2}$$

```

> # A) is basically gwn Jordan Form en kijken wat je eigenwaarden
   eigenvectoren zijn lolz.
> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[-2, 2, 2], [-5, 4, 3], [0, 0, 2]])
      A := 
$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
 (1)

> J, Q := JordanForm(A, output = [J,Q])
      J, Q := 
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - I & 0 \\ 0 & 0 & 1 + I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} - \frac{2I}{5} & -\frac{1}{5} + \frac{2I}{5} \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{I}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{I}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 (2)

> # Hierboven is a)
> # Ok nu b) Het idee is simpel, we willen alpha1, alpha2 en y(t)
y0 := Vector([1, 1, 1]):
> constants := solve(Q.Vector([alpha1, alpha2, conjugate(alpha2)]) = y0,
   [alpha1, alpha2]);
      constants := [[alpha1 = 1, alpha2 = 0]] (3)

> # nu nog y(t). y(t) = Q · exp(D) · Q-1 · y0
> D_exp := Matrix([[exp(2·t), 0, 0], [0, exp((1 - I)·t), 0], [0, 0, exp((1 + I)·t)]])
      D_exp := 
$$\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1-I)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(1+I)t} \end{bmatrix}$$
 (4)

> y := Q · D_exp · MatrixInverse(Q) · y0
      y := 
$$\begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$
 (5)

> # Et voila.

```

Figure 9.24: Exercise 8

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(plots): with(plottools):
> A := Matrix([[0,-1,0,-1],[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0]]):
> J, Q := JordanForm(A, output = [ 'J', 'Q' ]):
> u := Vector([1,0,2,1]):
> y := MatrixExponential(A, t) • u:
> f := simplify(y[4])
      
$$f := \frac{2 \left( e^{-\frac{t}{2}} + \frac{3 e^{\frac{t}{2}}}{2} \right) \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3} t}{2}\right)}{3} + e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3} t}{2}\right)$$

> # ii is hetzelfde...

```

(1)

$$\underline{\underline{f''(t) + f'(t) + f(t) = 0}}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} f'''(t) \\ f''(t) \\ f'(t) \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'''(t) \\ f''(t) \\ f'(t) \\ f(t) \end{pmatrix}$$

we willen de 4de rij in de matrix.

$$f = \frac{2 \left(e^{-\frac{t}{2}} + \frac{3}{2} e^{\frac{t}{2}} \right) \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + e^{-\frac{t}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}{3}$$

i;) Voeg een bronstuk toe:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} f'''(t) \\ f''(t) \\ f'(t) \\ f(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'''(t) \\ f''(t) \\ f'(t) \\ f(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.3.2 Bord 3

```

[> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[2, 3], [1, 0]])
      
$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
 (1)

[> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])
      
$$J, Q := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$
 (2)

[> # Dit is i) lambda_1 = -1, lambda_2 = 3
[> # ii)
[> v_1 := Q[ .., 1]
      
$$v_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$
 (3)

[> v_2 := Q[ .., 2]
      
$$v_2 := \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$
 (4)

[> v_3 := Vector([1, 2])
      
$$v_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
 (5)

[> eq := <1, 2> = c1 * v_1 + c2 * v_2;
      
$$eq := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c1}{4} + \frac{3c2}{4} \\ -\frac{c1}{4} + \frac{c2}{4} \end{bmatrix}$$
 (6)

[> solve(eq, {c1, c2})
      
$$\{c1 = -5, c2 = 3\}$$
 (7)

```

Figure 9.25: Exercise 1

```
[> restart: with(LinearAlgebra): with(plots): with(plottools):  
[> #i)
```

```
[> P := Matrix([ [0, 0, 1, 0, 0], [1/2, 0, 0, 0, 0], [1/2, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1/2, 0], [0, 0, 0, 1/2, 1] ]])
```

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
[> T := 1/5 Matrix([[1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1]])
```

$$T := \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad (2)$$

```
[> G := a→a·P + (1 - a)·T
```

$$G := a \mapsto a \cdot P + (1 - a) \cdot T \quad (3)$$

```
[> #ii)
```

```
[> J, Q := JordanForm(G(a), output = [ 'J', 'Q' ])
```

(4)

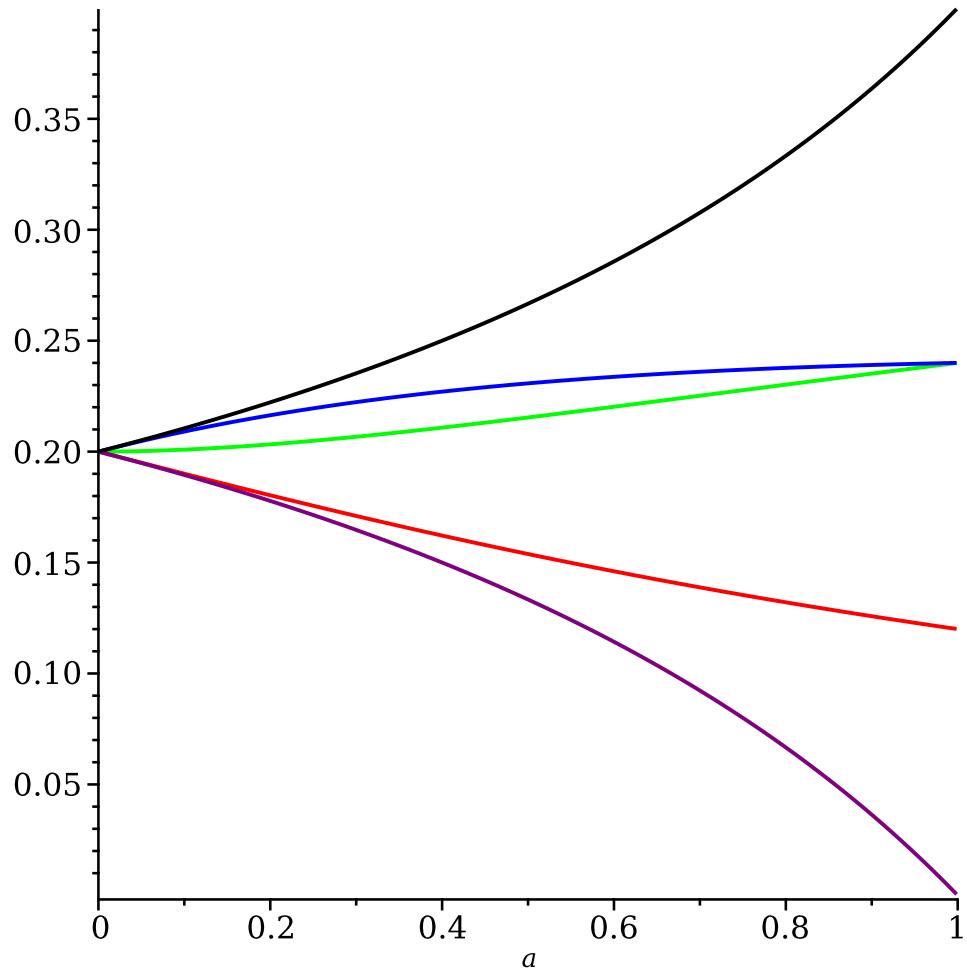
$$\boxed{J, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2} - \frac{I}{2}\right)a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2} + \frac{I}{2}\right)a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \left[\frac{2(a^2 + a + 1)}{5(a^2 + 2a + 2)}, \frac{4}{25}, \right. \\ \left. \frac{3Ia + 10 + 2I + 5a}{10(2Ia + 3 + I + a)}, \frac{-\frac{I}{50}(11Ia^2 + 32Ia - 7a^2 - 4 + 32I - 14a)}{a^2 + 2a + 2}, 0 \right], \\ \left[\frac{a+2}{5(a^2 + 2a + 2)}, \frac{2}{25}, \frac{Ia - 6 + 4I - 4a}{10(2Ia + 3 + I + a)}, \right. \\ \left. \frac{\frac{I}{50}(2Ia^2 + 9Ia - 9a^2 - 18 + 14I - 23a)}{a^2 + 2a + 2}, 0 \right], \\ \left[\frac{a^2 + 3a + 2}{5(a^2 + 2a + 2)}, \frac{4}{25}, -\frac{4Ia + 4 + 6I + a}{10(2Ia + 3 + I + a)}, \right. \\ \left. \frac{\frac{I}{50}(9Ia^2 + 23Ia + 2a^2 + 14 + 18I + 9a)}{a^2 + 2a + 2}, 0 \right], \\ \left[\frac{2(-1+a)}{5(a-2)}, 0, 0, 0, -\frac{2(-1+a)}{5(a-2)} \right], \\ \left[-\frac{2}{5(a-2)}, -\frac{2}{5}, 0, 0, \frac{2(-1+a)}{5(a-2)} \right] \end{bmatrix}}$$

> # Hier zien we alvast dat lambda 1 dominant is, dus eigenvector 1 is sexy
 > sol := Q[.., 1]

(5)

$$sol := \begin{bmatrix} \frac{2(a^2 + a + 1)}{5(a^2 + 2a + 2)} \\ \frac{a + 2}{5(a^2 + 2a + 2)} \\ \frac{a^2 + 3a + 2}{5(a^2 + 2a + 2)} \\ \frac{2(-1 + a)}{5(a - 2)} \\ -\frac{2}{5(a - 2)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

> `plot(sol, a = 0..1, color = [green, red, blue, purple, black]);`
`evalf(subs({a = 1}, sol));`



(6)

$$\begin{bmatrix} 0.2400000000 \\ 0.1200000000 \\ 0.2400000000 \\ 0. \\ 0.4000000000 \end{bmatrix} \quad (6)$$

> # we zien dus dat website 5 het meest zal worden bezocht

> #iii)

> $J, Q := JordanForm(G(1), output = ['J', 'Q'])$

$$J, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{I}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{I}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{10} - \frac{I}{10} & \frac{3}{10} + \frac{I}{10} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{10} + \frac{I}{5} & -\frac{1}{10} - \frac{I}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} - \frac{I}{10} & -\frac{1}{5} + \frac{I}{10} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> # antwoord is dan ofcourse v_1 en v_5 letsgo

> #iv)

> $state_n := (n, x0) \rightarrow Q \cdot J^n \cdot MatrixInverse(Q) \cdot x0 :$

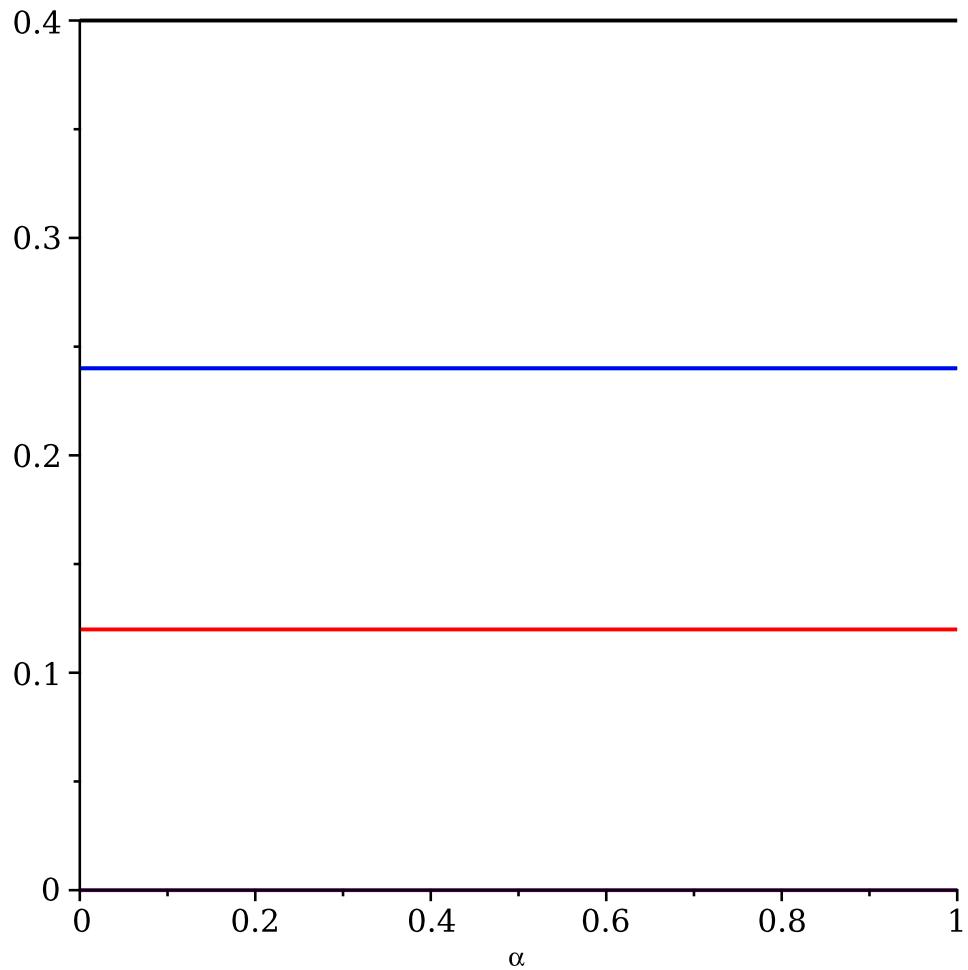
> # eerst uniform dus 0.2 prob per sprong

> $x0 := \langle 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2 \rangle;$

> $state_20 := state_n(20, x0) :$

> $plot1 := plot(state_20, alpha = 0..1, color = [green, red, blue, purple, black]);$

$$x0 := \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

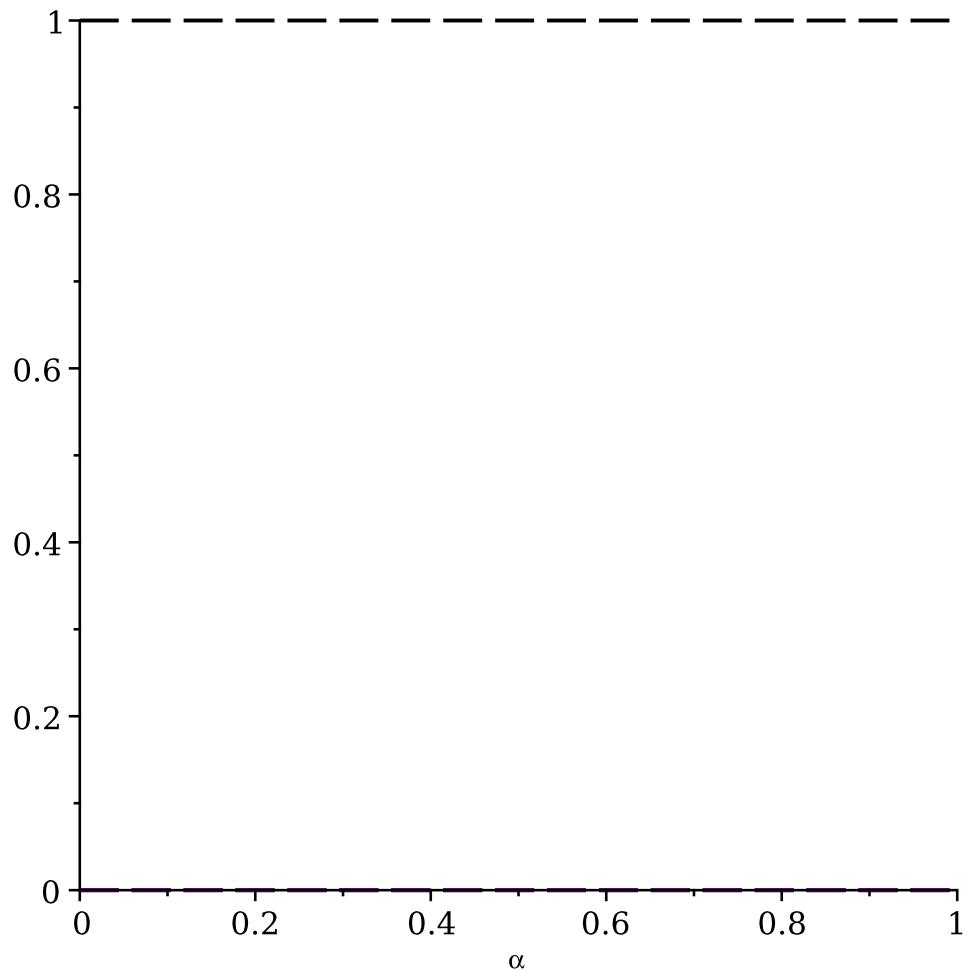


```

> # ik denk dat mijn Q en J niet goed zijn ingeladen, anyways I dont care
> # Nu kijken naar bezetting van website 4 en 5, dus 50 50
> x0 := <0, 0, 0, 0.5, 0.5>;
state_50 := state_n(20, x0) :
plot2 := plot(state_50, alpha = 0..1, color = [green, red, blue, purple, black],
linestyle = "dash");

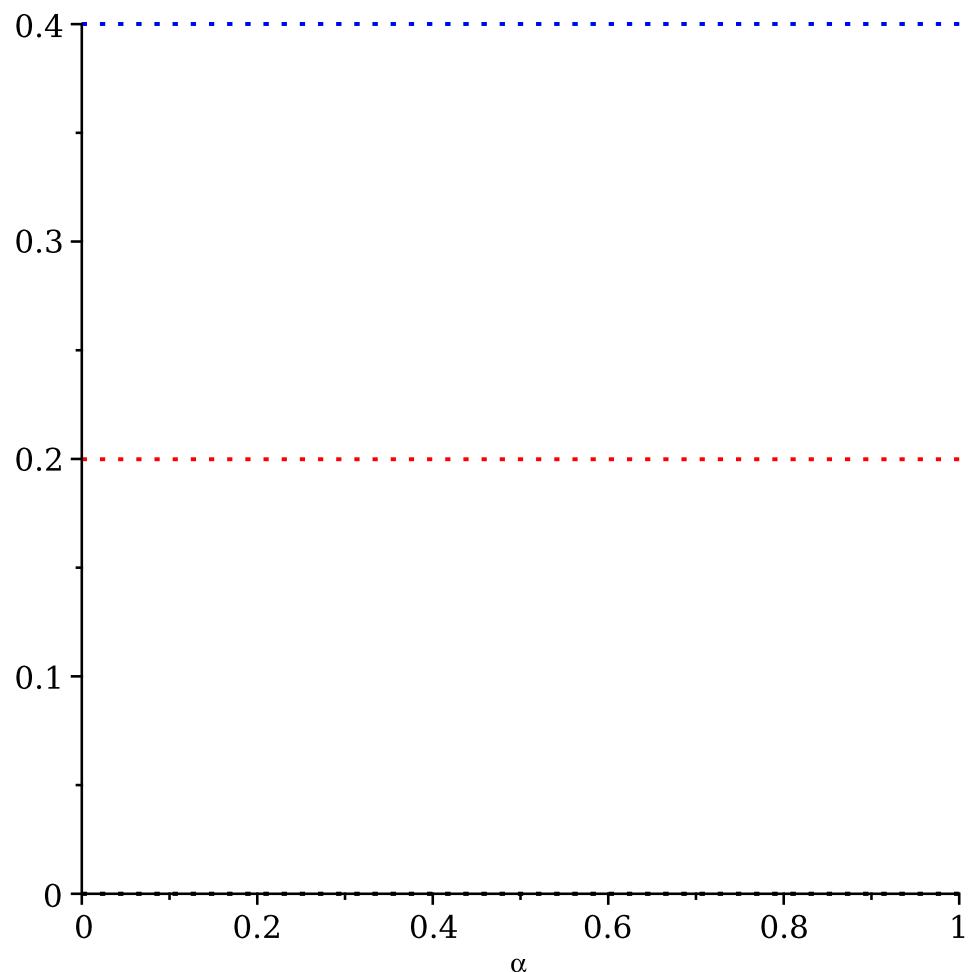
```

$$x0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$



```
> # Als laatste de bezetting van website 1, 2 en 3
> x0 := <1/3, 1/3, 1/3, 0, 0>;
state_50 := state_n(20, x0):
plot3 := plot(state_50, alpha = 0..1, color = [green, red, blue, purple, black],
linestyle = "dot");
```

$$x_0 := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



> #Warning, die plots kloppen niet, maar moet gewoonweg gevult worden
met de juiste J



9.3.3 WC 3

$$1) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \alpha(t) \\ y'(t) \\ y(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B & 0 & E\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B & 0 & 0 & 0 & Ey \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \alpha(t) \\ y'(t) \\ y(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e^A \cdot y_0 = \begin{pmatrix} v_{\alpha 0} \\ \alpha_0 \\ v_{y0} \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pak de opeenvolgende resultaat.

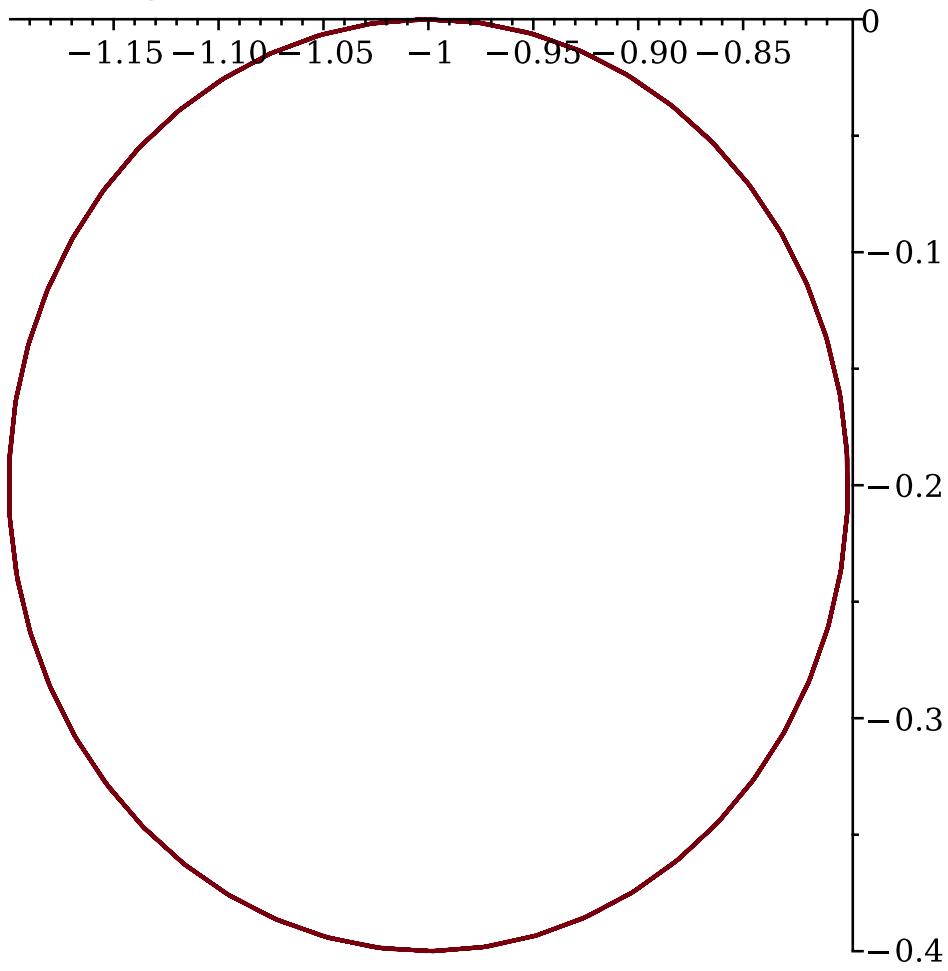
(i) zie Maple

Figure 9.26: Exercise 1

```

> restart: with(inttrans): with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[0, 0, B, 0, Ex], [1, 0, 0, 0, 0], [-B, 0, 0, 0, Ey], [0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0]]):
> y := Vector([vx0, x0, vy0, y0, 1]):
> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q']):
> exp_A := MatrixExponential(A, t):
> res := exp_A * y:
> x := res[2]:
> y := res[4]:
> # ii
> # We doen maar eentje
> A := Matrix([[0, 0, 10, 0, 0], [1, 0, 0, 0, 0], [-10, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0]]):
> exp_A := MatrixExponential(A, t):
> res := exp_A * Vector([2, -1, 0, 0, 1]):
> x := res[2]:
> y := res[4]:
> plot_1 := plot([x, y, t = 0..0.5])

```



```

> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([ [1, -1, 0], [0, 1/2, 0], [-3/4, 7/4, 1/4] ])
      A := 
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$
 (1)

> J, Q := JordanForm(A, output = [ 'J', 'Q' ])
      J, Q := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$
 (2)

> cosD := Matrix([[ (cos(Pi * J[1, 1])), 0, 0], [0, (cos(Pi * J[2, 2])), 0], [0, 0,
      (cos(Pi * J[3, 3]))]]);
      cosD := 
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
 (3)

> result := Q * cosD * MatrixInverse(Q)
      result := 
$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
 (4)

> # Et voila

```

Figure 9.27: Exercise 2

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> # First we define the relationship as matrix
> A := Matrix([[a,b],[1,0]])

$$A := \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = [ 'J','Q'])

$$J, Q := \begin{bmatrix} \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \end{bmatrix}, \quad (2)$$


$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2\sqrt{a^2 + 4b}} & \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2\sqrt{a^2 + 4b}} \\ -\frac{1}{\sqrt{a^2 + 4b}} & \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4b}} \end{bmatrix}$$

> result := Q . MatrixPower(J, n) . MatrixInverse(Q) . Vector([1, 1]):
> limit_ := simplify(result[1] / result[2])

$$limit_ := \left( (\sqrt{a^2 + 4b} - a - 2b) \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n + (\sqrt{a^2 + 4b} + a + 2b) \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n \right) / \left( (\sqrt{a^2 + 4b} + a - 2) \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n - \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n (a - \sqrt{a^2 + 4b} - 2) \right) \quad (3)$$

> limit(limit_, n = infinity)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( (\sqrt{a^2 + 4b} - a - 2b) \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n + (\sqrt{a^2 + 4b} + a + 2b) \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n \right) / \left( (\sqrt{a^2 + 4b} + a - 2) \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n - \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n (a - \sqrt{a^2 + 4b} - 2) \right) \quad (4)$$


```

[>
]

Figure 9.28: Exercise 3

9.3.4 Exams

Vraag 1

Beschouw de rij gedefinieerd door de recursieregelatie $y_{n+1} = y_n + ay_{n-1}$ met $y_0 = y_1 = 1$. Bepaal uit de matrixverg. voor deze rij de constante a zodat de rij het volgende asymptotisch gedrag heeft:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = 3.$$

Figure 9.29: Exam 1 Exercise 1

$$y_{m+1} = y_m + \alpha \cdot y_{m-1}, \text{ mit } \begin{pmatrix} y_1 := \\ y_0 := 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{m+1} \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_m \\ y_{m-1} \end{pmatrix}$$

multiplizieren

$$\rightarrow A^k = Q \cdot J^k \cdot Q^{-1}, \text{ wo}$$

wir passen direkt die dominante Wurzel ein.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{y_{m+1}}{y_m} \right) (\approx) \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1+4\alpha}{2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+4\alpha}{2}} \approx 2,5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+4\alpha} = -5$$

$$\text{Kwadrat} \Leftrightarrow 1+4\alpha = 25$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 6}$$

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(plots): with(plottools):
> A := Matrix([[1, a], [1, 0]]):
> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])


$$J, Q := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4a}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{1+4a}-1}{2\sqrt{1+4a}} & \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2\sqrt{1+4a}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+4a}} & \frac{1}{\sqrt{1+4a}} \end{bmatrix} \quad (1)$$


> AK := Q . MatrixPower(J, k) . MatrixInverse(Q) . Vector([1, 1]):
> dominant_vec := Vector([ $\frac{\sqrt{1+4a}-1}{2\sqrt{1+4a}}$ ,  $-\frac{1}{\sqrt{1+4a}}$ ]):
> recursion :=  $\frac{\text{dominant\_vec}[1]}{\text{dominant\_vec}[2]}$ 
> recursion :=  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4a}}{2} \quad (2)$ 
> eq := recursion = 3
> eq :=  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4a}}{2} = 3 \quad (3)$ 
> # Since the result contains a complex number, we cannot solve it using
  shitty Maple

```

1. (3 punten) Voor algemene vierkante matrices \mathbf{A} definiëren we $\sin(\mathbf{A})$, via de machtreenks van de sinus-functie:

$$\sin(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \mathbf{A}^{2n+1}.$$

- a. Bepaal via matrixdiagonalisatie een compacte uitdrukking (sommeer eventuele machtreenksen) voor de matrix $\sin(\mathbf{A})$, waarbij $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- b. Bepaal nu ook voor $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ een compacte uitdrukking voor $\sin(\mathbf{A})$.

Figure 9.30: Exam 2 Exercise 1

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar!

Maple
 $\rightarrow J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin(2) \end{bmatrix}, Q = \dots$

$$\sin(A) = Q \cdot \sin(J) \cdot Q^{-1} = \underbrace{\sin(2)}_{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

durch $\frac{\sin(2)}{2} \cdot A$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ nicht diag! d.h.

$$\sin(A) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```

> restart : with(LinearAlgebra) : with(plots) : with(plottools) :
> A := Matrix([[1, 1], [1, 1]]) :
> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])

```

$$J, Q := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

```

> # Jordaan is diagonalised, check!
> sin_j := Matrix([[0, 0], [0, sin(2)]]) :
> A_sin := Q &lt;math>\cdot sin_j &lt;/math> MatrixInverse(Q)

```

$$A_{\sin} := \begin{bmatrix} \frac{\sin(2)}{2} & \frac{\sin(2)}{2} \\ \frac{\sin(2)}{2} & \frac{\sin(2)}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

```

> A := Matrix([[0, 1], [0, 0]]) :
> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])

```

$$J, Q := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

9.4 Week 4

9.4.1 Huis

$$e) f(x(t), y(t)) = c$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = c$$

\rightarrow schrijf $\partial x/\partial t$ en $\partial y/\partial t$ in:

$$x^3 - y^3 = c(x^3 + y^3)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - y^3 = cx^3 + cy^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - cx^3 = y^3 + cy^3$$

$$\Leftrightarrow x^3(1-c) = y^3(1+c)$$

$$\Rightarrow \frac{x^3(1-c)}{(1+c)} = y^3$$

$$\Leftrightarrow x \sqrt[3]{\frac{(1-c)}{(1+c)}} = y. \quad \text{N.B. } x(t) \neq 0$$

$$\Rightarrow y(t) = t \cdot \sqrt[3]{\frac{(1-c)}{(1+c)}}$$

$$\text{dus } (x(t), y(t)) = \left(t, t \sqrt[3]{\frac{1-c}{1+c}} \right)$$

$$g) \text{ toon aan } \nabla f(x,y) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t} \right) = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{6x^2y^3}{(x^3+y^3)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-6y^2x^3}{(x^3+y^3)^2}}_{\nabla f = \text{gradient}}$$

$\nabla f = \text{gradient}$

ok. partiële derivatieve van $(x(t), y(t))$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt[3]{\frac{1-c}{1+c}} \quad \rightarrow \text{Via regha.}$$

$$\text{dus m.a.: } \nabla f(x,y) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t} \right) = 0$$

Figure 9.31: Exercise 4

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> V := -cos(3·(x - y))·cos(z + y)·cos(5·(x + y))
       $V := -\cos(3x - 3y) \cos(z + y) \cos(5x + 5y)$  (1)
> H := Matrix([ [diff(V, x), diff(V, x, y), diff(V, x, z)], [diff(V, y, x), diff(V, y, y),
      diff(V, y, z)], [diff(V, z, x), diff(V, z, y), diff(V, z, z)]]):
> H := eval(H, [x = 0, y = 0, z = 0])
      
$$H := \begin{bmatrix} 34 & 16 & 0 \\ 16 & 35 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
 (2)
> J, Q := JordanForm(H, output = ['J', 'Q']):
> evalf(J)
[[50.51822645 - 5. × 10-9 I, 0., 0.],
 [0., 18.51981170 + 1.932050808 × 10-8 I, 0.],
 [0., 0., 0.961961840 - 1.532050808 × 10-8 I]] (3)
> # dus w_12 = 50.51, w_22 = 18.51, w_32 = 0.96
>

```

Figure 9.32: Exercise 5

9.4.2 Bord

$$f(x, y) = \sin(x) e^y + y^2$$

i) $\vec{v} = \left\{ \cos(x) e^y, \sin(x) \cdot e^y + 2y \right\}$

plot is done with matlab.

ii) weellen die horizonten wannen $f(x, y) = c$

$$\sin(x) e^y + y^2 = c$$

$$(c) \sin(x) = \frac{c - y^2}{e^y}$$

$$\therefore \arcsin\left(\frac{c - y^2}{e^y}\right) \approx x$$

$$\Rightarrow x = \arcsin\left(\frac{c - y^2}{e^y}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

iii) Maple.

iv) gradient toward righting axis: $(x=0, y=1)$

$$\Rightarrow \left\{ \cos(1) e, \sin(1) \cdot e + 2 \right\}$$

$$\Theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(1) \cdot e + 2}{\cos(1) \cdot e}\right) \approx 71,09^\circ$$

$-71,09^\circ$
want we
situation near border

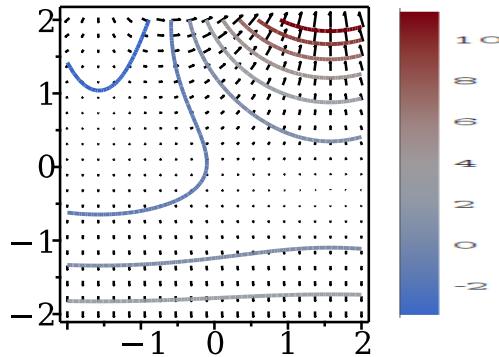
Figure 9.33: Exercise 1

```

> restart: with(LinearAlgebra) : with(VectorCalculus) : with(plots) :
  with(plottools) :
  SetCoordinates(cartesian[x,y]) :
> f := (x,y)→sin(x)·exp(y) + y2:
> gradient := Gradient(f(x,y)) :
> fig1:=gradplot(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2,      axes=boxed,scaling=
  constrained):
> display(fig1):
>
> # ii)
>
> solve(f(x,y) = c, x) :
> fig2 := contourplot(f(x, y), x = -2..2, y = -2..2, axes = boxed, scaling
  = constrained) :
display(fig2) :

> # Now simply display them together
> display(fig1,fig2)

```



```

> # Here we confirmed that the gradient is pointing to the rising direction
> # iv)
> gradient_adapted_1 := cos(1)· exp(1) :

> gradient_adapted_2 := sin(1)·exp(1) + 2
                                gradient_adapted_2 := sin(1) e + 2

```

(1)

> $\text{angle} := \text{convert}\left(\text{evalf}\left(\arctan\left(\frac{\text{gradient_adapted_2}}{\text{gradient_adapted_1}}\right)\right), \text{degrees}\right)$
angle := 71.09038174 degrees

(2)

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus): with(plots):
SetCoordinates(cartesian[x,y]):
```

> # Define the function
 $f := (x, y, z, t) \rightarrow 4*x*y*z + t^2 - x^2 - y^2 - z^2;$

Set the coordinates for partial derivatives
SetCoordinates(cartesian[x,y,z,t]);

Calculate the gradient
grad_f := Gradient(f(x,y,z,t));

Solve for critical points by setting each component of the gradient to zero
critical_points := solve({grad_f[1] = 0, grad_f[2] = 0, grad_f[3] = 0, grad_f[4] = 0}, {x, y, z, t});

Calculate the Hessian matrix of f
hessian_f := Hessian(f(x,y,z,t));

$$f := (x, y, z, t) \mapsto 4*x*y*z + t^2 + (-x^2) + (-y^2) + (-z^2)$$

$$\text{cartesian}_{x,y,z,t} \quad (1)$$

> # Now for every point we need to calculate the eigenvalues and explore these
eval_hessian := subs({x = 0, y = 0, z = 0, t = 0}, hessian_f);

$$\text{eval_hessian} := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

> # For point (0,0,0,0) we get a saddle point cuz lambda {-2, 2}, thus pos and negative
eval_hessian := Eigenvalues(subs({x = 1/2, y = 1/2, z = 1/2, t = 0}, hessian_f));

$$\text{eval_hessian} := \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

> # saddle point, and so forth...

Figure 9.34: Exercise 2

WC 4

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(plots): with(VectorCalculus):
> f := (x,y)→x·y·(x2 - y2 - 1)
      f := (x, y) ↪ x·y·(x2 + (-y2) - 1)                                (1)

> SetCoordinates(cartesian[x, y]):
> grad := Gradient(f(x, y))
      grad := (y(x2 - y2 - 1) + 2x2y)ēx + (x(x2 - y2 - 1) - 2xy2)ēy      (2)

> stationary_points := solve({grad[1] = 0, grad[2] = 0}, {x, y})
stationary_points := {x = 0, y = 0}, {x = 0, y = RootOf(_Z2 + 1)}, {x = 1, y = 0}, {x = -1, y = 0}, {x = -1/2, y = RootOf(_Z2 + 1)/2}, {x = 1/2, y = RootOf(_Z2 + 1)/2}      (3)

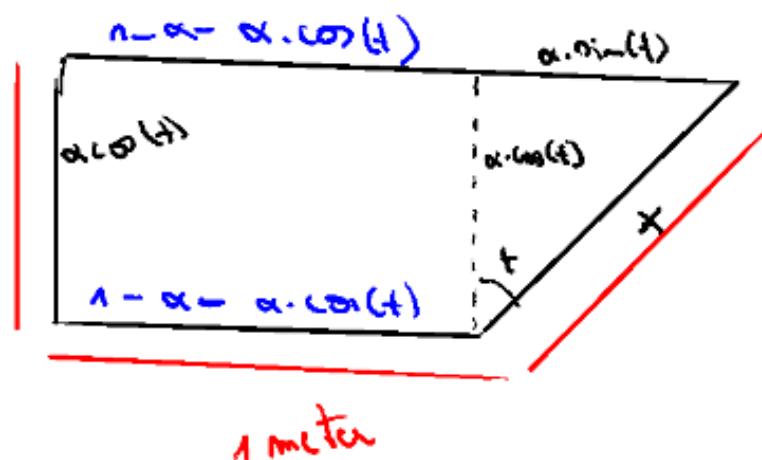
> hessian := Hessian(f(x, y))
      hessian := [ 6xy   3x2 - 3y2 - 1 ]
                  [ 3x2 - 3y2 - 1   -6xy ]                                (4)

> # So now for the first critical point for example:
> Eigenvalues(subs(x = 0, y = 0, hessian))
      [ 1 ]
      [ -1 ]                                (5)

> # So this is a saddle
> # And so forth...

```

Figure 9.35: Exercise 1



$$opp = \frac{(l + L) \cdot h}{2} = \text{via Maple}$$

Figure 9.36: Exercise 2

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus):
SetCoordinates(cartesian[x, t]):
> area := 
$$\frac{(1 - x - x \cdot \cos(t) + 1 - x - x \cdot \cos(t) + x \cdot \sin(t)) \cdot x \cdot \cos(t)}{2}$$


$$area := \frac{(2 - 2x - 2x \cos(t) + x \sin(t)) x \cos(t)}{2} \quad (1)$$

> gradient := simplify(Gradient(area))
gradient := 
$$(-2 \cos(t)^2 x + (x \sin(t) - 2x + 1) \cos(t)) \hat{\mathbf{e}}_x + \left( (2x^2 \cos(t) + x^2$$


$$- x) \sin(t) + x^2 \left( \cos(t)^2 - \frac{1}{2} \right) \right) \hat{\mathbf{e}}_t \quad (2)$$

> # Seems like we do not have a direction in the y direction, whatever
> critical_points := (solve({gradient[1] = 0, gradient[2] = 0}, {x, t}))
critical_points := 
$$\left\{ t = \frac{\pi}{2}, x = 0 \right\}, \left\{ t = \arctan(1, \text{RootOf}(\text{Z}^2 - 3)), x$$


$$= \frac{4 \text{RootOf}(\text{Z}^2 - 3)}{3} - 2 \right\}, \left\{ t = \frac{\pi}{2}, x = 2 \right\}, \left\{ t = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{2}{3} \right\} \quad (3)$$

> # X needs to be J0, 1[ and t J0, pi:2]
> # seems like point 2 is the only valid one
> # Hessian
> hessian := Hessian(area):
> result := evalf(subs(x =  $\frac{4 \text{RootOf}(\text{Z}^2 - 3)}{3} - 2$ , t = arctan(1, RootOf(_Z^2
- 3)), hessian))
result := 
$$\begin{bmatrix} -2.799038106 & 0.5000000010 \\ 0.5000000010 & -0.1722201661 \end{bmatrix} \quad (4)$$

> Eigenvalues(result)

$$\begin{bmatrix} -2.89099141081943 + 0.1 \\ -0.0802668612805653 + 0.1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

> # These two values are < 0, so they define the maximum, so the second
critical point is the maximum area.
> max_area := evalf(subs(t = arctan(1, RootOf(_Z^2 - 3)), x
=  $\frac{4 \text{RootOf}(\text{Z}^2 - 3)}{3} - 2$ , area))
max_area := 0.1339745961 \quad (6)

```

Figure 9.37: Exercise 2

9.4.3 Exams

Vraag 3

Beschouw de volgende genoegde golfverg.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(x, t) = 0$$

Bepaal handmatig (zonder Maple) de const. a en b in de volgende coördinatentransformatie: $u = x + at$, $v = x + bt$ zodat de vgl. in de nieuwe coördinaten reduceert tot (met c een const.):

$$c \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \psi(u, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \psi(u, v) = 0$$

$$[\text{met } \psi(u, v) = \phi(x(u, v), t(u, v))]$$

Figure 9.38: Exam 1 Exercise 3

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(x, t) = 0$$

$$u = \alpha + at, \quad v = \alpha + bt$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial v} = a \cdot \frac{\partial}{\partial u} + b \cdot \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2 \cdot \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) = \left(a \cdot \frac{\partial}{\partial u} + b \cdot \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{(a+b)^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \cdot \partial x} = \left(a \cdot \frac{\partial}{\partial u} + b \cdot \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 = a^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2ab \cdot \frac{\partial^2}{\partial u \cdot \partial v} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

[dann die metriken vereinfacht werden!]

d.h.:

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2 \cdot \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} - \left(\frac{v}{c} \cdot \left(a \frac{\partial^2}{\partial u^2} + (a+b) \frac{\partial^2}{\partial u \cdot \partial v} + b \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \right)$$

$$- \frac{1}{c^2} \cdot \left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2ab \cdot \frac{\partial^2}{\partial u \cdot \partial v} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial u^2} \cdot \left(1 - \frac{va}{c^2} - \frac{a^2}{c^2} \right) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} c^2 - va - a^2 = 0 \\ c^2 - vb - b^2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(1 - \frac{vb}{c^2} - \frac{b^2}{c^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 + va - c^2 = 0 \\ b^2 + vb - c^2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 4c^2}}{2} \\ b = \frac{-v - \sqrt{v^2 + 4c^2}}{2} \end{array} \right\}$$

✓

0

9.5 Week 5

9.5.1 Huis

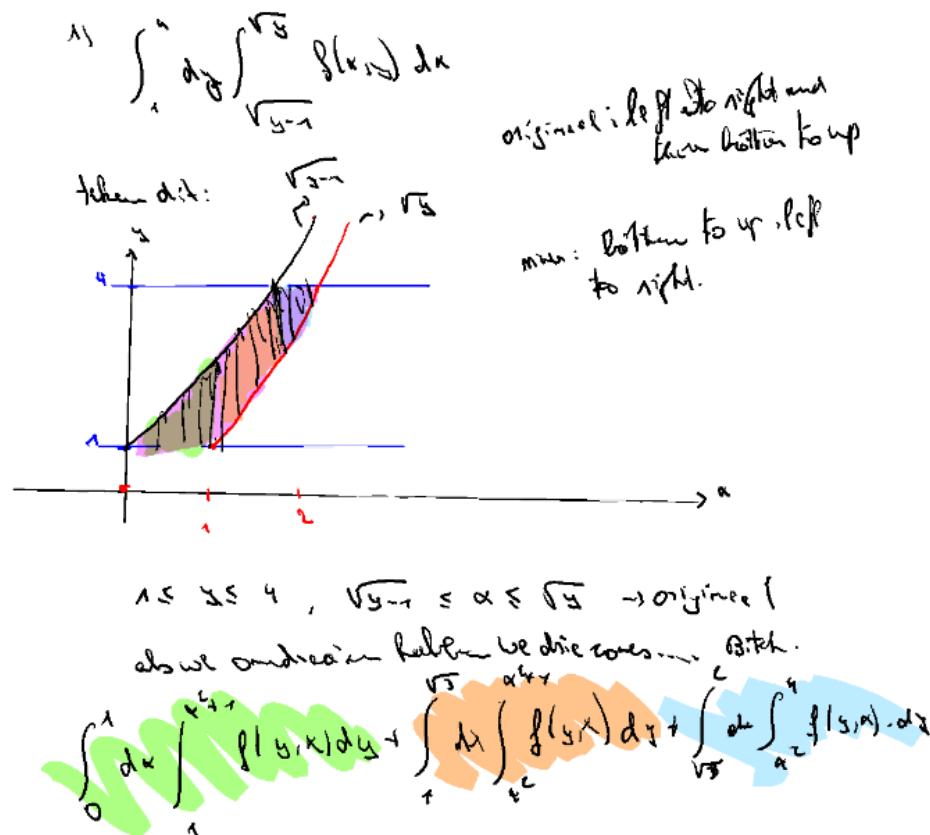


Figure 9.39: Exercise 1

```

> with(VectorCalculus): with(LinearAlgebra):
> J := Jacobian([a·r·sin(theta)·cos(phi), b·r·sin(theta)·sin(phi), c·r·cos(theta)],
  [r, theta, phi])
      
$$J := \begin{bmatrix} a \sin(\theta) \cos(\phi) & a r \cos(\theta) \cos(\phi) & -a r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ b \sin(\theta) \sin(\phi) & b r \cos(\theta) \sin(\phi) & b r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ c \cos(\theta) & -c r \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J := Determinant(J)
J := a \sin(\theta)^3 \cos(\phi)^2 b r^2 c + b \sin(\theta)^3 \sin(\phi)^2 a r^2 c
      + \sin(\theta) \cos(\phi)^2 \cos(\theta)^2 a b c r^2 + \sin(\theta) \sin(\phi)^2 \cos(\theta)^2 a b c r^2 \quad (2)
> result := simplify(J)
      result := a b c r^2 \sin(\theta) \quad (3)
> # Dit is de jacobiaan bitches
> # In een sferische situatie is r: 0..1, phi:0..2pi, theta:0..pi
> output := int(int(int(result, r = 0..1), theta = 0..Pi), phi = 0..2·Pi)
      output :=  $\frac{4 a b c \pi}{3}$  \quad (4)
> simplify(output)
      
$$\frac{4 a b c \pi}{3} \quad (5)$$


```

Figure 9.40: Exercise 3

$$1 \quad \overbrace{x^2 + y^2}^g + z^2 = a^2$$

$$z = \rho \cos \theta$$

$$z = \epsilon$$

\hookrightarrow cilinderconen kast $\Rightarrow \int p \, dp \, dz \, d\theta$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} p \, dp \, dz \, d\theta \right)$$

convention

$$= \pi \left(a^2(r - \epsilon) - \frac{r^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} \right)$$

via Maple

Figure 9.41: Exercise 5

```

[> restart: with(LinearAlgebra):
[> integral := int(int(int(rho,rho = 0..sqrt(a^2 - z^2)),z = c..b),theta = 0..2·Pi)
      integral := a^2 (b - c) π -  $\frac{b^3 \pi}{3} + \frac{c^3 \pi}{3}$                                 (1)

[> simplify(integral)
       $\pi \left( a^2 (b - c) - \frac{b^3}{3} + \frac{c^3}{3} \right)$                            (2)

[>

```

Figure 9.42: Exercise 5

9.5.2 Bord

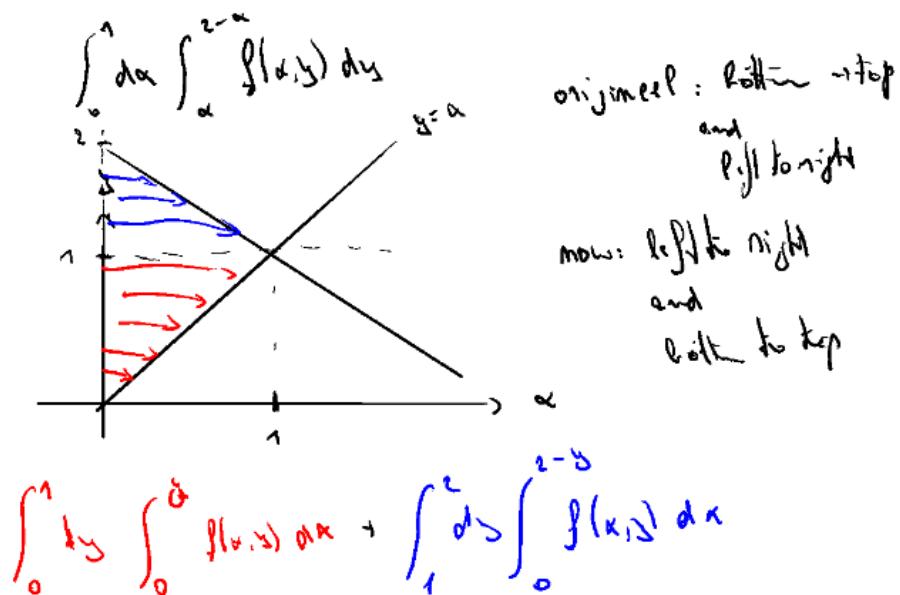


Figure 9.43: Exercise 1

```

> restart: with(plots):
> cr1:=implicitplot((x+2)^2+y^2=4,x=-4..0,y=-2..2,scaling=
  constrained):
cr2:=implicitplot(x^2+(y+2)^2=4,x=-2..2,y=-4..0,scaling=
  constrained, color=blue):
> display(cr1,cr2);

> # dus dy(dx), y gaat van -2 naar 0, x gaat van blauw naar bruin
> # bepaal limieten voor dx
> eq := y^2 + (x + 2)^2 = 4:
> solve(eq,y):
> # we nemen de negatieve versie
> # hierboven is de lowerbound, nu upperbound
> eq := x^2 + (y + 2)^2 = 4:
> solve(eq,y):
> # pak eerste versie, we gaan naar boven
> # dus result gebruikmakend van cartetische coords is:
> result := int(int((x^2 + y^2)^(3/4), x = -sqrt(-x^2 - 4*x) .. (-2 + sqrt(-x^2 + 4))), y
  = -2 .. 0):
> # Maple kan dit niet calculeren, drmp pool coords... [ZIE NOTES]
> evalf(int(int(r*r^(3/2), r = 0 .. -4*cos(theta)), theta = Pi/4 .. 3*Pi/2) + int(int(r
  *r^(3/2), r = 0 .. -4*sin(theta)), theta = Pi .. 5*Pi/4))
4.270011865

```

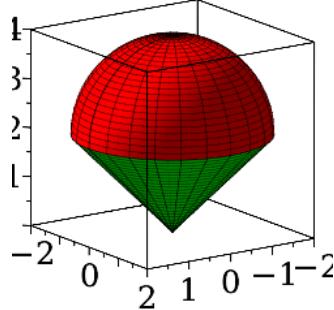
(1)

Figure 9.44: Exercise 2


```

> restart: with(plots):
> # first draw the plots
> pkegel:=plot3d([r,phi,Pi/4],r=0..2*sqrt(2),phi=0..2*Pi,coords=spherical,color=green):
pbol:=plot3d([4*cos(theta),phi,theta],phi=0..2*Pi,theta=0..Pi/4,coords=spherical,color=red):
> display(pkegel,pbol)

```



```
> # Eerst sferische coordinaten
```

$$x := r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \quad (1)$$

$$y := r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \quad (2)$$

$$z := r \cdot \cos(\theta) \quad (3)$$

$$j := r^2 \cdot \sin(\theta) \quad j := r^2 \sin(\theta) \quad (4)$$

```
> # hoe is onze r? just fill in into sphere eq
```

$$\begin{aligned} \text{sphere_eq} &:= x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2 \\ &\text{sphere_eq} := r^2 \sin(\theta)^2 \cos(\phi)^2 + r^2 \sin(\theta)^2 \sin(\phi)^2 + (r \cos(\theta) - a)^2 = a^2 \end{aligned} \quad (5)$$

```
> result := solve(sphere_eq, r)
```

$$\text{result} := 0, \frac{2 \cos(\theta) a}{\sin(\theta)^2 \cos(\phi)^2 + \sin(\theta)^2 \sin(\phi)^2 + \cos(\theta)^2} \quad (6)$$

```
> simplify(result[2])
```

$$2 \cos(\theta) a \quad (7)$$

```
> # so r goes from 0 to  $2 \cdot \cos(\theta) \cdot a$ 
```

```
> # theta goes from zero to 45 degrees
```

```
> # phi is 360 degrees
```

```
> # so the mass is:
```

$$\begin{aligned} M &:= \rho \cdot \text{int}\left(\text{int}\left(\text{int}(j, r = 0 .. 2 \cdot \cos(\theta) \cdot a), \theta = 0 .. \frac{\pi}{4}\right), \phi = 0 .. 2 \cdot \pi\right) \\ M &:= \rho a^3 \pi \end{aligned} \quad (8)$$

```

> # de massa middelpunten zijn dan (zie formules)
>  $x_- := \frac{1}{M} \cdot \text{int}\left(\text{int}\left(\text{int}(\rho \cdot j \cdot x, r = 0..2 \cdot a \cdot \cos(\theta)), \theta = 0..\frac{\pi}{4}\right), \phi = 0..2\pi\right)$ 
>  $x_- := 0$  (9)

>  $y_- := \frac{1}{M} \cdot \text{int}\left(\text{int}\left(\text{int}(\rho \cdot j \cdot y, r = 0..2 \cdot a \cdot \cos(\theta)), \theta = 0..\frac{\pi}{4}\right), \phi = 0..2\pi\right)$ 
>  $y_- := 0$  (10)

>  $z_- := \frac{1}{M} \cdot \text{int}\left(\text{int}\left(\text{int}(\rho \cdot j \cdot z, r = 0..2 \cdot a \cdot \cos(\theta)), \theta = 0..\frac{\pi}{4}\right), \phi = 0..2\pi\right)$ 
>  $z_- := \frac{7a}{6}$  (11)

> # Nu met cilinder coords, basically hetzelfde.
> restart:
>  $x := r \cdot \cos(\theta)$  (12)
>  $y := r \cdot \sin(\theta)$  (13)
>  $z := z$  (14)
>  $j := r$  (15)

> # De theta doet 360
> # De r is van 0 -> a (simply see formula)
> # voor z, steken we de variabelen in de sphere equation
>  $\text{sphere\_eq} := x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$ 
>  $\text{sphere\_eq} := r^2 \cos(\theta)^2 + r^2 \sin(\theta)^2 + (z - a)^2 = a^2$  (16)

>  $\text{result} := \text{solve}(\text{sphere\_eq}, z)$ 
>  $\text{result} := a + \sqrt{a^2 - r^2}, a - \sqrt{a^2 - r^2}$  (17)

>  $\text{upperbound\_z} := \text{result}[1]$ 
>  $\text{upperbound\_z} := a + \sqrt{a^2 - r^2}$  (18)

> # dus z is van a tot upperbound_z
> # vul in in de vorige equations

```

9.5.3 WC

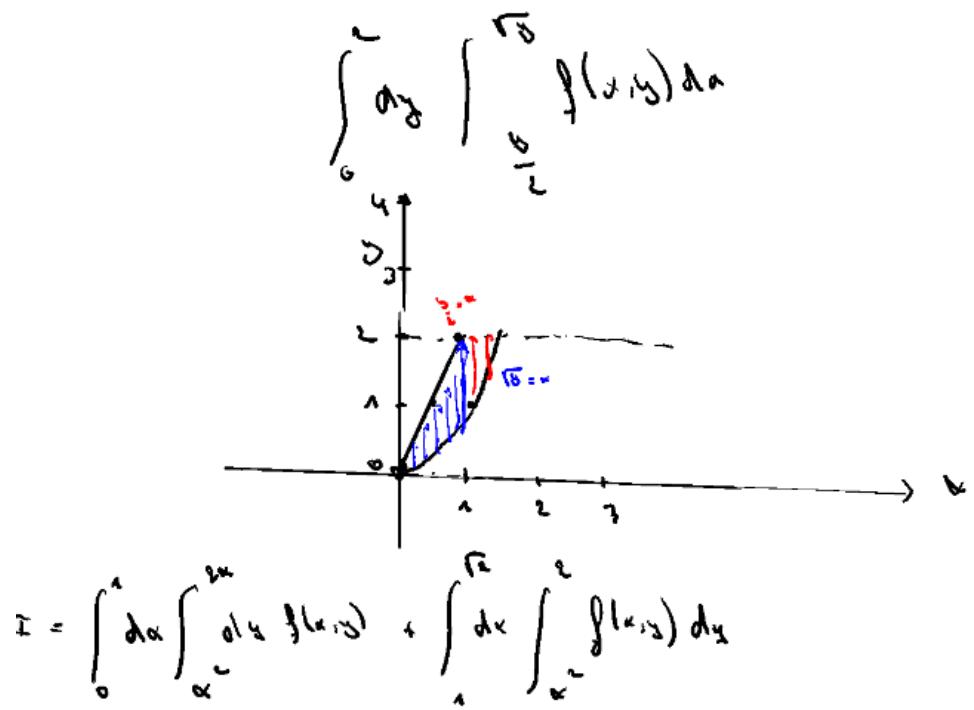


Figure 9.46: Exercise 1

$$x = a \cos \theta$$

$$y = b \sin \theta$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ 1 & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

→ via maple:

1021

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a abr \, dr \, d\theta = ab\pi \checkmark$$

Figure 9.47: Exercise 3

```

> restart: with(VectorCalculus): with(LinearAlgebra):
> j:=Jacobian([a·r·cos(theta), b·r·sin(theta)], [r, theta])
      
$$j := \begin{bmatrix} a \cos(\theta) & -a r \sin(\theta) \\ b \sin(\theta) & b r \cos(\theta) \end{bmatrix}$$
 (1)
> j:=Determinant(j)
      
$$j := a \cos(\theta)^2 b r + a r \sin(\theta)^2 b$$
 (2)
> simplify(j)
      
$$a b r$$
 (3)
> int(int(a·b·r, r = 0..1), theta = 0..2·Pi)
      
$$a b \pi$$
 (4)
>

```

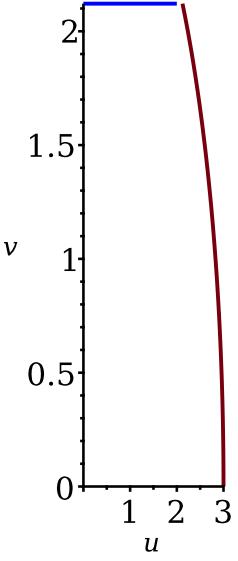
Figure 9.48: Exercise 3 Maple

```

> restart : with(VectorCalculus) : with(LinearAlgebra) : with(plots) :
> x := r·cos(theta) :
> y := r·sin(theta) :
> z := 'z':
> # Find z upperbound
> z_eq := z =  $\frac{(x^2 - y^2)}{3}$  :
> solve(z_eq, z)

$$\frac{r^2 \cos(\theta)^2}{3} - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{3} \quad (1)$$

> # dit is eigenlijk:  $(r^2 \cdot \cos(2\cdot\theta))$  divided by 3 (ignore this shit formatting)
> j := r:
> plot_1 := implicitplot(u = sqrt(-v^2 + 9), u = 0 .. 3, v = 0 ..  $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ) :
> plot_2 := plot(3/sqrt(2), u = 0 .. 2, color = blue):
    # Not fully aligned but you get the point lol
> display(plot_1, plot_2)


> # De boog (dat rechter stuk) is van 0 tot 3, dit is r.
> # dus per definitie is deze cirkel:  $x^2 + y^2 = 9$  ( $r = 3$ )
> # theta gaat van 0 tot de grens van  $3:\sqrt{2}$ 
> arctan( $\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{\sqrt{2}}}$ )

$$\frac{\pi}{4} \quad (2)$$

> # voor de blauwe kromme zetten we de coords in y:(3:sqrt(2))

```

> $r_blauw_eq := y = \frac{3}{\text{sqrt}(2)}$

$r_blauw_eq := r \sin(\theta) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (3)

> $\text{solve}(r_blauw_eq, r)$

$\frac{3\sqrt{2}}{2 \sin(\theta)}$ (4)

> # dus r gaat van 0 tot het bovenste
 > # voor theta zou dit redelijk duidelijk moeten zijn, we gaan van pi:4 tot pi:2
 > #Dus alles samengenomen (we nemen dz dr dtheta voor de simplificatie)
 > $\text{result} := \text{int}\left(\text{int}\left(\text{int}\left(r \cdot j, z = 0 .. \frac{r^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta)}{3}, r = 0 .. 3\right), \theta = 0 .. \frac{\pi}{4}\right) + \text{int}\left(\text{int}\left(r \cdot j, z = 0 .. \frac{r^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta)}{3}, r = 0 .. \frac{3\sqrt{2}}{2 \sin(\theta)}\right), \theta = \frac{\pi}{4} .. \frac{\pi}{2}\right)\right)$
 $\text{result} := \frac{243}{32} + \frac{81\sqrt{2} \ln(\sqrt{2} - 1)}{64}$ (5)

9.6 Week 6

9.6.1 Huis

5) i) de tornado-golf had hardop hitten op de rand:

$$n_0 = n$$

ii) Maple

iii) Dit is omdat de kringintegraal niet null wordt!
zie montitum.

iv)

$$\int \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} v \cdot d\vec{s} d\theta$$

$$= 2\pi v$$

Figure 9.49: Exercise 5

```

> with(VectorCalculus): SetCoordinates(cartesian[x,y,z]): 
> r := sqrt(x^2 + y^2):
> v_inside := VectorField([ -alpha*y/r^2, alpha*x/r^2, 0 ]):
> simplify(Curl(v_inside)):
(0)ēx + (0)ēy + (2α/r^2)ēz (1)
> v_outside := VectorField([ -alpha*y/r^2, alpha*x/r^2, 0 ]):
> simplify(Curl(v_outside)):
(0)ēx + (0)ēy + (0)ēz (2)
> # IV
> circle := [r*cos(theta), r*sin(theta), 0]:
> dr := VectorField([diff(circle[1],theta), diff(circle[2],theta), 0])
dr := (-sqrt(x^2 + y^2)*sin(theta))ēx + (sqrt(x^2 + y^2)*cos(theta))ēy + (0)ēz (3)
> v_circle := eval(v_outside . dr, [x = circle[1], y = circle[2]])
v_circle := α*sqrt(x^2 + y^2)*sin(theta)^2 / 
sqrt((x^2 + y^2)*cos(theta)^2 + (x^2 + y^2)*sin(theta)^2) (4)
+ α*sqrt(x^2 + y^2)*cos(theta)^2 / 
sqrt((x^2 + y^2)*cos(theta)^2 + (x^2 + y^2)*sin(theta)^2)
> int_ := int(v_circle, theta = 0..2*Pi)
int_ := 2πα (5)

```

Figure 9.50: Exercise 5

$$\vec{F}(\alpha, \gamma) = \alpha (\alpha^2 - \gamma^2) \hat{e}_x - \gamma (\alpha^2 - \gamma^2) \hat{e}_y$$

1. liegt im \mathbb{R}^2 , also E

c. Robot:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \stackrel{\text{Maple}}{=} (0, 0, 0)$$

durch Rotation um y

we erhalten dann momentaner drehimpuls $\vec{F} = \vec{\nabla} \Phi$

Viele Maple ist dril:

$$\Phi = \underbrace{\frac{(\alpha^2 - \gamma^2)^2}{4}}_{\text{willkürliche Integrationskonstante}} + C$$

Figure 9.51: Exercise 6

```

> with(VectorCalculus): SetCoordinates(cartesian[x,y,z]):  

> f:=VectorField([x·(x2-y2), -y·(x2-y2), 0])  

> f:= (x(x2-y2)) $\hat{e}$ x + (-y(x2-y2)) $\hat{e}$ y + (0) $\hat{e}$ z (1)  

> Curl(f)  $\hat{e}$ x + (0) $\hat{e}$ y + (0) $\hat{e}$ z (2)  

> ScalarPotential(f)  $\frac{(x^2-y^2)^2}{4}$  (3)  

>

```

Figure 9.52: Exercise 6

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2, xy, y^2)$$

$\rightarrow F$ nicht continue ableitbar sein, nach ESG rückt
zu divergenter Vektor.

1. wir wollen im \mathbb{R}^3 , also in ESG
2. $\nabla \cdot F = 0 + 0 + 0 = 0 \rightarrow$ also divergenter Vektor.
3. wir tolken die Verkopotential A sodass $F = A \times D$

$$\hookrightarrow \text{Maple: } \text{pot} = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3}, -\frac{2}{3}, 0 \right)$$

$\nabla \cdot \text{pot} = \frac{z^2}{2} \rightarrow \neq 0!$ dann we wollen nun A die well
divergent ist.

$$A' = A + \nabla \psi$$

$$\rightarrow \nabla \cdot A' = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{A} + \Delta \psi = 0$$

$$\hookrightarrow \Delta \psi = -\frac{2}{2}$$

$$\rightarrow \psi = -\frac{2}{2} \cdot$$

$$\rightarrow A' = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{2} \right)$$

$$\rightarrow \text{pot} = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{2} \right)$$

Figure 9.53: Exercise 7

```

> with(VectorCalculus): SetCoordinates(cartesian[x,y,z]):  

> f := VectorField([z^2,x·z,y^2]):  

> vector_potential := VectorPotential(f)  

  vector_potential :=  $\left(\frac{xz^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\hat{e}_x + \left(-\frac{z^3}{3}\right)\hat{e}_y + (0)\hat{e}_z$  (1)  

> # Check if this is actually divergent  

> A_x := vector_potential[1];  

A_y := vector_potential[2];  

A_z := vector_potential[3];  

grad_A_x := diff(A_x, x$1);  

grad_A_y := diff(A_y, y$1);  

grad_A_z := 0;  

A_x :=  $\frac{xz^2}{2} - \frac{y^3}{3}$   

A_y :=  $-\frac{z^3}{3}$   

A_z := 0  

grad_A_x :=  $\frac{z^2}{2}$   

grad_A_y := 0  

grad_A_z := 0 (2)  

> phi_lapl := grad_A_x + grad_A_y + grad_A_z  

phi_lapl :=  $\frac{z^2}{2}$  (3)  

> int(int(phi_lapl, z), z)  $\frac{z^4}{24}$  (4)  

>

```

Figure 9.54: Exercise 7 Maple

$$f = \nabla \varphi + \nabla \alpha A \rightarrow \text{Lohn quadrat}$$

?

$$f = [x^2(x+y-z), y^2(y+z-x), z^2(z+x-y)]$$

$$\nabla F = \Delta \varphi = 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\nabla \varphi = x^3 + y^3 + z^3$$

$$\varphi = \frac{1}{4}(x^4 + y^4 + z^4)$$

$$\Leftrightarrow \nabla \alpha A = F - \nabla \varphi$$

$$\hookrightarrow A' = A + \nabla \psi$$

$$\hookrightarrow \nabla A' = \nabla A + \nabla \psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta \varphi = x^2 z + y^2 z$$

$$\Leftrightarrow \nabla \psi = \frac{x^3}{3} z + \frac{y^3}{3} z$$

$$\Leftrightarrow \psi = \frac{1}{12}(x^4 + y^4)$$

$$\nabla \psi = \left\{ \dots ; \dots ; \dots \right\}$$

Figure 9.55: Exercise 8

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{\alpha}$$

with: $\vec{f}(x, y, z) = -y \cdot \vec{e}_x + x \cdot \vec{e}_y - \frac{z}{2} \vec{e}_z$

$\vec{\alpha}(t) = \cos t \vec{e}_x + \sin(t) \vec{e}_y + 2t \vec{e}_z, t \in [0, \pi]$

$$\frac{d\alpha \cdot dt}{dt} = dt (\cos t \vec{e}_x + \sin(t) \vec{e}_y + 2t \vec{e}_z) \cdot \underline{\underline{J}}$$

$$d\alpha = dt \cdot (-\sin t \vec{e}_x + \cos t \vec{e}_y + 2 \vec{e}_z)$$

Rech. $\vec{\alpha}(t)$ in \vec{f}

$$\Rightarrow -\sin(t) \vec{e}_x + \cos t \vec{e}_y - \frac{z+2t}{2} \vec{e}_z$$

$$\Leftrightarrow -\sin(t) \vec{e}_x + \cos t \vec{e}_y - t \vec{e}_z$$

Wu F. $\frac{d\alpha}{dt} = (-\sin t, -\cos t, \cos t \cdot 2 + t \cdot (-1)) dt$

$$\Leftrightarrow (1 - 2t) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi (1 - 2t) dt = \pi - 2 \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^\pi$$

$$= \pi - 4 \pi = -3\pi$$

Figure 9.56: Exercise 9

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{\omega}$$

$$\vec{F}(x,y) = (x^2 - 2xy) \vec{e}_x + (y^2 - 2xy) \vec{e}_y$$

note $y = x^2$, van $(-2, 4)$ tot $(1, 1)$

$$\text{note } \alpha = t \Rightarrow y = t^2$$

$$\rightarrow n(t) = t \cdot \vec{e}_x + t^2 \cdot \vec{e}_y$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} n(t) = \vec{e}_x + 2t \vec{e}_y}$$

$$\begin{aligned} F(n(t)) \cdot \frac{d}{dt} n(t) &= (t^2 - 2 \cdot t \cdot t^2) \vec{e}_x + (t^4 - 2 \cdot t \cdot t^2) \vec{e}_y \\ &\quad \cdot (\vec{e}_x + 2t \vec{e}_y) \\ &= (t^2 - 2t^3) + (2t^5 - 4t^4) \\ &= \underline{t^2 - 2t^3 - 4t^4 + 2t^5} \end{aligned}$$

$$\text{ans: } \int_{-2}^1 (t^2 - 2t^3 - 4t^4 + 2t^5) dt$$

via maple:
 $\frac{-365}{10}$

Figure 9.57: Exercise 10

④

$$M) \int_C z \cdot \underline{dx} = \sqrt{\underline{dx} \cdot \underline{dx}} = \sqrt{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt} = \left\| \frac{dx}{dt} \right\| \cdot dt$$

$$C: \vec{z}(t) = t \cdot (\cos t \vec{e_1} + \sin t \vec{e_2}) + t \cdot \vec{e_3}, 0 \leq t \leq 1$$

$$\wedge \quad z = t$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = (\cos t - t \cdot \sin t) \vec{e_1} + (\sin t + t \cdot \cos t) \vec{e_2} + \vec{e_3}$$

$$\int_0^1 t \cdot \sqrt{(\cos t - t \cdot \sin t)^2 + (\sin t + t \cdot \cos t)^2 + 1} dt$$

Run op Vival Maple.

Figure 9.58: Exercise 11

```
[> restart: with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus):  
=> simplify(int(t*sqrt((cos(t)-sin(t)*t)^2 + (sin(t)+t*cos(t))^2 + 1), t = 0..1))  
=> -2*sqrt(2)/3 + sqrt(3) (1)
```

Figure 9.59: Exercise 11 Maple

$$12) \rho = r, \alpha(\theta) = a(1 + \cos\theta), 0 < \theta \leq \pi, r > 0$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{m} \cdot \int_C \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

Hier is een driedimensionaal \vec{r} , om dat geschreven we ds

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{m} \int_C \vec{\alpha} \rho(\vec{\alpha}) ds$$

$$C: \vec{\alpha}(\theta) = a(\cos\theta(1 + \cos\theta), (\sin\theta)(1 + \cos\theta)), 0 \leq \theta \leq \pi, r > 0$$

$$ds = \left| \left| \frac{d\vec{\alpha}}{d\theta} \right| \right| d\theta$$

$$\frac{d\vec{\alpha}}{d\theta} = \begin{pmatrix} a(-\sin\theta(1 + \cos\theta) - \sin^2\theta \cos\theta) \\ \cos\theta(1 + \cos\theta) - \sin^2\theta \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\pi \alpha(\theta) \cdot \vec{p} \cdot d\theta = \int_0^\pi \alpha(\theta) \cdot \left| \left| \frac{d\vec{\alpha}}{d\theta} \right| \right| \cdot d\theta$$

*Nog dit in Maple (daar voor we een
matrige stappenplan.)*

Figure 9.60: Exercise 12

Here we use $ds = \sqrt{dr \cdot dr + r^2 d\theta}$

```

> restart: with(VectorCalculus): SetCoordinates(cartesian[x,y,z]):  

> r := a·(1 + cos(theta))  


$$r := a (1 + \cos(\theta)) \quad (1)$$
  

> ds := simplify(sqrt( (diff(r, theta$1))^2 + r^2 ))  


$$ds := \sqrt{2} \sqrt{a^2 (1 + \cos(\theta))} \quad (2)$$
  

> M := int(ds, theta = 0..Pi)  


$$M := 4 a \operatorname{csgn}(a) \quad (3)$$
  

> Mx :=  $\frac{1}{M} \cdot \int r \cos(\theta) \cdot ds, \theta = 0..Pi$   


$$Mx := \frac{4 a}{5} \quad (4)$$
  

> My :=  $\frac{1}{M} \cdot \int r \sin(\theta) \cdot ds, \theta = 0..Pi$   


$$My := \frac{4 a}{5} \quad (5)$$
  


```

Figure 9.61: Exercise 12 Maple

$$(\alpha = 0, \psi = 0, z = r)$$

$$\zeta: \vec{\alpha}(t) = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0), \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\dot{\alpha} = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0)$$

$$\vec{\alpha} - \vec{\alpha}' = (0 - R \cos \theta, 0 - R \sin \theta, 2)$$

$$= (-R \cos \theta, -R \sin \theta, 2)$$

$$\frac{d\alpha(\theta)}{d\theta}, \alpha(\vec{\alpha} - \vec{\alpha}') = (2R \cos \theta, 2R \sin \theta, R^2)$$

$$\|\vec{\alpha} - \vec{\alpha}'\|^3 = (R^2 + 2^2)^{3/2}$$

$$B_x = \dots$$

$$B_y = \dots$$

$$B_z = \dots$$

$$B = \left\{ \dots, \dots, \dots \right\}$$

Figure 9.62: Exercise 14

9.7 Week 7

9.7.1 WC

1)

$$\int_C (x \, dy - y \, dx)$$

green:

$$\iint_S \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

$$(x, y) \rightarrow (\alpha \cos \theta, \alpha \sin \theta)$$

$$\int_0^{2\pi} (\alpha \cos \theta \cdot \frac{dy}{d\theta} \, d\theta - \alpha \sin \theta \cdot \frac{dx}{d\theta} \, d\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} (\alpha^2 \cos^2 \theta + \alpha^2 \sin^2 \theta) \, d\theta$$

$$\approx \int_0^{2\pi} \alpha^2 \cdot d\theta = \boxed{2\alpha^2 \pi}$$

Figure 9.63: Exercise 1

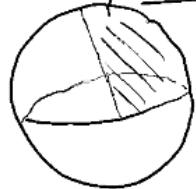
$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

$\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (Kugel obenan)
 $n = \mathbf{k}$ BTW.

$\mathbf{F} = (x, y, 0)$, we get the following combination:

$$(x, y, 0) \rightarrow \begin{cases} \text{nimmt } \varphi, \text{ nimmt } r, \text{ nimmt } \theta \\ dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \rightarrow r \text{ wird Weggeometrie} \\ \text{stehen} \end{cases}$$

$$dr \rightarrow \Theta = \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \quad \varphi = \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$



$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

(it will be calculated via the notes right).

$$m_a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi & -\sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$\approx i(\sin \theta \cos \varphi) - j(\sin \theta \sin \varphi) + k(\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi)$$

$$= i(v) - j(u) + k(r \cos \theta) \rightarrow \sqrt{a^2 + r^2 + z^2}$$

$$\|\mathbf{m}\| = \sin \theta$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} [\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, 0] \cdot \frac{M}{\sin \theta} \cdot \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\boxed{\iint_S \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{m}\|} d\mathbf{s} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\theta d\varphi}$$

jacobian

$$= \frac{\pi}{3}$$

Figure 9.64: Exercise 2

```

> restart: with(VectorCalculus): with(LinearAlgebra):
    SetCoordinates(cartesian[x,y,z]):
>
> v1 := VectorField([diff(sin(theta)·cos(phi),theta), diff(sin(theta)·sin(phi),
    theta), diff(cos(theta),theta)]):
>
> v2 := VectorField([diff(sin(theta)·cos(phi),phi), diff(sin(theta)·sin(phi),
    phi), diff(cos(theta),phi)]):
> cross := CrossProduct(v1,v2):
> n := sqrt(cross[1]^2 + cross[2]^2 + cross[3]^2):
> int(int(sin(theta)·VectorField([sin(theta)·cos(phi), sin(theta)·sin(phi), 0])
    . $\frac{cross}{n}$ , theta = 0 ..  $\frac{\text{Pi}}{2}$ ), phi = 0 ..  $\frac{\text{Pi}}{2}$ )
 $\frac{\pi}{3}$ 

```

(1)

Figure 9.65: Exercise 2

$$\int_C \vec{r} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{r}(x, y, z) = (0, -z, y)$$

$$\alpha(x, y) = (x \cdot \cos(u), x \sin(u), v), 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq a$$

$$\int_C \vec{r} \cdot d\vec{s} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \cdot d\sigma \rightarrow \text{Richtung vom Stoßen}$$

normal vector folgt aus der Kreislinie
Pfeilregel.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -x \sin(u) + \cos(u) & x \sin(u) + \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \approx (x \sin(u) + \cos(u), x \sin(u) - \cos(u), 0)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x / \partial u & \partial y / \partial u & \partial z / \partial u \\ 0 & -z & y \end{vmatrix} = (1, 0, 0)$$

$$\text{daraus } \int_0^{\pi/2} \int_0^u (1, 0, 0) \cdot (x \sin(u) + \cos(u), x \sin(u) - \cos(u), 0) dv du$$

(Maple)
 $\left(= \frac{\pi a^2}{2} - 2 \right)$

Figure 9.66: Exercise 3

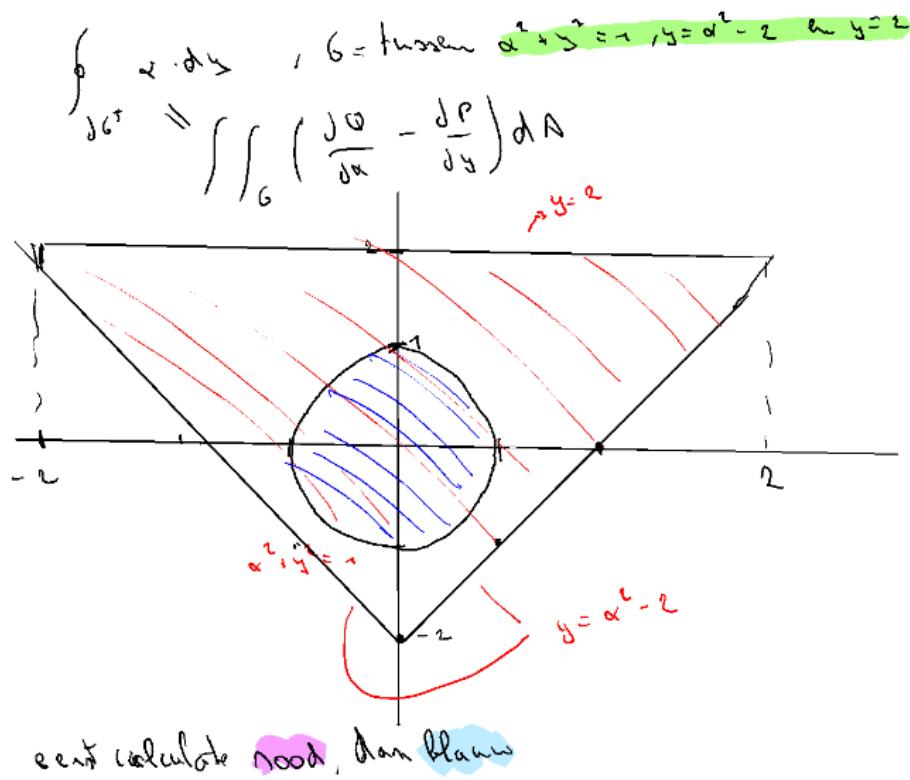
```

> restart: with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus):
> SetCoordinates(cartesian[x,y,z]):
> # First define n_k = normaal vector met rechterhand
> v_1 := VectorField([-u.sin(u) + cos(u), sin(u) + u.cos(u), 0]):
> v_2 := VectorField([0, 0, 1]):
> n := CrossProduct(v_1, v_2)
n := ( $\sin(u) + u \cos(u)$ ) $\hat{e}_x$  + ( $u \sin(u) - \cos(u)$ ) $\hat{e}_y$  + (0) $\hat{e}_z$  (1)
> # Nu grad x F
> F := VectorField([0, -z, y]):
> curl := Curl(F)
curl := (2) $\hat{e}_x$  + (0) $\hat{e}_y$  + (0) $\hat{e}_z$  (2)
> # Dus
> int(int(DotProduct(curl, n), v = 0..u), u = 0.. $\frac{\text{Pi}}{2}$ )
-2 +  $\frac{\pi^2}{2}$  (3)
> # et voila
>

```

Figure 9.67: Exercise 3 Maple

9.7.2 Bord



$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \iint_A 1 \cdot dA \rightarrow \text{area of } G$$

■ $A_1 = \int_{-2}^2 (1 - (x^2 - 2)) dx = \frac{32}{3}$

\downarrow
Want van $x^2 + y^2 = 1$, $y = x^2 - 2$

■ $A_2 = \int_0^{\pi} \int_0^1 r dr d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{\pi}{2}$

$\text{dus } \frac{32}{3} + \frac{\pi}{2}$

Figure 9.68: Exercise 1

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}^k d\sigma$$

$$\mathbf{F} = (y, z, x)$$

$$C: \alpha(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v) \quad \text{and } \left\{ 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 1 + \sin(u) \right\}$$

$$\begin{matrix} \mathbf{M} \\ \text{def} \\ \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \end{matrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = [-1, -1, -1]$$

$$\text{ans: } \int_0^\pi \int_0^{1+\sin(u)} (-1, -1, -1) \cdot (\cos u, \sin u, 0) dv du$$

$$\approx -\frac{\pi^2}{6} - 2$$

Figure 9.69: Exercise 3

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus):
> SetCoordinates(cartesian[x,y,z]):
> v_1 := VectorField([-sin(u), cos(u), 0]):
> v_2 := VectorField([0, 0, 1]):
> n_k := CrossProduct(v_1, v_2)
      
$$n_k := (\cos(u))\hat{e}_x + (\sin(u))\hat{e}_y + (0)\hat{e}_z \quad (1)$$

> F := VectorField([y, z, x]):
> curl := Curl(F)
      
$$curl := (-1)\hat{e}_x + (-1)\hat{e}_y + (-1)\hat{e}_z \quad (2)$$

> # dus
> int(int(DotProduct(curl, n_k), v = 0..1 + sin(u)), u = 0..Pi)
      
$$-2 - \frac{\pi}{2} \quad (3)$$


```

Figure 9.70: Exercise 3 Maple

9.7.3 Huis

$$\text{ellipse: } x^2 + y^2 + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

$$S: \alpha(\theta, \phi) = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$$

$$\theta \in [-\pi, \pi], \phi \in [0, 2\pi]$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left| \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \times \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \right| \right| d\theta d\phi$$

↳ zic napple

$$\approx 42,95$$

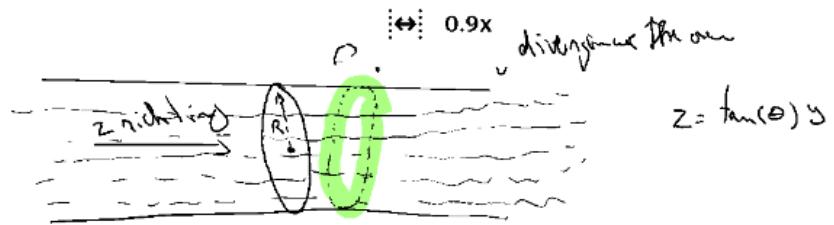
Figure 9.71: Exercise 1

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus):
> SetCoordinates(cartesian[r,theta,phi]):
> v_1 := VectorField([diff(sin(theta)·cos(phi),theta), diff(sin(theta)·sin(phi),
theta), diff(2·cos(theta),theta)])
      v_1 := ( $\cos(\theta) \cos(\phi)$ ) $\hat{e}_r$  + ( $\cos(\theta) \sin(\phi)$ ) $\hat{e}_{\theta}$  + (- $2 \sin(\theta)$ ) $\hat{e}_{\phi}$           (1)
> v_2 := VectorField([diff(sin(theta)·cos(phi),phi), diff(sin(theta)·sin(phi),
phi), diff(2·cos(theta),phi)])
      v_2 := (- $\sin(\theta) \sin(\phi)$ ) $\hat{e}_r$  + ( $\sin(\theta) \cos(\phi)$ ) $\hat{e}_{\theta}$  + (0) $\hat{e}_{\phi}$           (2)
> n := CrossProduct(v_1,v_2):
> n_norm := sqrt(n[1]^2 + n[2]^2 + n[3]^2):
> result := int(int(n_norm, theta = -Pi..Pi), phi = 0..2·Pi)
      result :=  $4\pi + \frac{16\sqrt{3}\pi^2}{9}$           (3)
> result_float := evalf(result)
      result_float := 42.95687068          (4)

```

Figure 9.72: Exercise 1



$$\vec{F}(x, y, z) = z - \tan\theta \mathbf{x} = 0$$

$$\hat{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$$

$$\hat{n} = \{0, -\tan\theta, 1\}$$

$$|\hat{n}| = \sqrt{1 + \tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\hat{n} = \{0, -\sin\theta, \cos\theta\}$$

$$\vec{v}(\text{is pmu z direkt}) = \left(0, 0, v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right)$$

$$\vec{v} \cdot \hat{n} = v_0 n_z = \left(0, 0, v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cos\theta\right)$$

$$dS = \frac{dx dy}{\cos\theta}$$

$$D = \int p_0 (v \cdot \hat{n}) dS = \int_{x^2 + y^2 \leq R^2} p_0 \left[v_0 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}\right) \cos\theta \cdot \frac{dx dy}{\cos\theta}\right]$$

werk dit nu om af van θ !!!

$$D = p_0 v_0 \alpha \frac{\pi R^2}{2}$$

Nu bewijzen we dat met divergentie:

$$\boxed{\int_S \vec{v} \cdot \hat{n} \cdot dS \rightarrow \int_V \nabla \cdot \vec{v} \cdot dV} \rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

fully independent of θ !

Figure 9.73: Exercise 2

```

> restart: with(VectorCalculus): with(LinearAlgebra):
    SetCoordinates(cylindrical[rho,theta,z]):
> v1 := VectorField([diff(rho*cos(theta),rho), diff(rho*sin(theta),rho), diff(rho
    *tan(theta)*sin(theta),rho)]):
> v2 := VectorField([diff(rho*cos(theta),theta), diff(rho*sin(theta),theta),
    diff(rho*tan(theta)*sin(theta),theta)]):
> cross := CrossProduct(v1,v2)
cross :=  

[[sin(theta) (rho (1+tan(theta)^2) sin(theta) + rho tan(theta) cos(theta))
- tan(theta) sin(theta) rho cos(theta)],
[-cos(theta) (rho (1+tan(theta)^2) sin(theta) + rho tan(theta) cos(theta)) - tan(theta) sin(theta)^2 rho],
[cos(theta)^2 rho + sin(theta)^2 rho]]  

> assume(rho R 0):
n :=  $\frac{\text{simplify}(\sqrt{(\text{cross}[1]^2 + \text{cross}[2]^2 + \text{cross}[3]^2)})}{\rho}$   

# we doen de jacobiaan weg en voegen hem ergens anders toe  

n :=  $\sqrt{-2 + 2 \sec(\theta)^2 + \sec(\theta)^4}$  (2)  

> # eerst calculeren we de rho gedeelte  

> assume(theta R 0, theta L 2*Pi);
res1 := int(rho *  $\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)$ , rho = 0 .. R)
res1 :=  $\frac{R^2}{4}$  (3)  

> res2 := int(n, theta = 0 .. 2*Pi)
res2 :=  $\int_0^{2\pi} \sqrt{-2 + 2 \sec(\theta)^2 + \sec(\theta)^4} d\theta$  (4)  

> res1 * res2 * v0 * rho0
 $\frac{R^2 \left( \int_0^{2\pi} \sqrt{-2 + 2 \sec(\theta)^2 + \sec(\theta)^4} d\theta \right) v0 \rho0}{4}$  (5)  


```

Figure 9.74: Exercise 2 Maple

$$\int \exp(x) \cos y \, dx - \exp x \sin y \, dx$$

Gren wgt:

$$\iint \frac{P}{Jx} - \frac{Q}{Jy} \, dA$$

$$= \iint_{[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]} ((\exp(x) \cdot \cos y - \exp(x) \sin y)) \, dx \, dy$$

II

I = 0

Figure 9.75: Exercise 3

```
[> restart: with(VectorCalculus): with(LinearAlgebra):
      SetCoordinates(cylindrical[rho,theta,z]):
[> int(int(exp(x)·sin(y) + exp(x)·cos(y),y=-Pi..Pi),x=-2..2)
                                         0
[>]
```

(1)

Figure 9.76: Exercise 3 Maple

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z > 0)$$

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$
X dit is hetzelfde voor een bol!
 $\hookrightarrow dS = r^2 \sin\theta \, dr \, d\varphi$

→ evenredig met hoogte boven het x,y -vlak

$$\Rightarrow M_x = 0, M_y = 0$$

en bereken we de massa:

$$M = \int_S \rho \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r \cdot r \cos\theta \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= k \pi^3$$

$$z\text{-component} = \frac{1}{M} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{r \cos\theta}_{2} \cdot \underbrace{\frac{k \pi}{2}}_{P} \cdot \underbrace{r^2 \sin\theta}_{dS} \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{2k}{3}$$

Figure 9.77: Exercise 4

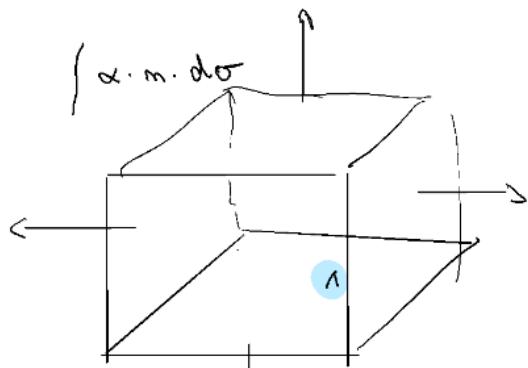
```

> restart: with(VectorCalculus): with(LinearAlgebra):
    SetCoordinates(cylindrical[rho,theta,z]):
> v1 := VectorField([diff(a.sin(theta).cos(phi),theta), diff(a.sin(theta)
    .sin(phi), theta), diff(a.cos(theta),theta)]):
> v2 := VectorField([diff(a.sin(theta).cos(phi),phi), diff(a.sin(theta).sin(phi),
    phi), diff(a.cos(theta),phi)]):
> cross := CrossProduct(v1,v2)
    cross := 
$$\begin{bmatrix} a^2 \sin(\theta)^2 \cos(\phi) \\ a^2 \sin(\theta)^2 \sin(\phi) \\ a^2 \cos(\theta) \cos(\phi)^2 \sin(\theta) + a^2 \cos(\theta) \sin(\phi)^2 \sin(\theta) \end{bmatrix}$$
 (1)
> dS := simplify(sqrt(cross[1]^2 + cross[2]^2 + cross[3]^2));
    dS :=  $\sqrt{\sin(\theta)^2 a^4}$  (2)
> M := int(int(k*a*cos(theta)*a^2*sin(theta), theta = 0..Pi/2), phi = 0..2*Pi)
    M := k a^3 \pi (3)
> Mz := 1/M * int(int(a*cos(theta)*k(a*cos(theta))*a^2*sin(theta), theta = 0..Pi/2),
    phi = 0..2*Pi)
    Mz := 
$$\frac{2 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cos(\theta) k(a \cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta \right)}{k a^3}$$
 (4)
> Mz := a/Pi * int(1, phi = 0..2*Pi) * int(cos^2(theta)*sin(theta), theta = 0..Pi/2)
    Mz :=  $\frac{2a}{3}$  (5)

```

Figure 9.78: Exercise 4 Maple

⑥



gauss divergence theorem:

$$\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint (\nabla \cdot \mathbf{f}) \cdot dV$$

$$\mathbf{f} = (x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iiint z \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 z \, dx \, dy \, dz$$

$$= 3$$

Figure 9.79: Exercise 5

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$u(x,y,z) = x^3 - y^3 + z^2, \nabla u(x,y,z) = (x^2, -y^2, 2z)$$

•

$$\int_S (\nabla u \times \nabla v) \cdot n \cdot d\sigma$$

$\nabla u \times \nabla v = \nabla \times (u \nabla v)$, nachrechnen

$$\int_S (\nabla u \times \nabla v) \cdot n \cdot d\sigma = \int_C \overbrace{u \nabla v}^{\text{orange}} \cdot d\gamma.$$

$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = 0 \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array} \right\}$

• $d\gamma = d\theta \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{pmatrix} = \underline{(-\sin \theta, \cos \theta, 0)}$

$$u = (r^3 \cos^3 \theta, -r^3 \sin^3 \theta)$$

$$\nabla v = \{1, 1, 1\}$$

zurück alles in Maple

Figure 9.80: Exercise 6

```

> restart: with(VectorCalculus): With(LinearAlgebra):
> SetCoordinates(spherical[r,theta,phi]):
> u := cos(theta)^3 -sin(theta)^3:
> v_curl := VectorField([1,1,1]):
> dr := VectorField([-sin(theta),cos(theta),0]):
> integrandum := u.v_curl.dr
  integrandum := -(cos(theta)^3 - sin(theta)^3) sin(theta) + (cos(theta)^3 - sin(theta)^3) cos(theta)  (1)
> int(integrandum, theta = 0..2.Pi)
                                         3π
                                         2

```

(2)

Figure 9.81: Exercise 6 Maple

9.7.4 Exams

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \cos \theta, \beta = \sin \theta \rightarrow \text{dus } b \text{ is reig (evolved over } y\text{)}$$

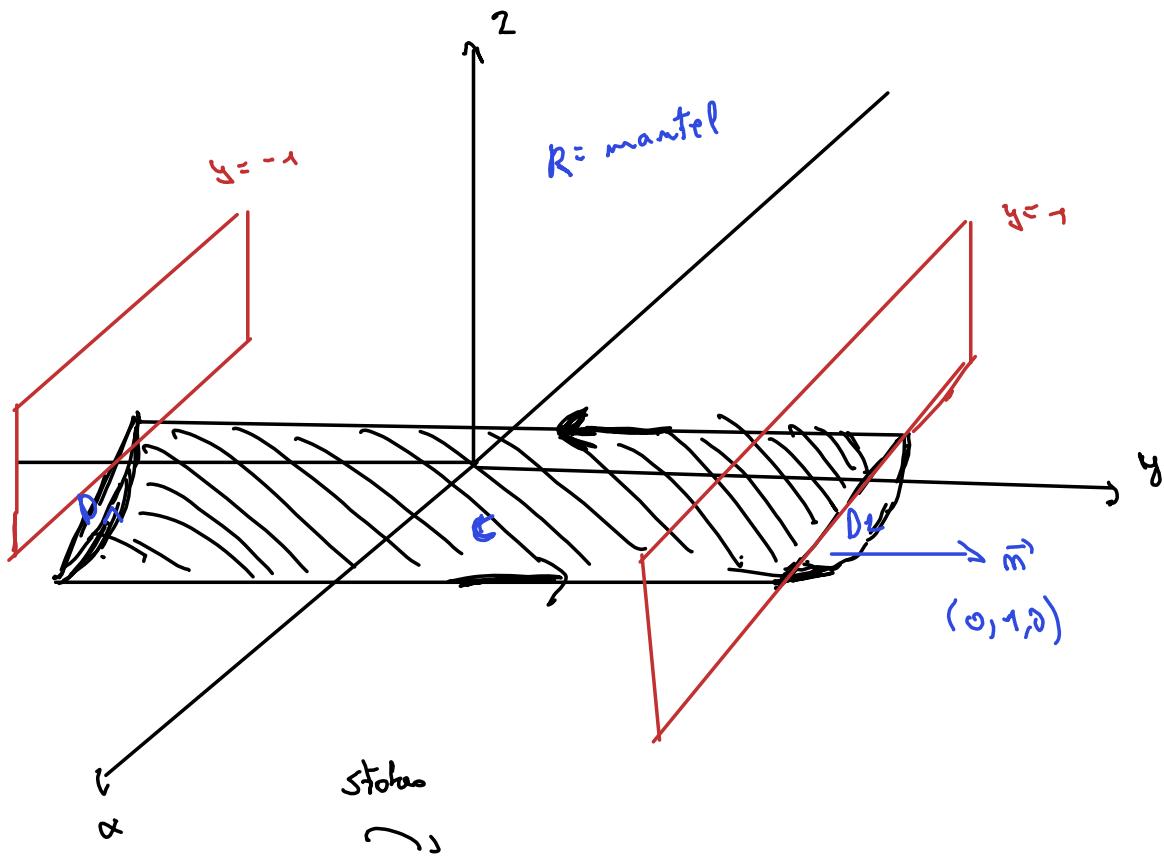
$$F = (-y^2, -x, z)$$

Definieer parameters:

$$(\alpha, \beta, z) \rightarrow (\cos \theta, \sin \theta, z)$$

variant van cilinder
(coords.)

$$\text{dus: } \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$



B) $\int_C F \cdot d\alpha = \int_S (\nabla \alpha \cdot F) n \cdot d\sigma$

$$F(\alpha, \beta, z) = (-y^2, -x, z)$$

curl $(0, 0, -1+2y)$

$$n \cdot d\sigma = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-\cos \theta, 0, -\sin \theta)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{\pi}^{2\pi} n \cdot d\sigma \cdot \text{curl} \cdot d\theta dy = -4 \rightarrow \text{maar dit wordt}$$

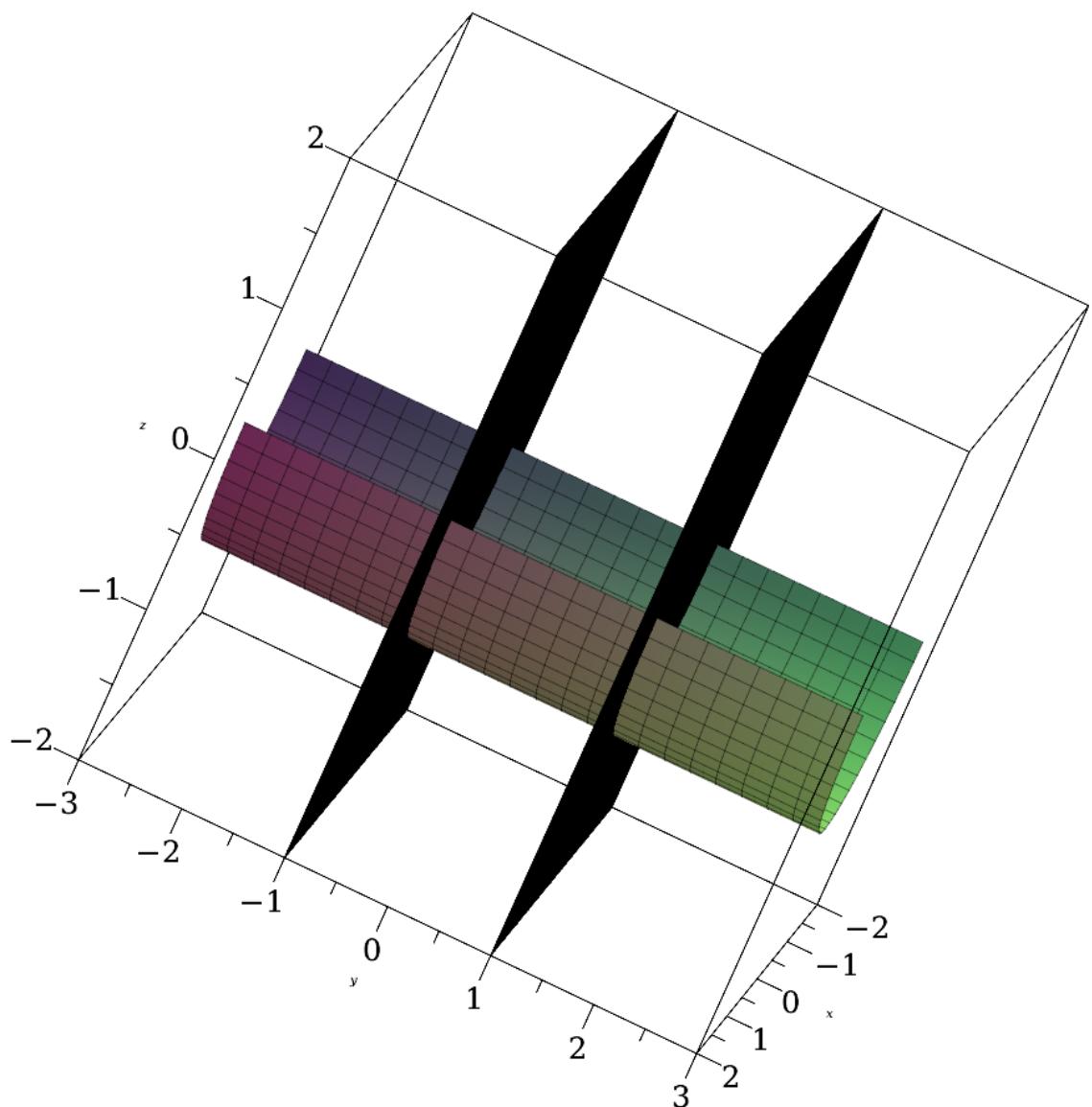
(4)

```

> restart: with(LinearAlgebra) : with(plots) : with(plottools) :
  with(VectorCalculus) : SetCoordinates(cartesian[x, y, z]) :
>
Y1 := implicitplot3d(y = 1, x = -2 .. 2, y = -1 .. 2, z = -2 .. 2, color = "Blue") :
Y2 := implicitplot3d(y = -1, x = -2 .. 2, y = -2 .. 1, z = -2 .. 2, color = "Red") :

> cylinder_plot := plot3d([cos(theta), y, sin(theta)], theta = Pi..2·Pi, y = -3..3) :
> display(Y1, Y2, cylinder_plot)

```



```

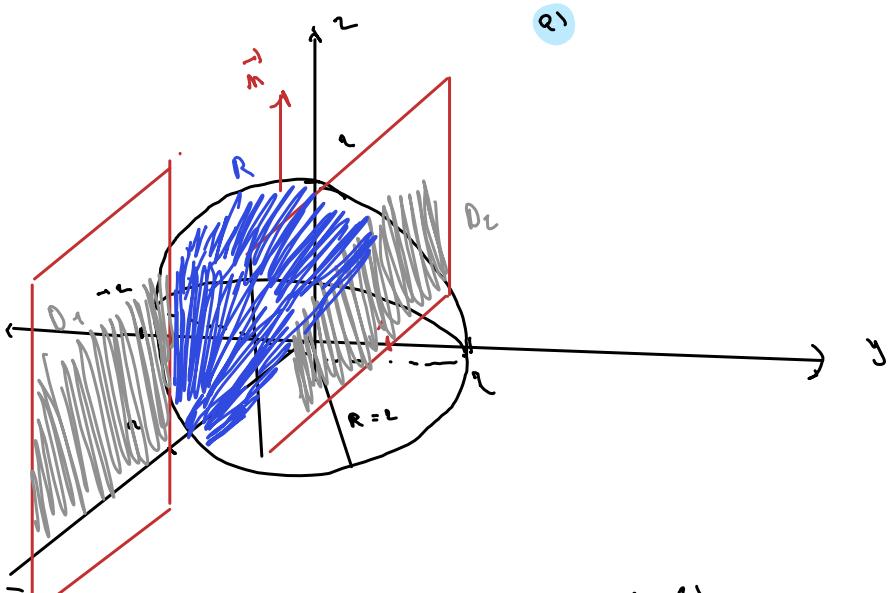
> # Curl of modified F

```

```

> F := VectorField( [ -y^2, -x, z] ) :
> curl := Curl(F)
          curl := (0)Ȣx + (0)Ȣy + (-1 + 2 y)Ȣz (1)
> # Calculate the goddamn cross for dS
> v1 := VectorField([diff(cos(theta), theta), diff(y, theta), diff(sin(theta),
      theta)]) :
> v2 := VectorField([0, 1, 0]) :
> cross := CrossProduct(v1, v2)
          cross := (-cos(theta))Ȣx + (0)Ȣy + (-sin(theta))Ȣz (2)
>
> int(int(curl · cross, theta = Pi..2·Pi), y = -1 .. 1)
          -4 (3)

```



B) $\int d\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}$: $\vec{F} = (y^2, z^2, x^2)$

wechselseitige Abhängigkeit der Koordinaten: $(x, y, z) \sim \left(2 \sin \theta \cos \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \theta \right)$

$$\int_R \vec{F} \cdot d\sigma = \int_{O_1} \vec{F} \cdot d\sigma + \int_{O_2} \vec{F} \cdot d\sigma + \int_{O_3} \vec{F} \cdot d\sigma$$

C) $m = \frac{\sigma}{n = h \wedge n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$

$$d\sigma = 4 \pi m \omega$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = (\text{neu mal})$$

c) Gleich Divergenz:

$$\int \vec{F} \cdot d\sigma = \int dV \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2z = 2 \cdot \cos \theta \cdot 2$$

$$dV = n \sin \theta = 4 \pi m \theta$$

an den Rändern:

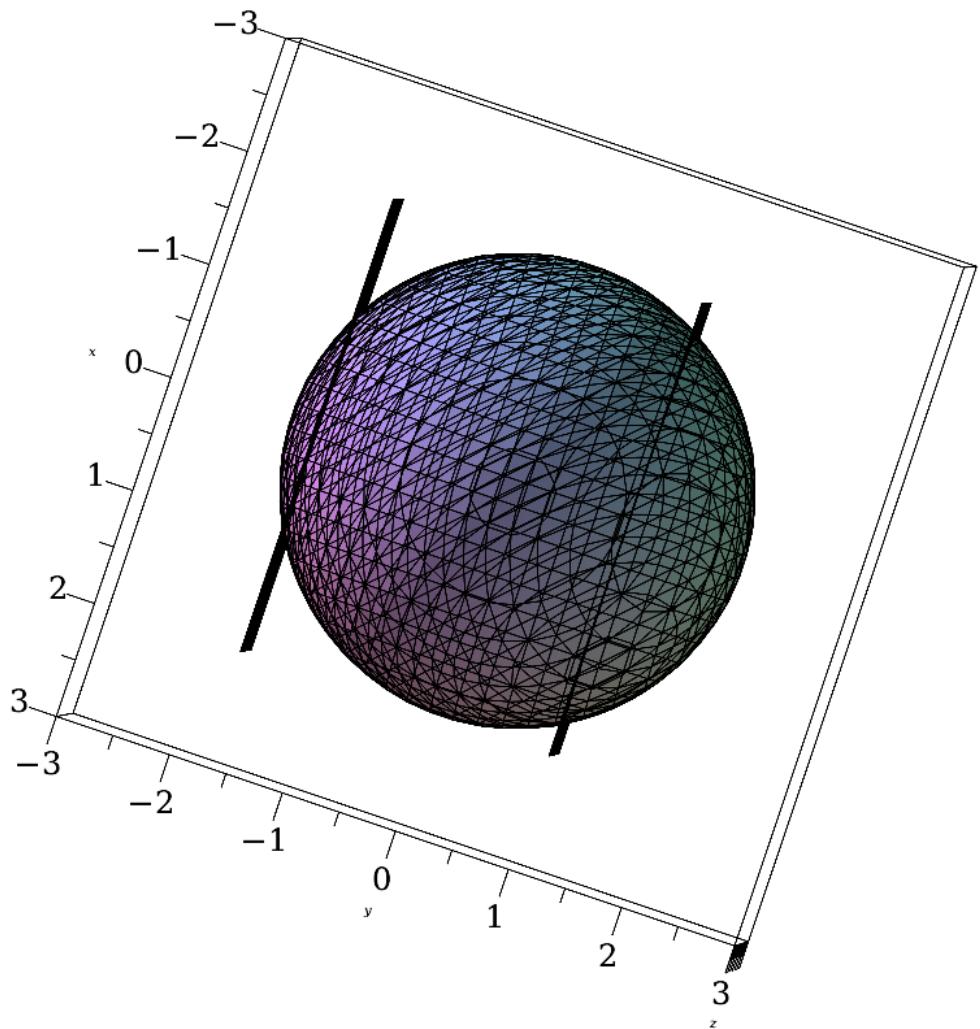
$$\text{durch } y = 1 \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{durch } y = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(plots): with(plottools):
    with(VectorCalculus): SetCoordinates(cartesian[x, y, z]):
> sphere_ := implicitplot3d(x^2 + y^2 + z^2 = 4):
> y1 := implicitplot3d(y = 1, x = -2..2, y = 1..2, z = -2..2):
> y2 := implicitplot3d(y = -sqrt(3), x = -2..2, y = -3..2, z = -2..2):
> display(sphere_, y1, y2)

```



```

> # First we do exercise C
> F := VectorField([y^2, z^2, z^2]):
> div := Divergence(F)

```

```


div := 2 z

 (1)
> div := subs(z = r·cos(theta), div)


div := 2 r cos(θ)

 (2)
> dV := r2·sin(theta)


dV := r2 sin(θ)

 (3)
> int(int(int(div·dV, r = 0 .. 2), phi = arccos(-sqrt(3)/2) .. arccos(1/2)), theta
= 0 .. 2·Pi)


0

 (4)
> # Nu part B
> n1 := VectorField([sin(theta)·cos(phi), sin(theta)·sin(phi), cos(theta)]):
> dot1 := simplify(subs([y = 2·sin(theta)·sin(phi), z = 2·cos(theta)], F·n1))


dot1 := 4 sin(θ)3 sin(φ)2 cos(φ) + 4 cos(θ)2 sin(θ) sin(φ) + 4 cos(θ)3

 (5)
> int_R := int(int(dot1·4·sin(theta), theta = 0 .. 2·Pi), phi = arccos(-sqrt(3)/2)
.. arccos(1/2))


int_R := -π√3/2 - 5π/2

 (6)
> n2 := VectorField([0, -1, 0]):
> dot2 := simplify(subs([y = 2·sin(theta)·sin(phi), z = 2·cos(theta)], F·n2)):
> int_D1 := int(int(dot2·r, r = 0 .. 1), theta = 0 .. 2·Pi)


int_D1 := -2π

 (7)
> n3 := VectorField([0, 1, 0]):
> dot3 := simplify(subs([y = 2·sin(theta)·sin(phi), z = 2·cos(theta)], F·n3)):
> int_D2 := int(int(dot3·r, r = 0 .. sqrt(3)), theta = 0 .. 2·Pi)


int_D2 := 6π

 (8)
> # Total integral
> int_R + int_D1 + int_D2


- π√3/2 + 3π/2

 (9)
> # I dont fucking know leave me alone.

```

9.8 Week 8

9.8.1 Huis

$$6) \quad \omega''(t) + \gamma \omega'(t) + k \omega(t) = 0$$

$$\ddot{z} + \gamma z + k = 0$$

$$\frac{z}{\alpha^2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4k}}{2}$$

$\omega_0 > \omega_h \rightarrow$ overdamped

$$\rightarrow \text{damped oscillation: } \left(\frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4k}}{2} \right) \alpha$$

$$\omega(t) = C_1 e^{-\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4k}}{2} t} + C_2 e^{-\frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4k}}{2} t}$$

$\omega_0 < \omega_h \rightarrow$ underdamped

$$\omega(t) = C_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{4k - \gamma^2}}{2} \alpha\right) + C_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{4k - \gamma^2}}{2} \alpha\right)$$

also $\gamma^2 = 4k$: \rightarrow critically damped

$$\omega(t) = C_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

critical damping: $\text{Ditgaan we bij } \gamma^2 = 4k$

$$\rightarrow \gamma = 2\sqrt{k}$$

Figure 9.82: Exercise 6

```

> restart;

# Parameters
k := 4:
u0 := 2:
v0 := 1:

# Time range
t_range := 0 .. 5:

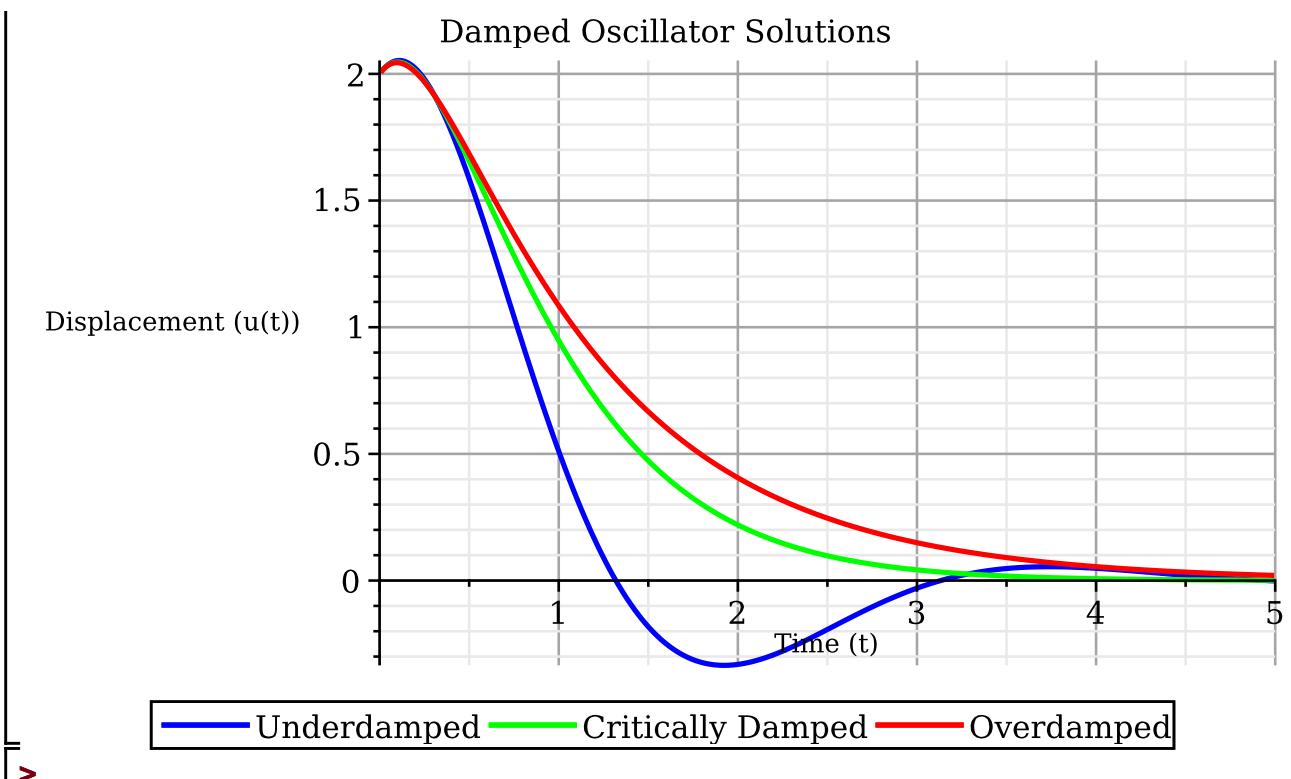
# Underdamped case ( $\gamma^2 < 4k$ )
gamma1 := 2:
omega := sqrt(4*k - gamma1^2)/2:
u_underdamped := u0*exp(-gamma1*t/2)*cos(omega*t) +
    (v0 + (gamma1/2)*u0)*exp(-gamma1*t/2)*sin(omega*t):
/omega:

# Critically damped case ( $\gamma^2 = 4k$ )
gamma2 := 2*sqrt(k):
u_critical := (u0 + (v0 + gamma2*u0/2)*t)*exp(-gamma2*t/2):

# Overdamped case ( $\gamma^2 > 4k$ )
gamma3 := 5:
r1 := (-gamma3 - sqrt(gamma3^2 - 4*k))/2:
r2 := (-gamma3 + sqrt(gamma3^2 - 4*k))/2:
u_overdamped := ((u0*r2 - v0)/(r2 - r1))*exp(r1*t) +
    ((v0 - u0*r1)/(r2 - r1))*exp(r2*t):

# Plot the three cases
plots[display](
    [plot(u_underdamped, t = t_range, color = blue, thickness = 2, legend =
        "Underdamped"),
     plot(u_critical, t = t_range, color = green, thickness = 2, legend =
        "Critically Damped"),
     plot(u_overdamped, t = t_range, color = red, thickness = 2, legend =
        "Overdamped")],
    title = "Damped Oscillator Solutions",
    labels = ["Time (t)", "Displacement (u(t))"],
    gridlines = true
);

```



```

> restart;

# Define parameters
lambda1 := lambda[1];
lambda2 := lambda[2];
N0 := N[0];

# Define the system of differential equations with explicit functions
eq1 := diff(N1(t), t) = -lambda1 * N1(t);
eq2 := diff(N2(t), t) = lambda1 * N1(t) - lambda2 * N2(t);

# Solve the first differential equation for N1(t)
sol1 := dsolve({eq1, N1(0) = N0}, N1(t));

# Extract the solution for N1(t)
N1_sol := rhs(sol1);

# Substitute the solution for N1(t) into the second equation
eq2_sub := subs(N1(t) = N1_sol, eq2);

# Solve the second differential equation for N2(t) with initial condition
N2(0) = 0
sol2 := dsolve({eq2_sub, N2(0) = 0}, N2(t));

# Display the solutions
sol1, (sol2);

N1(t) = N0 e-λ1 t, N2(t) = - 
$$\frac{N_0 \lambda_1 (e^{-t(\lambda_1 - \lambda_2)} - 1) e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$
 (1)

```

Figure 9.83: Exercise 7

9.8.2 Bord

$$\frac{dK}{dt} = 0,001 K(t) + 0,0001 M(t) \quad (1)$$

$$\frac{dM}{dt} = 0,01 M(t) - k(t) \quad (2)$$

(a) verschillend van differentiaalgle vinden we welke effagen van $M(t)$

$$M'(t) = 0,01 M(t) - k(t)$$

$$\begin{aligned} \therefore M'(t) &= 0,01 M(t) - 0,001 K(t) - 0,0001 M(t) \\ &= 0,01 M(t) - 0,001 (0,01 M(t) - M'(t)) - 0,0001 M(t) \\ M''(t) &= 0,01 M'(t) - 0,0001 M(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} M(0) = 2000, \\ M'(0) = 0,01 \cdot 2000 - 15 = 15 \end{array} \right. \end{aligned}$$

stel in maple:

168 days -

$$(1) \quad M''(t) = 0,01 M'(t) - 0,0001 M(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} M'(0) = 0,01 M(0) - k \\ M(0) = 2000 \end{array} \right.$$

stel in maple:

minimum 36 days -

Figure 9.84: Exercise 1

```
> restart:
```

```
# A
```

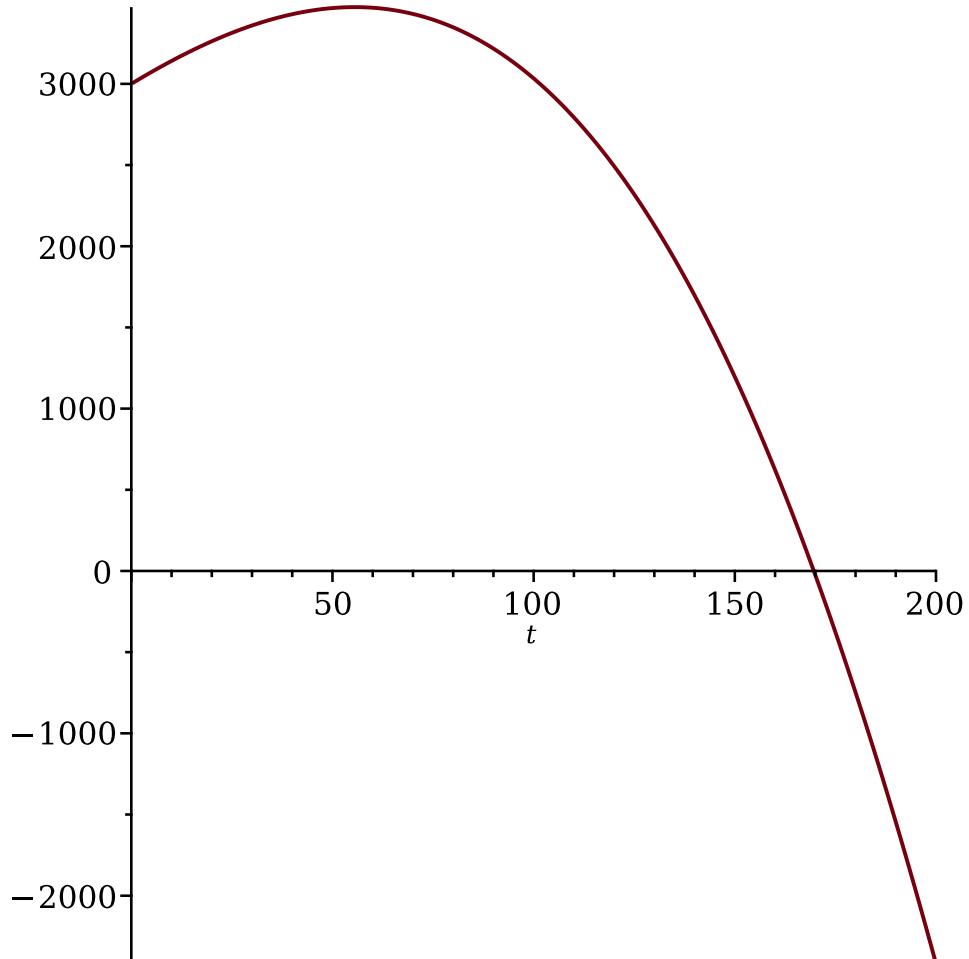
$$eq := D(D(M))(t) = 0.011 \cdot D(M)(t) - 0.00011 \cdot M(t)$$

$$eq := D^{(2)}(M)(t) = 0.011 D(M)(t) - 0.00011 M(t) \quad (1)$$

```
> sol := rhs(dsolve(\{D(M)(0) = 15, M(0) = 3000, eq\}))
```

$$sol := -\frac{3000 e^{\frac{11 t}{2000}} \left(\sqrt{319} \sin \left(\frac{\sqrt{319} t}{2000}\right) - 319 \cos \left(\frac{\sqrt{319} t}{2000}\right)\right)}{319} \quad (2)$$

```
> plot(sol, t = 0 .. 200)
```



```
> evalf(solve(sol = 0, t))
```

$$169.6323664 \quad (3)$$

```
#B
```

```
restart:
```

```
> eq := D(D(M))(t) = 0.011 \cdot D(M)(t) - 0.00011 \cdot M(t)
```

$$eq := D^{(2)}(M)(t) = 0.011 D(M)(t) - 0.00011 M(t) \quad (4)$$

```
> sol := rhs(dsolve(\{D(M)(0) = 30 - k, M(0) = 3000, eq\}))
```

$$sol := -\frac{2000 e^{\frac{11 t}{2000}} \left(\sqrt{319} \left(-\frac{27}{2}+k\right) \sin \left(\frac{\sqrt{319} t}{2000}\right)-\frac{957 \cos \left(\frac{\sqrt{319} t}{2000}\right)}{2}\right)}{319} \quad (5)$$

> $sol := subs(t = 100, sol)$

$$sol := -\frac{2000 e^{\frac{11}{20}} \left(\sqrt{319} \left(-\frac{27}{2}+k\right) \sin \left(\frac{\sqrt{319}}{20}\right)-\frac{957 \cos \left(\frac{\sqrt{319}}{20}\right)}{2}\right)}{319} \quad (6)$$

> $evalf(solve(sol = 0, k))$

$$35.06599836 \quad (7)$$

>

a) $y_p(x) = w_1(x) \cdot y_1(x)^T \cdot w_2(x) \cdot y_2(x)$

↳ erste Affine Schicht:

$$\begin{aligned} y'_p(x) &= \underbrace{w_1^T(x) \cdot y_1(x)}_{=0} + w_1(x) \cdot \underbrace{y_1'(x)}_{=0} + \underbrace{w_2^T(x) \cdot y_2(x)}_{=0} + w_2(x) \cdot \underbrace{y_2'(x)}_{=0} \\ &= w_1(x) \cdot y_1'(x) + w_2(x) \cdot y_2'(x) \end{aligned}$$

↳ zweite Affine Schicht:

$$\begin{aligned} y''_p(x) &= \underbrace{w_1^T(x) \cdot y_1'(x)}_{=0} + w_1(x) \cdot \underbrace{y_1''(x)}_{=0} + \underbrace{w_2^T(x) \cdot y_2'(x)}_{=0} + w_2(x) \cdot \underbrace{y_2''(x)}_{=0} \\ &= g(x) + w_1(x) \cdot \underbrace{y_1''(x)}_{=0} + w_2(x) \cdot \underbrace{y_2''(x)}_{=0} \\ &= g(x) + w_1(x) \cdot (y_{11}''(x) + p_1(x) \cdot y_{12}''(x) + \text{Polyn. } p_1(x)) \\ &\quad + w_2(x) \cdot (y_{21}''(x) + p_2(x) \cdot y_{22}''(x) + \text{Polyn. } p_2(x)) = g(x) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = g(x) \blacksquare$$

b) $w_1^T(x) y_1(x) + w_2^T(x) y_2(x) = 0$

$$\Leftrightarrow w_1^T(x) = -\frac{w_2^T(x) y_2(x)}{y_1(x)}$$

Multiplikation:

$$\frac{-w_2^T(x) y_2(x)}{y_1(x)} \cdot y_1'(x) + w_2^T(x) y_2'(x) = g'(x)$$

$$\Leftrightarrow w_2^T(x) \left(\frac{-y_2(x) \cdot y_1'(x) + y_2'(x) \cdot y_2(x)}{y_1(x)} \right) = g'(x)$$

$$\Leftrightarrow w_2^T(x) \cdot \left(\frac{y_2'(x) \cdot y_2(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x)}{y_1(x)} \right) = g'(x)$$

$$\Leftrightarrow w_2^T(x) \cdot \left(\frac{w}{w_1(x)} \right) = g'(x) \quad \Leftrightarrow w_2^T(x) = \frac{g'(x) \cdot w_1(x)}{w}$$

daraus: $w_2(x) = \int_0^x -\frac{y_1(m) g'(m)}{w(y_1, y_2)} \cdot d'm + c_2$

$$w_1(x) = \int_0^x \frac{y_1(m) g'(m)}{w(y_1, y_2)} \cdot d'm + c_1$$

c) Maple

Figure 9.85: Exercise 2

> *restart*: with(VectorCalculus) : with(LinearAlgebra) :
> $LL := \text{diff}(y(x), x\$2) + 2 * \text{diff}(y(x), x) + 4 * y(x);$

$$LL := \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 2 \frac{d}{dx} y(x) + 4 y(x) \quad (1)$$

> $g := x \rightarrow x^2 :$

> $y_0 := 5 : dy_0 := 1 :$

> $\text{dsolve}(LL = 0, y(x))$

$$y(x) = c_1 e^{-x} \sin(\sqrt{3} x) + c_2 e^{-x} \cos(\sqrt{3} x) \quad (2)$$

> # Homogene oplossingen

> $y1 := x \rightarrow \exp(-x) * \sin(\sqrt{3} * x) :$

> $y2 := x \rightarrow \exp(-x) * \cos(\sqrt{3} * x) :$

> # Wronskiaan

> $\text{simplify}(\text{Determinant}(\text{Wronskian}([y1(x), y2(x)], x))) ;$

$Wr := x \rightarrow -\exp(-2 * x) * \sqrt{3} ;$

$$-\exp(-2 * x) \sqrt{3}$$

$$Wr := x \mapsto -\exp(-2 * x) \cdot \sqrt{3} \quad (3)$$

> # We can now solve u1 and u2

> $u1 := \text{simplify}(\text{int}(-y2(x) * g(x) / Wr(x), x)) + C1;$

> $u2 := \text{simplify}(\text{int}(y1(x) * g(x) / Wr(x), x)) + C2;$

$$u1 := \frac{\exp(x) ((x^2 + x - 1) \cos(\sqrt{3} x) + \sin(\sqrt{3} x) \sqrt{3} x (x - 1)) \sqrt{3}}{12} + C1$$

$$u2 := \frac{\exp(x) \sqrt{3} ((-x^2 - x + 1) \sin(\sqrt{3} x) + \cos(\sqrt{3} x) x \sqrt{3} (x - 1))}{12} + C2 \quad (4)$$

> # The particular solution is

> $yp := u1 * y1(x) + u2 * y2(x);$

$$yp := \left(\frac{\exp(x) ((x^2 + x - 1) \cos(\sqrt{3} x) + \sin(\sqrt{3} x) \sqrt{3} x (x - 1)) \sqrt{3}}{12} + C1 \right) e^{-x} \sin(\sqrt{3} x) \quad (5)$$

$$+ \left(\frac{\exp(x) \sqrt{3} ((-x^2 - x + 1) \sin(\sqrt{3} x) + \cos(\sqrt{3} x) x \sqrt{3} (x - 1))}{12} + C2 \right) e^{-x} \cos(\sqrt{3} x)$$

> $y0 := \text{simplify}(\text{subs}(x = 0, yp));$
 $dy0 := \text{simplify}(\text{subs}(x = 0, \text{diff}(yp, x)));$

$$\begin{aligned} y0 &:= C2 \\ dy0 &:= -\frac{1}{4} + \sqrt{3} C1 - C2 \end{aligned} \quad (6)$$

> $sol := solve(\{y0 = y_0, dy0 = dy_0\}, \{C1, C2\});$

$$sol := \left\{ C1 = \frac{25\sqrt{3}}{12}, C2 = 5 \right\} \quad (7)$$

> $solution := simplify(subs(sol, yp));$

$$solution := \frac{x^2}{4} + \frac{25 e^{-x} \sin(\sqrt{3} x) \sqrt{3}}{12} - \frac{x}{4} + 5 e^{-x} \cos(\sqrt{3} x) \quad (8)$$

$$3) \quad \vec{y}'(\alpha) + 2\vec{y}(\alpha) + 4\vec{y}_3(\alpha) = \vec{\alpha}$$

(a) $\frac{d}{d\alpha} \vec{y}(\alpha) = A \vec{y}(\alpha) + \vec{b}(\alpha)$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\alpha} \begin{pmatrix} \vec{y}_1(\alpha) \\ \vec{y}_2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{y}_1(\alpha) \\ \vec{y}_2(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) $\vec{x}'(\alpha) = e^{A\alpha} (-A\vec{x}(\alpha)) \vec{y}(\alpha)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \vec{x}(\alpha) &= e^{A\alpha} (-A\vec{x}(\alpha) \cdot A + \frac{d}{d\alpha} \vec{y}(\alpha)) \\ &= e^{A\alpha} \cdot (-A\vec{x}(\alpha) \cdot A + A\vec{x}(\alpha) + \vec{b}(\alpha)) \\ &= e^{A\alpha} \cdot (\vec{b}(\alpha)) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(c) mögl.

Figure 9.86: Exercise 3

> `restart;`
`with(LinearAlgebra) :`

Initial values

`y_0 := 5 :`
`dy_0 := 1 :`

Define matrix A and function b(x)

`A := Matrix([[-2, -4], [1, 0]]):`
`b := x → Vector([x^2, 0]):`

*# Compute MatrixExponential(-A*x) . b(x)*

`vec_expr := MatrixExponential(-A*x) . b(x) :`

Integrate each component of the vector separately

`integral_result := Vector([`
`int(vec_expr[1], x),`
`int(vec_expr[2], x)`
`]):`

Combine the terms

`sol := simplify(`
`MatrixExponential(A*x) . integral_result`
`+ MatrixExponential(A*x) . Vector([C1, C2])`
`);`

Verify the solution at x = 0

`vgl := simplify(subs(x = 0, sol)) = Vector([dy_0, y_0));`

$$sol := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3} e^{-x} (C1 + 4 C2) \sin(x\sqrt{3})}{3} + C1 e^{-x} \cos(x\sqrt{3}) + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3} e^{-x} (C1 + C2) \sin(x\sqrt{3})}{3} + C2 e^{-x} \cos(x\sqrt{3}) + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \end{bmatrix}$$

$$vgl := \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} + C1 \\ C2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> `solve(vgl, {C1, C2})`

$$\left\{ C1 = \frac{5}{4}, C2 = 5 \right\}$$

(2)

5)

i) $m\ddot{u} + k u = 0 \rightarrow$ gereduceerd differentiaal vergelijking

$$\Leftrightarrow m\ddot{u} + k = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{-\frac{k}{m}} \rightarrow \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ we noemen } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Free basis oplossingen zijn dan:

$$\phi_1(t) = \cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)$$

$$\phi_2(t) = \cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} \text{Algemene oplossing: } u(t) &= c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t) \\ &= (c_1 + c_2) \cos(\omega_0 t) + i(c_1 - c_2) \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

enkel geïnterpreteerd in reële oplossingen.

$\hookrightarrow c_1$ en c_2 zijn daarna complex toegevoegde

$$\bar{\phi}_1^R = \cos(\omega_0 t), \bar{\phi}_2^R = \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{dus we bekennen } u(t) = D_1 \cos(\omega_0 t) + D_2 \sin(\omega_0 t), D_i \in \mathbb{R}$$

Figure 9.87: Exercise 4 Part 1

- (ii) We starten met het bepalen van een particulaire oplossing van de complete differentiaalvergelijking. Om een particulaire oplossing van $mu'' + ku = A \sin(\omega t)$ te bepalen, stellen wij een kandidaat voorop. We onderscheiden twee gevallen:

– $\omega \neq \omega_0$

Wij laten ons hierbij inspireren door het rechterlid $A \sin(\omega t)$. Een goede kandidaat is $v(t) = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)$. Door substitutie in de complete DV bekomen wij

$$m[-\alpha\omega^2 \sin(\omega t) - \beta\omega^2 \cos(\omega t)] + k[\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)] = A \sin(\omega t),$$

wat dient te gelden voor elke $t \in \mathbb{R}$. Voor $t = 0$ bekomen wij $-m\beta\omega^2 + k\beta = 0$, zodat $\beta = 0$. Verder dient dan voor $t = \frac{\pi}{2\omega}$ te gelden dat $-m\alpha\omega^2 + k\alpha = A$, zodat $\alpha = \frac{A}{k-m\omega^2}$ ($k - m\omega^2 \neq 0$). Merk op dat de functie $u^*(t) := \frac{A}{k-m\omega^2} \sin(\omega t)$ voor elke $t \in \mathbb{R}$ aan de complete differentiaalvergelijking voldoet en dus een particulaire oplossing is. Merk op dat deze oplossing echter enkel geldig is voor $k - m\omega^2 \neq 0$ m.a.w. de oplossing geldt enkel wanneer $\omega \neq \omega_0$.

– $\omega = \omega_0$

In dit geval stellen we onze kandidaat gelijk aan $v(t) = t(\alpha \sin(\omega_0 t) + \beta \cos(\omega_0 t))$. Substitutie in de complete differentiaalvergelijking om de constanten te bepalen, leidt in dit geval tot

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{-A}{2m\omega_0},$$

samen met de gestelde voorwaarde $\omega = \omega_0$. Derhalve is $u^*(t) = \frac{-A}{2m\omega_0} t \cos(\omega_0 t)$ een particulaire oplossing.

Figure 9.88: Exercise 4 Part 2

▼ (ii)

$\omega \neq \omega_0$

```
> dsolve(diff(u(t),t$2) + w0**2*u(t) = A/m*sin(omega*t), u(t));
u(t) = sin(w0 t) c2 + cos(w0 t) c1 + 
$$\frac{A \sin(\omega t)}{m (-\omega^2 + w0^2)}$$
 (4.1.1.1)
```

```
> u_verschillend:=A/(k-m*omega^2)*sin(omega*t) + D1*cos(omega[0]*t) + D2*
sin(omega[0]*t);
u_verschillend := 
$$\frac{A \sin(\omega t)}{-m \omega^2 + k} + D1 \cos(\omega_0 t) + D2 \sin(\omega_0 t)$$
 (4.1.1.2)
```

```
> solve(simplify(subs(t=0, u_verschillend=u0)), D1);
u0
```

```
> solve(simplify(subs(t=0, diff(u_verschillend,t)=u1)), D2);

$$-\frac{m \omega^2 u1 + A \omega - k u1}{(-m \omega^2 + k) \omega_0}$$
 (4.1.1.4)
```

$\omega = \omega_0$

Merk op dat als $\omega = \omega_0$ de oplossing er anders uitziet:

```
> restart;
> dsolve(diff(u(t),t$2) + w0**2*u(t) = A/m*sin(w0*t), u(t));
u(t) = sin(w0 t) c2 + cos(w0 t) c1 + 
$$\frac{A (\sin(w0 t) - \cos(w0 t) t w0)}{2 m w0^2}$$
 (4.1.2.1)
```

```
> u_gelijk:=-A/(2*m*omega[0])*t*cos(omega[0]*t) + D1*cos(omega[0]*t) +
D2*sin(omega[0]*t);
u_gelijk := 
$$-\frac{A t \cos(\omega_0 t)}{2 m \omega_0} + D1 \cos(\omega_0 t) + D2 \sin(\omega_0 t)$$
 (4.1.2.2)
```

```
> solve(simplify(subs(t=0, u_gelijk=u0)), D1);
u0
```

```
> solve(simplify(subs(t=0, diff(u_gelijk,t)=u1)), D2);

$$\frac{2 m u1 \omega_0 + A}{2 m \omega_0^2}$$
 (4.1.2.4)
```

Defining 5

Figure 9.89: Exercise 4 Part 2 Maple

Part III en IV:

Given the differential equation:

$$mu''(t) + ku(t) = A \sin(\omega t),$$

where m is the mass, k is the spring constant, and $A \sin(\omega t)$ is the external forcing term. The goal is to:

- (i) Find the general solution to the reduced homogeneous differential equation.
- (ii) Find the particular solution to the complete differential equation.
- (iii) Solve the initial value problem.
- (iv) Analyze the asymptotic behavior of the solution, including resonance.

Part (i): General Solution to the Homogeneous Equation

The homogeneous equation is:

$$mu''(t) + ku(t) = 0.$$

Step 1: Solve the characteristic equation.

The characteristic equation is:

$$mr^2 + k = 0 \implies r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Let $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, the natural frequency of the system. The roots become $r = \pm i\omega_0$.

Step 2: General homogeneous solution.

The general solution to the homogeneous equation is:

$$u_h(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t),$$

where C_1 and C_2 are arbitrary constants.

Alternatively, using complex exponentials:

$$u_h(t) = D_1 e^{i\omega_0 t} + D_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

Part (ii): Particular Solution to the Complete Equation

For the forcing term $A \sin(\omega t)$, assume the particular solution:

$$u_p(t) = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t),$$

where α and β are constants to be determined.

Case 1: $\omega \neq \omega_0$

Substituting $u_p(t)$ into the differential equation:

$$mu_p''(t) + ku_p(t) = A \sin(\omega t),$$

and separating terms in $\sin(\omega t)$ and $\cos(\omega t)$, we obtain:

$$-m\alpha\omega^2 + k\alpha = A, \quad -m\beta\omega^2 + k\beta = 0.$$

Solving for α and β :

$$\alpha = \frac{A}{k - m\omega^2}, \quad \beta = 0.$$

Thus, the particular solution is:

$$u_p(t) = \frac{A}{k - m\omega^2} \sin(\omega t).$$

Case 2: $\omega = \omega_0$ (Resonance)

When $\omega = \omega_0$, the forcing frequency matches the natural frequency. Assume:

$$u_p(t) = \gamma t \cos(\omega_0 t),$$

where γ is to be determined. Substituting into the differential equation, we find:

$$\gamma = -\frac{A}{2m\omega_0}.$$

Thus, the particular solution is:

$$u_p(t) = -\frac{A}{2m\omega_0} t \cos(\omega_0 t).$$

Part (iii): Initial Value Problem

The general solution is the sum of the homogeneous and particular solutions:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t).$$

Case 1: $\omega \neq \omega_0$

$$u(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{k - m\omega^2} \sin(\omega t).$$

Using the initial conditions $u(0) = u_0$ and $u'(0) = u_1$:

$$\begin{aligned} u(0) &= C_1 = u_0, \\ u'(0) &= C_2\omega_0 + \omega \frac{A}{k - m\omega^2} = u_1 \implies C_2 = \frac{u_1 - \omega \frac{A}{k - m\omega^2}}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Case 2: $\omega = \omega_0$

$$u(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) - \frac{A}{2m\omega_0} t \cos(\omega_0 t).$$

Using the initial conditions:

$$\begin{aligned} u(0) &= C_1 = u_0, \\ u'(0) &= C_2\omega_0 - \frac{A}{2m\omega_0} = u_1 \implies C_2 = \frac{u_1 + \frac{A}{2m\omega_0}}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Part (iv): Asymptotic Behavior

Case 1: $\omega \neq \omega_0$

For large t , the transient terms (from the homogeneous solution) decay, leaving the steady-state solution:

$$u(t) \rightarrow \frac{A}{k - m\omega^2} \sin(\omega t).$$

Case 2: $\omega = \omega_0$ (**Resonance**)

For large t , the amplitude of the oscillation grows linearly due to the $-\frac{A}{2m\omega_0} t \cos(\omega_0 t)$ term. This is resonance, where the system experiences unbounded oscillations.

A₀ : homogene oplossing.

$$m\ddot{w}(t) + \gamma \dot{w}(t) + k w(t) = A \cdot \sin(\omega t)$$

Step 1: calculate A₀ (without forcing term):

$$w(t) = c_1 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \sin\left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4km}}{2m} t\right) + c_2 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \cos\left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4km}}{2m} t\right)$$

Step 2: particular:

$$w_p(t) = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)$$

$$\hookrightarrow m\ddot{w}_p(t) + \gamma \dot{w}_p(t) + k w_p(t) = A \sin(\omega t)$$

calculate the derivatives:

$$\ddot{w}_p(t) = \alpha \omega \cos(\omega t) - \beta \omega \sin(\omega t)$$

$$\dot{w}_p(t) = -\alpha \omega^2 \sin(\omega t) - \beta \omega^2 \cos(\omega t)$$

eqf for $\sin(\omega t)$:

$$-m\alpha \omega^2 + \beta \omega \gamma + k\alpha = A$$

Voor $\cos(\omega t)$:

$$-m\beta \omega^2 - \alpha \omega \gamma + k\beta = 0$$

steek dit in $m\alpha$ and solve for α and β .

$w_p(t) = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)$

Figure 9.90: Exercise 5

> # Define the homogeneous equation
 $LL := m * \text{diff}(u(t), t\$2) + \text{gamma} * \text{diff}(u(t), t) + k * u(t);$

Solve the homogeneous equation
 $\text{hom_sol} := \text{dsolve}(LL = 0, u(t)) \text{ assuming } \text{gamma}^2 < 4 * k * m;$

$$LL := m \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + \gamma \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) + k u(t)$$

$$\text{hom_sol} := u(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \sin \left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4km}}{2m} t \right) + c_2 e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \cos \left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4km}}{2m} t \right) \quad (1)$$

> $\text{part_sol_coeff} := \text{solve}(\{-m * \text{alpha} * \omega^2 + \text{beta} * \omega * \gamma + k * \text{alpha} = A,$
 $-m * \text{beta} * \omega^2 - \text{alpha} * \omega * \gamma + k * \text{beta} = 0\},$
 $\{\text{alpha}, \text{beta}\});$

$$\text{part_sol_coeff} := \begin{cases} \alpha = \frac{(-m\omega^2 + k)A}{m^2\omega^4 + \gamma^2\omega^2 - 2km\omega^2 + k^2}, \beta \\ = \frac{\gamma\omega A}{m^2\omega^4 + \gamma^2\omega^2 - 2km\omega^2 + k^2} \end{cases} \quad (2)$$

> # Dus de particuliere oplossing is dan:
> $\text{particuliere_oplossing} := \text{rhs}(\text{part_sol_coeff}[1] \cdot \sin(\omega \cdot t) + \text{part_sol_coeff}[2] \cdot \cos(\omega \cdot t))$

$$\text{particuliere_oplossing} := \frac{\sin(\omega t) (-m\omega^2 + k) A}{m^2\omega^4 + \gamma^2\omega^2 - 2km\omega^2 + k^2} + \frac{\cos(\omega t) \gamma\omega A}{m^2\omega^4 + \gamma^2\omega^2 - 2km\omega^2 + k^2} \quad (3)$$

> # De algemene oplossing is dan
> # Solve the full equation
 $\text{full_sol} := \text{dsolve}(LL = A * \sin(\omega \cdot t), u(t)) \text{ assuming } \text{gamma}^2 < 4 * k * m;$

$$\text{full_sol} := u(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \sin \left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4km}}{2m} t \right) c_2 + e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \cos \left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4km}}{2m} t \right) c_1 + \frac{A ((-m\omega^2 + k) \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \gamma\omega)}{m^2\omega^4 + (\gamma^2 - 2km)\omega^2 + k^2} \quad (4)$$

9.8.3 WC

$$\text{a)} \quad \leftrightarrow 0.7x \text{ in ambient temperature}$$

- i) The cooling of the coffee
of the room.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_{\text{ambient}})$$

\Rightarrow important: die Temperatur sinkt exponentiell und die Differenz zwischen der Koffeintemperatur und der Raumtemperatur sinkt.

$$\text{c.a. } T(0) = -k \cdot T(0) + k \cdot T_{\text{ambient}}$$

$$T(0) = 40, T(0) = 70, T_{\text{amb}} = 20$$

De homogene oplossing

$$\Rightarrow T(t) + k \cdot T(t) = 0 \quad (\text{kt}) \Rightarrow T(t)$$

die allgemeine oplossing:

$$T(t) = T_{\text{ambient}} + C \cdot e^{-kt}$$

een particuliere oplossing

$$\partial_t \cdot C \cdot T(t) = 0$$

$$\Rightarrow kT(t) = k \cdot T_{\text{ambient}}$$

$$T(0) = 20 + C \cdot e^0 \quad (C = 50)$$

$$T(40) = 20 + C \cdot e^{-40k}$$

$$\Rightarrow 20 = 50 \cdot e^{-40k} \Rightarrow k = -\frac{\ln(\frac{1}{2})}{40}$$

$$\begin{aligned} & \frac{k}{2} \cdot t \\ \Rightarrow T(t) &= 20 + 50 \cdot e^{-\frac{k}{2} \cdot t} \end{aligned}$$

$$\text{ii) } T_2(t) = k(\omega - T_2(t))$$

$$\Leftrightarrow T_2(t) = k\omega - kT_2(t)$$

homogen:

$$T_2(t) + kT_2(t) = 0 \Rightarrow C \cdot e^{-kt}$$

particulair:

$$\Rightarrow T_2(t) = \omega$$

\Rightarrow eigen oplossing

$$C e^{-kt} \quad (\omega = T_2(t))$$

op hetzelfde:

$$C \cdot 1 + \omega = 40 \quad \text{in } C = (40 - \omega)$$

vast "k": k hängt von ω ab!

$$\ln(\frac{40}{\omega}) \cdot k =$$

$$(40 - \omega) \cdot k + \omega = 40$$

$$\Rightarrow \omega = 90$$

Figure 9.91: Exercise 1

▼ (iii)

```
> Temp := t -> piecewise(0 < t and t < 10, T1(t), 10 <= t and t < 20, T2(t  
- 10));  
> plot(Temp(t), t = 0 .. 20, discont);
```

Figure 9.92: Exercise 1 Part 3

2. Een vloeistoftank met een capaciteit van V liter bevat aanvankelijk W liter ($W < V$) water, waarin Z kilogram zout is opgelost.

Tijdens de eerste fase stroomt zuiver water de tank binnen aan een debiet van s l/min. Het door roeren homogeen mengsel verlaat de tank met een debiet van r l/min ($r < s$). De eerste fase stopt op het moment dat de tank volledig gevuld is.

Tijdens de tweede fase bevat het instromend water zout met een concentratie van k kg/l dewelke groter is dan de bij start van de tweede fase aanwezige concentratie zout. Het uitstroomdebiet blijft onveranderd, terwijl het instroomdebiet teruggebracht wordt tot eveneens r l/min.

- (i) Bepaal op elk ogenblik van de eerste fase de hoeveelheid zout in de tank.
- (ii) Bepaal op elk ogenblik van de tweede fase de hoeveelheid zout in de tank.
- (iii) Bepaal op elk ogenblik de hoeveelheid vloeistof $v(t)$ en de hoeveelheid zout $z(t)$ in de tank.
- (iv) Voorspel de waarde van $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t)$.
- (v) Hoelang moet de tweede fase duren om de hoeveelheid zout die in de tank aanwezig was na het beëindigen van de eerste fase te verdrievoudigen?
- (vi) Visualiseer het volledige verloop van de hoeveelheid zout in de tank in het geval waar $V = 500$, $W = 100$, $Z = 70$, $s = 15$, $r = 5$ en $k = 0,2$.

Solution: Stel $v_i(t)$ de hoeveelheid vloeistof in de tank, en $z_i(t)$ de hoeveelheid zout, tijdens fase $i = 1, 2$.

- (a) De ogenblikkelijke verandering in de hoeveelheid vloeistof is

$$v'_1(t) = s - r, \quad v_1(0) = W \quad \xrightarrow{\text{M}} \quad v_1(t) = (s - r)t + W.$$

Dit duurt tot het tijdstip t_1 waarop de tank vol is, dus $v_1(t_1) = V$. We vinden $t_1 \stackrel{\text{M}}{=} \frac{V-W}{s-r}$.

De ogenblikkelijke verandering in de hoeveelheid zout is

$$z'_1(t) = -r \frac{z_1(t)}{v_1(t)}, \quad z_1(0) = Z \quad \xrightarrow{\text{M}} \quad z_1(t) = Z W^{-\kappa} (-rt + st + W)^\kappa, \quad \kappa := \frac{r}{r-s}.$$

Wanneer de eerste fase eindigt is de hoeveelheid zout $z_1(t_1) = Z_1 \stackrel{\text{M}}{=} V^\kappa W^{-\kappa} Z$.

- (b) Tijdens de tweede fase is het instroom- en uitstroomdebiet gelijk. Derhalve is $v_2(t) = V$.

De ogenblikkelijke verandering in de hoeveelheid zout is

$$\begin{aligned} z'_2(t) &= -r \frac{z_2(t)}{v_2(t)} + kr, \quad z_2(t_1) = Z_1 \\ &\xrightarrow{\text{M}} z_2(t) = e^{\frac{-\kappa(rt-st+V-W)}{V}} V^\kappa W^{-\kappa} Z - e^{\frac{-\kappa(rt-st+V-W)}{V}} V k + V k. \end{aligned}$$

(c) De hoeveelheid vloeistof is

$$v : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} v_1(t) & 0 \leq t \leq t_1 \\ v_2(t) & t_1 \leq t \end{cases}.$$

De hoeveelheid zout is

$$z : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} z_1(t) & 0 \leq t \leq t_1 \\ z_2(t) & t_1 \leq t \end{cases}.$$

(d) Na heel lang wachten is de concentratie in het vat dezelfde als de instroomconcentratie:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = kV.$$

(e) We zoeken het tijdstip $t_2 > t_1$ waarvoor $z(t_2) = Nz(t_1) = NZ_1$ met $N = 3$. De gevraagde duur is dan

$$t_2 - t_1 \stackrel{\text{M}}{=} \frac{V}{r} \ln \frac{ZV^\kappa - kVW^\kappa}{NZV^\kappa - kVW^\kappa}.$$

We controleren nog of het argument van \ln wel positief is. Er is gegeven dat $Z_1/V < k$ zodat

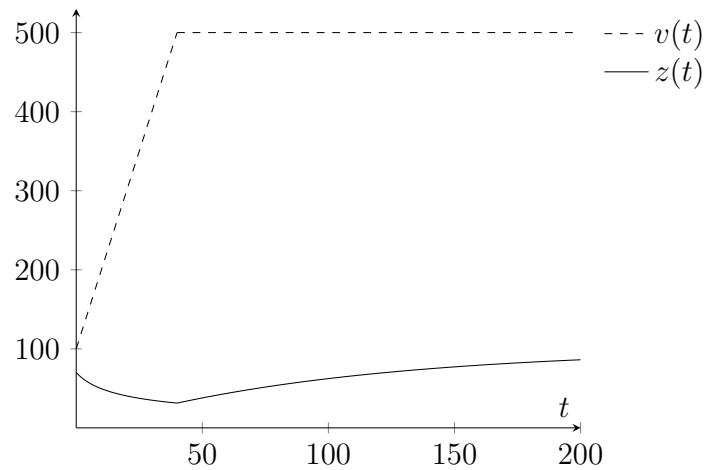
$$V^\kappa W^{-\kappa} Z < kV \implies ZV^\kappa - kVW^\kappa < 0.$$

Merk op dat fysisch $NZ_1 < kV$ dient te zijn, zie ook (d), zodat

$$NV^\kappa W^{-\kappa} Z < kV \implies NZV^\kappa - kVW^\kappa < 0.$$

Indien $NZ_1 \geq kV$ is de duur onmogelijk te bepalen.

(f) De grafiek.



```

> vglvloei:=D(v1)(t)=s-r;
> solv:=dsolve({vglvloei,v1(0)=W});
> v1:=unapply(rhs(solv),t);
> t1:=solve(v1(t)=V,t);
> vglzout:=D(z1)(t)=-r*z1(t)/v1(t);
> solz:=dsolve({vglzout,z1(0)=Z});
> z1:=unapply(rhs(solz),t);
> Z1:=simplify(z1(t1));
> vglzout:=D(z2)(t)=k*r-r*z2(t)/v2(t);
> solz:=dsolve({vglzout,z2(t1)=Z1});
> z2:=unapply(rhs(solz),t);
> v2:=t->V > v:=t->piecewise(t<0,0,0<=t and t< t1,v1(t),t1< t,v2(t)): v(t);
> z:=t->piecewise(t<0,0,0<=t and t< t1,z1(t),t1< t,z2(t)): z(t);
> limit(z(t),t=+infinity);
> t2:=solve(z2(t)=3*Z1,t); duur:=simplify(t2-t1);
> V:=500; W:=100; s:=15; r:=5; k:=0.2; Z:=70;
> v(t),z(t);
> evalf(3*Z1)<evalf(k*V),evalf(Z1)<evalf(k*V),evalf(duur);
> plot([v(t),z(t)],t=0..t2,color=[blue,red],legend=["vloeistof","zout"]);

```

Werkcollege 8

► Oefening 1

▼ Oefening 2

```
[> restart;
```

Vloeistoftank met een capaciteit van V liter bevat aanvankelijk W liter ($W < V$) water, waarin Z kilogram zout is opgelost.

FASE 1: IN s l/min (zuiver water) // UIT r l/min (homogeen), ($r < s$) // STOP als tank vol is (tijd t_1).

FASE 2: IN r l/min (zout water, k kg/l, k groter dan einde fase 1) // UIT r l/min

▼ Deel (a)

Bepaal op elk ogenblik van de eerste fase de hoeveelheid zout in de tank.

```
[> vloei1:= D(v1)(t)=s-r;
> sysv1:= {vloei1,v1(0)=W};
> dsolve(sysv1);
> v1:= unapply(rhs(%),t);
> t1:= solve(v1(t)=V,t);
> zout1:= D(z1)(t)=-r*z1(t)/v1(t);
> sysz1:= {zout1, z1(0)=Z};
> dsolve(sysz1);
> z1:=simplify(unapply(rhs(%),t));
> kappa:=r/(r-s);
```

Hoeveelheid zout op het einde van fase 1

```
[> Z1:=simplify(z1(t1));
```

▼ Deel (b)

Bepaal op elk ogenblik van de tweede fase de hoeveelheid zout in de tank.

```
[> v2:=t->V;
> zout2:= D(z2)(t) = -r*z2(t)/v2(t) + k*r;
> sysz2:= {zout2, z2(t1)=Z1};
> dsolve(sysz2);
> z2:= simplify(unapply(rhs(%),t));
```

▼ Deel (c)

Bepaal op elk tijdstip de hoeveelheid vloeistof $v(t)$ en de hoeveelheid zout $z(t)$ in de tank.

```
[> v:=t->piecewise(t<0,0, 0<=t and t<=t1,v1(t), v2(t));
[> z:=t->piecewise(t<0,0, 0<=t and t<=t1,z1(t), z2(t));
```

▼ Deel (d)

Voorspel de waarde van $\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t))$.

```
[> limit(z2(t),t=+infinity);
```

▼ Deel (e)

Hoelang moet de tweede fase duren om de hoeveelheid zout die in de tank aanwezig is na het beëindigen van de eerste fase te verdrievoudigen?

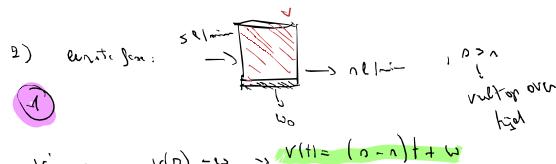
Zoek tijdstip $t_2 > t_1$ waarvoor $z(t_2) = Nz(t_1)$ met $N = 3$. De gevraagde duur is dan het verschil in tijd $t_2 - t_1$.

```
[> t2:= solve(z2(t)=3*Z1,t);
[> duur:=simplify(t2-t1);
```

▼ Deel (f)

Visualiseer het volledige verloop (
 $V = 500, W = 100, Z = 10, s = 15, r = 5, k = 0.2$)

```
[> V:=500;
  W:=100;
  Z:=10;
  s:=15;
  r:=5;
  k:=0.2;
[> v(t);
[> z(t);
[> evalf(3*Z1) < evalf(k*V);
[> evalf(Z1)<evalf(k*V);
[> evalf(duur);
[> evalf(t1);
[> plot([v(t),z(t)],t=0..200, color=[blue,red], legend=
  ["vloeistof","zout"]);
[> limit(z(t),t=+infinity);
  k*V;
```

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h, V(t) = \omega \Rightarrow V(t) = (\pi - \pi) t + \omega$$

Optimal initial tank vol: $V(t_0) = (\pi - \pi) t_0 + \omega$

$$\Leftrightarrow t_0 = \frac{V(t_0) - \omega}{\pi - \pi}$$

Regarding cost:

$$\textcircled{1} z^1(t) = -n \cdot \frac{z^1(t)}{v(t)}, z_1(0) = Z$$

$$\textcircled{2} \frac{z^1(t)}{z_1(t)} = -n \cdot \frac{z^1(t)}{v(t)} \Rightarrow \int \frac{1}{z_1(t)} dz_1 = -n \cdot \int \frac{1}{v(t)} dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{z_1(t)} dz_1 = -n \cdot \left[\frac{1}{(n - \pi)t + \omega} \right] dt$$

Using Maple:

$$z_1(t) = e^{-c((n - \pi)t + \omega)}$$

$$\text{with } z(0) = Z \Rightarrow Z = e^{c \cdot \omega}$$

$$\Leftrightarrow c = Z \cdot \frac{\omega}{n - \pi}$$

$$\text{then: } z_1(t) = Z \cdot \omega^{\frac{1}{n - \pi}} \cdot ((n - \pi)t + \omega)^{\frac{1}{n - \pi}} \quad \text{and } k = \frac{\omega}{n - \pi}$$

$$\textcircled{3} \text{ d}V: z_2'(t) = -\frac{n \cdot z_2(t)}{v(t)} + k \cdot n \quad \text{not containing}$$

$$\Leftrightarrow z_2(t) = z_2(t_0)$$

weiterdriften DV:

$$k \cdot n = z_2'(t) + n \cdot z_2(t)$$

homogeneous solution

$$z_2'(t) + n \cdot z_2(t) = 0 \Rightarrow z_2(t) = C \cdot e^{-\frac{n}{k} t}$$

particular

$$\text{with } z_2(t_0) = A \Rightarrow A = k \cdot V$$

Algorithm:

$$z_2(t) = C \cdot e^{-\frac{n}{k} t} + V \cdot k \quad \text{initial condition}$$

$$\Leftrightarrow C = (z_2(t_0) - V \cdot k) e^{\frac{n}{k} t_0}$$

$$\text{thus: } z_2(t) = [z_2(t_0) - V \cdot k \cdot e^{\frac{n}{k} t_0}] e^{-\frac{n}{k} t} + V \cdot k$$

$$\textcircled{4} \quad V: [0, \infty] \rightarrow \begin{cases} V_1(t): 0 \leq t \leq t_1 \\ V_2(t): t_1 \leq t \end{cases}$$

$$z: [0, \infty] \rightarrow \begin{cases} z_1(t): 0 \leq t \leq t_1 \\ z_2(t): t_1 \leq t \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad l: \underset{t \rightarrow +\infty}{\lim} z(t) = k \cdot V$$

we take $t_2 > t_1$, then $z(t_2) = N \cdot z(t_1)$, with $N = 3$

$$N \cdot z_1(t_2) = [z_1(t_1) - V \cdot k \cdot e^{\frac{n}{k} t_1}] e^{-\frac{n}{k} (t_2 - t_1)} + V \cdot k$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{n}{k} (t_2 - t_1)} = \frac{2V - k \cdot V \cdot k}{N \cdot V - k \cdot V \cdot k} \quad \text{and } k = \frac{\omega}{n - \pi}$$

$$t_2 - t_1 = -\frac{V}{k} \ln \left(\frac{2V - k \cdot V \cdot k}{N \cdot V - k \cdot V \cdot k} \right)$$

k needs to be positive:

$$-2V + k \cdot V \cdot k > 0$$

$$-N \cdot V^2 + k \cdot V \cdot k^2 > 0$$

so for $N > 2$, $k \cdot V$, $t_2 - t_1$ would negative, thus not

satisfy.

6) zie mple.

9.9 Week 9

9.9.1 Huis

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin((2m+1)\alpha)}{2m+1} = \begin{cases} \pi & ; 0 < \alpha < \pi \\ -\pi & ; -\pi < \alpha < 0 \end{cases}$$

Fourier series (converges) $\sin(\alpha) = 0$, odd harmonics $2m+1$

coefficients $\frac{1}{2m+1}$

for a periodic function with period π :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} \cdot \sin((2m+1)x) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin((2m+1)x) \cdot dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \frac{1}{\pi} \cdot \sin((2m+1)x) \cdot dx + \int_{-\pi}^0 -\frac{1}{\pi} \cdot \sin((2m+1)x) \cdot dx \right) \\ b_{2m+1} &= \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Figure 9.93: Exercise 1

> $f := x \rightarrow \text{piecewise}(0 < x \text{ and } x < \text{Pi}, \text{Pi}/4, -\text{Pi} < x \text{ and } x < 0, -\text{Pi}/4);$

$$f := x \mapsto \begin{cases} \frac{\pi}{4} & 0 < x < \pi \\ -\frac{\pi}{4} & -\pi < x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

> $b := n \rightarrow \frac{1}{\text{Pi}} \cdot \text{int}(f(x) \cdot \sin((2 \cdot n + 1) \cdot x), x = -\text{Pi}.. \text{Pi})$

$$b := n \mapsto \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin((2 \cdot n + 1) \cdot x) dx}{\pi} \quad (2)$$

> $b0 := b(0) \quad b0 := 1 \quad (3)$

> $b1 := b(1) \quad b1 := \frac{1}{3} \quad (4)$

> $b2 := b(2) \quad b2 := \frac{1}{5} \quad (5)$

> # Hier zien we dus dan $b(n) = 1:(2n+1)$

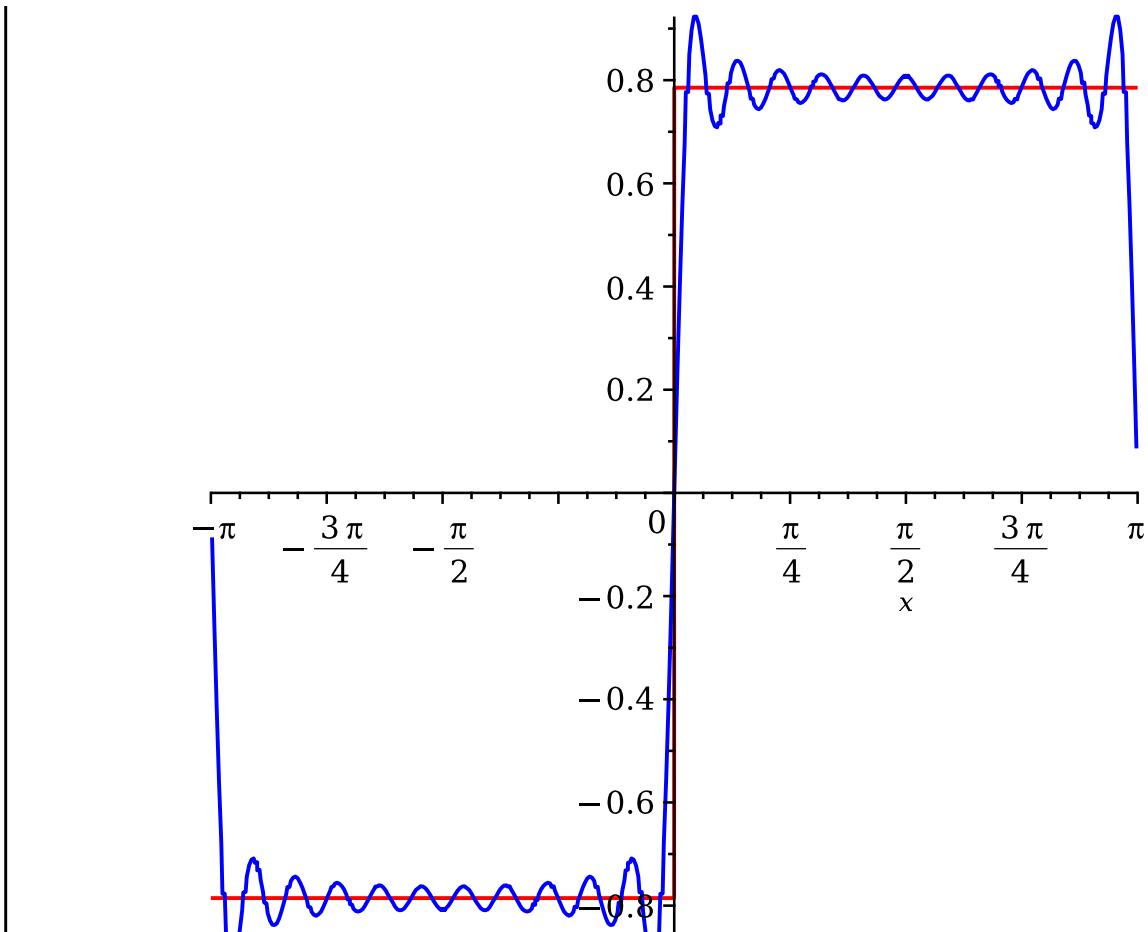
> # Construct the Fourier series

$\text{fourier_series} := n \rightarrow \text{Sum}(b(n) * \sin((2 * n + 1) * x), n = 0 .. \text{infinity});$

$$\text{fourier_series} := n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b(n) \cdot \sin((2 \cdot n + 1) \cdot x) \quad (6)$$

> # Show convergence in Pi:4

> $\text{plot}([f(x), \text{add}(b(n) * \sin((2 * n + 1) * x), n = 0 .. 10)], x = -\text{Pi} .. \text{Pi}, \text{color} = [\text{red}, \text{blue}]);$



> $\text{evalf}\left(\frac{\text{Pi}}{4}\right)$

0.7853981635

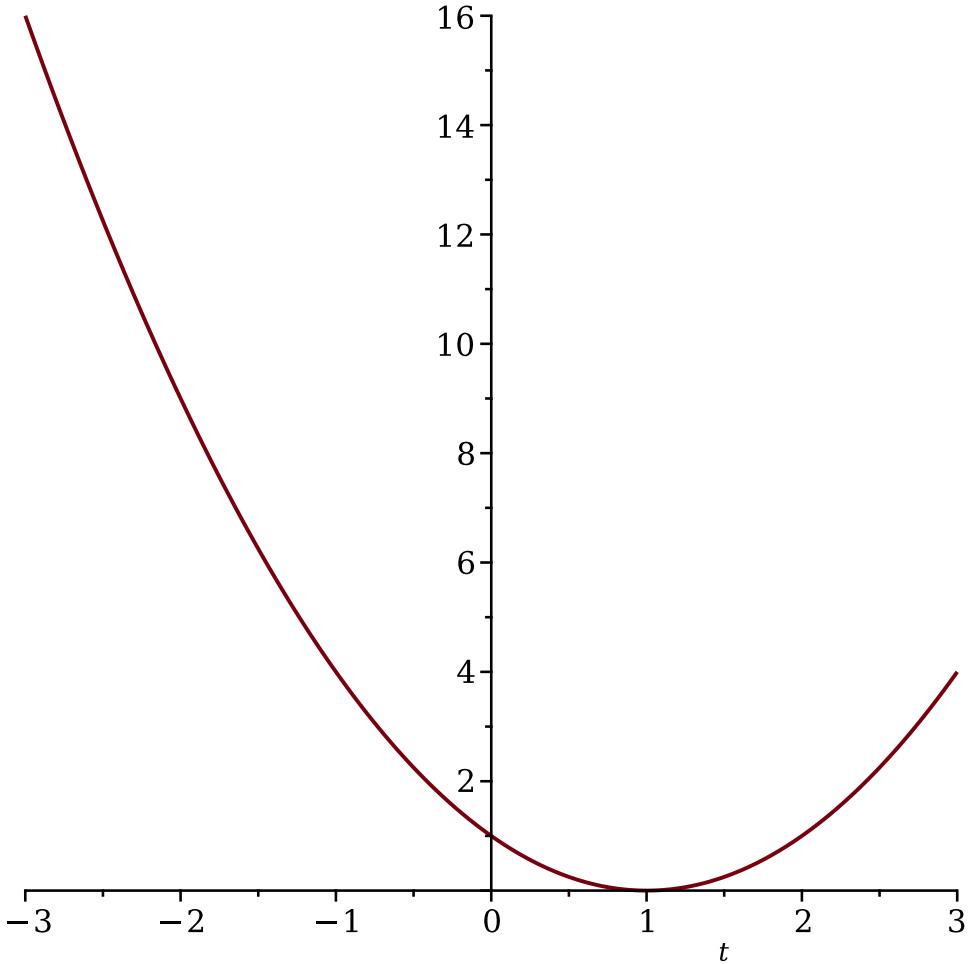
(7)

> #Hupa you see it is correct.


```

> restart: with(plots):
> f := t→(t - 1)^2:
> plot(f(t), t = -3..3)

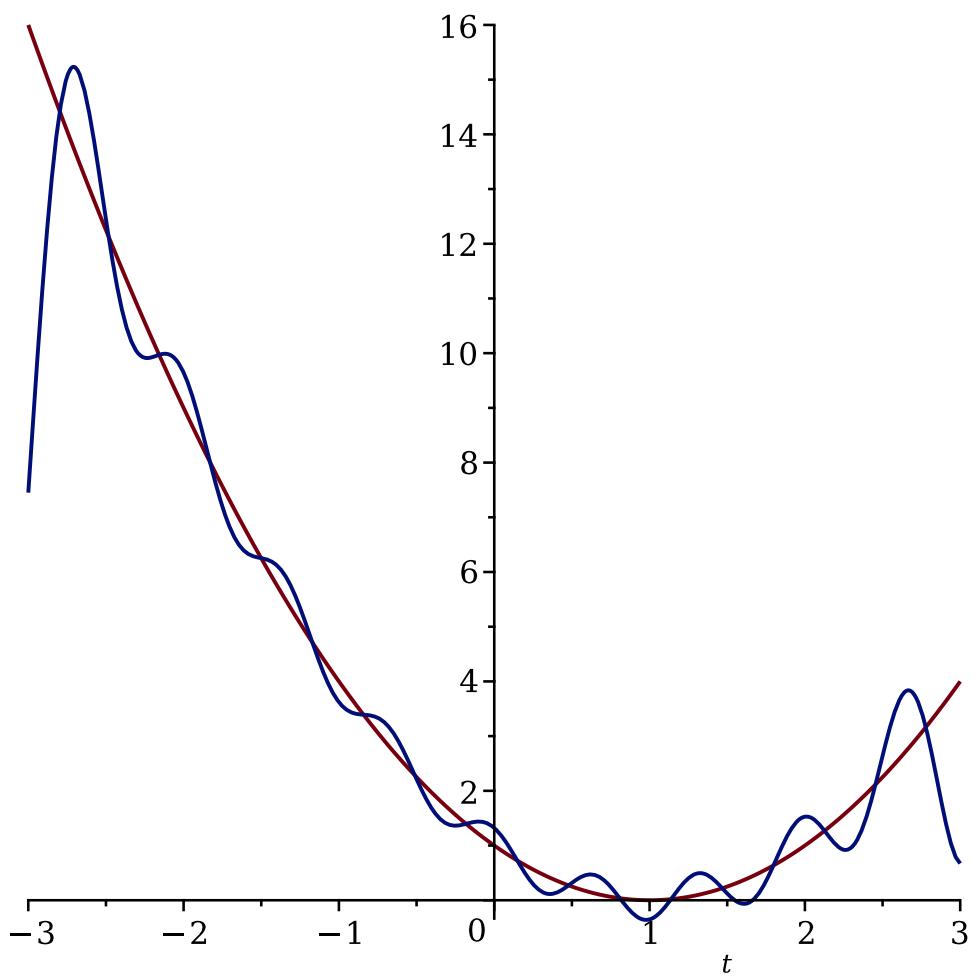
```



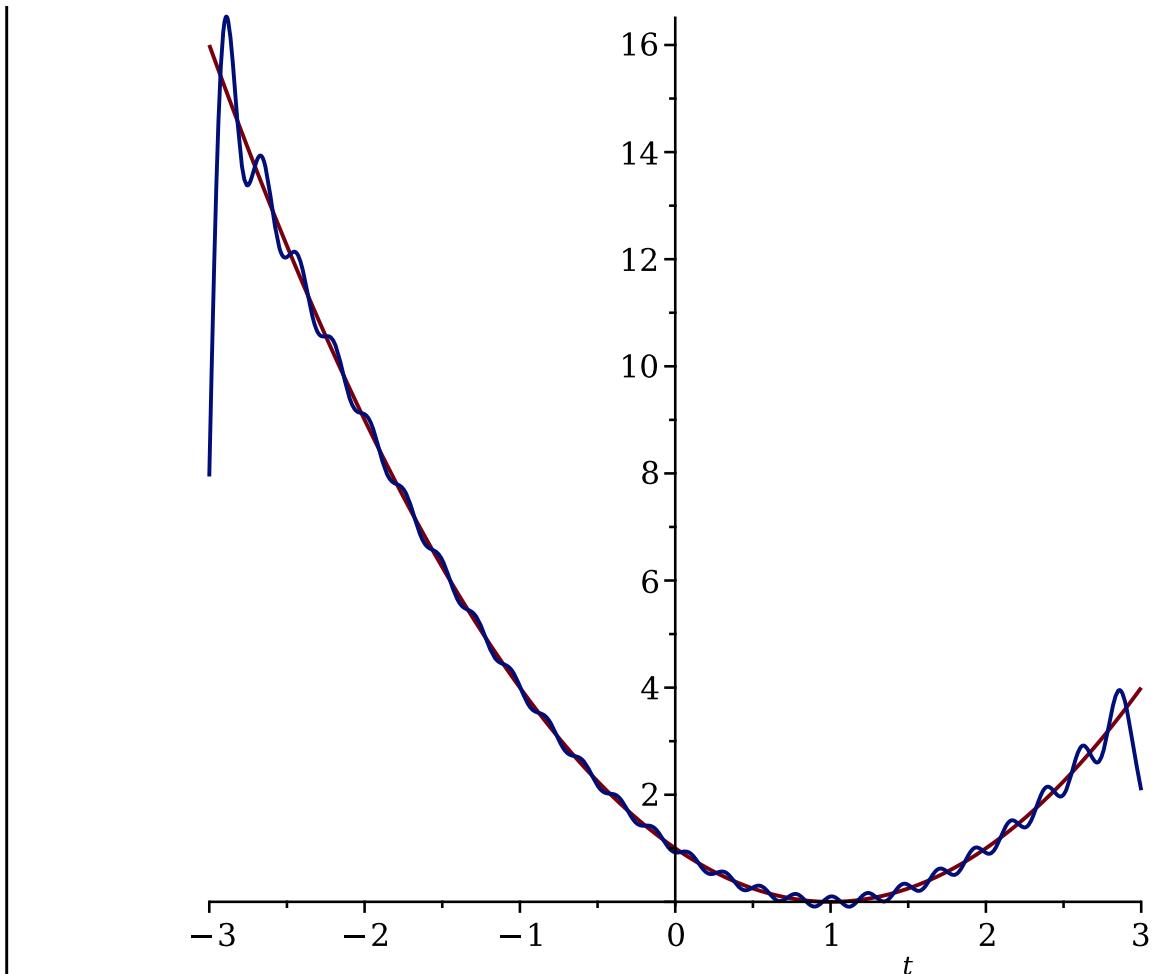
```

> # We need to calculate both a_n and b_n
> a_n := n→1/Pi · int(f(t)·cos(n·t), t = -3..3):
> b_n := n→1/Pi · int(f(t)·sin(n·t), t = -3..3):
> f_approx := a_n(0)/2 + add(b_n(n)·sin(n·t) + a_n(n)·cos(n·t), n = 1..9):
> plot([f(t), f_approx], t = -3..3)

```



```
> f_approx :=  $\frac{a_n(0)}{2} + \text{add}(b_n(n) \cdot \sin(n \cdot t) + a_n(n) \cdot \cos(n \cdot t), n = 1..27)$  :  
> plot([f(t), f_approx], t = -3..3)
```



$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cos(kt) \quad , \quad g(t) = \frac{f\left(\frac{t}{2}\right) + f\left(\frac{t}{2} + \pi\right)}{2} \\
 f\left(\frac{t}{2}\right) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{kt}{2}\right) \quad , \quad f\left(\frac{t}{2} + \pi\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cos\left(k\left(\frac{t}{2} + \pi\right)\right) \\
 g(t) &= \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{kt}{2}\right) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cos\left(k\left(\frac{t}{2} + \pi\right)\right)}{2} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \left(\cos\left(\frac{kt}{2}\right) + \cos\left(k\left(\frac{t}{2} + \pi\right)\right) \right) / 2
 \end{aligned}$$

we note that $\cos(k\pi) = (-1)^k$, $\sin(k\pi) = 0$ then $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$, $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{kt}{2}\right) \cdot \left(1 + (-1)^k \right) / 2 \\
 \text{if even: } g(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{kt}{2}\right) \\
 \text{if odd: } g(t) &= 0
 \end{aligned}$$

Figure 9.94: Exercise 3

4) **i)** erster Fourierreihe: ungerade Funktion:

$$\text{dann } f(-x) = -f(x) \text{ für } x \in [0, \bar{x}]$$

Original Funktion auf $[0, \bar{x}]$

\hookrightarrow erweiterbare auf $[-\bar{x}, \bar{x}]$

\Rightarrow cos-Funktionen ragen raus. no $f_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(n \cdot x)$

ii) periodisch nahe schaakieren, gewon $f(-x) = f(x)$

A: punktweise Konvergenz: (fiktiv) unregelmäßig pointwise to the Funktion an every point in the interval.

B: Discontinuation and Gibbs phenomenon:

für odd: discontinuities happen at: 1, 3, 5, ...

für even: 2, 4, ...

c) uniform convergence:

if the function is pointwise smooth and continuous, it converges uniformly in each point except for the discontinuation

Figure 9.95: Exercise 4

die Formel ist: $\tilde{\alpha}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m \cdot e^{i \frac{2\pi m n}{N}}$

Proof: $\tilde{\alpha}_{N-k} = \tilde{\alpha}_k$ als gezeigt hat: $\alpha_n = \alpha^*$

[wir wollen zeigen: $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \cdot e^{i \frac{2\pi m k}{N}}$

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{N-k} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{\alpha}_m \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi m}{N} (N-k)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{\alpha}_m \cdot \exp\left(i \frac{-2\pi m}{N} + i \frac{2\pi m k}{N}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{\alpha}_m \cdot \exp\left(i \frac{2\pi m k}{N}\right) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Figure 9.96: Exercise 5

$$\left(\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2 \right) \text{ to proof.}$$

$$\text{with } f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{imt}$$

$$c_m \text{ given by } \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-imt} dt \quad \text{conjugate}$$

$$1) |f(t)|^2 = f(t) \cdot \overline{f(t)}$$

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{imt}, \quad \overline{f(t)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m^* e^{-imt}$$

$$|f(t)|^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_m c_n^* e^{i(m-n)t}$$

$$2) \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m c_n^* e^{i(m-n)t} dt$$

, omdat we kunnen tegen m en n omwisselen!

$$\Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_m c_n^* \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} dt$$

thus each gathering term

$$m = n$$

$$\Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2$$

Figure 9.97: Exercise 6

The odd function:

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ -f(-x), & x \notin [-\pi, 0] \end{cases}$$

Fourier series:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(mx) \cdot dx$$

$$m \text{th } b_m = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \sin(mx) \cdot dx$$

$$\text{and } f(x) = x^3$$

$$b_m = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^3 \cdot f(x) \cdot \sin(mx) \cdot dx$$

Stability region:

A) en is pointwise convergence (wel niet in $[-\pi, \pi]$)
B) at disjoint intervals, the series converges to the average of the left-hand

and right-hand limits of the function.

C) $f(x) = x^3$ is continuous, so it converges between $[-\pi, \pi]$

Figure 9.98: Exercise 7

```

> # Define the function
f := x → x^3:

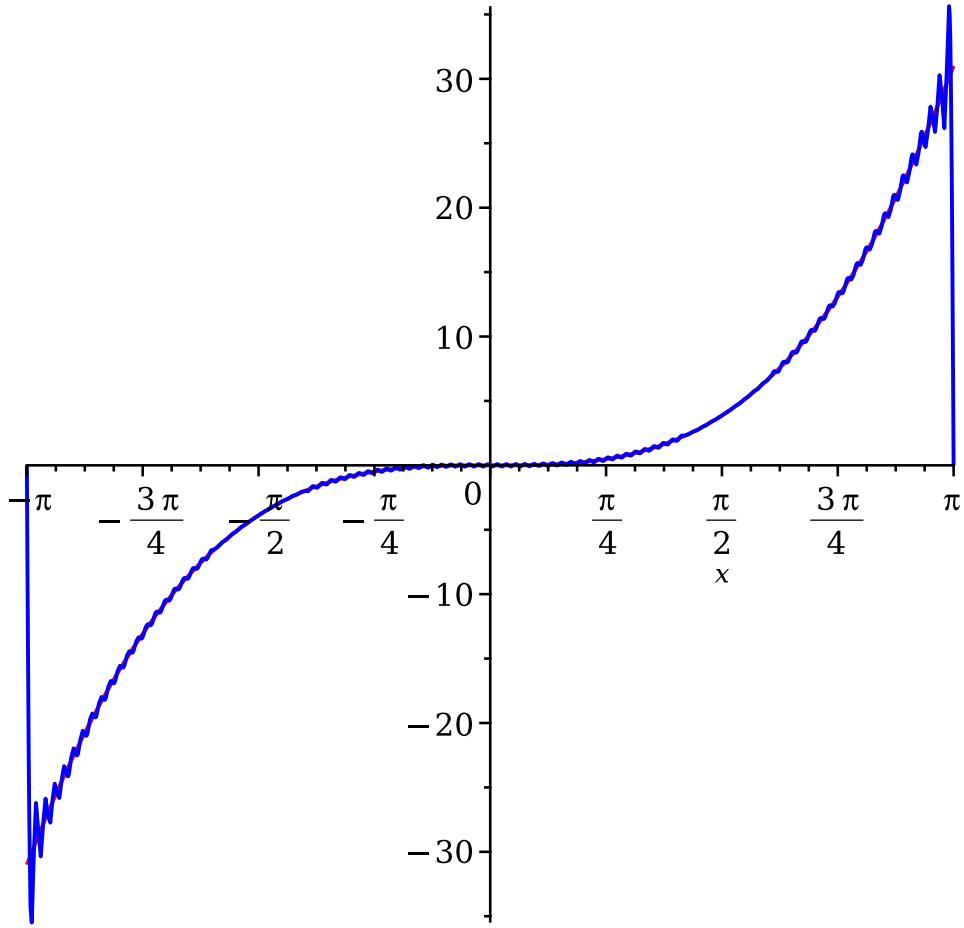
# Compute the Fourier sine coefficients
b := n → (2/Pi) * int(f(x) * sin(n*x), x = 0 .. Pi):

# Truncate the sine series to N terms
N := 100: # Change N for more terms
f_sine := sum(b(n) * sin(n*x), n = 1 .. N):

# Plot the original function and the sine series approximation
plot([f(x), f_sine], x = -Pi .. Pi, color = [red, blue], title
      = "Fourier Sine Series Approximation");

```

Fourier Sine Series Approximation



>

Exercise 8

Starting with the definition of \tilde{X}_k :

$$\tilde{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{i2\pi kn}{N}}.$$

Using the symmetry property $x_n = x_{N-n-1}$, we can substitute:

$$\tilde{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_{N-n-1} e^{-\frac{i2\pi kn}{N}}.$$

Let us make a change of variables. Let $m = N - n - 1$. Then as n goes from 0 to $N - 1$, m goes from $N - 1$ to 0. To keep the limits in ascending order, we can reverse the order of summation:

$$\tilde{X}_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-\frac{i2\pi k(N-m-1)}{N}}.$$

Simplify the exponent:

$$\begin{aligned} -\frac{i2\pi k(N-m-1)}{N} &= -\frac{i2\pi kN}{N} + \frac{i2\pi km}{N} + \frac{i2\pi k}{N} \\ &= -i2\pi k + \frac{i2\pi km}{N} + \frac{i2\pi k}{N}. \end{aligned}$$

Since $e^{-i2\pi k} = e^{-i2\pi k} = 1$ (because $e^{-i2\pi k} = e^{-i2\pi k \bmod 2\pi} = 1$), we have:

$$e^{-i2\pi k} = 1.$$

Therefore, the exponential term simplifies to:

$$e^{-\frac{i2\pi k(N-m-1)}{N}} = e^{\frac{i2\pi km}{N}} e^{\frac{i2\pi k}{N}}.$$

Pulling out constants from the summation:

$$\tilde{X}_k = e^{\frac{i2\pi k}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{\frac{i2\pi km}{N}}.$$

Notice that:

$$e^{\frac{i2\pi km}{N}} = e^{-\frac{i2\pi(-k)m}{N}} = e^{-\frac{i2\pi(N-k)m}{N}}.$$

But since $N - k$ is equivalent to $-k \bmod N$, we can write:

$$\tilde{X}_k = e^{\frac{i2\pi k}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-\frac{i2\pi(N-k)m}{N}}.$$

Recognize that the sum is the DFT of x_n at index $N - k$:

$$\tilde{X}_{N-k} = \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-\frac{i2\pi(N-k)m}{N}}.$$

Therefore:

$$\tilde{X}_k = e^{\frac{i2\pi k}{N}} \tilde{X}_{N-k}.$$

We have shown that:

$$\tilde{X}_k = e^{\frac{i2\pi k}{N}} \tilde{X}_{N-k}.$$

This completes the proof.

$$\begin{aligned}
 x_k &= \begin{cases} e^{i\theta}, & k=1 \\ e^{i\theta}, & k=N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \text{and } k &= 0, 1, \dots, N-1 \\
 \alpha_m &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{i2\pi k m}{N}} \\
 \alpha_m &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\underbrace{x_1 \cdot e^{-\frac{i2\pi 1 \cdot m}{N}}}_{\text{want}} + \underbrace{x_{N-1} \cdot e^{-\frac{i2\pi (N-1) \cdot m}{N}}}_{-e^{-\frac{i2\pi m}{N}}} \right) \\
 \text{and } x_1 &= e^{i\theta}, \quad x_{N-1} = e^{-i\theta} \\
 \Rightarrow \alpha_m &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(e^{i\theta} \cdot e^{-\frac{i2\pi 1 \cdot m}{N}} + e^{-i\theta} \cdot e^{-\frac{i2\pi (N-1) \cdot m}{N}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(e^{i\theta} \cdot e^{-\frac{i2\pi m}{N}} + e^{-i\theta} \cdot e^{-\frac{i2\pi m}{N}} \right) = (\cos \theta - i \sin \theta) \\
 &\stackrel{\text{want}}{=} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\
 &= \frac{2 \cos \left(\frac{2\pi m}{N} + \theta \right)}{\sqrt{N}}
 \end{aligned}$$

Figure 9.99: Exercise 9

9.9.2 WC

$\textcircled{1}$ $f(t) = t^2 \text{ voor } t \in [-2, 2] \rightarrow$ is periodiek.
 \hookrightarrow even functie: $b_m = 0 \rightarrow$ minder werk!

$$f_F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot dt$$

$$a_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \cdot dt$$

Figure 9.100: Exercise 1

2 signals:

$$\alpha_m = \cos\left(2\pi \cdot \frac{f_1}{f_s} \cdot m\right), \quad \alpha'_m = \cos\left(2\pi \cdot \frac{f_1'}{f_s} \cdot m\right)$$

- we need to calculate f' mod f_s in aliasing problem

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{f_s} &= \frac{f_1'}{f_s} + m \quad \text{modulo} \\ f_1 &= f_1' + m \quad \text{and mod } f_s \text{ negative} \} \text{ get rid of numbers.} \\ \frac{f_1}{f_s} &\approx -\left(\frac{f_1'}{f_s} + m\right) \end{aligned}$$

Case 1: $\frac{f_1}{f_s} = \frac{f_1'}{f_s} + m \Leftrightarrow f_1 = f_1' + m \cdot f_s$ aliasing?

Case 2: $\frac{f_1}{f_s} = -\left(\frac{f_1'}{f_s} + m\right) \Leftrightarrow f_1 = -f_1' - m \cdot f_s$, with $m = -1$

$$(\Rightarrow m = -1 \Rightarrow f_1 - f_1' = f_1)$$

$$\boxed{\text{thus: } \frac{f_1}{2} < f_1' < f_1}$$

Figure 9.101: Exercise 2

Oefening: Discrete fourier transform

```
[> restart: with(plots):with(DiscreteTransforms):
```

Analytische uitdrukking voor

```
[> part := (k, N, II) -> limit((exp(Pi*I*(l-k))/exp(Pi/N*I*(l-k))) * (sin(Pi*(l-k))/sin(Pi/N*(l-k))) + (exp(-Pi*I*(l+k))/exp(-Pi/N*I*(l+k))) * (sin(Pi*(l+k))/sin(Pi/N*(l+k))), l=II):  
> X_an := (k, N, II) -> evalf(1/(2*sqrt(N))*part(k, N, II)):
```

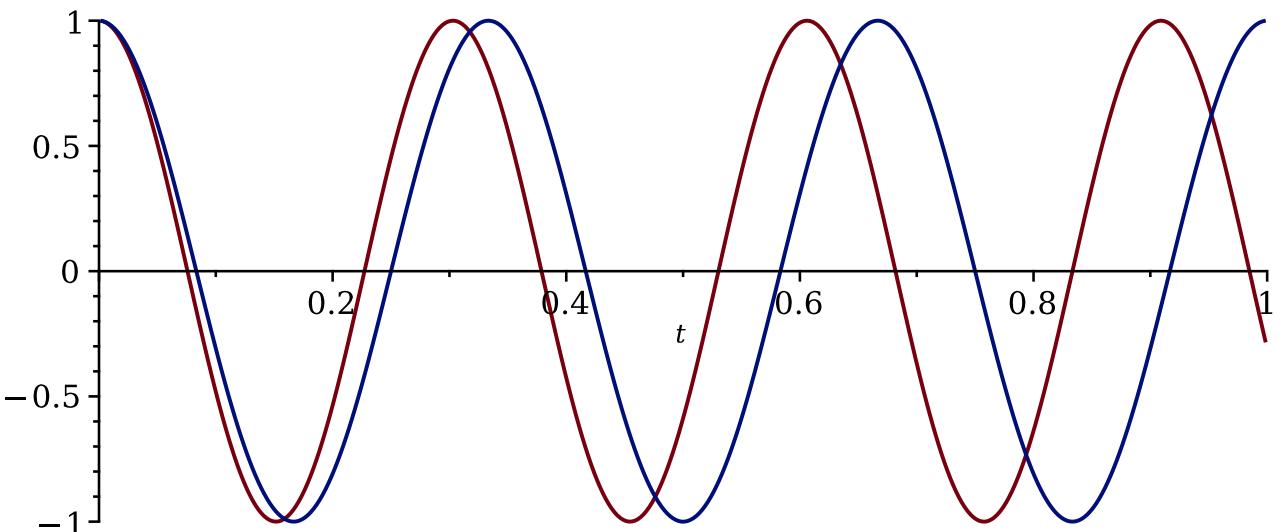
Periodieke functie

We zullen discrete samples nemen van de cosinus functie met een bepaalde frequentie f

```
[> T := 1:  
> g :=(t,f) -> cos(2*Pi*f*t);  
g := (t, f)  $\mapsto \cos(2\pi f t)$  (1)
```

We nemen 2 frequenties f1 en f2

```
[> f1 := 3/T;  
f2 := 3.3/T;  
f1 := 3  
f2 := 3.3  
> plot({g(t,f1), g(t,f2)},t=0..T); (2)
```



Sampling: N samples

We definieren het aantal samples, de sampling frequentie en sampling periode:

```
[> N := 20;  
fS := N/T;  
dt := 1/fS;  
N := 20  
fS := 20
```

$$dt := \frac{1}{20} \quad (3)$$

We steken de discrete sample punten in een lijst

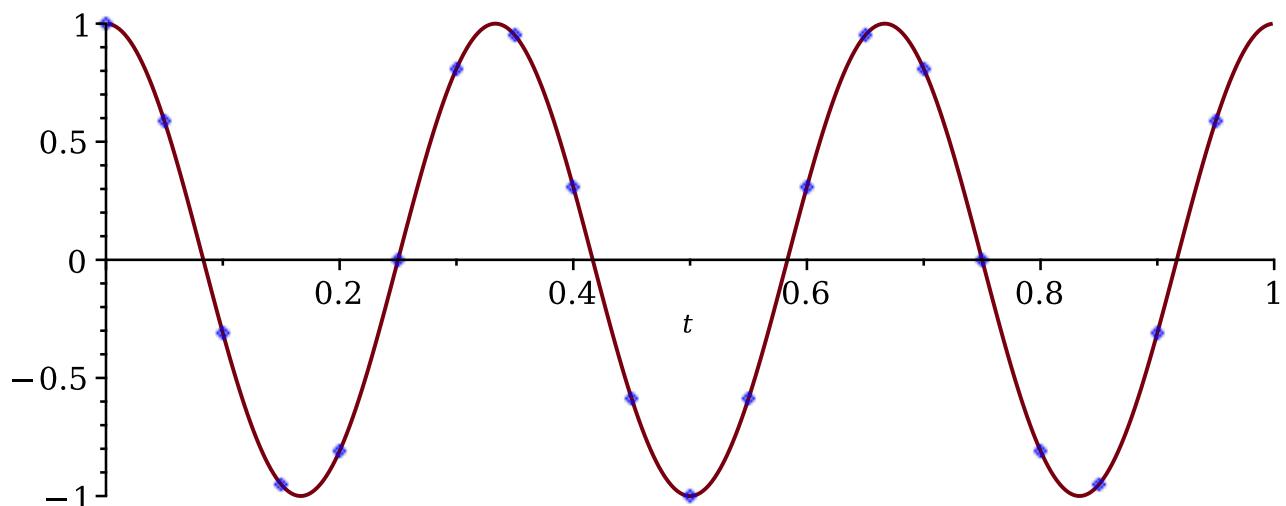
```
> samples1 := [seq(g(i*dt, f1), i=0..N-1)];
```

En bepalen de **discrete fourier transform** van de discrete datapunten

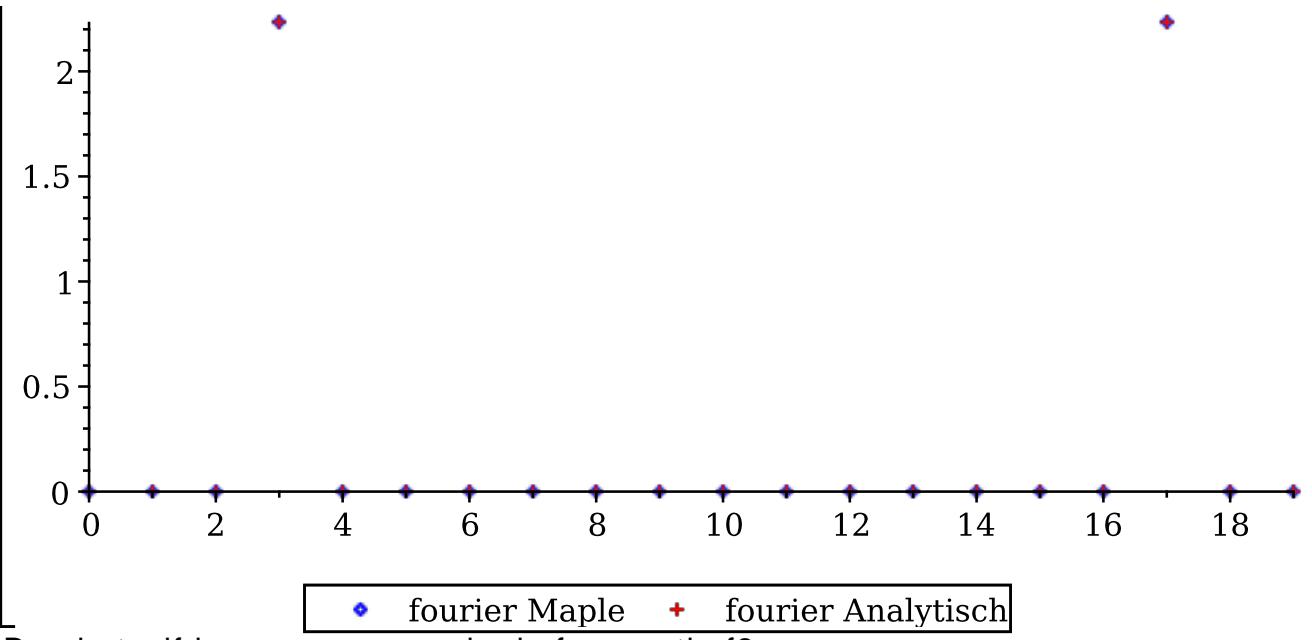
```
> F1      := FourierTransform(Vector(samples1));
> F1_an  := [seq(X_an(k, N, 3), k=0..N-1)];
```

Visualisatie:

```
> samplesplot1 := pointplot({seq([i*dt-dt,samples1[i]],i=1..N)},
  color=blue);
> plot1       := plot(g(t,f1),t=0..1);
display(plot1, samplesplot1 );
```

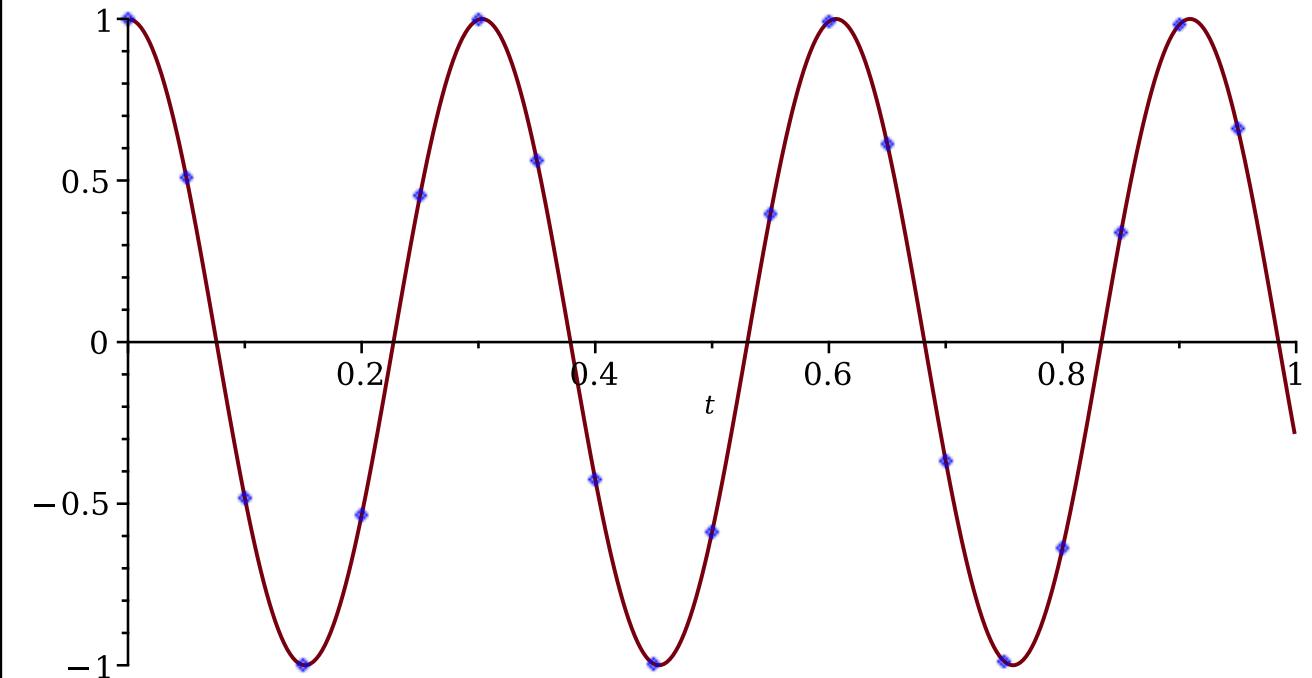


```
> fourierplot1  := pointplot({seq([i-1,abs(F1[i])],i=1..N)},
  color=blue ,legend="fourier Maple");
> fourier_an_plot1 := pointplot({seq([i-1,abs(F1_an[i])],i=1..N)},
  color=red, legend="fourier Analytisch",symbol=cross);
display(fourierplot1, fourier_an_plot1);
```



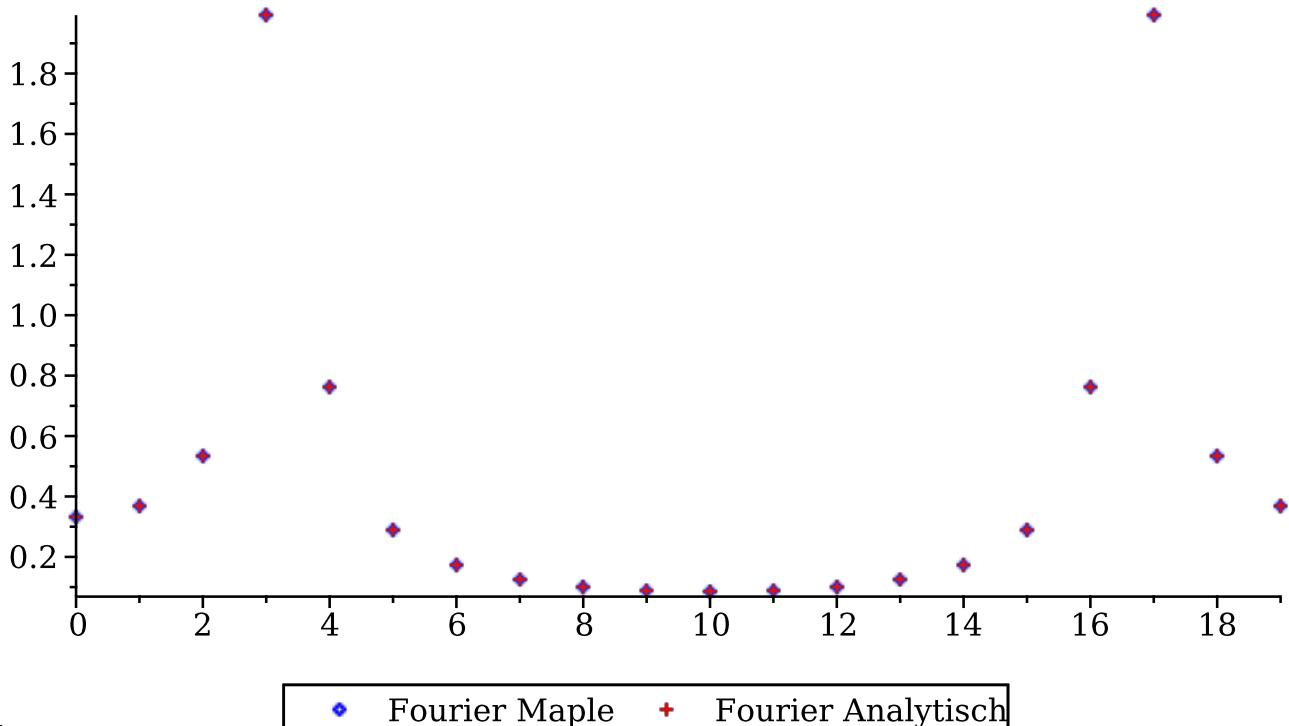
Doe hetzelfde voor een sample de frequentie f2

```
> samples2 := [seq(g(i*dt, f2), i=0..N-1)]:
> F2      := FourierTransform(Vector(samples2)):
> F2analytic := [seq(X_an(k, N, 3.3), k=0..N-1)]:
> samplesplot2 := pointplot({seq([i*dt-dt,samples2[i]],i=1..N)}, color=blue):
plot2 := plot(g(t,f2),t=0..1):
display(plot2, samplesplot2);
```



```
> fourierplot2 := pointplot({seq([i-1,abs(F2[i])],i=1..N)}, color=blue, legend="Fourier Maple"):
fourier_an_plot2 := pointplot({seq([i-1,abs(F2analytic[i])],i=1..
```

```
N}),color=red, legend="Fourier Analytisch",symbol=cross):
display(fourierplot2, fourier_an_plot2);
```



Aliasing

Neem nu de frequentie $f_3 = 12.1/T$, groter dan de nyquist frequentie: $f_N = f_S/2$

```
> fN:=fS/2;
fN := 10
```

(4)

```
> f3 := 12.1/T;
f3 := 12.1
```

(5)

```
> samples3 := [seq(g(i*dt,f3), i=0..N-1)]:
samples_alias := [seq(g(i*dt,fS-f3), i=0..N-1)]:
```

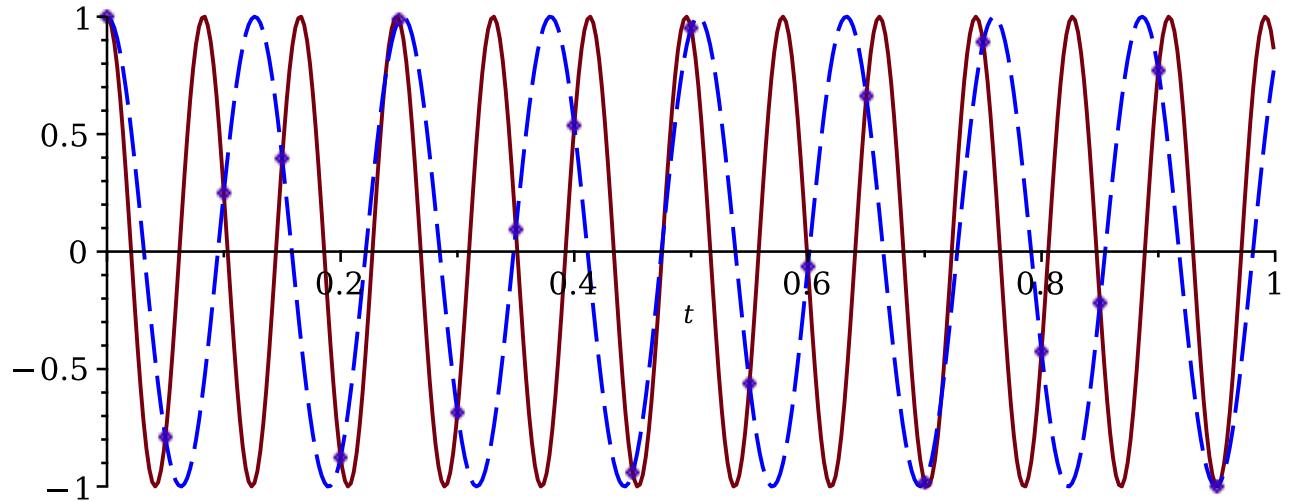
En bepalen de **discrete fourier transform** van de discrete datapunten

```
> F3 := FourierTransform(Vector(samples3)):
> Falias := FourierTransform(Vector(samples_alias)):
```

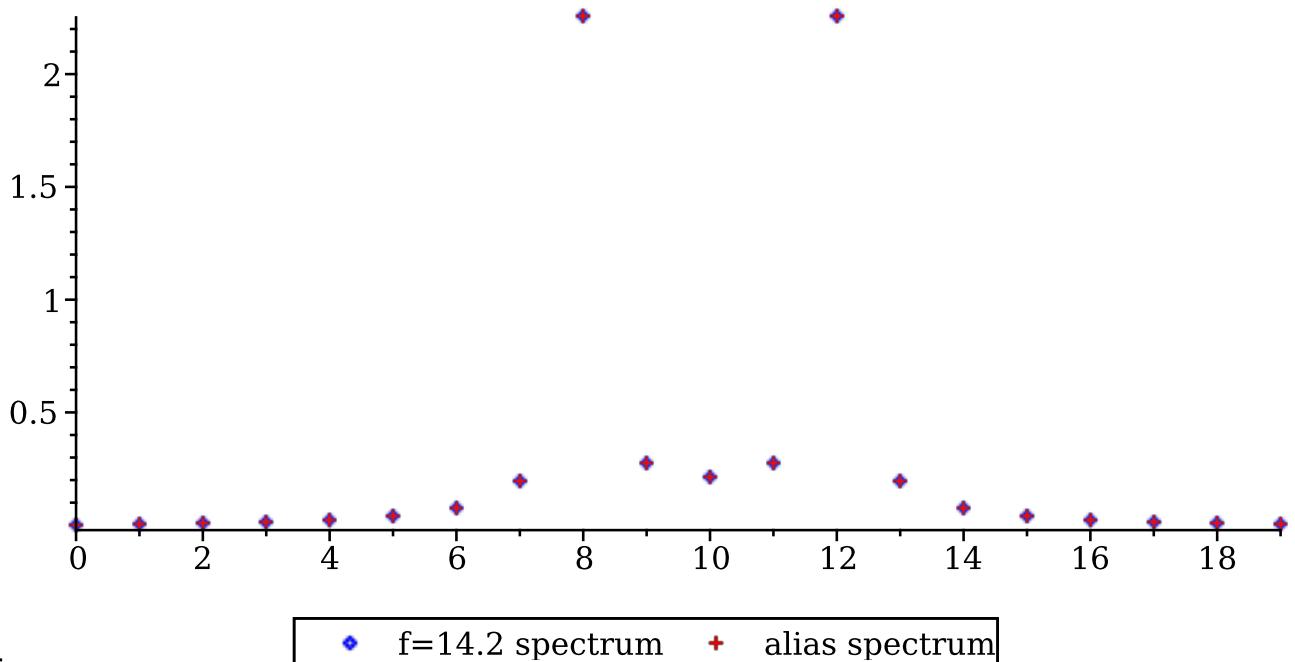
Visualisatie:

```
>
samples_alias_plot := pointplot({seq([i*dt-dt,samples3[i]],i=1..N)},color=blue):
samples_plot := pointplot({seq([i*dt-dt,samples_alias[i]],i=1..N)},color=red):
plot3 := plot(g(t,f3),t=0..1):
plotalias := plot(g(t,fS-f3),t=0..1, color=blue,
linestyle="dash"):
```

```
display(plot3 ,plotalias, samples_plot, samples_alias_plot);
```



```
> spec1 := pointplot({seq([i-1,abs(F3[i])],i=1..N)}, color=blue, legend="f=14.2 spectrum");
aliaspec := pointplot({seq([i-1,abs(Falias[i])],i=1..N)},color=red, legend="alias spectrum",symbol=cross);
display(spec1, aliaspec);
```



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} = \begin{cases} \frac{1}{2}(T-\alpha) & \text{for } 0 < \alpha \leq T \\ -\frac{1}{2}(T-\alpha) & \text{for } -T \leq \alpha < 0 \end{cases} \quad T \in [0, T]$$

↳ von rechts abwärts a_m zu ∞

$$b_m = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2\pi}t\right) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi}}_{0} (\pi - t) \cdot \sin(m) dt = \frac{1}{m}, \quad b_0 = 0$$

Figure 9.102: Exercise 4

```
[> restart:  
=> b := simplify(  $\frac{1}{\text{Pi}} \cdot \text{int}((\text{Pi} - x) \cdot \sin(n \cdot x), x = 0 .. \text{Pi})$  assuming (n, posint) )  
=>  $b := \frac{1}{n}$  (1)
```

$f(t)$ is odd, thus $a_m = 0$)

Wanneer we now $x=1$ zet is het non zero want odd indices.

$$\text{dus: } b_{2m+1} \neq 0$$

$$b_{2m+1} \neq 0$$

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} \cdot \sin\left(\frac{(2m+1)\pi \cdot t}{T}\right)$$

nu moeten we $\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m b_{2m+1}$ berekenen.

$$1) t=1 \Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} b_{2m+1} \cdot \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{T}\right) = (-1)^m$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} b_{2m+1} \cdot \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{L}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} b_{2m+1} \cdot (-1)^m \text{ dit van } f(1) \text{ dus}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} b_{2m+1} \cdot (-1)^m = 1$$

Figure 9.103: Exercise 5

9.9.3 Bord

$$f(t) = \frac{t}{\pi},]-\pi, \pi[\quad , \quad T = 2\pi$$

Definieer: $f_{\text{per}}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$

met $a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) \cdot dt$

en $b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(nt) \cdot dt$

oefnun $\rightarrow a_n = 0$

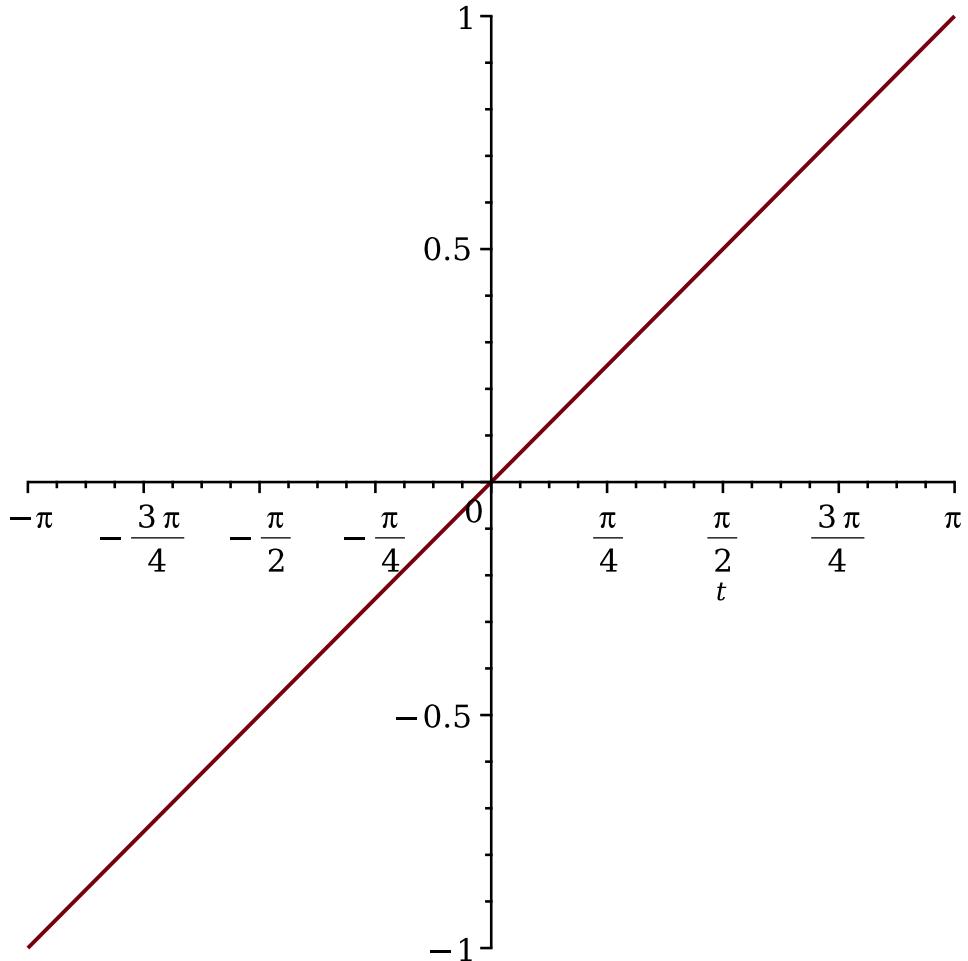
The rest is Maple

Figure 9.104: Exercise 1

```

> restart: with(plots):
> f := t-> $\frac{t}{\text{Pi}}$ :
> plot(f(t), t = -Pi..Pi)

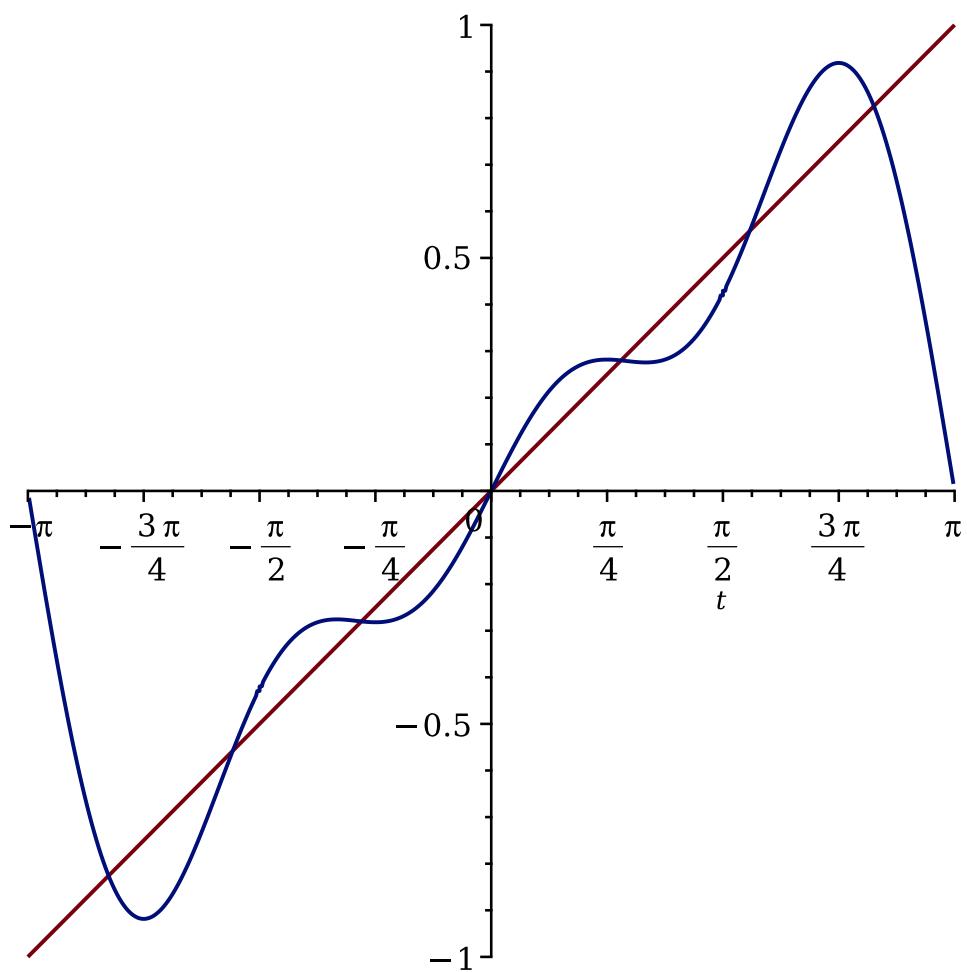
```



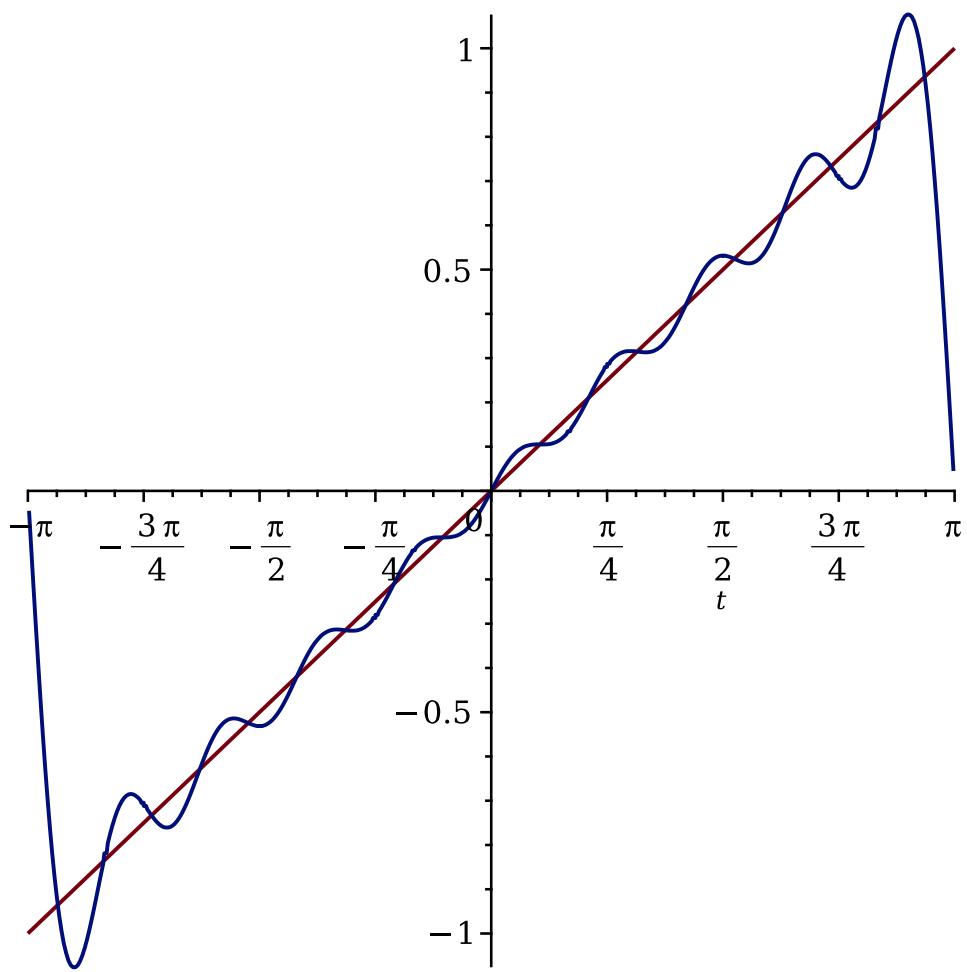
```

> # Odd function! So  $a_n = 0$ 
b := n->simplify( $\left(\frac{1}{\text{Pi}} \cdot \text{int}(f(t) \cdot \sin(n \cdot t), t = -\text{Pi}..\text{Pi})\right)$ ):
> N := 3: # Number of terms
f_approx := eval(add(b(n)*sin(n*t), n = 1 .. N)):
> plot([f(t), f_approx], t = -Pi..Pi)

```



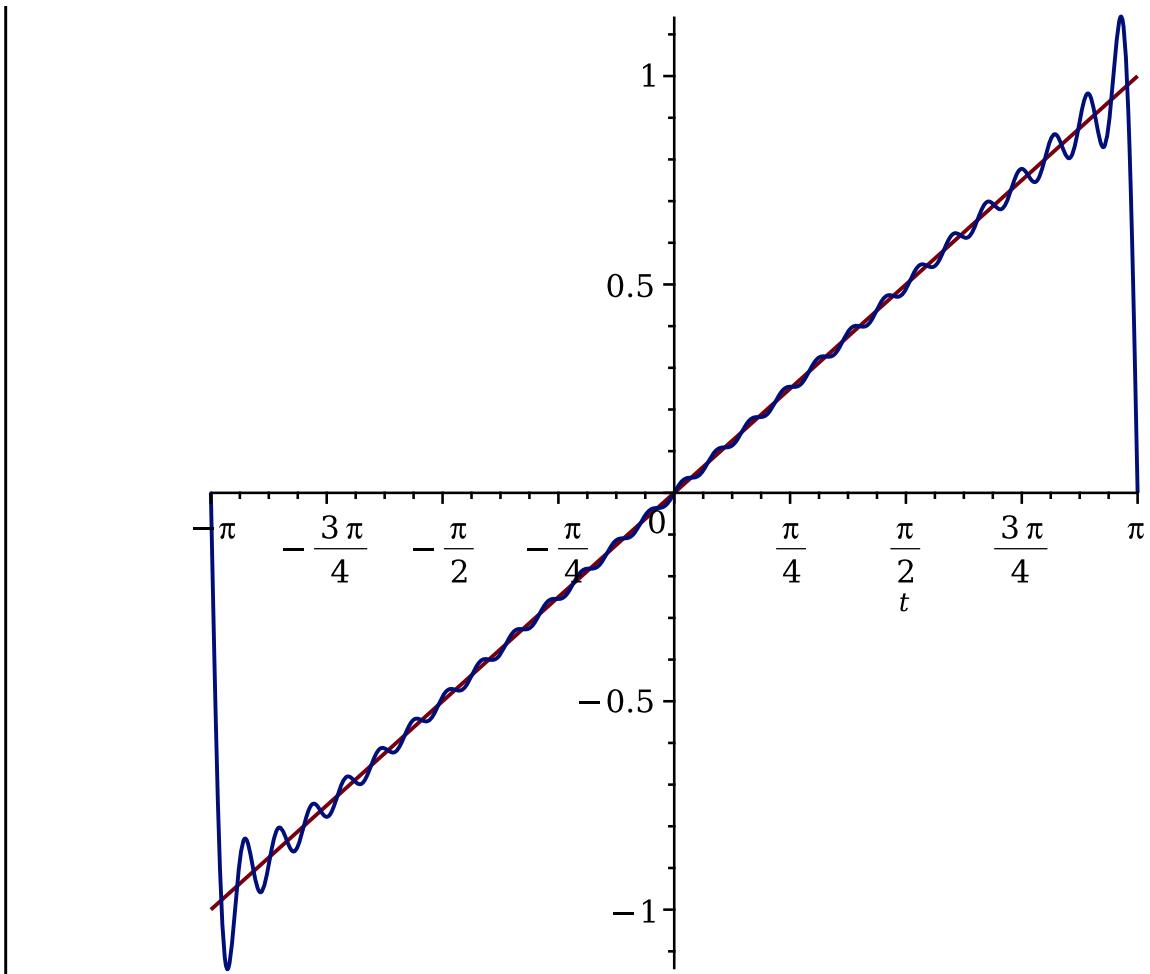
```
> N := 9 : # Number of terms  
f_approx := eval(add(b(n)*sin(n*t), n = 1 .. N)) :  
  
> plot([f(t), f_approx], t = -Pi..Pi)
```



```

> N := 27 : # Number of terms
f_approx := eval(add(b(n)*sin(n*t), n = 1 .. N)) :
> plot([f(t), f_approx], t = -Pi..Pi)

```



► # We see that the higher N , the better the approximation, but on the edge points Pi and $-\text{Pi}$ we diverge, this is the law of Gibbs

$$f_F(t) = (t-\tau)^2 + 1, \quad t \in [0, 1]$$

a) door te hanteren wortels voor dat er een sprongpunkt ontstaat.

Door stelling c zal de reeks convergeren naar het gemiddelde van linker / rechterlimiet in de sprongpunten. We verwachten Gibbs in de randpunten.

b) opties kunnen we niet afleiden, dus A en B gelden. (elkekno)

c) alleen geldt
(zie bovenstaande figuur)

Figure 9.105: Exercise 2

Wiskundige modellering in de ingenieurswetenschappen: bordoefeningenles 9

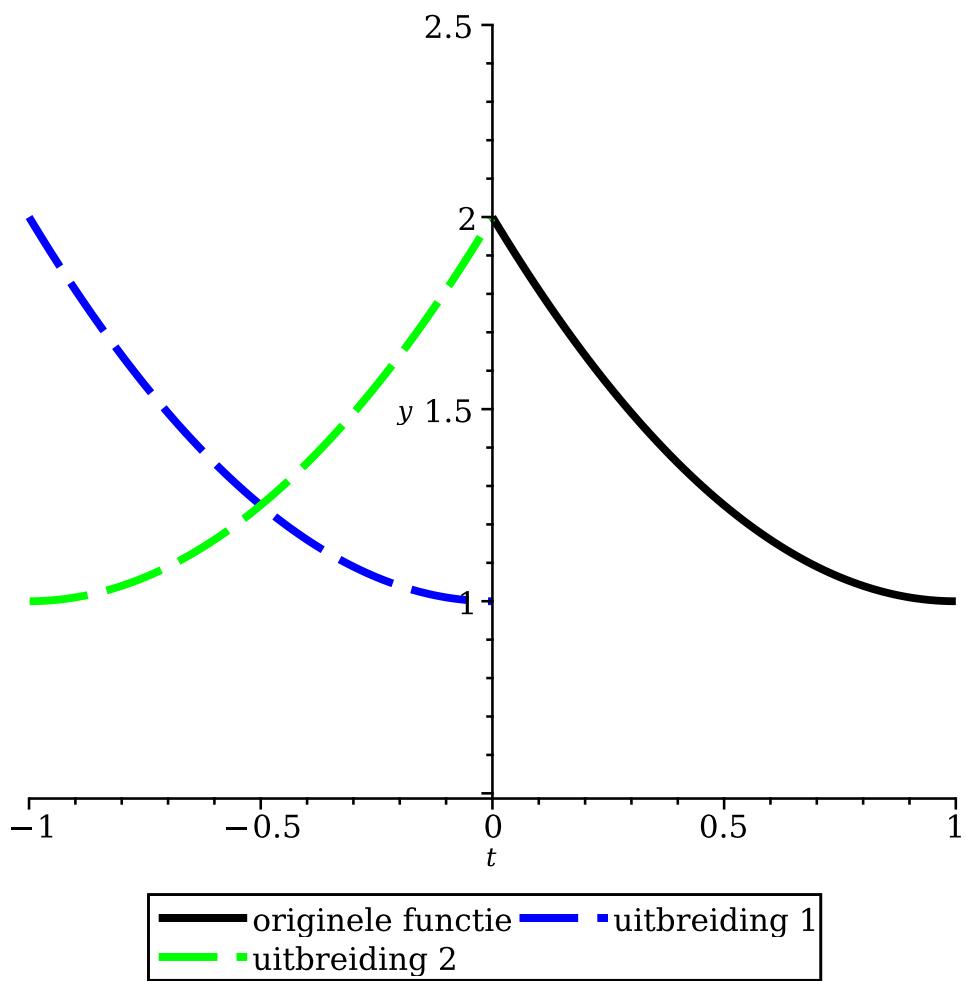
► Theorie Fourierreeksen

► Oefening 1:

▼ Oefening 2:

```
> restart:with(plots):
> L := 1:
> f := t-> (t-1)**2+1;
f:= t-> (t-1)2+1
(3.1)

> fplot := plot(f(t),t=0..1, y=0.5..2.5, legend="originele
functie", color="black", thickness=3):
f1plot := plot(f(t+1), t=-1..0,color=blue, legend="uitbreiding
1", linestyle="dash", thickness=3):
f2plot := plot(f(abs(t)), t=-1..0,color=green, legend=
"uitbreiding 2", linestyle="dash", thickness=3):
display(fplot, f1plot, f2plot);
```

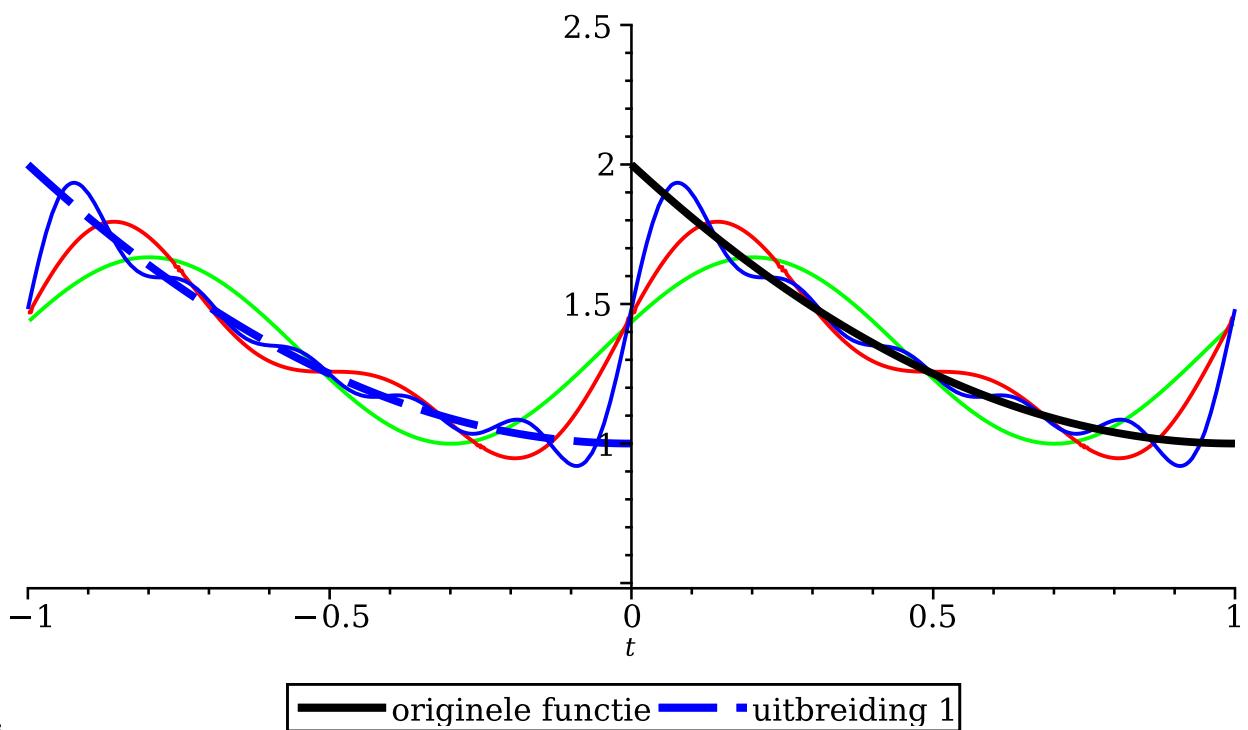


Fourier uitbreidings 1

```

> a01 := simplify(int(f(t+1), t=-L..0) + int(f(t), t=0..L));
> a1 := k->int(f(t+1)*cos(k*t*Pi/L), t = -L .. 0)/L+int(f(t)*cos(k*t*Pi/L), t = 0 .. L);
b1 := k->int(f(t+1)*sin(k*t*Pi/L), t=-L..0)/L+int(f(t)*sin(k*t*Pi/L), t = 0 .. L);
> F1 := (t, N) -> a01/2+sum(a1(k)*cos(k*Pi*t/L)+b1(k)*sin(k*Pi*t/L), k = 1 .. N);
> p1 := plot({F1(t,2),F1(t,5),F1(t,10)}, t=-L..L, color=[green, red, blue]);
display(p1, fplot, f1plot);

```



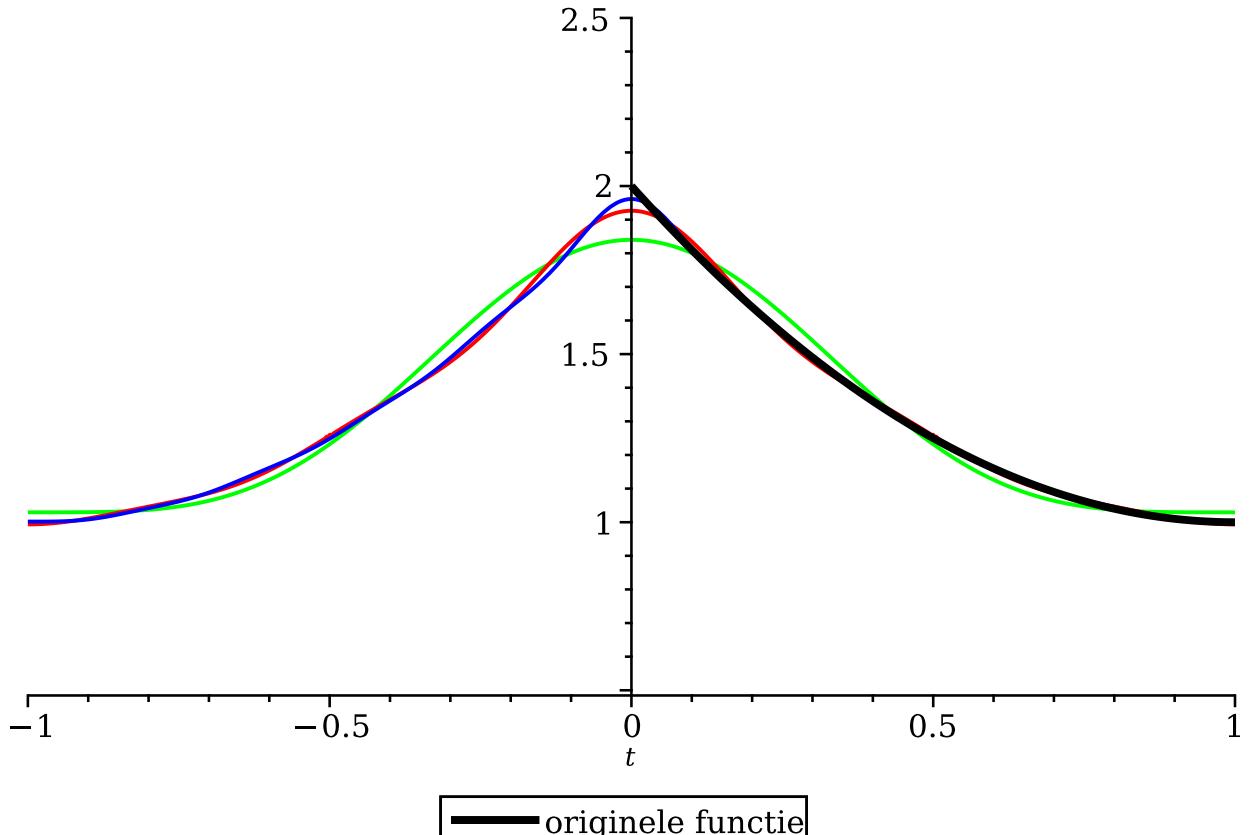
— originele functie — uitbreidings 1

Fourier uitbreiding 2

```

> a02 := simplify(int(f(abs(t)), t=-L..0) + int(f(t), t=0..L)):
> a2 := k->int(f(abs(t))*cos(k*t*Pi/L), t = -L .. 0)/L+int(f(t)*
  cos(k*t*Pi/L), t = 0 .. L)/L:
  b2 := k->int(f(abs(t))*sin(k*t*Pi/L), t=-L..0)/L+int(f(t)*sin
  (k*t*Pi/L), t = 0 .. L)/L:
> F2 := (t, N) -> a02/2+sum(a2(k)*cos(k*Pi*t/L)+b2(k)*sin(k*Pi*
  t/L), k = 1 .. N):
> p2 := plot({F2(t,2),F2(t,5),F2(t,10)}, t=-L..L, color=[green,
  red, blue]):
  display(p2, fplot);

```



Fourier uitbreiding 3

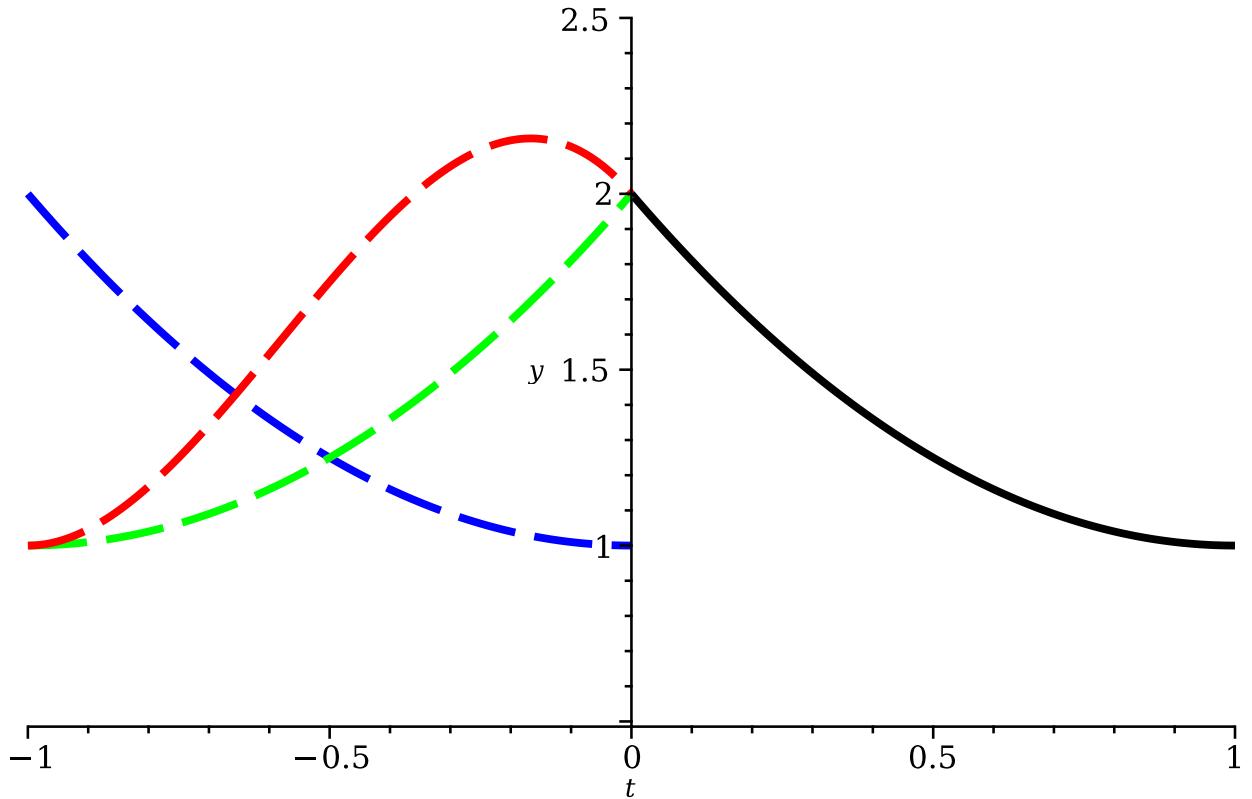
Bepaling $g(t)$:

$$> g := t \rightarrow a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d; \quad g := t \mapsto a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d \quad (3.2)$$

$$> \text{sols} := \text{solve}(\{g(0) = f(0), g(-1) = f(1), D(g)(0) = D(f)(0), D(g)(-1) = D(f)(1)\}, \{a, b, c, d\}); \quad \text{sols} := \{a = -4, b = -7, c = -2, d = 2\} \quad (3.3)$$

$$> g_{\text{sol}} := t \rightarrow \text{subs}(\text{sols}, g(t)); \quad g_{\text{sol}} := t \mapsto \text{subs}(\text{sols}, g(t)) \quad (3.4)$$

```
> gplot := plot(g_{sol}(t), t=-1..0, color=red, legend="uitbreiding
3", linestyle="dash", thickness=3):
display(fplot, f1plot, f2plot, gplot);
```

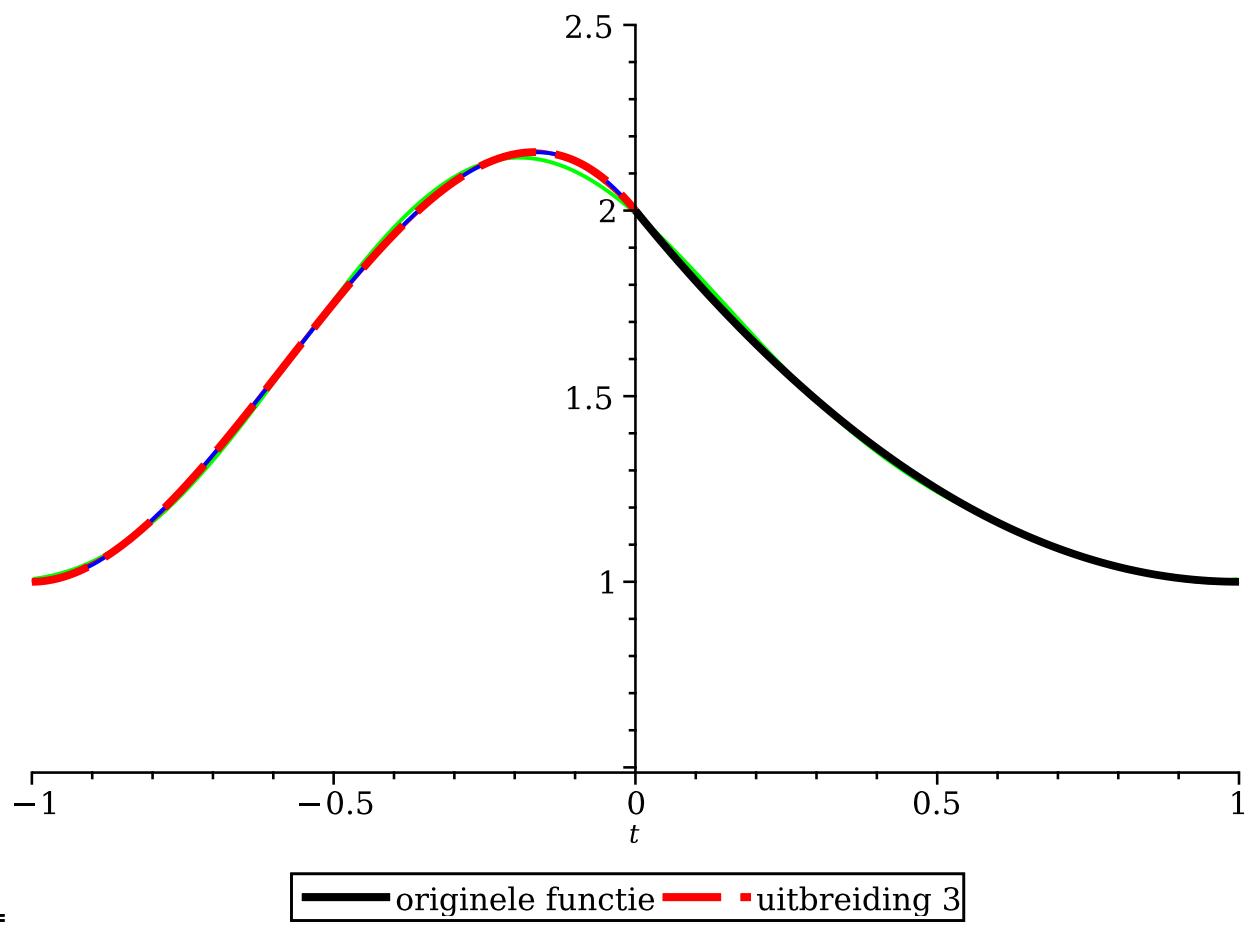


	originele functie	uitbreidung 1	uitbreidung 2
	uitbreidung 3		

```

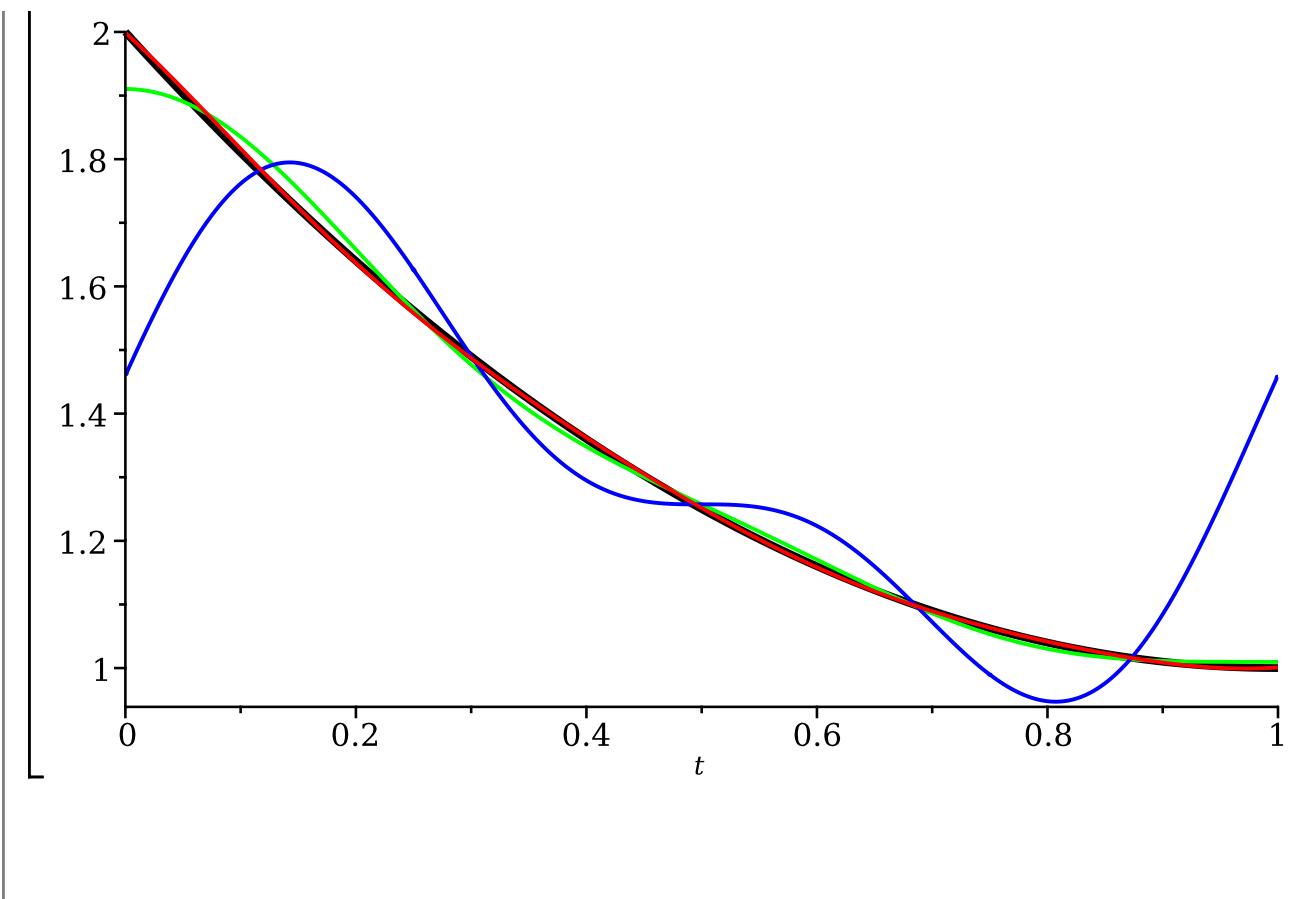
> a03 := simplify(int(g_sol(t), t=-L..0) + int(f(t), t=0..L));
> a3 := k ->int(g_sol(t)*cos(k*t*Pi/L), t = -L .. 0)/L+int(f(t)*
  cos(k*t*Pi/L), t = 0..L)/L;
  b3 := k->int(g_sol(t)*sin(k*t*Pi/L), t=-L..0)/L+int(f(t)*sin
  (k*t*Pi/L), t = 0..L)/L;
> F3 := (t, N) -> a03/2+sum(a3(k)*cos(k*Pi*t/L)+b3(k)*sin(k*Pi*
  t/L), k = 1 .. N);
  F3 := (t, N) -> 
$$\frac{a03}{2} + \sum_{k=1}^N \left( a3(k) \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot t}{L}\right) + b3(k) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot t}{L}\right) \right)$$
 (3.5)
> p3 := plot({F3(t,2),F3(t,5),F3(t,10)}, t=-L..L, color=[green,
  red, blue]):
  display(p3, fplot, gplot);

```



Vergelijking

```
> plot({f(t), F1(t,4), F2(t,4), F3(t,4)}, t=0..L, color=[black, green, blue, red], thickness=[3.5,1,1,1])
```



► Oefening 3:

► Oefening 5:

Werkbaar en uitbreide vinden dat $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)$
 $L \in [0, L]$

$$f_F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

We willen $\begin{cases} a_m = 0 \\ b_m \neq 0 \end{cases}$, we willen ook $L = 4L$

$$f_R(x) = \sum b_m \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right)$$

$$\text{met } b_m = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} f_R(x) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) dx$$

if $m \neq 0$ $b_m = 0$! Because these sinus terms are multiples of

$$\begin{aligned} b_{2m+1} &= \frac{1}{2L} \int_{-2L}^{2L} f_F(x) \cdot \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} f_F(x) \cdot \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L f_F(x) \cdot \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) dx \end{aligned}$$

dus:

1) we breiden van $[0, L]$ naar $[-2L, 2L]$ en uitbreiden

$$T = 4L$$

2) we introduceren via $x \geq 0$ zodat alle cosinus wegvalt
 (omdat)

3) we introduceren even voor $x = L$ omdat de even sinus wegvalt.

4) En uitleggen wel b_{2m+1} via de symmetrie eigenschap.

Figure 9.106: Exercise 3

- We beginnen met discrete samples te schrijven in exponentiële vorm

$$x_n = \frac{e^{2\pi i \frac{f}{f_s} n} + e^{-2\pi i \frac{f}{f_s} n}}{2}$$

zodat

$$\begin{aligned}\tilde{x}_k &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i \frac{f}{f_s} n} + e^{-2\pi i \frac{f}{f_s} n} \right) e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i (\frac{f}{f_s} - \frac{k}{N}) n} + e^{-2\pi i (\frac{f}{f_s} + \frac{k}{N}) n} \right)\end{aligned}$$

In de volgende stap kunnen we gebruik maken van de formule voor de partieelsom

$$\sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

4

$$\begin{aligned}\tilde{x}_k &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \left(\frac{1 - e^{2\pi i (N \frac{f}{f_s} - k)}}{1 - e^{2\pi i (\frac{f}{f_s} - \frac{k}{N})}} + \frac{1 - e^{-2\pi i (N \frac{f}{f_s} + k)}}{1 - e^{-2\pi i (\frac{f}{f_s} + \frac{k}{N})}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \left(\frac{e^{\pi i (N \frac{f}{f_s} - k)} e^{-\pi i (N \frac{f}{f_s} - k)} - e^{\pi i (N \frac{f}{f_s} - k)}}{e^{\pi i (\frac{f}{f_s} - \frac{k}{N})} e^{-\pi i (\frac{f}{f_s} - \frac{k}{N})} - e^{\pi i (\frac{f}{f_s} - \frac{k}{N})}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-\pi i (N \frac{f}{f_s} + k)} e^{\pi i (N \frac{f}{f_s} + k)} - e^{-\pi i (N \frac{f}{f_s} + k)}}{e^{-\pi i (\frac{f}{f_s} + \frac{k}{N})} e^{\pi i (\frac{f}{f_s} + \frac{k}{N})} - e^{-\pi i (\frac{f}{f_s} + \frac{k}{N})}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \left(\frac{e^{\pi i (N \frac{f}{f_s} - k)} \sin(\pi(N \frac{f}{f_s} - k))}{e^{\pi i (\frac{f}{f_s} - \frac{k}{N})} \sin(\pi(\frac{f}{f_s} - \frac{k}{N}))} + \frac{e^{-\pi i (N \frac{f}{f_s} + k)} \sin(\pi(N \frac{f}{f_s} + k))}{e^{-\pi i (\frac{f}{f_s} + \frac{k}{N})} \sin(\pi(\frac{f}{f_s} + \frac{k}{N}))} \right)\end{aligned}$$

Wanneer we algemeen

$$f = l \frac{f_s}{N}$$

(met l hier nog $\in \mathbb{R}$) invullen vinden we

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{2\sqrt{N}} \left(\frac{e^{\pi i (l-k)} \sin(\pi(l-k))}{e^{\frac{\pi}{N} i (l-k)} \sin(\frac{\pi}{N}(l-k))} + \frac{e^{-\pi i (l+k)} \sin(\pi(l+k))}{e^{-\frac{\pi}{N} i (l+k)} \sin(\frac{\pi}{N}(l+k))} \right)$$

Deze uitdrukking is geldig voor alle frequenties f .

Figure 9.107: Exercise 4 Part 1

- Als volgt nemen we $l \in \mathbb{Z}$ en bepalen \tilde{x}_k . We hebben een som van 2 termen. De teller van elk van deze termen wordt steeds 0, aangezien $l, k \in \mathbb{Z}$. De noemer is verschillend van 0 voor $l \neq k$.
- Wanneer

$$\begin{aligned} k = l & \quad \text{of} \quad & k = -l \bmod N \\ & & = N - l \end{aligned}$$

wordt de noemer van eerste of tweede term ook 0. We krijgen het onbepaalde geval $\frac{0}{0}$, wat verder uitgewerkt kan worden door bv. de limiet te nemen, l'Hôpital toe te passen of de Taylor ontwikkeling rond 0 in zowel teller als noemer in te vullen. We vinden dan

$$\tilde{x}_k = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{\sqrt{N}}{2} & k = l \\ \frac{\sqrt{N}}{2} & k = N - l \end{cases}$$

Dit laatste resultaat is ook nog op een andere, eenvoudigere, manier af te leiden. De samples voldoen aan

$$\begin{aligned} x_n &= \cos\left(2\pi \frac{f}{f_s} n\right) \\ &= \cos\left(2\pi \frac{l}{N} n\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{\sqrt{N}}{2} e^{2\pi i \frac{l}{N} n} + \frac{\sqrt{N}}{2} e^{-2\pi i \frac{l}{N} n} \right) \end{aligned}$$

Zodat we onmiddelijk de coëfficiënten $\tilde{x}_{k=l}$ en $\tilde{x}_{k=N-l}$ kunnen aflezen. Al de andere coëfficiënten zijn 0.

ie werkcollege voor verificatie met Maple.

Figure 9.108: Exercise 4 Part 2

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2}, f(\alpha) = \underbrace{\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}_{\text{even function. } (b_m=0)}, -\pi < \alpha < \pi$$

$$e_m = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cdot \cos \left(\frac{m\pi \alpha}{2\pi} \right) \cdot d\alpha$$

we can see that $a_{2m}=0$!

\therefore

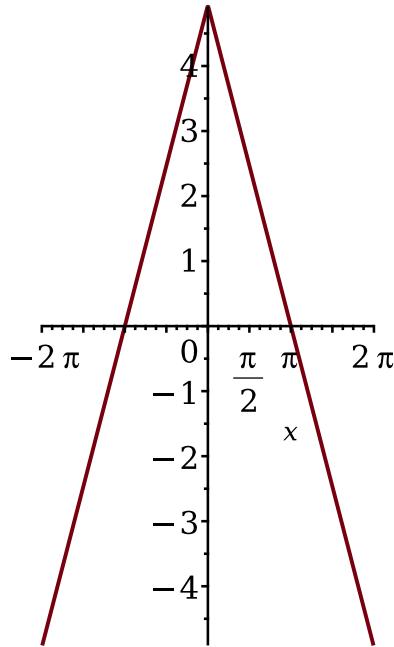
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2} = \frac{\pi^2}{2}$$

Figure 9.109: Exercise 5

```
> restart:
```

```
> f := x ->  $\frac{\pi^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{\text{abs}(x)}{\text{Pi}}\right)$ :
```

```
> plot(f(x), x = -2·Pi..2·Pi)
```



```
> a := n ->  $\frac{1}{2 \cdot \text{Pi}} \cdot \text{int}\left(f(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot x}{2}\right), x = -2 \cdot \text{Pi}..2 \cdot \text{Pi}\right)$   
a := n -> 
$$\frac{\int_{-2 \cdot \pi}^{2 \cdot \pi} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot x}{2}\right) dx}{2 \cdot \pi}$$

```

(1)

```
> a(0)
```

$$0$$

(2)

```
> a(1)
```

$$4$$

(3)

```
> a(2)
```

$$0$$

(4)

```
> a(3)
```

$$\frac{4}{9}$$

(5)

```
> odd_a := simplify(a(2·n + 1) assuming (n, posint))
```

$$odd_a := \frac{4}{(2n+1)^2}$$

(6)

```
> f_approx := evalf(add(odd_a · cos(n · x / 2), n = 0 .. 1000)):
```

```
> simplify(subs(x = 0, f_approx))
```

```
| 4.933803198 (7)
|> evalf( π² )
| 4.934802202 (8)
|=
```

9.9.4 Exams

The def for DFT is:

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{i 2 \pi k n}{N}}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \tilde{x}_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\sin(\omega n \Delta t)}_{e^{i \omega n \Delta t}} e^{-\frac{i 2 \pi k n}{N}} \\ &\quad \frac{e^{i \omega n \Delta t} - e^{-i \omega n \Delta t}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{N}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{i(\omega n \Delta t - \frac{2\pi k}{N})n} - e^{-i(\omega n \Delta t + \frac{2\pi k}{N})n} \right) e^{-\frac{i 2 \pi k n}{N}} \\ &= " \left(e^{i(\omega \Delta t - \frac{2\pi k}{N})n} - e^{-i(\omega \Delta t + \frac{2\pi k}{N})n} \right) \end{aligned}$$

we get
 $\sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1-z^N}{1-z}$

thus: $\tilde{x}_k = \frac{1}{2i\sqrt{N}} \cdot \left(\frac{1-z^N}{1-z} - \frac{1-\bar{z}^N}{1-\bar{z}} \right)$

set $\alpha = \omega \Delta t - \frac{2\pi k}{N}$, $\beta = \omega \Delta t + \frac{2\pi k}{N}$

$z_1 = e^{i\alpha}$, $z_2 = e^{-i\beta}$

$$\therefore \tilde{x}_k = \frac{1}{2i\sqrt{N}} \cdot \left(\frac{1 - e^{\frac{i\alpha N}{2}}}{1 - e^{i\alpha}} - \frac{1 - e^{\frac{-i\beta N}{2}}}{1 - e^{-i\beta}} \right)$$

Remember: $1 - e^{\frac{i\alpha N}{2}} = e^{\frac{i\alpha N}{2}} \left(-\frac{e^{\frac{i\alpha N}{2}} - 1}{e^{\frac{i\alpha N}{2}}} \right) = e^{\frac{i\alpha N}{2}} \cdot (-2i \cdot \sin(\frac{\alpha N}{2}))$

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\frac{i\beta N}{2}} &= e^{-\frac{i\beta N}{2}} \cdot \left(\frac{-e^{-\frac{i\beta N}{2}} + e^{-\frac{i\beta N}{2}}}{e^{-\frac{i\beta N}{2}}} \right) \\ &= e^{-\frac{i\beta N}{2}} \cdot (-2i \cdot \sin(\frac{\beta N}{2})) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_k = \frac{1}{2i\sqrt{N}} \cdot \left(\frac{e^{\frac{i\alpha N}{2}} \cdot \sin(\frac{\alpha N}{2})}{e^{\frac{i\alpha N}{2}} \cdot \sin(\frac{\alpha N}{2})} - \frac{e^{\frac{i\beta N}{2}} \cdot \sin(\frac{\beta N}{2})}{e^{\frac{i\beta N}{2}} \cdot \sin(\frac{\beta N}{2})} \right)$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{N}} \cdot \left(\frac{e^{\frac{i\alpha}{2} \cdot (N-1)} \cdot \sin(\frac{\alpha \cdot N}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})} - \frac{e^{\frac{i\beta}{2} \cdot (N-1)} \cdot \sin(\frac{\beta \cdot N}{2})}{\sin(\frac{\beta}{2})} \right)$$

9.10 Week 10

9.10.1 WC

$$A) \quad \int f(u) + \int f(u) = \int u^2 u$$

condition

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$u(\alpha, 0) = f(x)$$

$$\frac{du}{dt} (\alpha, 0) = g'(x)$$

dt

Scheiding van variabelen.

$$u(u, t) = X(u) \cdot T(t)$$

$$\Rightarrow T'' X + T' X = X'' T \quad \left. \begin{array}{l} \text{dus door } \frac{1}{T} \\ \text{dus } \frac{T''}{T} + \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} \end{array} \right\} \begin{array}{l} T'' + T' = \sigma \cdot T \\ X'' = X \cdot \sigma \end{array}$$

en nu $X(x)$

$$\alpha \in 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \alpha = \pi, \text{ d.h. we kunnen } \alpha = \sin(m\pi x)$$

$$\Rightarrow \text{als } \alpha = 0 \Rightarrow \sin(\alpha) = 0, \sin \alpha = 1 \Rightarrow \sin(0) = 0$$

$$\text{dus: } \int f \sin(m\pi x) = \sin(m\pi x) \cdot \sigma$$

$$\Leftrightarrow -(\pi m)^2 \cdot \sin(m\pi x) = \sin(m\pi x) \cdot \sigma$$

$$\Leftrightarrow \sigma = -(\pi m)^2$$

nu $T(t)$

$$T'' + T' = \sigma \cdot T$$

$$\Leftrightarrow T'' + T' + (\pi m)^2 \cdot T = 0$$

$$\Rightarrow z^2 + z + (\pi m)^2 = 0 \rightarrow \text{Via Maple } \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{4m^2\pi^2 + 1}}{2}$$

$$\Rightarrow T(m) = c_m \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{4m^2\pi^2 + 1}}{2}t\right) + f_m \cdot e^{-\frac{1}{2}it} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4m^2\pi^2 + 1}}{2}t\right)$$

Algemene oplossing:

$$u_p(u, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(n_m \cdot e^{i\pi m t} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{4m^2\pi^2 + 1}}{2}t\right) + f_m \cdot e^{-i\pi m t} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4m^2\pi^2 + 1}}{2}t\right) \right) \sin(m\pi x)$$

Vervolgen algemene oplossing vinden we c_m en f_m .

→ we kiezen nu beginvoorwaarden:

$$1) \quad u(x, 0) = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} n_m \cdot \sin(m\pi x). \text{ Gebruik orthogonale relatie}$$

om dit te bewijzen.

$$\int_0^1 f(x) \cdot \sin(m\pi x) \cdot dx \Leftrightarrow \left[n_m \cdot e^{i\pi m t} \cdot \sin(m\pi x) \right]_0^1$$

$$2) \quad \int_0^1 g(u, 0) \approx g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} n_m + f_m \cdot \sqrt{\frac{4m^2\pi^2 + 1}{2}} \right) \sin(m\pi x)$$

$$\Leftrightarrow g(x) + \frac{1}{2} f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \cdot \sin(m\pi x)$$

(a), integreer en vermenigvuldig met $\sin(m\pi x)$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 g(x) + \frac{1}{2} f(x) \sin(m\pi x) \cdot dx = f_m \cdot \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{4m^2\pi^2 + 1}} \cdot \int_0^1 \left(g(x) + \frac{1}{2} f(x) \right) \sin(m\pi x) \cdot dx = f_m$$

$\sin(m\pi x), m \in \mathbb{N}$
 $= \frac{1}{2} (2\pi)$ orthogonale
 relatie!

$$2) \text{ warmtevgl. } J + u(x,t) = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

— conditions

$$\begin{cases} u(0,t) = T_0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \quad u(x,t) = u_p(x) + u_h(x,t)$$

— schetsing der veranderlijken.

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{T'}{T} = \alpha^2 \cdot \frac{X''}{X}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T'}{T} = \alpha^2 \cdot \frac{x''}{x} \Rightarrow \begin{cases} T' = \alpha^2 \cdot \sigma \cdot T \\ x'' = \sigma \cdot x \end{cases}$$

— zoek eerst homogene oplossing.

$$x'' = \sigma \cdot x, \text{ vindt } 1/20 \text{ hebben we kunnen, recht dividieel.}$$

dus berekent gevallen van σ .

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sigma} \cdot x + C_1 = C_2 \cdot e^{-\sqrt{\sigma} x}$$

$$\Leftrightarrow \sigma > 0 : X_1(x) = C_1 \cdot e^{-\sqrt{\sigma} x} + C_2 \cdot e^{\sqrt{\sigma} x}$$

$$\Leftrightarrow \sigma = 0 : X_2(x) = C_1 + C_2 x$$

$$\Leftrightarrow \sigma < 0 : X_3(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\sigma} x) + C_2 \sin(\sqrt{-\sigma} x) \text{ met } \sqrt{-\sigma} = -\sigma$$

Voor $X_1(x)$ en $X_2(x)$ zijn C_1 en $C_2 = 0$ voor de randvoorwaarden!

$$\text{Voor } X_3(x), \text{ vinden we dan } \sigma = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \text{ dus } \sigma = L$$

$$X_3(x)|_{x=L} \Rightarrow C_2 \cdot L \cdot \cos(\sqrt{-\sigma} L) = 0 \quad (\sigma \neq 0) \quad \text{Neemmen dus } C_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Via voorstelling } k = \frac{\pi}{L} \cdot (n+1) \text{ specific conditions}$$

$$\rightarrow \text{dus } k = -\sigma \quad \alpha_m = \min\left(\frac{\pi}{L} \cdot (n+1)\right) \propto$$

$$\rightarrow -\left(\frac{\pi}{L} \cdot (n+1)\right)^2 = \sigma$$

$$\text{Stel dit in: } -\left(\alpha \frac{\pi}{L} \cdot (n+1)\right)^2$$

$$T' = e^{\alpha^2 \cdot \sigma \cdot t} \Rightarrow T_m = C$$

de algemene homogene oplossing is dan $\left(\begin{array}{l} \text{want hier kan elke sm} \\ 0 \end{array} \right)$

$$u_p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\left(\alpha \frac{\pi}{L} \cdot (n+1)\right)^2 + \right] \cdot \min\left(\frac{\pi}{L} \cdot (n+1) \propto\right)$$

Nu kijken we naar niethomogeniteit:

$$u(0,t) = T_0$$

$$\Rightarrow u(L,t) = 0 \quad (\text{insulated boundary})$$

st

$$\text{oneig oplossing is } u(x,t) = u_h(x,t) + u_p(x)$$

dus we zeggen A + Bx

$$\rightarrow u_h(0) = T_0 \text{ dus } A + B(0) = T_0 \Rightarrow A = T_0$$

$$\rightarrow u_h'(L) = 0 \rightarrow \frac{d}{dx}(A + Bx) = B = 0$$

$$\text{dus } u_h(x) = T_0$$

Dus totale oplossing:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\left(\alpha \frac{\pi}{L} \cdot (n+1)\right)^2 + \right] \cdot \min\left(\frac{\pi}{L} \cdot (n+1) \propto\right) + T_0 = u(x,t)$$

— zoek nm

$$\text{welkere dat } u(x,t) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} n_m \cdot \min\left(n\right) + T_0$$

$$\Leftrightarrow g(x) - T_0 = \sum_{m=1}^{\infty} n_m \cdot \min\left(n\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^L (g(x) - T_0) \min\left(n\right) dx = n_m \cdot \frac{L}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \int_0^L (g(x) - T_0) \min\left(n\right) dx = n_m$$

— limiet.

$$\text{als } f \rightarrow \infty \text{ dan neigt } T_0 \text{ naar } 0!$$

9.10.2 Bord

9.10.3 Huis

$$u(\alpha, t) = f(\lambda) \\ = \lambda \cos^2 \frac{\pi \alpha}{2l}, \quad 0 < \alpha < l$$

i) want to solve: $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}$ isolated diff.: $\frac{\partial u}{\partial x}|_{\alpha=0} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}|_{\alpha=l} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u(\alpha, t) \cdot d\alpha \\ = \int_0^l \frac{\partial u(\alpha, t)}{\partial t} \cdot d\alpha = \int_0^l \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \cdot d\alpha = 0$$

iii) we need to reach equilibrium

$$\int_0^l T_c \cdot d\alpha = T_c \cdot l \rightarrow \text{mod. diff. eqn. form} \int_0^l f(\alpha) \cdot d\alpha$$

$\Rightarrow T_c \cdot l = \frac{3}{2}l \Rightarrow T_c = \frac{3}{2}$

iv) 1) Separation of variables:

$$u(\alpha, t) = \alpha(\alpha) \cdot T(t)$$

$$\Rightarrow 1) \frac{\partial T}{\partial t} + \lambda^2 T = 0$$

$$\left(1) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \alpha = 0 \text{ met } \lambda^2 = \frac{l^2}{\alpha^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \lambda^2 \alpha = 0 \rightarrow \alpha(\alpha) = A \cos(\lambda \alpha) + B \sin(\lambda \alpha)$$

if $\alpha = 0$: $\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = -A \lambda \sin(\lambda \alpha) + B \lambda \cos(\lambda \alpha)$
 $\Rightarrow B \lambda = 0 \Rightarrow B = 0$

if $\alpha = l$: $\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha}|_{\alpha=l} = -A \lambda \sin(\lambda l) = 0$

on dat $\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha}|_{\alpha=l} = 0 \Rightarrow \sin(\lambda l) = 0 \Rightarrow \lambda l = n \cdot \pi \Rightarrow \lambda = \frac{n \cdot \pi}{l}$

$$\alpha(\alpha) = A \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot \alpha}{l}\right)$$

now for: $\frac{\partial T}{\partial t} + \lambda^2 T = 0$ (eertste orde diff. vgl.)

$$\Rightarrow T(t) = C \cdot e^{-\lambda^2 t} \quad \text{met } \lambda^2 = \alpha^2 k^2 = \alpha^2 \cdot \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \\ \Rightarrow T(t) = C \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t}$$

algemeen oplossing in diff.:

$$u(\alpha, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot \alpha}{l}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l f(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}\right) dx, \quad \text{met } f(x) = 3 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

$$= 6 \cdot \cos\left(\frac{\pi \alpha}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi \alpha}{l}\right) \quad \text{met } A_n =$$

$$\frac{1}{l} \int_0^l f(x) \cdot dx = \frac{3}{2}$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) &= 0 & \int_0^L u(x, 0) = \sin^2(\pi x) \cos(L\pi x) \\ \int_0^L u(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

$$u(x, L) = X(x) \cdot T(t)$$

$$\text{jetzt Vgl: } \int_0^L u(x, t) = C^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

$$\begin{aligned} \therefore T''(x) &= C^2 \cdot X''(T) \\ \Leftrightarrow T'' &= C^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} X \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T'' = C^2 \cdot L \cdot T \\ X'' = x \cdot L \end{array} \right\} \end{aligned}$$

homogene ODERES:

$$\begin{aligned} X'' &= x \cdot L, L \text{ heißt } 3 \text{ gewählt:} \\ X(x) &= A \cos(\sqrt{L} x) + B \sin(\sqrt{L} x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'(0) &= 0 \Leftrightarrow B = 0 \\ X'(L) &= 0 \Leftrightarrow -A \sin(\sqrt{L} x) = 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{L} &= m \cdot \pi \\ \Leftrightarrow L &= (m\pi)^2 \\ \rightarrow X_m &= \cos(m\pi x) \quad c = ?! \end{aligned}$$

$$T'' = C^2 \cdot (m\pi)^2 \cdot T$$

$$T_m = n_m \cdot \cos(m\pi x) + t_m \cdot \sin(m\pi x)$$

$$\begin{aligned} u_g(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos(m\pi x) \cdot (n_m \cdot \cos(m\pi t) + t_m \cdot \sin(m\pi t)) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos(m\pi x) \cdot (n_m \cdot \cos(m\pi t) + t_m \cdot \sin(m\pi t)) \end{aligned}$$

find n_m und t_m .
 $n_m = 0$ durch die linke Welle.

$$\text{daraus: } u_h(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos(m\pi x) \cdot (t_m \cdot \sin(m\pi t))$$

$$\int_0^L u_h(x, 0) = \sin^2(\pi x) \cos(L\pi x)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \underbrace{\sin^2(\pi x) \cdot \cos(L\pi x)}_{g(x)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos(m\pi x) \cdot t_m \cdot m\pi \\ \Leftrightarrow g(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos(m\pi x) \cdot t_m \cdot m\pi \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 g(x) \cdot \cos(m\pi x) \cdot dx = t_m \cdot m\pi \cdot \frac{1}{L}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi\pi} \cdot \int_0^1 g(x) \cdot \cos(m\pi x) \cdot dx = t_m$$

$$\Leftrightarrow t_m = -\frac{4 \cdot \sin(m\pi) \cdot (m^2 + 8)}{m^2 \pi^2 (m^4 - 4m^2 + 64)}$$

9.10.4 Exams

$$3) \quad \int_0^L u(x,t) + j \cdot u(x,t) = \int_0^L u(x,t)$$

conditions

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ \int_0^L u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ \int_0^L u(x,0) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right)^3 \end{cases}$$

Schreitung der Veränderlichen:

$$\begin{aligned} T''x + T' \alpha &= x''^T \\ \Leftrightarrow \frac{T''}{T} + \frac{T'}{T} &= \frac{x''}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T'' + T' = T \cdot \alpha \\ x'' = \alpha \cdot \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

sucht $x(\alpha)$:

$$x'' = \alpha \cdot \alpha \quad \begin{cases} u(0,t) = 0 \quad (1) \\ \int_0^L u(L,t) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Die einzige nicht triviale Lösung ist:

$$x(\alpha) = c_1 \cdot \cos(kx) + (2 \cdot \sin(kx)) \text{ und } k = -\alpha$$

$$(1) \quad c_1 = 0 \rightarrow \text{trivial}$$

$$(2) \quad c_2 \cdot k \cdot \cos(kL) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(kL) = 0 \quad \stackrel{\text{via Menge}}{\Rightarrow} \quad k = \frac{\pi}{L} \cdot (2m+1)$$

$$\alpha = -\left(\frac{\pi(2m+1)}{L}\right)^2 \quad x_m(x) = \sin\left(\frac{\pi(2m+1)}{L}x\right)$$

$$T_m(t) \Leftrightarrow T'' + T' - T \cdot \alpha^2 = 0$$

$$T_m(t) = e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}} \left(\frac{\sqrt{-4k^2+1}}{2} + t \cdot \frac{\sqrt{-4k^2+1}}{2} \right)$$

$$= e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}} \cdot \left(nm \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{-4k^2+1}}{2}t\right) + t \cdot m \cos\left(\frac{\sqrt{-4k^2+1}}{2}t\right) \right)$$

$$u_R(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}} \cdot \left(nm \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{-4k^2+1}}{2}t\right) + t \cdot m \cos\left(\frac{\sqrt{-4k^2+1}}{2}t\right) \right) \right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{L}(2m+1)x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{L}(2m+1)x\right)}$$

Vierat n_m, t_m

$$u(x,0) = \sum_{m=0}^{\infty} t_m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L}(2m+1)x\right) = 0$$

$$\Rightarrow t_m = 0$$

$$\int_0^L u(x,0) \Leftrightarrow \left(\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right)^3 = \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot nm \cdot \sqrt{\frac{-4k^2+1}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L}(2m+1)x\right)$$

$$\Leftrightarrow -4 \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right)^3 = \sum_{m=0}^{\infty} nm \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L}(2m+1)x\right)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{\sqrt{-4k^2+1}}} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)^3}_{\text{mehr}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L}(2m+1)x\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{1}\right)}_{\text{gleich effekt.}} = nm$$

$$\Rightarrow nm = \dots$$

Bei $t \rightarrow \infty \Rightarrow$ dämpfend dominante endliche Kraft.

```
[> restart: with(LinearAlgebra) : with(plots) : with(plottools) :  
with(VectorCalculus) : SetCoordinates(cartesian[x, y, z]) :
```

```
[>  
[> eq := diff(T(t), t$2) + diff(T(t), t$1) + k^2 · T(t) = 0 :  
[> sol := simplify(dsolve(eq))  
sol := T(t) = c1 e $\frac{(-1 + \sqrt{-4 k^2 + 1}) t}{2}$  + c2 e $-\frac{(1 + \sqrt{-4 k^2 + 1}) t}{2}$  (1)  
[>
```

9.11 Week 11

9.11.1 Bord

- 2) 1. we gaan eerst van α -ruimte naar k -ruimte
 2. we vinden de oplossing in de k -ruimte.
 3. we transformeren terug naar α -ruimte

$$J_t \hat{\varphi}(x,t) = \tilde{D} \cdot J_x^2 \hat{\varphi}(x,t) - k^2 \tilde{D} \hat{\varphi}(x,t)$$

$$\rightarrow \hat{\varphi}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(k,t) \cdot e^{ikx} \cdot dk$$

inverse Fourier Transform

we use:

$$J_x^2 \hat{\varphi}(x,t) \rightarrow -k^2 \hat{\varphi}(k,t)$$

$$\hat{\varphi}(x,t) \rightarrow \hat{\varphi}(k,t)$$

$$\rightarrow J_t \hat{\varphi}(x,t) = -D \cdot [k^2 + k^2] \hat{\varphi}(k,t)$$

\rightarrow lineaire diff vgl:

$$\hat{\varphi}(k,t) = e^{-Dt} \cdot e^{-Dk^2 t} \cdot \hat{\varphi}(k,0)$$

mo. $e^{-\frac{Dk^2 t}{2}} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi}$

\downarrow
 invert thing back
 α -ruimte

$$\varphi(x,t) = m_0 \cdot \sigma \cdot \exp(-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt})$$

$$\sqrt{4\pi Dt + \sigma^2}$$

```

[> restart: with(inttrans): assume(t > 0): assume(sigma > 0): assume(d > 0):
[> initial := n0·exp(-x^2/σ^2):
[> phi0 := simplify(fourier(initial, x, k))

$$\phi_0 := n_0 e^{-\frac{k^2 \sigma^2}{4}} \quad \sigma \sim \sqrt{\pi} \quad (1)$$

[> PHI := exp(-d·k^2·t)·exp(-d·K^2·t)·phi0

$$PHI := e^{-d k^2 t} e^{-d K^2 t} n_0 e^{-\frac{k^2 \sigma^2}{4}} \quad \sigma \sim \sqrt{\pi} \quad (2)$$

[> simplify(invfourier(PHI, k, x))

$$\frac{n_0 \sigma e^{\frac{-4 K^2 d^2 t^2 - K^2 d \sigma^2 t - x^2}{4 d t + \sigma^2}}}{\sqrt{4 d t + \sigma^2}} \quad (3)$$

[>

```

9.11.2 WC

$$\int \hat{J}^2 \cdot \varphi(\alpha, t) - c^2 \int_{\alpha}^2 \varphi(\alpha, t) = 0$$

1. Fouriertransform :

- $\int_{\alpha}^2 \cdot \varphi(\alpha, t) \rightarrow -k^2 \cdot \hat{\varphi}(k, t)$

- $\int \hat{J}^2 \varphi(\alpha, t) \rightarrow \int \hat{\varphi}^2(k, t)$

$$\rightarrow \int \hat{\varphi}^2 + c^2 \cdot k^2 \cdot \hat{\varphi}(k, t) = 0 \quad (\text{müssen wir Fouriertransformiert})$$

↳ - the basic formula is

$$\hat{\varphi}(k, t) = a(k) \cdot \cos(c k t) + b(k) \cdot \sin(c k t)$$

$$J \hat{J} \varphi(k, t)$$

$$R \cdot c$$

= Vn allein in

↳ inverse Fourier.

= Zie nepte

$$J \hat{J} = -c k \cdot a(k) \cdot \sin(0)$$

$$+ c k \cdot b(k) \cdot \cos(0)$$

$$(\Rightarrow c k \cdot b(k) = \dots)$$

```

> restart: with(inttrans): assume(t > 0): assume(sigma > 0): assume(d > 0):
> # initial conditions
> pde_k := diff(phi_k(t), t$2) + c^2 k^2 phi_k(t) = 0;

$$pde_k := \frac{d^2}{dt^2} \phi_k(t) + c^2 k^2 \phi_k(t) = 0 \quad (1)$$

> sol_k := dsolve(pde_k, phi_k(t));

$$sol_k := \phi_k(t) = c_1 \sin(k c t) + c_2 \cos(k c t) \quad (2)$$

> phi_k_general := c1*cos(k*c*t) + c2*sin(k*c*t);

$$\phi_k_{general} := c_1 \cos(k c t) + c_2 \sin(k c t) \quad (3)$$

> initial_condition_1 := fourier(exp(-x^2/sigma^2), x, k)

$$initial\_condition_1 := e^{-\frac{k^2 \sigma^2}{4}} \sqrt{\pi \sigma^2} \quad (4)$$

> initial_condition_2 := fourier(alpha*x*exp(-x^2/sigma^2), x, k)

$$initial\_condition_2 := \frac{-\frac{1}{2} \alpha \sigma^3 e^{-\frac{k^2 \sigma^2}{4}} \sqrt{\pi}}{c} \quad (5)$$

> full_fourier := simplify(subs([c1 = initial_condition_1, c2 = initial_condition_2], phi_k_general))

$$full\_fourier := -\frac{e^{-\frac{k^2 \sigma^2}{4}} \sqrt{\pi} \sigma (\text{I} \alpha \sigma^2 \sin(k c t) - 2 \cos(k c t) c)}{2 c} \quad (6)$$

> simplify(invfourier(full_fourier, k, x))

$$\frac{e^{\frac{-c^2 t^2 - x^2}{\sigma^2}} \left( \sinh\left(\frac{2 c t - x}{\sigma}\right) \alpha \sigma^2 + 2 \cosh\left(\frac{2 c t - x}{\sigma}\right) c \right)}{2 c} \quad (7)$$


```

9.11.3 Huis

```

[> restart: with(inttrans): assume(K > 0, d > 0, x >= 0):
=> phi_k := Q / (d * (k^2 + K^2)):
=> simplify(invfourier(phi_k, k, x))
      
$$\frac{Q (\text{Heaviside}(x) e^{-K x} - e^{K x} \text{Heaviside}(x) + e^{K x})}{2 d K}$$

]

```

(1)

$$-\Omega \cdot (-k^2) \cdot \hat{q}(k) + k^2 \cdot \Omega \hat{q}(k) = Q$$

$$\Leftrightarrow \Omega [k^2 + k^2] \cdot \hat{q}(k) = Q$$

$$\Leftrightarrow \hat{q}(k) = \frac{\Omega}{\Omega[k^2 + k^2]}$$

(

invented in Maple.

$$f(t) = \begin{cases} e^{(\alpha - \omega)t}, & |t| < \frac{1}{\omega} \\ 0, & |t| > \frac{1}{\omega} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}$$

$$= \int_{-\frac{1}{\omega}}^{\frac{1}{\omega}} dt \cdot (\alpha - \omega |t|) e^{-i\omega t}$$

nach unten in Maple: (update, did it go.)

9.12 Week 12

9.12.1 Bord

$$\left\{ \begin{array}{l} y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0 \quad (1) \\ y(0^+) = 1 \\ y'(0^+) = 1 \end{array} \right.$$

we define:

$$\left\{ \begin{array}{l} L(y'') = n^2 y(n) - ny(n) - y'(0^+) \\ L(y') = ny(n) - y(0) \\ L(y) = y(n) \end{array} \right.$$

$$(1) \quad n^2 y(n) - ny(n) - y'(0^+) + 4(ny(n) - y(0)) + 4y(n) = 0$$

$$+ 4y(n) = 0$$

$$(2) \quad n^2 y(n) - n - n + 4ny(n) - 4 + 4y(n) = 0$$

$$(3) \quad n^2 y(n) + 4ny(n) + 4y(n) - (n+5) = 0$$

$$(4) \quad \frac{n+5}{n^2 + 4n + 4} = y(n) = \stackrel{\text{maple}}{(3t+1)} e^{-2t} \cdot \theta(t)$$

heaviside
function

```

> restart: with(inttrans): with(VectorCalculus):
> eq := 
$$\frac{(s + 5)}{s^2 + 4 \cdot s + 4}$$


$$eq := \frac{s + 5}{s^2 + 4s + 4} \quad (1)$$

> invlaplace(eq, s, t)

$$(3t + 1) e^{-2t} \quad (2)$$

>

```

$$\left\{ \begin{array}{l} A' = -4A \quad (1) \\ B' = 3A - 2B \quad (2) \\ C' = A + 2B \quad (3) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow n \cdot A(n) - A_0 = -4A(n)$$

$$\Leftrightarrow A(n) = \frac{A_0}{n+4}$$

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow n \cdot B(n) - B_0 = 3 \cdot A(n) - 2 \cdot B(n)$$

$$\Leftrightarrow B(n) = \frac{3A(n)}{n+2} = \frac{3A_0}{(n+4)(n+2)}$$

$$\Rightarrow (3) \Leftrightarrow n \cdot C(n) - C_0 = A + 2B$$

$$\Leftrightarrow C(n) = \frac{A(n) + 2B(n)}{n} = \frac{A_0(n+8)}{(n+4)(n+2)n}$$

$$\text{(ii)} \quad C(t) = A_0 \left(1 - \frac{3t}{e^{3t}} (\cos h(t) + 2 \sin h(t)) \right)$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = A_0$$

```

> restart: with(inttrans): with(VectorCalculus):
> A :=  $\frac{AO}{s+4}$ 

$$A := \frac{AO}{s+4} \quad (1)$$

> B :=  $\frac{3 \cdot A}{s+2}$ 

$$B := \frac{3AO}{(s+4)(s+2)} \quad (2)$$

> C := simplify( $\left(\frac{(A+2 \cdot B)}{s}\right)$ )

$$C := \frac{AO(s+8)}{(s+4)(s+2)s} \quad (3)$$

> # We weten C nu in laplace space, convert to time space
> c := invlaplace(C, s, t)

$$c := AO(1 - e^{-3t}(\cosh(t) + 2 \sinh(t))) \quad (4)$$

> # Nu pakken we de limiet van t naar oneindig
> l := limit(c, t = infinity)

$$l := AO \quad (5)$$


```

Wir definieren: $\underbrace{\underline{f}}_{\text{Laplace}} = \underbrace{i\omega}_{\text{Fourier}}$

$$\rightarrow F\left(\frac{e^{bt} \cdot \sin(at) \cdot \Theta(t)}{a}\right)(\omega)$$

$$= L\left(\frac{e^{-bt} \cdot \sin(at) \cdot \Theta(t)}{a}\right)(\omega)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot L\left(e^{-bt} \sin(at)\right)(\omega) \quad \text{Shift}$$

$$= \frac{1}{a} \cdot L \cdot (\sin(at))(\omega + b)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{\omega^2 + (\omega + b)^2} = \frac{1}{\omega^2 + (i\omega + b)^2}$$

9.12.2 Exams

Vraag 2

Beschouw het volgende gekoppelde vervalproces, waarbij atoomkernen van type A vervallen maar kernen van type B of C, en kernen van type B op hun beurt vervallen maar kernen van type C (met α_i positieve reëelgetallen):

$$\begin{aligned}A'(t) &= -(\alpha_1 + \alpha_2)A(t) \\B'(t) &= -\alpha_3B(t) + \alpha_1A(t) \\C'(t) &= \alpha_2A(t) + \alpha_3B(t)\end{aligned}\tag{1}$$

We starten dit proces met $A(0) = A_0$ en $B(0) = C(0) = 0$.

Bepaal $C(t)$ door gebruik te maken van Laplacetransformaties (Mag met Maple).

Verklaar bovendien het asymptotisch gedrag van $C(t)$ voor grote t uit de aard van het beschreven proces (één zin).

Figure 9.110: Exam 1 Exercise 2

$$\left. \begin{array}{l} A' = -(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot A \quad (1) \\ B' = -\alpha_3 B + \alpha_1 \cdot A \quad (2) \\ C' = \alpha_2 A + \alpha_3 B \quad (3) \end{array} \right\}$$

$$(1) \quad \partial A(t) - A_0 = -(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot A(t)$$

$$\Rightarrow A(t) = \frac{A_0}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$(2) \quad \partial B(t) - B_0 = -\alpha_3 B + \alpha_1 A$$

$$\Rightarrow B(t) = \frac{\alpha_1 \cdot A}{\alpha_1 + \alpha_3}$$

$$(3) \quad \partial C(t) = \alpha_2 \cdot A + \alpha_3 \cdot B$$

$$\Rightarrow C(t) = \frac{\alpha_2 \cdot A + \alpha_3 \cdot B}{\alpha_1 + \alpha_3}$$

$$= \frac{(\alpha_2 \alpha_1 + \alpha_3 (\alpha_1 + \alpha_2)) A_0}{(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3) (\alpha_1 + \alpha_3) \alpha}$$

$$\rightarrow C(t) = A_0 \left(\frac{1 + -\alpha t e^{-\alpha_3 t} + e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} \cdot (-\alpha_2 + \alpha_3)}{-\alpha^2 + \alpha_1 + \alpha_2} \right)$$

in het limit wordt dit : $C(t) = A_0$

$t \rightarrow \infty$ dan alle atoombewegingen verdwijnen

maar A_0 .

```

> restart: with(inttrans): with(VectorCalculus):
> A := 
$$A := \frac{A0}{s + a1 + a2}$$
 (1)
> B := 
$$B := \frac{a1 \cdot A}{s + a3}$$
 (2)
> C := simplify(
$$C := \frac{(a2 \cdot A + a3 \cdot B)}{s}$$
) (3)
> inv := invlaplace(C, s, t)
> limit(inv, t = infinity) (4)
> # Seems like this will be done manually.

```