WISKUNDIGE MODELLERING IN DE INGENIEURSWETENSCHAPPEN (C003788)
Faculteit Ingenieurswetenschappen en Architectuur
Universiteit Gent
AJ 2024/2025

Werkcollege 8: oplossing

1. De temperatuur van een voorwerp verandert met een snelheid die op elk ogenblik recht evenredig is met het verschil tussen de omgevingstemperatuur en de temperatuur van het voorwerp. Een verse kop koffie heeft een temperatuur van 70 graden; na 10 minuten in een eerste kamer met constante temperatuur 20 graden te hebben gestaan, is de temperatuur van de koffie teruggevallen op 40 graden.
   Hierna zet men het kopje koffie in een tweede kamer waar de constante temperatuur W heerst.

   Gevraagd:

   (i) Bepaal op elk ogenblik $t \in [0, 10]$ de temperatuur van de koffie in de eerste kamer.

   (ii) Hoe hoog dient de temperatuur W in de tweede kamer te zijn, opdat na 10 minuten in de tweede kamer te hebben gestaan, het kopje koffie terug zijn oorspronkelijke temperatuur 70 zou bereiken?

   (iii) Schets de grafiek van het volledig temperatuursverloop van het kopje koffie in $0 \leq t \leq 20$.

Solution:

(i) $T(t)$ de temperatuur van de kop koffie op elk tijdstip t, waarbij t uitgedrukt is in minuten. Aangezien de temperatuur van een voorwerp verandert met een snelheid die op elk ogenblik recht evenredig is met het verschil tussen de omgevingstemperatuur en de temperatuur van het voorwerp, bekomen we dat

$$T'(t) = k(T_{\text{omg}} - T(t)),$$

met T_{omg} de omgevingstemperatuur en $k > 0$ de evenredigheidsconstante. Deze differentiaalvergelijking kunnen we nog herschrijven als

$$T'(t) + k\,T(t) = kT_{\text{omg}}. \tag{1}$$

Uit de opgave halen we dat $T(0) = 70$, $T(10) = 40$ en $T_{\text{omg}} = 20$.

De gegeven differentiaalvergelijking (1) is niet gereduceerd. De gereduceerde differentiaalvergelijking

$$T'(t) + k\,T(t) = 0$$

heeft als algemene oplossing $C\exp(-k\,t)$, met C een arbitraire constante. Een particuliere oplossing van (1) kunnen we op het zicht bepalen als T_{omg}. Dit betekent dat de totale oplossing van (1) gegeven wordt door

$$T(t) = T_{\text{omg}} + C\exp(-k\,t).$$

Aangezien we weten dat $T(0) = 70$, vinden we dat

$$T(0) = 70 = T_{\text{omg}} + C = 20 + C,$$

waaruit volgt dat $C = 50$. Daarnaast hebben we dat $T(10) = 40$, waaruit volgt dat

$$T(10) = 40 = 20 + 50\exp(-k\,10),$$

of nog, $k = -\ln\left(\frac{2}{5}\right)\frac{1}{10} = 0.0916$. Dit betekent dat de temperatuur van de kop koffie in de eerste fase gegeven wordt door

$$T_1(t) = 20 + 50\exp(-0.0916t)$$

(ii) Stel $T_2(t)$ de temperatuur van de kop koffie in fase 2. Voor het gemak stellen we het begin van deze fase weer $t = 0$. De differentiaalvergelijking voor deze fase wordt dan

$$T_2'(t) = k(W - T_2(t))$$

De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking wordt dan

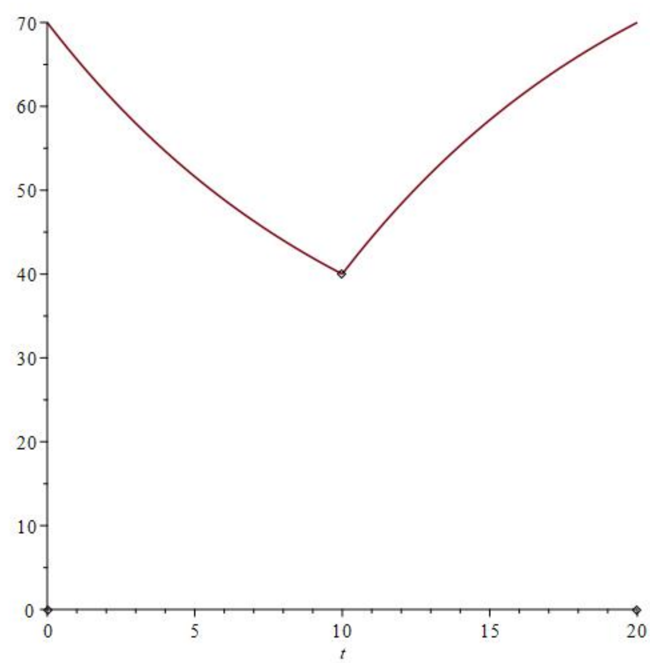
$$T_2(t) = W + (40 - W)\exp(-k\,t) = W + (40 - W)\exp(-0.0916t).$$

10 seconden in de tweede fase hebben we dat de temperatuur van de tas koffie gelijk moet zijn aan 70, met andere woorden

$$T_2(10) = 70 = W + (40 - W)\exp(-0.916).$$

Hieruit volgt dat $W = 90$.

(iii) Met Maple kunnen we een grafiek maken:



2. Een vloeistoftank met een capaciteit van V liter bevat aanvankelijk W liter ($W < V$) water, waarin Z kilogram zout is opgelost.
Tijdens de eerste fase stroomt zuiver water de tank binnen aan een debiet van s l/min. Het door roeren homogeen mengsel verlaat de tank met een debiet van r l/min ($r < s$). De eerste fase stopt op het moment dat de tank volledig gevuld is.
Tijdens de tweede fase bevat het instromend water zout met een concentratie van k kg/l dewelke groter is dan de bij start van de tweede fase aanwezige concentratie zout. Het uitstroomdebiet blijft onveranderd, terwijl het instroomdebiet teruggebracht wordt tot eveneens r l/min.

   (i) Bepaal op elk ogenblik van de eerste fase de hoeveelheid zout in de tank.
   (ii) Bepaal op elk ogenblik van de tweede fase de hoeveelheid zout in de tank.
   (iii) Bepaal op elk ogenblik de hoeveelheid vloeistof $v(t)$ en de hoeveelheid zout $z(t)$ in de tank.
   (iv) Voorspel de waarde van $\lim_{t\to+\infty} z(t)$.
   (v) Hoelang moet de tweede fase duren om de hoeveelheid zout die in de tank aanwezig was na het beëindigen van de eerste fase te verdrievoudigen?
   (vi) Visualiseer het volledige verloop van de hoeveelheid zout in de tank in het geval waar $V = 500$, $W = 100$, $Z = 70$, $s = 15$, $r = 5$ en $k = 0,2$.

Solution: Stel $v_i(t)$ de hoeveelheid vloeistof in de tank, en $z_i(t)$ de hoeveelheid zout, tijdens fase $i = 1, 2$.

(a) De ogenblikkelijke verandering in de hoeveelheid vloeistof is

$$v_1'(t) = s - r, \quad v_1(0) = W \quad \xrightarrow{\text{M}} v_1(t) = (s-r)t + W.$$

Dit duurt tot het tijdstip t_1 waarop de tank vol is, dus $v_1(t_1) = V$. We vinden $t_1 \overset{\text{M}}{=} \frac{V-W}{s-r}$.
De ogenblikkelijke verandering in de hoeveelheid zout is

$$z_1'(t) = -r\frac{z_1(t)}{v_1(t)}, \quad z_1(0) = Z \quad \xrightarrow{\text{M}} z_1(t) = Z\,W^{-\kappa}(-rt + st + W)^{\kappa}, \quad \kappa := \frac{r}{r-s}.$$

Wanneer de eerste fase eindigt is de hoeveelheid zout $z_1(t_1) = Z_1 \overset{\text{M}}{=} V^{\kappa}W^{-\kappa}Z$.

(b) Tijdens de tweede fase is het instroom- en uitstroomdebiet gelijk. Derhalve is $v_2(t) = V$.
De ogenblikkelijke verandering in de hoeveelheid zout is

$$z_2'(t) = -r\frac{z_2(t)}{v_2(t)} + kr, \quad z_2(t_1) = Z_1$$
$$\xrightarrow{\text{M}} z_2(t) = e^{\frac{-\kappa(rt-st+V-W)}{V}}V^{\kappa}W^{-\kappa}Z - e^{\frac{-\kappa(rt-st+V-W)}{V}}Vk + Vk.$$

(c) De hoeveelheid vloeistof is

$$v : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} v_1(t) & 0 \leq t \leq t_1 \\ v_2(t) & t_1 \leq t \end{cases}.$$

De hoeveelheid zout is

$$z : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} z_1(t) & 0 \leq t \leq t_1 \\ z_2(t) & t_1 \leq t \end{cases}.$$

(d) Na heel lang wachten is de concentratie in het vat dezelfde als de instroomconcentratie:

$$\lim_{t \to +\infty} z(t) = kV.$$

(e) We zoeken het tijdstip $t_2 > t_1$ waarvoor $z(t_2) = Nz(t_1) = NZ_1$ met $N = 3$. De gevraagde duur is dan

$$t_2 - t_1 \overset{\mathrm{M}}{=} \frac{V}{r} \ln \frac{ZV^\kappa - kVW^\kappa}{NZV^\kappa - kVW^\kappa}.$$

We controleren nog of het argument van ln wel positief is. Er is gegeven dat $Z_1/V < k$ zodat

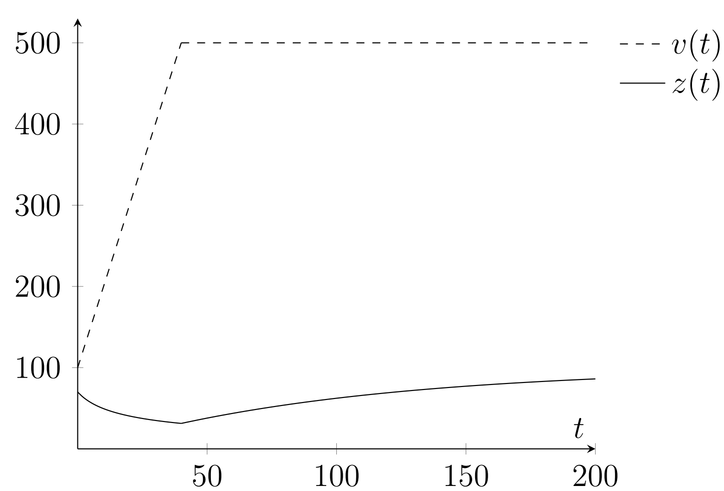
$$V^\kappa W^{-\kappa} Z < kV \implies ZV^\kappa - kVW^\kappa < 0.$$

Merk op dat fysisch $NZ_1 < kV$ dient te zijn, zie ook (d), zodat

$$NV^\kappa W^{-\kappa} Z < kV \implies NZV^\kappa - kVW^\kappa < 0.$$

Indien $NZ_1 \geq kV$ is de duur onmogelijk te bepalen.

(f) De grafiek.



```
> vglvloei:=D(v1)(t)=s-r;
> solv:=dsolve({vglvloei,v1(0)=W});
> v1:=unapply(rhs(solv),t);
> t1:=solve(v1(t)=V,t);
> vglzout:=D(z1)(t)=-r*z1(t)/v1(t);
> solz:=dsolve({vglzout,z1(0)=Z});
> z1:=unapply(rhs(solz),t);
> Z1:=simplify(z1(t1));
> vglzout:=D(z2)(t)=k*r-r*z2(t)/v2(t);
> solz:=dsolve({vglzout,z2(t1)=Z1});
> z2:=unapply(rhs(solz),t);
> v2:=t->V > v:=t->piecewise(t<0,0,0<=t and t<t1,v1(t),t1<t,v2(t)):  v(t);
> z:=t->piecewise(t<0,0,0<=t and t<t1,z1(t),t1<t,z2(t)):  z(t);
> limit(z(t),t=+infinity);
> t2:=solve(z2(t)=3*Z1,t); duur:=simplify(t2-t1);
> V:=500; W:=100; s:=15; r:=5; k:=0.2; Z:=70;
> v(t),z(t);
> evalf(3*Z1)<evalf(k*V),evalf(Z1)<evalf(k*V),evalf(duur);
> plot([v(t),z(t)],t=0..t2,color=[blue,red],legend=["vloeistof","zout"]);
```