

# Zero to Hero: WiMo

Niels Savvides

2024/10/30

## 1 Analyse in 1 veranderlijke: enkele aspecten

### 1.1 Continuïteitseigenschappen van functies

Functie  $f(x)$  is continue over  $]a, b[$  als:

1.  $f(x)$  bestaat in elk punt
2. de limiet van  $f(x)$  bestaat in elk punt

**Continue afgeleide:**  $f(x)$  is continue (zie hierboven) en  $f'(x)$  bestaat in elk punt. Dit kan:

1. gladde functies zijn: elk afgeleide is continue
2. stuksgewijs:  $f(x)$  heeft een singulariteit, maar het bestaat in deel intervallen  $]a, c[$   $]c, b[$

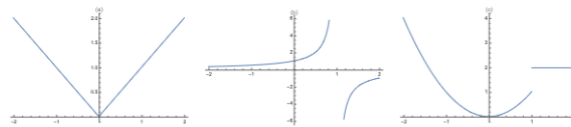


Figure 1: a) Continue functie, stuksgewijs continue afgeleide (als je afleid krijg je een singulariteit) b) Heeft een singulariteit, dus stuksgewijs continue, stuksgewijs glad continue afleidbaar c) Deze is glad stuksgewijs continue afleidbaar, is ook stuksgewijs continue

### 1.2 Taylorontwikkeling

We willen zaken gaan benaderen. Hiervoor gebruiken we:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

waarbij  $a$  het **werkpunt** is.

Veel voorkomende Taylorontwikkelingen:

See Figure 2.

### Storingsrekening

Zie Figuur 4.

Of Maple solution 3.

### 1.3 Twee eenvoudige differentiaalvergelijkingen

#### 1.3.1 Eerste orde differentiaalvergelijking

$$y'(x) = \lambda y(x)$$

$$\begin{aligned}
- e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \\
- \sin x &= 0 + x + \frac{x^2}{2} \cdot (\sin(0)) - \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
- \cos x &= \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{2n!} \\
- \frac{1}{1-x} &= 1 + x + \dots + x^n \quad \text{convergeert voor } x \in ]-1, 1[ \\
&\quad \text{↳ eigenschap: de afgeleide van } \frac{1}{1-x} \text{ maakt negatief} \\
&\quad \text{maar door } -x \text{ chain wordt het positief.} \\
- \ln(1-x) &= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}\right) \quad \text{voor } x \in ]-1, 1[
\end{aligned}$$

Figure 2: Simply use the formulas

Als we dit uitwerken krijgen we:

$$\ln(y(x)) = \lambda x + C$$

$$y(x) = e^{\lambda x + C} = e^C e^{\lambda x} = C e^{\lambda x} \text{ met } C = y(0)$$

$$y(x) = y(0) e^{\lambda x}$$

### Radioactief verval

Zie Figuur 5.

### 1.3.2 Tweede orde differentiaalvergelijking

$$y''(x) = \lambda y(x)$$

Hierbij heb je 3 gevallen:

1.  $\lambda > 0$ :  $y(t) = A e^{\sqrt{\lambda} t} + B e^{-\sqrt{\lambda} t}$
2.  $\lambda = 0$ :  $y(t) = A + B t$
3.  $\lambda < 0$ :  $y(t) = A \cos(\sqrt{-\lambda} t) + B \sin(\sqrt{-\lambda} t)$

### 1.3.3 Complexe getallen

Algemene vorm:  $z = a + bi$

waarbij  $a$  reeel,  $b$  imaginair en  $i^2 = -1$

$$\text{inverse: } (a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

$$\text{complement: } z = a + bi \rightarrow z^* = a - bi$$

$$\text{modulus: } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

in polaire vorm:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \text{ (Dit kan via Taylor bewezen worden (zie oefeningen))}$$

Okey, nu nog een paar goniometrische formules:

```

> #  $x^3 + \text{epsilon} \cdot x = 1$ 
>
>  $f := x \mapsto x^3 + \text{epsilon} \cdot x = 1$ 
                                      $f := x \mapsto x^3 + e \cdot x = 1$ 
(1)
> # When epsilon is null, we get  $x = 1$ 
>  $g := 1 + u \cdot \text{epsilon} + v \cdot \text{epsilon}^2$ 
                                      $g := v e^2 + u e + 1$ 
(2)
>  $f\_subs := \text{subs}(x = g, f(x))$ 
                                      $f\_subs := (v e^2 + u e + 1)^3 + e (v e^2 + u e + 1) = 1$ 
(3)
>  $f\_expand := \text{expand}(f\_subs)$ 
 $f\_expand := e^6 v^3 + 3 e^5 u v^2 + 3 e^4 u^2 v + 3 e^4 v^2 + e^3 u^3 + 6 e^3 u v + e^3 v + 3 e^2 u^2$ 
 $+ e^2 u + 3 v e^2 + 3 u e + e + 1 = 1$ 
(4)
> # First keep the left hand side
>  $\text{left\_hand\_side} := \text{lhs}(f\_expand)$ 
 $\text{left\_hand\_side} := e^6 v^3 + 3 e^5 u v^2 + 3 e^4 u^2 v + 3 e^4 v^2 + e^3 u^3 + 6 e^3 u v + e^3 v$ 
 $+ 3 e^2 u^2 + e^2 u + 3 v e^2 + 3 u e + e + 1$ 
(5)
> # Extract coeff 1 and 2
>  $\text{coeff\_1} := \text{coeff}(\text{left\_hand\_side}, \text{epsilon}, 1)$ 
                                      $\text{coeff\_1} := 3 u + 1$ 
(6)
>  $\text{coeff\_2} := \text{coeff}(\text{left\_hand\_side}, \text{epsilon}, 2)$ 
                                      $\text{coeff\_2} := 3 u^2 + u + 3 v$ 
(7)
>  $\text{solve}(\{\text{coeff\_1} = 0, \text{coeff\_2} = 0\}, \{u, v\})$ 
                                      $\left\{u = -\frac{1}{3}, v = 0\right\}$ 
(8)
> # Final result
>  $\text{result} := \text{subs}\left(\left\{u = -\frac{1}{3}, v = 0\right\}, g\right)$ 
                                      $\text{result} := -\frac{e}{3} + 1$ 
(9)
>

```

Figure 3: Maple solution

### Stringrekening

$$x^3 + \epsilon x = 1$$

$$1) \text{ if } \epsilon = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow x_0 = 1 + a_1 \epsilon + a_2 \epsilon^2$$

$$\text{Vul in: } (1 + a_1 \epsilon + a_2 \epsilon^2)^3 + \epsilon(1 + a_1 \epsilon + a_2 \epsilon^2) = 1$$

$$(1 + a_1 \epsilon + a_2 \epsilon^2)^3 = 1 + 3a_1 \epsilon + 3a_2 \epsilon^2 + 3a_1^2 \epsilon^2 + 3a_1 a_2 \epsilon^3 + a_2^2 \epsilon^4$$

$$1) 1$$

$$2) 3a_1 \epsilon \text{ (first order)}$$

$$3) 3a_2 \epsilon^2 + 3a_1^2 \epsilon^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\cancel{1 + 3a_1 \epsilon} + \epsilon^2(3a_2 + 3a_1^2) + \epsilon(1 + a_1 \epsilon + a_2 \epsilon^2) = 1$$

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 3a_1 + 1 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{3} \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{3}\epsilon$$

Figure 4: 1. Merk op dat als epsilon 0 is, dan is  $x = 1$ . Dus we benaderen value 1:  $1 + \epsilon \cdot u + \epsilon^2 \cdot v$ . Vul dit in the main equation. Gebruik maple om dit op te lossen en vul  $u$  en  $v$  in  $x_1$

radioact.

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda$$

$$\Leftrightarrow \ln(N(t)) = -\lambda t + C$$

$$\Leftrightarrow N(t) = e^{-\lambda t} \cdot e^C = N_0(t)$$

$$\Leftrightarrow N(t) = N_0(t) \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\text{halveringstijd: } \frac{N_0}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{N_0(t)}{2} = N_0(t) \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(e^{-\lambda t_{1/2}}) = -\lambda t_{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(2) = \lambda t_{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\lambda} = t_{1/2}$$

Figure 5: Vindt eerst de differentiaalvergelijking (zie eerste differentiaalvergelijking). Dan kunnen we de oplossing gelijkstellen aan  $N_0/2$ . Werk dit uit en je hebt  $t_{1/2}$  gevonden

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

### 1.3.4 Hoofdstelling van de algebra

Als we een kwadratisch veelterm hebben:  $ax^2 + bx + c = 0$

Dan vinden we de nulpunten (oplossingen) met:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

met  $b = -4 * a * c$  vinden we de discriminant.

## 2 Lineare Algebra

### 2.1 Lineaire onafhankelijkheid

**Lineaire onafhankelijkheid** betekent dat de vectoren niet op een lijn liggen. Dit betekent dat de determinant van de matrix niet 0 is. Maar ook dat de vectoren niet een lineaire combinatie van elkaar zijn.

---

**Voorbeeld:** beschouw de drie vectoren (we gebruiken hier al de kolom-notatie voor vectoren)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad (2.1.3)$$

Figure 6: 1. Merk op dat als epsilon 0 is, dan is  $x = 1$ . Dus we benaderen value 1:  $1 + \epsilon.u + \epsilon^2.v$ . Vul dit in the main equation. Gebruik maple om dit op te lossen en vul  $u$  en  $v$  in  $x_1$

$v_1, v_2, v_3$  zijn lineair onafhankelijk. Maar  $v_1$  en  $v_2$  bijvoorbeeld, vormen een lineaire combinatie van  $v_3$

### 2.2 Inproduct, Norm, Orthogonaliteit

- **Inproduct:**  $u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$

- **Norm:**  $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

Side note: om de **hoek** tussen 2 vectoren te vinden,  $\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \cos(\theta)$

### 2.3 Gramm-Schmidt

Dit gaat ons toelaten om een basis te vinden van vectoren.

$$v_1 = u_1 / \|u_1\|$$

$$v_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{\text{Norm}} v_1$$

$$v_x = \dots$$

Ook gedefinieerd het dat een vector  $v = v^{\parallel} + v^{\perp}$

Waarbij  $v^{\parallel}$  de projectie is van  $v$  op  $u$  en  $v^{\perp}$  de projectie op de orthogonale basis.

$$v^{\parallel} = (u_1 \dot{y})u_1 + (u_2 \dot{y})u_2 + \dots$$

### 2.3.1 Voorbeeld Gramm-Schmidt

Zie Figuur 7.

```

> with(LinearAlgebra):
> v_1 := Vector([1, 1, 0])

```

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```

> v_2 := Vector([0, 1, 1])

```

$$v_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

```

> v_3 := Vector([1, 0, 1])

```

$$v_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

```

> u_1 := \frac{v_1}{\text{Norm}(v_1, 2)}

```

$$u_1 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

```

> u_2 := \frac{(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1)}{\text{Norm}(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1, 2)}

```

$$u_2 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \quad (5)$$

```

> u_3 := (v_3 - ((u_2 \cdot v_3) * u_2) - ((u_1 \cdot v_3) * u_1)) / \text{Norm}(v_3 - ((u_2 \cdot v_3) * u_2) - ((u_1 \cdot v_3) * u_1), 2);

```

$$(6)$$

Figure 7: Hier gebruiken we dus de iteratieve formule om de basis te vinden.

**Note:** Dit kan uitgebreid worden naar functieruimtes. Hiervoor gaan we een oefening zien in het werkcollege.

## 2.4 Matrices

Typische vorm:  $y = Ax$

Het **getransponeerde** is  $A^T$ , de rijen worden kolommen en omgekeerd.

Hier geldt dan dat:  $(AB)^T = B^T A^T$ , dus je draait de matrices om

## 2.5 Kolomruimte, rijruimte, nulruimte

- **Kolomruimte**: alle mogelijke lineaire combinaties van de kolommen ( $K(A)$ )

- **Rijruimte**: alle mogelijke lineaire combinaties van de rijen ( $K(A^T)$ )

- **Nulruimte**: alle vectoren die op 0 worden afgebeeld ( $N(A)$  of  $N(A^T)$ )

Zeer belangrijk is dat:

$N(A)$  complementair is aan  $K(A^T)$  en  $N(A^T)$  is complementair aan  $K(A)$

Bij de representatie van het vlak heb je een **rang**. Dit is basically de hoeveelheid kolommen van  $Q$  niet nul zijn.

### 2.5.1 Voorbeeld definities

Zie Figuur 8.

## 2.6 Matrix Inverse

$$x = A^{-1}y$$

Typisch gezien is dit gedaan via:  $\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$

Wat heel nuttig is is dat  $AA^{-1} = I$  en  $A^{-1}A = I$ . Dit kan heel wat schrijfwerk vermijden

Weer zoals bij transponeren geldt dat  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

## 2.7 Projectie en kleinste kwadraten benadering

Zoals we eerder hebben gezien bij Gramm-Schmidt, kunnen we  $v = v^{\parallel} + v^{\perp}$  schrijven.

We kunnen er iets abstracter boven plakken en werken met een **Projector**.

Deze is gedefinieerd als:  $P = A(A^T A)^{-1}A^T$  (deze vorm is niet al te belangrijk).

Met de nieuwe definitie  $P$  kunnen we nu zeggen dat  $v = Pv + (I - P)v$

The following properties hold:

1.  $P^2 = P$
2.  $P^T = P$

### 2.7.1 Voorbeeld Projectie

Zie Figuur 9.

## 2.8 Kleinste kwadraten fit

$$x = (A^T A)^{-1}A^T y$$

Dit gaat ons toelaten om te fitten op data.

In Maple wordt dit gedaan via `LinearAlgebra:-LeastSquares`.



VD: 2.2.51:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$m \times n$   
 $2 \times 4$

enkel lineair onafh.  
kolommen!

$$K(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad A = 2$$

$$K(A^T) = \vec{0}$$

$$K(A^T) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$N(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{dit zijn vectoren dat we zoeken:} \\ A\alpha = 0$$

$$A\vec{\alpha} = \vec{b}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = b_1 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = b_2 \end{cases}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{b_1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{b_2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

hier is  $n < m$ :

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_p + \vec{\alpha}_h$$

(the nul vector van  $A = \cdot N(A)$ )

Figure 8:

```

[> with(LinearAlgebra):
[>
[> A := Matrix([[1, 0], [0, 1], [0, c]])
                                     
$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & c \end{bmatrix} \tag{1}$$

[> p := A.(Transpose(A).A)-1.Transpose(A)
                                     
$$p := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2+1} & \frac{c}{c^2+1} \\ 0 & \frac{c}{c^2+1} & \frac{c^2}{c^2+1} \end{bmatrix} \tag{2}$$

[> subs(c = 0, p)
                                     
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

[>

```

Figure 9:

## 2.9 Vierkante matrices

### 2.9.1 Determinant

De determinant is super handig. Hoe calculeren we deze?

Let  $\mathbf{A}$  be a  $3 \times 3$  matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

The determinant of  $\mathbf{A}$ , denoted as  $\det(\mathbf{A})$  or  $|\mathbf{A}|$ , is calculated as:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Expanding the terms, we have:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Properties:

1.  $\det(A) = \det(A^T)$
2.  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3.  $\det(A) = 0 \rightarrow$  linear dependent

### 2.10 Basic rotation matrix

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

So a typical transformation equation looks like:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ with the middle matrix being } \text{**inverse**}.$$

#### 2.10.1 Example

See Figure 10 and 11.

**Voorbeeld: geroteerde basis.** Beschouw de basis  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_x = (1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_y = (0, 1)$  en de geroteerde basis  $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{e}'_x = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{e}'_y = (-\sin \theta, \cos \theta)$ . Wat is de transformatie, die voor een vector de componenten  $\mathbf{x}' = (x', y')$  t.o.v. de geroteerde basis geeft, in functie van de originele componenten  $\mathbf{x} = (x, y)$ .

Figure 10: Rotation opgave

### 2.11 Eigenvectoren, eigenwaarden, diagonalisatie en de Jordan-decompositie

$v_i$  is een eigenvector van  $A$  als  $Av_i = \lambda_i v_i$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

- geometrische multipliciteit: aantal lineair onafhankelijke eigenvectoren (je moet de eigenvalue invullen en row echelon reduced form verkrijgen. Dan zie je hoeveel eigenvectoren er degelijk zijn)

Figuur 12 toont een voorbeeld van de multipliciteit.

- algebraische multipliciteit: aantal keer dat de eigenwaarde voorkomt in de determinant

Indien alle geometrische multipliciteiten gelijk zijn aan de algebraïsche multipliciteiten, dan is de matrix diagonaliseerbaar.  $A = MDM^{-1}$

met  $D$  een diagonale matrix met de eigenwaarden op de diagonaal. en  $M$  een matrix met de eigenvectoren.

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> M := Matrix([[cos(theta), -sin(theta)], [sin(theta), cos(theta)]])

```

$$M := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (1)$$

```

> inv := MatrixInverse(M)

```

$$inv := \begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} & -\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \\ -\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} & \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

```

> v := Vector([x, y])

```

$$v := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3)$$

```

> inv . v

```

$$\begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta) x}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} + \frac{\sin(\theta) y}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \\ -\frac{\sin(\theta) x}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} + \frac{\cos(\theta) y}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Figure 11: Rotation antwoord

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 = -\lambda \cdot (\lambda^2 - 1) - 1(-\lambda - 1) + 1(1 + \lambda)$$

$$= -\lambda^3 + \lambda + \lambda + 1 + 1 + \lambda$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

$\hookrightarrow$  calculate eigenvalues:

$$\lambda = -1, -1, 2$$

no eigen  $\lambda_1 = -1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \alpha_2 = s, \alpha_3 = t$$

$$\alpha_1 = -s - t$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad \text{if } s=1, t=1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{eigenvectors} \rightarrow \text{dimensional mult.} = 2$$

Figure 12: Een voorbeeld van de multipliciteit

## 2.12 Jordan Form

$A = MJM^{-1}$  met  $J$  een Jordan matrix. Dit is nodig indien de dimensie van de eigenruimte (geometrische multipliciteit) kleiner is dan de algebraïsche multipliciteit. Aka, de matrix is niet diagonaliseerbaar. 13  
14

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Figure 13: Jordan matrix

This gives us: 15

### 2.12.1 Example

See Figure 16.

## 2.13 Matrixmachten en iteratieve matrixvergelijkingen

$A^k = MD^kM^{-1}$  voor diagonaliseerbare matrices

$A^k = MJ^kM^{-1}$  voor niet-diagonaliseerbare matrices

met diagonaal matrix: 17

**iteratieve matrixvergelijking:**  $x_k = MD^kM^{-1}x_0$  Op deze manier kun je telkens de  $k_{de}$  stap berekenen.

Dit is enkel voor de diagonaliseerbare matrices. ( $A^k = MD^kM^{-1}$ )

**asymptotisch gedrag:**  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lambda^k(v_{L1} * u_0)v_1$

$v_1$  is een fixed point in het asymptotisch gedrag.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

Figure 14: Jordan matrix example

verrichten we:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1/2+i & 1/2-i \\ 0 & 0 & 3/2+i/2 & 3/2-i/2 \\ 0 & 0 & 1/2+i & 1/2-i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/5+i/5 & -1/5-3i/5 & 0 \\ 0 & 2/5-i/5 & -1/5+3i/5 & 0 \end{bmatrix}$$

Hieruit lezen we de eigenwaarden af:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1-i, \lambda_4 = 1+i$  en corresponderende (rechter)-eigenvectoren:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/2+i \\ 3/2+i/2 \\ 1/2+i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1/2-i \\ 3/2-i/2 \\ 1/2-i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3.120)$$

en linker-eigenvectoren:

$$\mathbf{v}_{L1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{L2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{L3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/5+i/5 \\ -1/5-3i/5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{L4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/5-i/5 \\ -1/5+3i/5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Figure 15: Jordan matrix solution

**Voorbeeld 2:** Geef voor de matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.3.122)$$

de eigenwaarden, en eigenvectoren. We vinden (opnieuw met Maple):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3.123)$$

Uit de Jordan-vorm (middelste matrix) zien we dat er twee verschillende eigenwaarden zijn:  $\lambda_1 = 1$  en  $\lambda_2 = 2$ , waarbij de algebraïsche multiplicitéit van  $\lambda_2$  gelijk is aan drie en de geometrische multiplicitéit gelijk aan twee. De eigenvector  $\mathbf{v}_1$  horende bij  $\lambda_1$  lezen we af in de eerste kolom van de eerste matrix ( $\mathbf{M}$ ), de twee eigenvectoren  $\mathbf{v}_2$  en  $\mathbf{v}_3$  horende bij  $\lambda_2$  lezen we af in kolom twee en kolom vier:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.124)$$

(Uit de structuur van de Jordan-vorm volgt dat de derde kolomvector geen eigenvector is.)

Figure 16: Jordan matrix example 2

$$\mathbf{D}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Figure 17: Diagonaal matrix



### 2.13.1 Voorbeeld

Zie Figuur 18.

**Toepassing: De Fibonacci rij:**  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ , is een bekende recursieve rij die blijkbaar terug te vinden is in allerlei processen in de natuur. Ze wordt bepaald door de recursie-relatie  $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$ , met als startvoorwaarden  $x_0 = 0, x_1 = 1$ . We kunnen hier als volgt een iteratieve matrixvergelijking aan associëren. Stellen we  $\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix}$ , dan hebben we  $\mathbf{u}_k = \mathbf{A}\mathbf{u}_{k-1}$  met

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} (= \mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}), \quad (2.3.132)$$

waarbij we de matrix in de laatste gelijkheid, bvb. via ©Maple JordanForm diagonaliseren. Vervolgens vinden we uit (2.3.128):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k = \mathbf{M}\mathbf{D}^k\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}_0 &= \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k & 0 \\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+1} \\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k \end{bmatrix} \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1} \\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.3.133)$$

waarbij de laatste gelijkheid benaderend geldt voor grote  $k$ . We vinden dus de uitdrukking

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \quad (2.3.134)$$

voor de Fibonacci-getallen, alsook de asymptotische ratio  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1}/x_k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  wat de beroemde gulden snede is.

Het asymptotisch gedrag (grote  $k$ ) kunnen we ook rechtstreeks uit de dominante eigenvectoren en corresponderende eigenwaarde halen. Uit (2.3.132) lezen we af dat:

**fixed point**

$$\mathbf{v}_1 = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right) \quad \mathbf{v}_{L1} = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \quad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \quad (2.3.135)$$

Uit (2.3.131) vinden we dan onmiddellijk het asymptotisch gedrag

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix} \approx \lambda_1^k (\mathbf{v}_{L1} \cdot \mathbf{u}_0) \mathbf{v}_1 = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1} \\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k \end{bmatrix}, \quad (2.3.136)$$

wat precies overeenkomt met de laatste benaderde gelijkheid in (2.3.134). Wat de asymptotische ratio  $x_{k+1}/x_k$  betreft, vinden we ook onmiddellijk  $\mathbf{u}_k \approx \lambda_1 \mathbf{u}_{k-1}$ , waaruit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1}/x_k = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , consistent met het eerdere resultaat.

Figure 18: Fibonacci voorbeeld

In het bovenstaande zien we dat  $\lambda_1$  de dominante eigenwaarde is. Daardoor kunnen we de fixed point berekenen met:

$$\lambda_1^k (v_{L1} \cdot u_0) v_1$$

Omdat  $\lambda_1$  dominant is, nemen we voor  $v_1$  de eerste kolom van  $\mathbf{M}$  en voor  $v_{L1}$  de eerste rij van  $\mathbf{M}^{-1}$

Dit kan toegepast worden in de zogezegde **Markov proces**

algemene vorm:  $u_k = Pu_{k-1}$  waarbij  $P$  een matrix is die de overgangen tussen de verschillende states aangeeft met probabiliteit.  $\sum p_{ij} = 1$

Ook goed om te weten is dat wanneer de matrix strikt positieve getallen heeft, dat matrix  $P$  een uniek dominante eigenwaarde  $\lambda_1 = 1$  heeft met  $v_1$  een positieve eigenvector. Deze  $v_1$  is dan ook een fixed point.

### 2.13.2 Voorbeeld Markov proces

Zie Figuur 19 and 20.

**Voorbeeld.** Neem volgend eenvoudig weermodel met 3 toestanden: zonnig, bewolkt en regen. En wanneer het zonnig is, een kans van 70% dat het de volgende dag ook zonnig is, 10% kans dat het bewolkt is, en 20% kans dat het regent. Wanneer het bewolkt is, 40% kans dat het zonnig wordt, 20% kans dat het bewolkt blijft, en 40% kans dat het de volgende dag regent. En wanneer het regent, 20% kans dat het de volgende dag zonnig wordt, 30% dat het bewolkt wordt, en 50% kans dat het zal regenen. Dit geeft de volgende Markov matrix:

Figure 19: Markov proces

## 2.14 Matrixexponent en lineaire differentiaalvergelijkingen

Hier gaan we een matrix plaatsen de exponent.

$e^{At} = Me^{Dt}M^{-1}$  -> concreet voorbeeld

**Algemeen:**

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

of

$$e^A = Me^DM^{-1} \text{ ——— } e^A = Me^JM^{-1} \text{ (niet-diagonaliseerbare matrices)}$$

In matrix vorm zie je het volgende: 21

Note: Maple geeft de functie 'MatrixExponential(A, t)' om  $e^{At}$  te berekenen.

### 2.14.1 eerste-orde differentiaalvergelijking

$$y'(t) = Ay(t)$$

$$y(t) = e^{At}y(0)$$

### 2.14.2 n-de differentiaalvergelijkin

Hetzelfde als hierboven

### 2.14.3 Herschrijf de tweede-orde differentiaalvergelijking $y''(t) + w^2y(t) = 0$

Zie Figuur 22.

## 2.15 Symmetrische matrices

-  $A = A^T$  -  $A$  heeft enkel reële eigenwaarden -  $A$  heeft orthogonale eigenvectoren -  $A = ODO^T$  met  $O$  een orthogonale matrix en  $D$  een diagonale matrix

Omdat  $O^T = O^{-1}$ , kunnen we zeggen dat  $O^TO = I$

Ook is het zo dat geometrische multipliciteit = algebraïsche multipliciteit. ->  $A$  is diagonaliseerbaar.

```

> restart;
> with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[0.7, 0.4, 0.2], [0.1, 0.2, 0.3], [0.2, 0.4, 0.5]])

```

$$A := \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```

> A := convert(A, rational)

```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

```

> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])

```

$$J, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{5}}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{5}}{10} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\left[ \left[ \frac{28\sqrt{5}}{(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, \frac{-71+31\sqrt{5}}{2(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, \frac{7+3\sqrt{5}}{2(-5+8\sqrt{5})} \right], \right.$$

$$\left[ \frac{11\sqrt{5}}{(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, -\frac{-29+11\sqrt{5}}{2(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2(-5+8\sqrt{5})} \right],$$

$$\left[ \frac{20\sqrt{5}}{(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, -\frac{-21+10\sqrt{5}}{(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, -\frac{2+\sqrt{5}}{-5+8\sqrt{5}} \right] \right]$$

```

> evalf(Q)

```

(4)

Figure 20: Markov proces solution

$$e^{t\mathbf{J}_n(\lambda)} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^{t\lambda} \\ 0 & 0 & e^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}e^{t\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda} \end{bmatrix}$$

Figure 21: Matrix exponent

**Voorbeeld.** Herschrijf de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0, \quad (2.3.154)$$

als een lineair stelsel van eerste orde vergelijkingen, en los deze vervolgens op.

*Oplossing:* Met  $\mathbf{y}(t) = (y'(t), y(t))$ , kunnen we (2.3.154) herschrijven als:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{bmatrix}. \quad (2.3.155)$$

Verder vinden we:

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\omega \sin \omega t \\ \frac{1}{\omega} \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}, \quad (2.3.156)$$

waaruit we de oplossing kunnen aflezen als tweede component van  $\mathbf{y} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{y}_0$ :

$$y(t) = y(0) \cos \omega t + \frac{y'(0)}{\omega} \sin \omega t, \quad (2.3.157)$$

wat inderdaad overeenkomt met de oplossing (1.3.23) die we in het vorige hoofdstuk poneerden.

Figure 22: Tweede-orde differentiaalvergelijking

## 2.16 SVD (Singular Value Decomposition)

$$A = U\Sigma V^T$$

of

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$$

met  $U$  en  $V$  orthogonale matrices en  $\Sigma$  een diagonale matrix met singular values

$U$  is  $m \times m$ ,  $V$  is  $n \times n$  en  $\Sigma$  is  $m \times n$

### 2.16.1 Example SVD

Als we compressie willen uitvoeren moeten we essentially SVD uitvoeren, maar onze som wordt beperkt door een rang  $r'$

$$A = \sum_{i=1}^{r'} \sigma_i u_i v_i^T$$

## Formularium

### Taylorontwikkeling

- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$
- $\sin(x) = x$  voor kleine  $x$

### Differentiaalvergelijkingen

- $y'(x) = \lambda y(x)$
- $y''(x) = \lambda y(x)$  (hier werden 3 gevallen besproken)

### Complexe getallen

- $z = a + bi$  (algemene vorm)
- $i^2 = -1$
- **inverse:**  $(a + bi)^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$
- **complement:**  $z = a + bi \rightarrow z^* = a - bi$
- **modulus:**  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

### Hoofdstelling van de algebra

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

met  $b = -4 * a * c$

## Lineaire Algebra

$\frac{u \cdot v}{||u|| ||v||} = \cos(\theta)$  // Hoek tussen twee vectoren

$v^{\parallel} = (u_1 \dot{y})u_1 + (u_2 \dot{y})u_2 + \dots$  // Projectie van  $v$

## Oefeningen

### Huis 1

```

> restart : with(LinearAlgebra) :
> t := taylor(sqrt(x+4)^3, x=0, 3);
  v := sqrt(y+4)^3;
                                     t := 8 + 3 x +  $\frac{3}{16} x^2 + O(x^3)$ 
                                     v := (y+4)3/2
(1)
> # voor 53/2 nemen we x = 1
> x_1 := evalf(8 + 3 +  $\frac{3}{16}$ )
                                     x_1 := 11.18750000
(2)
> # Wat is de fout? Wel, dat zal de derde term zijn (O(x3))
> error_1 := abs( $\frac{x^3}{6} \cdot \text{diff}(v, y\$3)$ );
  error_1 := evalf(subs(y=0, x=1, error_1))
                                     error_1 :=  $\frac{|x|^3}{16 |y+4|^{3/2}}$ 
                                     error_1 := 0.007812500000
(3)
> # voor 63/2 nemen we x = 2
> x_2 := evalf(8 + 3·2 +  $\frac{3}{16} \cdot 2^2$ )
                                     x_2 := 14.75000000
(4)
> error_2 := abs( $\frac{x^3}{6} \cdot \text{diff}(v, y\$3)$ )
                                     error_2 :=  $\frac{|x|^3}{16 |y+4|^{3/2}}$ 
(5)
> error_2 := evalf(subs(x=2, y=0, error_2))
                                     error_2 := 0.06250000000
(6)
> # Waarom nemen we y = 0? Omdat dit de grootste fout zou maken, we
  nemen altijd max. Dus fout \element {0, 1, 2}

```

Figure 23: Exercise 1

```

> restart :
> # i
> limit( (sin(3·x) / sinh(x)), x = 0 )
3
(1)

> # ii
> limit( (tan(x) - tanh(x)) / (sinh(x) - x), x = 0 )
4
(2)

> # iii
> limit( (sqrt(1 - a·x) - sqrt(1 + a·x)) / x, x = 0 )
-a
(3)

> # IV
> limit( (ln(1 + x) + ln(1 - x)) / x^2, x = 0 )
-1
(4)

```

Figure 24: Exercise 2

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta \quad B:$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum \frac{e^{i\theta n}}{n!} \rightarrow e^{i\theta} = \sum \frac{(i\theta)^n}{n!} \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^4}{24} + \dots \\ &= \underbrace{i\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots\right)}_{\sin\theta} + \underbrace{\left(-\frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + \dots\right)}_{\cos\theta} \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

Figure 25: Exercise 3

$$\begin{aligned} a &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ a \cdot b &= 1 \cdot (-1) + (1 \cdot 1) + (-1 \cdot 0) = 0 \\ A &= a b^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-1, 1, 0) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Figure 26: Exercise 4



# WC 1

```

> p := x→x·(x-1) - a
p := x→x·(x-1) - a (1)
# i
> p_i := subs(a = 0, p(x))
p_i := x(x-1) (2)
> solve(p_i = 0)
0, 1 (3)
# Dus lambda = 0, en lambda = 1
# Benader naar x = 0
> x_0 := 0 + u·a + v·a^2
x_0 := v a^2 + u a (4)
> p_subs_0 := subs(x = x_0, p(x))
p_subs_0 := (v a^2 + u a) (v a^2 + u a - 1) - a (5)
> p_expand_0 := expand(p_subs_0)
p_expand_0 := a^4 v^2 + 2 a^3 u v + a^2 u^2 - v a^2 - u a - a (6)
> coeff_1_0 := coeff(p_expand_0, a, 1)
coeff_1_0 := -u - 1 (7)
> coeff_2_0 := coeff(p_expand_0, a, 2)
coeff_2_0 := u^2 - v (8)
> solve_0 := solve({coeff_1_0 = 0, coeff_2_0 = 0}, {u, v})
solve_0 := {u = -1, v = 1} (9)
> result_0 := subs(u = rhs(solve_0[1]), v = rhs(solve_0[2]), x_0)
result_0 := a^2 - a (10)
# Benader 1
> x_1 := 1 + u·a + v·a^2
x_1 := v a^2 + u a + 1 (11)
> p_subs_1 := subs(x = x_1, p(x))
p_subs_1 := (v a^2 + u a + 1) (v a^2 + u a) - a (12)
> p_expand_1 := expand(p_subs_1)
p_expand_1 := a^4 v^2 + 2 a^3 u v + a^2 u^2 + v a^2 + u a - a (13)
> coeff_1_1 := coeff(p_expand_1, a, 1)
coeff_1_1 := u - 1 (14)
> coeff_1_2 := coeff(p_expand_1, a, 2)
coeff_1_2 := u^2 + v (15)
> solve_1 := solve({coeff_1_1 = 0, coeff_1_2 = 0}, {u, v})
solve_1 := {u = 1, v = -1} (16)
> result_1 := subs(u = rhs(solve_1[1]), v = rhs(solve_1[2]), x_1)

```

Figure 27: Exercise 1

```

> # Define the Taylor expansion for a forward approximation
Taylor_y := (h, t) → y(t) + h*diff(y(t), t) + (1/2)*h^2*diff(y(t), t$2) + (1/6)
    *h^3*diff(y(t), t$3) + (1/24)*h^4*diff(y(t), t$4) :

# Define the Taylor expansion for a backward approximation
Taylor_g := (h, t) → y(t) - h*diff(y(t), t) + (1/2)*h^2*diff(y(t), t$2) - (1/6)
    *h^3*diff(y(t), t$3) + (1/24)*h^4*diff(y(t), t$4) :

# Define the result expression
result := (h, t) → (Taylor_y(h, t) + Taylor_g(h, t) - 2*y(t)) / h^2 :

# Simplify the result
simplified_result := simplify(result(h, t));


$$\text{simplified\_result} := \frac{h^2 \left( \frac{d^4}{dt^4} y(t) \right)}{12} + \frac{d^2}{dt^2} y(t) \quad (1)$$


>
> #i) kwadratisch
> #ii
> restart;
> with(plots) :
> with(plottools) :

t_val := evalf( Pi / 3 );

# Define the function y and its 2nd derivative
y := t → -cos(t);

# Define the error function as a function of h for a specific t
err := (h) → abs( y(t_val)
    - (cos(h + t_val) + cos(h - t_val) - 2*cos(t_val)) / h^2 );

# Plot the error as a function of h with log-log scale
loglogplot(err(h), h = 10^(-8) .. 10^3);
t_val := 1.047197551
y := t → -cos(t)
err := h → | y(t_val) - (cos(h + t_val) + cos(h - t_val) - 2*cos(t_val)) / h^2 |

```

Figure 28: Exercise 2

$$3) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{(2i, -1, 0, 0)^T}{\sqrt{(2i)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2i \cdot (-1i) + 1}} \\ &= \left( \frac{2i}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, 0 \right)^T \end{aligned}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{u}_1 =$$

$$v_3 = v_3 - \sum_{k=1}^{n-1} \langle u_k, v_3 \rangle \cdot u_k$$

$$\vdots$$

---


$$2) \quad \text{span} \langle u_1, u_2 \rangle$$

$$w'' = \langle u_1, w \rangle u_1 + \langle u_2, w \rangle u_2$$

$$\text{Residue: } w = w'' + w^\perp$$

Figure 29: Exercise 3

```

> #ii)
> with(LinearAlgebra):
> v_1 := Vector([2*I, -1, 0, 0])

```

$$v_1 := \begin{bmatrix} 2I \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```

> v_2 := Vector([I, 0, 3, 1])

```

$$v_2 := \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

```

> u_1 := \frac{v_1}{\text{Norm}(v_1, 2)}

```

$$u_1 := \begin{bmatrix} \frac{2I}{5} \sqrt{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

```

> u_2 := \frac{(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1)}{\text{Norm}(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1, 2)}

```

$$u_2 := \begin{bmatrix} \frac{I}{255} \sqrt{255} \\ \frac{2\sqrt{255}}{255} \\ \frac{\sqrt{255}}{17} \\ \frac{\sqrt{255}}{51} \end{bmatrix} \quad (4)$$

```

> w := Vector([3, 1 - I, 2 + I, 1])

```

$$(5)$$

Figure 30: Exercise 3

## Bord 1

```

> p := x→x·(x-1)·(x-2)·(x-4) - a
      p := x→x·(x-1)·(x-2)·(x-4) - a (1)
> x_0 := u·a + v·a^2
      x_0 := v a^2 + u a (2)
> p_subs := subs(x = x_0, p(x))
      p_subs := (v a^2 + u a) (v a^2 + u a - 1) (v a^2 + u a - 2) (v a^2 + u a - 4) - a (3)
> p_expand := expand(p_subs)
p_expand := a^8 v^4 + 4 a^7 u v^3 + 6 a^6 u^2 v^2 - 7 a^6 v^3 + 4 a^5 u^3 v - 21 a^5 u v^2 + a^4 u^4
      - 21 a^4 u^2 v + 14 a^4 v^2 - 7 a^3 u^3 + 28 a^3 u v + 14 a^2 u^2 - 8 v a^2 - 8 u a - a (4)
> # Only keep the 1st order and second order
>
> coeff_1 := coeff(p_expand, a, 1)
      coeff_1 := -8 u - 1 (5)
> coeff_2 := coeff(p_expand, a, 2)
      coeff_2 := 14 u^2 - 8 v (6)
> solve({coeff_1 = 0, coeff_2 = 0}, {u, v})
      {u = -1/8, v = 7/256} (7)
>

```

Figure 31: Exercise 1

$$2) i) y'(t_n) \approx v_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

$$\begin{cases} c = t_n \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h \cdot y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi) \quad \xi \in [t_n, t_{n+1}]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_n &= \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{\cancel{y(t_n)} + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi) - \cancel{y(t_n)}}{h} \\ &= y'(t_n) + \frac{h}{2} y''(\xi) \end{aligned}$$

$$\text{fout: } |y'(t_n) - v_n| = \frac{h}{2} y''(\xi) = \frac{h}{2} c \rightarrow \text{linear.}$$

$\hookrightarrow$  calculate visual zo zijn.

ii)

$$y'(t_n) = v_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h \cdot y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{6} y'''(\xi) \quad \xi \in [t_n, t_{n+1}]$$

$$y(t_{n-1}) = y(t_n) - h \cdot y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) - \frac{h^3}{6} y'''(\xi) \quad \xi \in [t_{n-1}, t_n]$$

$$\begin{aligned} y'(t_n) = v_n &= \frac{\cancel{y(t_n)} - \cancel{h y'(t_n)} + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{6} y'''(\xi_1)}{2h} \\ &= \frac{(\cancel{y(t_n)} - h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) - \frac{h^3}{6} y'''(\xi_2))}{2h} \\ &= y'(t_n) + \frac{h^2}{12} (y'''(\xi_1) + y'''(\xi_2)) \end{aligned}$$

$$|y'(t_n) - v_n| = \frac{h^2}{6} |y'''(\xi)| = \frac{h^2}{6} c \rightarrow \text{using maybe you can see this.}$$

Figure 32: Exercise 2

```

> restart;
> with(plots) :
>
> y := t→cos(t)
                                y := t→cos(t)
(1)
> exact_speed := t→-sin(t)
                                exact_speed := t→-sin(t)
(2)
> t_val := evalf( (Pi/2) )
                                t_val := 1.570796327
(3)
>
> forward_difference := (t, h)→ (y(t+h) - y(t))/h
                                forward_difference := (t, h)→ (y(t+h) - y(t))/h
(4)
> central_difference := (t, h)→ (y(t+h) - y(t-h))/(2·h)
                                central_difference := (t, h)→ (y(t+h) - y(t-h))/(2·h)
(5)
>
> forward_error := h→abs(exact_speed(t_val) - forward_difference(t_val, h))
                                forward_error := h→|exact_speed(t_val) - forward_difference(t_val, h)|
(6)
> central_error := h→abs(exact_speed(t_val) - central_difference(t_val, h))
                                central_error := h→|exact_speed(t_val) - central_difference(t_val, h)|
(7)
> loglogplot([central_error(h), forward_error(h)], h = 10-8..1, color = [red,
                                blue])

```

Figure 33: Exercise 2 part 2 Maple

3)  $\vec{v}_1 = (2, 3, 0)$  und  $\vec{v}_2 = (1, -2, 3)$  inner product = dot product

i)  
1)  $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$

2)  $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{u}_1 \rangle}{|\vec{u}_1|^2} \cdot \vec{u}_1$

3)  $\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_1 \rangle}{|\vec{u}_1|^2} \cdot \vec{u}_1 - \frac{\langle \vec{v}_3 - \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle}{|\vec{u}_2|^2} \cdot \vec{u}_2$

< My, kann ich  $v_1$  &  $v_2 = v_3 \rightarrow$  brauchen werden doch.

$$\vec{u}_k = \vec{v}_k - \sum_{k=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{v}_k - \vec{u}_k, \vec{u}_k \rangle}{|\vec{u}_k|^2} \cdot \vec{u}_k$$

$$\vec{u}_1 = \frac{(2, 3, 0)}{\sqrt{4+9}} = \left( \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, 0 \right) = \left( \frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, 0 \right)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{v}_2 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{u}_1\|} \quad \text{im maple:}$$

$$\left( \frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, 0 \right) \cdot (1, -2, 3)$$

$$= \left( \frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{6\sqrt{13}}{13}, 0 \right) \cdot \left( \frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, 0 \right)$$

$$= \left( \frac{52}{169}, -\frac{117}{169}, 0 \right)$$

ii) zie maple

iii) dargestellt  $\vec{u}_1$  und  $\vec{u}_2$  diese für Vektoren in spannen als  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  können wir:

$$\vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_2$$

$$\text{dann } \vec{y}^\perp = \vec{y} - \vec{y}^\parallel \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = \vec{y}^\perp + \vec{y}^\parallel$$



```

restart;
with(plots):
[annulus, arc, arrow, circle, cone, cuboid, curve, cutin, cutout, cylinder, disk, dodecahedron, ellipse, ellipticArc, exportplot, extrude, geodata, hemisphere, hexahedron, homothety, hyperbola, icosahedron, importplot, line, octahedron, parallelepiped, pieSlice, point, polygon, polygonbyname,
prism, project, rectangle, reflect, rotate, scale, sector, semitorus, sphere, stellate, tetrahedron, torus, transform, translate, triangulate]
v1 := (2|3|0)

v2 := (1, -2, 3)

u1 :=  $\left( \frac{2\sqrt{13}}{13} \mid \frac{3\sqrt{13}}{13} \mid 0 \right)$ 
u2 :=  $\left( \frac{52}{169} \mid -\frac{18\sqrt{13}}{169} \mid 0 \right)$ 

origin := (0|0|0);
line_v1 := line(origin, v1, color=blue);
line_v2 := line(origin, v2, color=red);
line_u1 := line(origin, u1, color=green);
line_u2 := line(origin, u2, color=yellow);

# Display the lines together
display(line_v1, line_v2, line_u1, line_u2, axes=normal, scaling=constrained);

```

$$v1 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$u1 := \left( \frac{2\sqrt{13}}{13} \mid \frac{3\sqrt{13}}{13} \mid 0 \right)$$

$$u2 := \left( \frac{52}{169} \mid -\frac{18\sqrt{13}}{169} \mid 0 \right)$$

$$origin := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$line\_v1 := CURVES \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, COLOUR(RED, 0., 0., 1.000000000) \right)$$

$$line\_v2 := CURVES \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, COLOUR(RED, 1.000000000, 0., 0.) \right)$$

$$line\_u1 := CURVES \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.554700196225229 & 0.832050294337844 & 0 \end{bmatrix}, COLOUR(RED, 0., 1.000000000, 0.) \right)$$

$$line\_u2 := CURVES \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.307692307692308 & -1.38461538461538 & 0 \end{bmatrix}, COLOUR(RED, 1.000000000, 1.000000000, 0.) \right)$$

Figure 35: Exercise 3 - plot

```

> restart;
> with(LinearAlgebra) : with(plottools) : with(plots) :
> #i
v_1 := Vector([2, 3, 0])

```

$$v_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```

> v_2 := Vector([1, -2, 3])

```

$$v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

```

> u_1 :=  $\frac{v_1}{\text{Norm}(v_1, 2)}$ 

```

$$u_1 := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

```

> u_2 :=  $\frac{(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1)}{\text{Norm}(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1, 2)}$ 

```

$$u_2 := \begin{bmatrix} \frac{21\sqrt{2158}}{2158} \\ -\frac{7\sqrt{2158}}{1079} \\ \frac{3\sqrt{2158}}{166} \end{bmatrix} \quad (4)$$

```

> # ii
> null_vector := Vector([0, 0, 0])

```

$$\text{null\_vector} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

```

> line_v1 := line(null_vector, v_1, color = purple)
line_v1 := CURVES  $\left( \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 2. & 3. & 0. \end{bmatrix} \right), \text{COLOUR}(\text{RGB}, 0.50196078, 0.,$ 

```

$$(6)$$

Figure 36: Exercise 3