2) warmtevgl: $\partial_t u(x,t) = \alpha^2 \cdot \partial_x^2 \cdot u(x,t)$

conditions

$$\begin{cases} u(0,t) = T_0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad u(x,t) = u_p(x) + u_h(x,t)$$

scheiding der veranderlijken.

$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$\Leftrightarrow T' X = \alpha^2 \cdot X'' \cdot T$

$\Leftrightarrow \frac{T'}{T} = \alpha^2 \cdot \frac{X''}{X} \Rightarrow \begin{cases} T' = \alpha^2 \cdot \sigma \cdot T \\ X'' = \sigma \cdot X \end{cases}$

zoek eerst homogene waarden.

$X'' = \sigma \cdot X$, Pinda ($\alpha = 0$) hebben we Neumann, recht dirichlet.

dus bespreek gevallen van σ.

if $\sigma > 0$: $X_1(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{\sigma} \cdot x} + C_2 e^{-\sqrt{\sigma} x}$

if $\sigma = 0$: $X_2(x) = C_1 + C_2 x$

if $\sigma < 0$: $X_3(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \cdot \sin(kx)$ met $k^2 = -\sigma$

Voor $X_1(x)$ en $X_2(x)$ zijn C_1 en $C_2 = 0$ voor de rand voorwaarden!

Voor $X_3(x)$ vinden we voor $x = 0 \rightarrow C_1 = 0$, en voor $x = L$

Neumann dus $\partial u(L,t) = 0$

$X_3'(x)_{x=L} \Rightarrow k \cdot C_2 \cdot \cos(kL) = 0$ of $\cos(kL) = 0$

$\Leftrightarrow$ Vier mogelijk geval $k = \frac{\pi}{2L} \cdot (2m+1)$ $\rightarrow$ specifieke cosinus

$\rightarrow$ dus $k^2 = -\sigma$ $\qquad X_m = \sin\left(\frac{\pi}{2L}(2m+1)\, x\right)$

$\rightarrow -\left(\frac{\pi}{2L} \cdot (2m+1)\right)^2 = \sigma$

Steek dit in:

$T' = \alpha^2 \cdot \sigma \cdot T \Rightarrow T_m = e^{-\left(\alpha \frac{\pi}{2L}(2m+1)\right)^2 t}$

de algemene homogene oplossing is dus (? controleer enkel som)

$$\boxed{u_h(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\left(\alpha \frac{\pi}{2L}(2m+1)\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2L} \cdot (2m+1)\, x\right)}$$

Nu kijken we naar inhomogeen.

$u(0,t) = T_0$

$\frac{\partial}{\partial t} u(L,t) = 0$ (insulated boundary)

onze oplossing is $u(x,t) = u_h(x,t) + u_p(x)$

dus we zeggen $A + Bx$

$\rightarrow u_p(0) = T_0$ dus $A + B(0) = T_0 \Rightarrow A = T_0$

$\rightarrow u_p'(L) = 0 \rightarrow \frac{d}{dx}(A + Bx) = B = 0$

dus $u_p(x) = T_0$

Dus totale oplossing:

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\left(\alpha \frac{\pi}{2L}(2m+1)\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2L} \cdot (2m+1)\, x\right) + T_0 = u(x,t)$$

zoek a_m

we weten dat $u(x,0) = g(x)$

$\Leftrightarrow g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot \sin(\,//\,) + T_0$

$\Leftrightarrow g(x) - T_0 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot \sin(\,//\,)$

$\Leftrightarrow \int_0^L (g(x) - T_0) \sin(\,''\,) = a_m \cdot \frac{L}{2}$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \int_0^L (g(x) - T_0) \sin(\,''\,) = a_m$

limiet.

als $t \rightarrow \infty$ dan krijg je enkel T_0!