

Stap 3: verwerking van beginvoorwaarde

\rightarrow Voor $s(n)$ te
uitevaluieren

De beginvoorwaarde leest $u(x, 0) = f(x)$, of expliciet:

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) = T_c\left(\frac{x}{L}\right)^2 \theta(L/2 - x) + T_c\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \theta(x - L/2). \quad (7.3.55)$$

De coëfficiënten s_n volgen dan uit toepassing van de cosinus orthogonaliteitsrelaties (7.3.36). Enerzijds hebben we dan:

$$s_0 = \frac{1}{L} \int_0^L dx f(x) = \frac{T_c}{12}. \quad (7.3.56)$$

Anderzijds ⁴:

$$\begin{aligned} s_{2m+1} &= \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{L}x\right) = 0 \\ s_{2m} &= \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi(2m)}{L}x\right) = T_c \frac{(-1)^m}{m^2 \pi^2} \end{aligned} \quad (7.3.57)$$

Dit levert de gezochte expansie op voor $u(x, t)$:

$$u(x, t) = T_c \left(\frac{1}{12} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 \pi^2} e^{-(\alpha \frac{2\pi m}{L})^2 t} \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \right) \quad (7.3.58)$$

In figuur 7.1 (b) tonen we de evolutie van $u(x, t)$ (getruncceerd tot op $m = 15$).

7.4 Oplossing 1D golfvergelijking

De oplossingsmethode voor de 1D golfvergelijking loopt heel gelijkaardig als deze voor de 1D warmtevergelijking (vorige sectie). We doorlopen de verschillende stappen.

Stap 1: Scheiding der veranderlijken

De op te lossen vergelijking leest nu:

$$\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t) \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, \infty[, \quad (7.4.59)$$

en we stellen hiervoor opnieuw een oplossing van de vorm

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (7.4.60)$$

⁴Voor algemene $n \in \mathbb{R}$ geeft de evaluatie van de integraal: $\frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = 2T_c \frac{(-2 \sin(n\pi) + 2n\pi \cos(n\pi/2))}{(n\pi)^3}$, waaruit de uitdrukkingen (7.3.57) volgen. Je kan zelf ook zonder expliciete berekening aantonen uit het even karakter van $f(x)$, $f(x) = f(L - x)$, dat algemeen de coëfficiënten voor oneven $n = 2m + 1$ verdwijnen, $s_{2m+1} = 0$.

gekoppeltes \rightarrow (1D)

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) = c^2 \cdot \partial_x^2 u(x,t)$$

$$x \in [a, b]$$

$$t \in [0, \infty[$$

$$\text{Dirichlet: } u(a,t) = u_0$$

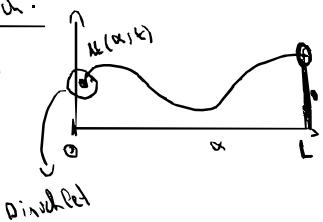
$$\text{Neumann: } \int_a u(x,t) \Big|_{x=a} = g_a$$

Beginnen:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \int_a u(x,t) \Big|_{t=0} = g(x) \end{cases}$$

Frisch:

5 min



\rightarrow messbarkeit und eindeutigkeit (eigene diff = 0) (Neumann)

Elettromagnetismus

geladene Teilchen $p(\vec{x}, t), p(\vec{x}, t)$

$$p = p_0 + \tilde{p} \quad | \quad p = p_0 + \tilde{p} \quad | \quad p = f(l) \sim \frac{f(p_0)}{p_0} + \frac{f(\tilde{p})}{\tilde{p}} \cdot \tilde{p}$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{v}) \rightarrow \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + p_0 \vec{v} \cdot \vec{\nabla} = 0$$

$$\hookrightarrow (q_2, 2\pi) \int_0^t \frac{d\tilde{p}}{dt} = - \vec{\nabla} \tilde{p} = - f(p_0) \vec{\nabla} \cdot \vec{p}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = - p_0 \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = f'(p_0) + \Delta \cdot \tilde{p}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = f'(p_0) \cdot \Delta \tilde{p}$$

$$c^2 = f'(p_0) = \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{p=p_0}$$



open ends

!!

dirichlet.

gelösten Randwerte

Neumann

voorop. Substitutie in (7.4.59) geeft dan:

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (7.4.61)$$

Het is dan duidelijk dat beide leden van deze laatste vergelijking noch van x en noch van t mogen afhangen. Zodoende vinden we:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = c^2 \sigma, \quad (7.4.62)$$

met scheidingsconstante σ . Zo valt de golfvergelijking uiteen in twee afzonderlijke vergelijkingen voor $X(x)$ en $T(t)$:

$$X''(x) = \sigma X(x), \quad (7.4.63)$$

$$T''(t) = c^2 \sigma T(t). \quad (7.4.64)$$

Stap 2: Bepaling normale modes

We gaan eerst op zoek naar oplossingen $X(x)$ van (7.4.59) voor bepaalde waarden van σ , zodat deze oplossingen voldoen aan de homogene randvoorwaarden. Concreet beschouwen we hier, net als bij het eerste voorbeeld voor de warmtevergelijking, **homogene Dirichletrandvoorwaarden** aan beide randen:

$$X(0) = X(L) = 0, \quad (7.4.65)$$

waaruit dan (zie (7.3.20)-(7.3.23)) de niet-triviale oplossingen volgen:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7.4.66)$$

horende bij $\sigma_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$.

Gegeven zo'n oplossing $X_n(x)$ vinden we de bijhorende $T_n(t)$ dan als oplossing van (7.4.64) met $\sigma = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$:

$$T''_n(t) = c^2 \sigma_n T_n(t), \quad (7.4.67)$$

waaruit dan:

$$T_n(t) = s_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + t_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right). \quad (7.4.68)$$

Bemerk dat de vergelijking voor T_n nu een tweede-orde differentiaalvergelijking is, in tegenstelling tot de eerste-orde vergelijking die we krijgen bij de warmtevergelijking. Hierdoor is de algemene oplossing een lineaire combinatie van twee oplossing ($\propto \cos$ en $\propto \sin$). We schrijven hier al algemene constantes s_n en t_n , deze zullen dan door de beginvoorwaarden worden bepaald (zie stap 3).

Nemen we de oplossingen voor X_n en T_n samen, dan vinden we uiteindelijk de normale modes:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(s_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + t_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7.4.69)$$

7.4) Toelopgang 1D golfgvl.

1: zoeken rechtdraaiende voorwaarden: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

$$X''(x) = \sigma X(x)$$

$$T''(t) = c^2 \cdot \sigma \cdot T(t)$$

2. Normale moden

$$(D) \text{ Dirichlet } \alpha(0)=X(L)=0$$

$$X_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), m=1, 2, 3, \dots$$

$$\sigma = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$$

$$T_m(t) = -c^2 \cdot \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \cdot T_m(t)$$

$$T_m(t) = D_m \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{L} t\right) + t_m \sin\left(\frac{m\pi}{L} t\right)$$

(ω : Verwachting inhomogene RV)

$$\rightarrow \text{algem. oplossing: } u_m(x,t) = T_m(t) \cdot X_m(x)$$

$$\hookrightarrow u(x,t) = \sum \left(D_m \cos\left(\frac{m\pi}{L} t\right) + t_m \sin\left(\frac{m\pi}{L} t\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

3. Verwachten BV'en

$$f(x,0) = u(x,0) = \sum_{m=1}^{+\infty} D_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$g(x) = \partial_t u(x,t) \Big|_{t=0} = \sum_{m=1}^{+\infty} t_m \frac{c_m \pi}{L} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$D_m = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L dx \cdot f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

! gelijk $f(x)$ omdat homogene randvoorwaarden

$$t_m = \frac{2}{c_m \pi} \cdot \int_0^L dx \cdot g(x) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$\underbrace{\left(\int_0^L \right)_m}_{\text{Fundamentale freq}} = \frac{2}{c_m \pi} \cdot g(x)$$

Reguliere harmonie.

en de meest algemene oplossing van de golfvergelijking (7.4.59) die voldoet aan de homogene Dirichlet randvoorwaarden vinden we dan als een expansie in deze normale modes:

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(s_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + t_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),} \quad (7.4.70)$$

met $s_1, s_2, \dots, t_1, t_2, \dots$ bepaalde reële constantes.

We houden het hier concreet overigens bij homogene randvoorwaarden, zodat er geen inhomogene randvoorwaarden moeten worden verwerkt.

Stap 3: verwerking van beginvoorwaarden

Tot slot verwerken we nog de beginvoorwaarden

$$u(x, 0) = f(x) \quad \partial_t u(x, t)|_{t=0} = g(x). \quad (7.4.71)$$

Na invullen van (7.4.70) lezen deze respectievelijk:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (7.4.72)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{cn\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (7.4.73)$$

De coëfficiënten s_1, s_2, \dots en t_1, t_2, \dots volgen dan uit toepassing van de orthogonaleitelsrelaties, in het bijzonder (7.3.35):

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) f(x), \\ t_n &= \frac{2}{cn\pi} \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) g(x). \end{aligned} \quad (7.4.74)$$

Als concreet voorbeeld beschouwen we een gespannen snaar (=homogene Dirichlet randvoorwaarden aan beide eindpunten) met lengte L die we op $t = 0$ uit rust loslaten, met initieel profiel $u(x, 0) = f(x) = 5h\frac{x}{L}$ voor $x < L/5$ en $u(x, 0) = f(x) = \frac{5}{4}h(1 - \frac{x}{L})$ voor $x \geq L/5$.

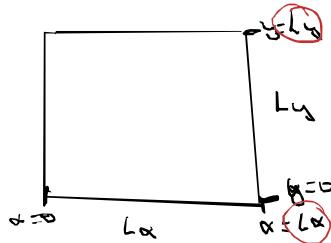
Initiële rust vertaalt zich naar $g(x) = 0$ en dus ook $t_n = 0$. De coëfficiënten s_n vinden we als:

$$s_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi n\pi}{L}x\right) \left(\frac{5x}{L}h\theta\left(\frac{L}{5} - x\right) + \frac{5}{4}h(1 - \frac{x}{L})\theta(x - \frac{L}{5}) \right) = \frac{25h}{2} \frac{\sin(\frac{n\pi}{5})}{n^2\pi^2}. \quad (7.4.75)$$

Hieruit volgt dan de oplossing (zie ook figuur 7.2 (a)):

$$u(x, t) = \frac{25h}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{5})}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{c\pi n}{L}t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right). \quad (7.4.76)$$

7.5 (infrarot) (Belangrijke voorwaarden)



$$\Delta u(\alpha, y, t) = \alpha^2 (\Delta \alpha + \Delta y^2) \cdot u(\alpha, y, t)$$

R.V. Normann: $\Delta \alpha \cdot u(\alpha, y, t) = 0$, $\Delta y \cdot u(\alpha, y, t) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha = L_x \end{array} \right|_{y=0} \quad \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y = L_y \end{array} \right|_{\alpha=L_x}$$

beginnen.

$$B-V: u(\alpha, y, 0) = f(\alpha, y)$$

1) SDV $u(\alpha, y, t) = X(\alpha) Y(y) T(t)$ (plug in)

$$X'' Y T' = \alpha^2 (X'' Y T + X Y'' T)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(\alpha)}{X(\alpha)} + \alpha^2 \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

$$X''(\alpha) = \sigma_\alpha X(\alpha), Y''(y) = \sigma_y Y(y), T'(t) = \alpha^2 (\sigma_\alpha + \sigma_y) \cdot T(t)$$

2) Normale modi

(1), $X'(0) = X'(L_x) = 0$

Aflossingen: $X_{m\alpha} = \cos\left(\frac{\pi m \alpha}{L_x}\right)$

$$m\alpha = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sigma_\alpha = -\left(\frac{\pi m \alpha}{L_x}\right)^2$$

$$Y_{m\beta} = \cos\left(\frac{\pi m \beta}{L_y}\right)$$

$$m\beta = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sigma_y = -\left(\frac{\pi m \beta}{L_y}\right)^2$$

$$T(t) = \exp\left(-\alpha^2 \pi^2 \left(\frac{m\alpha^2}{L_x^2} + \frac{m\beta^2}{L_y^2}\right) t\right)$$

$$m_{(m\alpha, m\beta)}(\alpha, y, t) = \exp\left(-\alpha^2 \pi^2 \left(\frac{m\alpha^2}{L_x^2} + \frac{m\beta^2}{L_y^2}\right) t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi m \alpha}{L_x} \cdot \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi m \beta}{L_y} \cdot y\right)$$

3) $u(\alpha, y, t) = \sum_{m_\alpha, m_\beta=0}^{+\infty} n(m_\alpha, m_\beta) \cdot m_{(m_\alpha, m_\beta)}(\alpha, y, t)$

$$u(\alpha, y, 0) = f(x_{xy}) = \sum_{m_\alpha, m_\beta=0}^{+\infty} n(m_\alpha, m_\beta) \cdot \cos\left(\frac{\pi m \alpha}{L_x} \cdot \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi m \beta}{L_y} \cdot y\right)$$

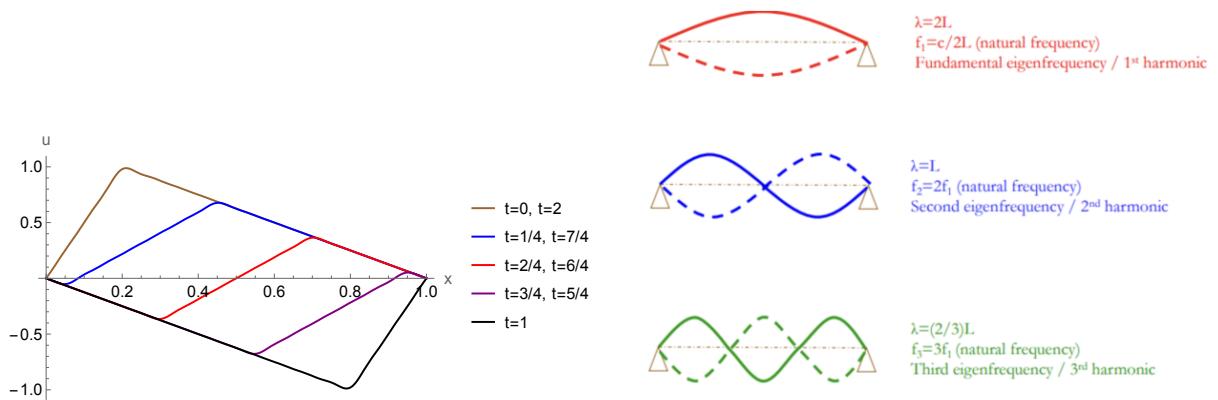
Orthogonaliteitssrelatie:

$$\int_0^L \Delta x \cos\left(\frac{\pi m \alpha}{L_x} \cdot \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi n \alpha}{L_x} \cdot \alpha\right) = \delta_{m,n}$$

$$\begin{cases} = 0 & \text{if } m \neq n \\ = 1 & \text{if } m = n \end{cases}$$

$$\begin{cases} n=0 & L \\ n \neq 0 & \frac{L}{2} \end{cases}$$

Dit is een iets duidelijker formule kunnen.



Figuur 7.2: (a) De reeksoplossing (7.4.76) voor een trillende snaar, getrunceerd tot op $n = 30$, voor $c = h = L = 1$. Zoals verwacht is de oplossing periodiek met periode $T = \frac{1}{f_1} = \frac{2L}{c} = 2$. Zie de clip The motion of a plucked string voor een slow-motion opname van een trillende snaar met een beginvoorwaarde van dezelfde vorm. (b) De eerste drie normale moden ($n = 1, 2, 3$), met golflengtes (λ in figuur) $L_n = 2L, L, \frac{2}{3}L$ en frequenties $f_n = \frac{c}{2L}, \frac{c}{L}, \frac{3c}{2L}$.

Normale moden, eigenfrequenties en resonantie.

De individuele normale moden $\propto \cos\left(\frac{c\pi n}{L}t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$ in de reeksexpansie (7.4.76), vormen staande golven (zie figuur 7.2 (b)). Dit is algemeen zo voor de normale moden van de golfvergelijking, men spreekt ook over de eigenmoden. Deze golven hebben bepaalde **eigenfrequenties** f_n .

Specifiek voor het 1D geval is dat al de eigenfrequenties f_n een geheel veelvoud zijn van de laagste frequentie f_1 . Men spreekt over de grondtoon (frequentie f_1) en de hogere orde harmonieken (frequenties f_n ($n > 1$)). Zo vinden we hier dus in het geval van Dirichlet randvoorwaarden: $f_n = \frac{cn}{2L}$ en corresponderende golfengtes $L_n = \frac{c}{f_n} = \frac{2L}{n}$. Vertalen we dit naar geluid dan komt dergelijk spectrum overeen met een zuivere toon. En dit is dan ook de reden waarom muziekinstrumenten (gitaar, piano, blaasinstrumenten) die een zuivere toon genereren een 1D karakter hebben, in tegenstelling tot bijvoorbeeld de drum die voldoet aan de 2D golfvergelijking. Verder hangt de klankkleur van een toon af van de relatieve verhouding van de verschillende harmonieken. Uit de bovenstaande analyse volgt dus dat de klankkleur geproduceerd door een snaarinstrument ook afhangt van de precieze manier waarop de snaar aangeslagen wordt (wat elke gitarist uiteraard al wist).

In realiteit zal er door dissipatieve effecten in de meeste systemen een demping optreden van de verschillende normale moden - een aangeslagen gitaarsnaar blijft niet eeuwig trillen. Dit fenomeen hebben we ook gezien voor de gedempte harmonische oscillator in hoofdstuk 5 §5.3. In dat geval bestaat er slechts één mode met eigenfrequentie $\omega_0 = 2\pi f_0$, en vonden we naast de demping, ook het resonantiefenomeen veroorzaakt door een externe bron met frequentie $f \approx f_0$. Hier hebben we verschillende eigenfrequenties f_n en zal een externe bron **resonanties** veroorzaken, wanneer de frequentie resoneert met een of meer van deze eigenfrequenties $f \approx f_n$ (zie bijvoorbeeld

de clip Guitar that Plays itself).

7.5 2D golfvergelijking: de cirkelvormige drum

Tot slot van dit hoofdstuk beschouwen we de 2D golfvergelijking:

$$\partial_t^2 u(\vec{x}, t) = c^2 \Delta u(\vec{x}, t) \quad (7.5.77)$$

met

$$\vec{x} = (x, y) \quad \text{en} \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2. \quad (7.5.78)$$

We zullen ons beperken tot het bepalen van de normale modes. Zoals hierboven besproken, geven deze modes ons de resonante frequenties en corresponderende trillingen van het medium. We stellen voor deze normale modes opnieuw een **scheiding der veranderlijken** die we in eerste instantie schrijven als:

$$u(\vec{x}, t) = A(x, y)T(t). \quad (7.5.79)$$

Substitutie in (7.5.77) resulteert dan in:

$$A(x, y)T''(t) = c^2 T(t) \Delta A(x, y) \Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{\Delta A(x, y)}{A(x, y)}, \quad (7.5.80)$$

waaruit we dan twee vergelijkingen vinden, met scheidingsconstante σ :

$$\Delta A(x, y) = \sigma A(x, y), \quad (7.5.81)$$

$$T''(t) = \sigma c^2 T(t). \quad (7.5.82)$$

Analoog als bij het 1D geval, zoeken we eerst oplossingen van (7.5.81), voor bepaalde scheidingsconstantes (=eigenwaarden) σ . De vorm van de oplossingen en de bijhorende eigenwaarden hangt sterk af van het gebied Ω waarover de golfvergelijking geldt, met bijhorende randvoorwaarden op de rand $\partial\Omega$. Hier nemen we het klassieke geval van een cirkelvormige drum (met straal R), met Dirichlet randvoorwaarden (=gespannen drumvel). Deze randvoorwaarden laten zich op een natuurlijke manier schrijven in polaire coördinaten $\vec{x}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ ⁵:

$$A(R, \theta) = 0 \quad \text{voor} \quad \theta \in [0, 2\pi[\quad (7.5.83)$$

Het ligt dan ook voor de hand van voor de normale modes A_n als anzats opnieuw een scheiding der veranderlijken, ditmaal in ρ en θ , te gebruiken:

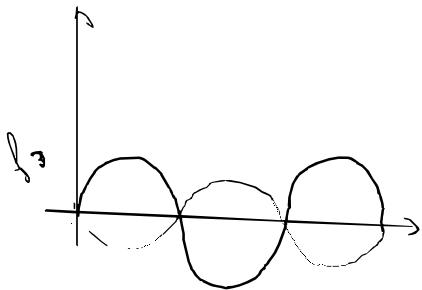
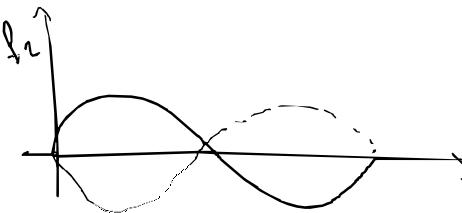
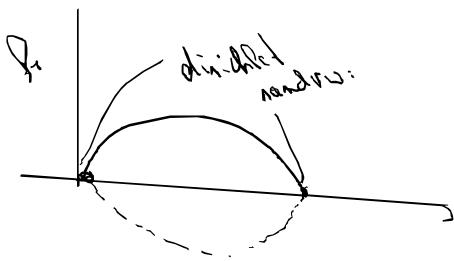
$$A(\rho, \theta) = F(\rho)G(\theta). \quad (7.5.84)$$

Substitutie in (7.5.81) levert dan, gebruik makende van de uitdrukking (3.1.22) voor de Laplacian in poolcoördinaten:

$$\left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} \partial_\theta^2 \right) A(\rho, \theta) = \sigma A(\rho, \theta) \quad (7.5.85)$$

⁵Waarbij we met licht misbruik van notatie $A(\vec{x}(\rho, \theta)) = A(\rho, \theta)$ noteren.

7.5 2D glockenförmige



$$\partial_t^2 u(\alpha, \gamma, t) = c^2 (\partial_\alpha^2 + \partial_\gamma^2) u(\alpha, \gamma, t)$$

$$(\alpha, \gamma) = (p \cos \theta, p \sin \theta)$$

$$\frac{\text{SDV}}{u(\alpha, \gamma, t)} = A(p, \theta) \cdot T(t)$$

$$\Rightarrow A T''(t) = c^2 \left(\partial_p^2 + \frac{1}{p} \partial_p + \frac{1}{p^2} \partial_\theta^2 \right) \cdot A(p, \theta) \cdot T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{c^2 (-\dots) \cdot A(p, \theta)}{A(p, \theta)}$$

$$T''(t) = c^2 \cdot \sigma \cdot T(t)$$

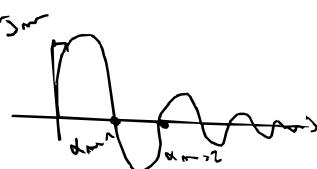
$$\left(\partial_p^2 + \frac{1}{p} \partial_p + \frac{1}{p^2} \partial_\theta^2 \right) \cdot A(p, \theta) = \sigma A(p, \theta)$$

$$A(p, \theta) = F(p) \cdot G(\theta)$$

$$(F'(p) + \frac{1}{p} F(p) + \frac{F(p)}{p^2} \cdot G''(\theta)) = \sigma \cdot F(p)$$

$$G'(\theta) = -m \omega \cdot G(\theta) \rightarrow G(\theta) = \cos(m\theta + \alpha)$$

$$F'(p) + \frac{1}{p} F(p) - \frac{F(p)}{p^2} \omega^2 = \sigma \cdot F(p)$$



$$F(p) = j_m(p\sqrt{\lambda})$$

$$\lambda = -\sigma$$

$$j_m(R\sqrt{\lambda}) = 0$$

$$R\sqrt{\lambda} = \alpha_{m,n}$$

$$\lambda = \left(\frac{\alpha_{m,n}}{k} \right)^2 = -\sigma$$

$$A_{m,n}(\rho, \theta) = \cos(m\theta + \alpha)$$

$$\Rightarrow (F''(\rho) + \frac{F'(\rho)}{\rho})G(\theta) + \frac{F(\rho)}{\rho^2}G''(\theta) = \sigma F(\rho)G(\theta) \quad (7.5.86)$$

$$\Rightarrow F''(\rho) + \frac{F'(\rho)}{\rho} + \frac{F(\rho)}{\rho^2} \frac{G''(\theta)}{G(\theta)} = \sigma F(\rho) \quad (7.5.87)$$

Aangezien deze vergelijking voor elke θ en ρ moet gelden, vinden we onmiddellijk dat G''/G constant moet zijn, of:

$$G''(\theta) = -m^2 G(\theta), \quad (7.5.88)$$

met als enige mogelijke oplossingen consistent met de periodiciteit van de hoek $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$:

$$G(\theta) = \cos(m\theta + \alpha) \quad m \in \mathbb{N} \quad (7.5.89)$$

met α een arbitraire fase. De vergelijking voor $F(\rho)$ wordt dan:

$$F''(\rho) + \frac{F'(\rho)}{\rho} - m^2 \frac{F(\rho)}{\rho^2} = \sigma F(\rho), \quad (7.5.90)$$

of na vermenigvuldiging met ρ :

$$\rho F''(\rho) + F'(\rho) - m^2 \frac{F(\rho)}{\rho} = \sigma \rho F(\rho). \quad (7.5.91)$$

Dit is de zogenaamde *Besselvergelijking*, en men kan aantonen dat deze vergelijking enkel oplossingen heeft die niet-singulier zijn in $\rho = 0$ en bovendien verdwijnen voor bepaalde waarden van ρ (wat we nodig hebben om te kunnen voldoen aan (7.5.83)), voor negatieve waarden van de scheidingsconstante $\sigma < 0$. Schrijven we $\lambda = -\sigma > 0$ dan lezen deze niet-singuliere oplossingen:

$$F(\rho) = J_m(\rho\sqrt{\lambda}), \quad (7.5.92)$$

waarbij $J_m(x)$ bekend staat als de cilindrische Besselfunctie van orde m . De randvoorwaarde (7.5.83) impliceert dan dat deze Besselfunctie moet verdwijnen op de rand $\rho = R$: $F(R) = 0$, of dus:

$$J_m(R\sqrt{\lambda}) = 0. \quad (7.5.93)$$

Dit zal uiteindelijk zorgen voor een discreet spectrum van de eigenwaarden λ . Om deze te bepalen kijken we naar de nulpunten van de Besselfuncties. Voor een gegeven m heeft $J_m(x)$ oneindig veel nulpunten $x_{m,n} > 0$ met $n = 1, 2, \dots$, gelabeld van klein naar groot. Aldus krijgen de eigenwaarden een dubbel label $\lambda_{m,n}$ met $R\lambda_{m,n}^{1/2} = x_{m,n}$. Samengevat krijgen we voor de cirkelvormige drum de normale modes (zie ook figuur 7.3):

$$A_{m,n}(\rho, \theta) = \cos(m\theta + \alpha)J_m\left(\frac{\rho}{R}x_{m,n}\right), \quad (7.5.94)$$

horende bij $\sigma = -\lambda_{m,n} = -x_{m,n}^2/R^2$. De tijdsafhankelijkheid van de volledige normale modes,

$$u_{m,n}(\rho, \theta) = A_{m,n}(\rho, \theta)T_{m,n}(t) \quad (7.5.95)$$

vinden we tot slot makkelijk uit (7.5.82):

$$T''_{m,n}(t) = -\left(\frac{cx_{m,n}}{R}\right)^2 T(t) \quad \Rightarrow \quad T_{m,n}(t) = s_{m,n} \cos\left(\frac{cx_{m,n}}{R}t\right) + t_{m,n} \sin\left(\frac{cx_{m,n}}{R}t\right). \quad (7.5.96)$$

De normale modes hebben dus eigenfrequenties

$$f_{m,n} = \frac{c\lambda_{m,n}^{1/2}}{2\pi} = \frac{cx_{m,n}}{2\pi R}. \quad (7.5.97)$$

In tegenstelling tot het 1D geval komen deze eigenfrequenties niet langer voor volgens gehele verhoudingen, vandaar dat een drum geen zuivere tonen voortbrengt⁶. Voor de vier laagste waarden van de nulpunten, en dus laagste frequenties, hebben we (afgerond):

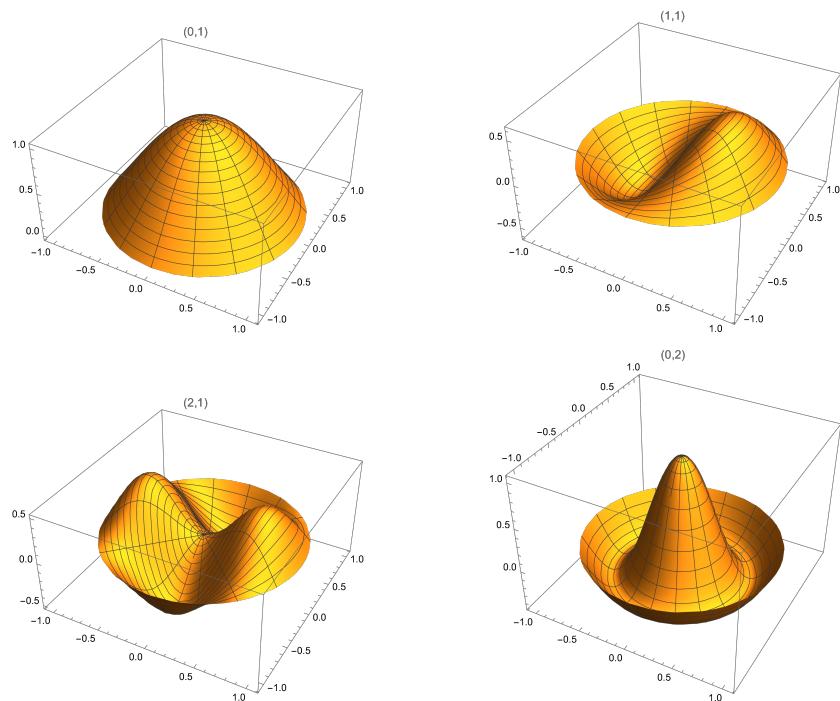
$$x_{0,1} = 2.40 \quad x_{1,1} = 3.83 \quad x_{2,1} = 5.14 \quad x_{0,2} = 5.52. \quad (7.5.98)$$

Volledig analoog als in het 1D geval vinden we een algemene oplossing dan als een superpositie van normale modes:

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{m,n} \left(s_{m,n} \cos\left(\frac{cx_{m,n}}{R}t\right) + t_{m,n} \sin\left(\frac{cx_{m,n}}{R}t\right) \right) A_{m,n}(\rho, \theta), \quad (7.5.99)$$

waarbij de vrije coëfficiënten $s_{m,n}, c_{m,n}$ volgen uit de beginvoorwaarden $f(\vec{x}) = u(\vec{x}, 0)$ en $g(\vec{x}) = \partial_t u(\vec{x}, t)|_{t=0}$. We werken dit hier niet verder uit. Zie ook het bord/werkcollege voor het makkelijkere 2D geval van een vierkante plaat.

⁶Een klassiek probleem in de wiskunde is 'Can one hear the shape of a drum?' Kunnen we met andere woorden de vorm van de rand volledig afleiden uit het frequentiespectrum. Het antwoord blijkt 'niet helemaal' te zijn (zie wikipedia).



Figuur 7.3: Voor de 2D drum, de vier normale modes (7.5.94) met laagste frequenties, $(m, s) = (0, 1), (1, 1), (2, 1), (0, 2)$, voor $R = 1$, $\alpha = 0$.