

Figuur 8.1: Algemene filosofie bij het gebruik van integraaltransformaties.

8.1 Fouriertransformatie

8.1.1 Definities en eigenschappen

De **Fouriertransformatie** voor een (reële of complexe) functie $f(t)$ van een reële variabele t wordt gedefinieerd als¹:

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (8.1.4)$$

hierbij definiëren we $\int_{-\infty}^{+\infty} dt (\dots)$ als de symmetrische limiet van de eigenlijke integraal: $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} dt (\dots)$. Voor functies die stuksgewijs continu zijn en die bovendien **absoluut integreerbaar** zijn:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt |f(t)| < +\infty, \quad (8.1.5)$$

is deze Fouriertransformatie goed gedefinieerd en zal $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$. Voor functies die bovendien stuksgewijs continu afleidbaar zijn, is ook de inverse transformatie goed gedefinieerd. Deze **inverse Fouriertransformatie** heeft nagenoeg dezelfde vorm als de originele transformatie:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{f}(\omega) e^{+i\omega t} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (8.1.6)$$

waarbij we opmerken dat voor discontinue punten $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)](t) = \frac{1}{2}(f(t_+) + f(t_-))$.

We zien dus dat de Fouriertransformatie ons toelaat van een signaal $f(t)$ in het **tijdsdomein** $t \in [-\infty, +\infty]$ te schrijven als een superpositie van frequentiecomponenten $\propto e^{i\omega t}$. Het getransformeerde signaal $\hat{f}(\omega)$ geeft ons dan het signaal in het

¹Maple hanteert dezelfde conventie, $\text{fourier}(f(t), t, \omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)$, zoals hier gedefinieerd.

frequentiedomein ${}^2\omega \in]-\infty, +\infty[$. De overeenkomsten met de Fourierreeks en de DFT (hoofdstuk 6) zijn navenant, het verschil tussen de drie transformaties zit hem in de aard van zowel het tijdsdomein als frequentiedomein. Bij de DFT zijn beide domeinen discreet en eindig, terwijl de Fourierreeks een eindig continu tijdsdomein $[-T/2, T/2]$ heeft en een oneindig discreet frequentiedomein.

Verband met Fourierreeks

Net als we de Fourierreeks kunnen construeren als limiet van de discrete Fourier transformatie (zie § 6.2), kunnen we ook de Fouriertransformatie opvatten als een limiet van Fourierreeks, waarbij we de lengte van het beschouwde interval $[-T/2, T/2]$ naar oneindig laten gaan, $T \rightarrow \infty$. We starten hiervoor van de uitdrukking (6.1.15) voor de Fourierreeks:

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} t} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \hat{f}(\omega_n) e^{i\omega_n t} \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (8.1.7)$$

Op de derde lijn identificeren we $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$, $T c_n = \hat{f}(\omega_n)$ en $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$. De laatste lijn geldt in de limiet $T \rightarrow \infty$, waarbij de sommatie een integratie over de continue variabele ω wordt. Het is in deze limiet dat we de uitdrukking voor de inverse Fouriertransformatie (8.1.6) terugvinden.

Omgekeerd kunnen we dan de uitdrukking voor de Fouriercoëfficiënten (6.1.16) op de volgende manier herschrijven:

$$\begin{aligned} T c_n = \hat{f}(\omega_n) &= \int_0^T dt f(t) e^{-i \frac{2\pi n}{T} t} \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt f(t) e^{-i \frac{2\pi n}{T} t} \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt f(t) e^{-i\omega_n t}, \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

wat we in de limiet $T \rightarrow \infty$ herkennen als de uitdrukking (8.1.4) voor de Fouriertransformatie. Hier gebruikten we op de tweede lijn de veronderstelde periodiciteit van $f(t)$, $f(t) = f(t - T)$.

²Meer algemeen spreken we ook van het Fourierdomein. Hier interpreteren we t als een tijdsvariabele, zodat $\omega = 2\pi f$ inderdaad overeenkomt met een frequentie. Zoals we verderop in dit hoofdstuk zien, zijn er even goed toepassingen waarbij het originele domein een ruimte- (i.p.v. tijds-) karakter heeft (zie verderop in dit hoofdstuk).

Fourierrepresentatie van de Dirac-delta functie

De Fouriertransformatie kan ook gebruikt worden voor **distributies**, zoals de Dirac-delta functie $\delta(t - t_0)$. Deze wordt gedefinieerd door:

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \delta(t - t_0) f(t), \quad (8.1.9)$$

voor elke functie $f(t)$ die continu is in een omgeving van t_0 . Ruwweg gezegd kunnen we de Dirac-delta functie dus opvatten als een oneindig scherp rond t_0 gepikte puls.

We halen de Fourierrepresentatie van deze Dirac-delta functie uit de combinatie van de inverse transformatie \mathcal{F}^{-1} en de originele transformatie \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} f(t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{f}(\omega) e^{i\omega t_0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{i\omega(t_0-t)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t_0-t)} \right). \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

De verwisseling van de integratievolgorde van twee oneigenlijke integralen blijkt gerechtvaardigd voor de absoluut integreerbare functies die we hier beschouwen. Uit de laatste lijn kunnen we dan een uitdrukking aflezen voor de Dirac-delta functie:

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t_0-t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t-t_0)}, \quad (8.1.11)$$

waarbij we voor de laatste gelijkheid een verandering van integratievariabele, $\omega \rightarrow -\omega$, gebruiken. Door deze uitdrukking te identificeren met (8.1.6) kunnen we dit ook nog schrijven als

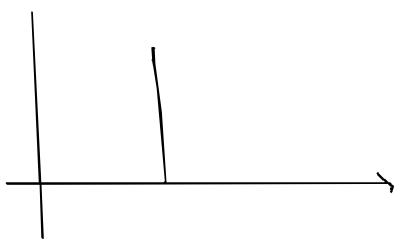
$$\mathcal{F}[\delta(t - t_0)](\omega) = e^{-i\omega t_0} \quad (8.1.12)$$

De moeilijk te hanteren Dirac-delta functie in het tijdsdomein, wordt een eenvoudige functie in het frequentie-domein.

Voorbeeld: de Fouriertransformatie van een discrete puls. Dit is een illustratief voorbeeld dat goed het verband tussen de signaalkarakteristieken in het tijdsdomein en het frequentiedomein illustreert. Voor de Fouriertransformatie van een discrete puls:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t \notin [-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2}] \\ h & -\frac{\Delta t}{2} < t < \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \quad (8.1.13)$$

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot \delta(t - t_0) f(t)$$



$$\hat{f}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dw \cdot \hat{f}(w) e^{i\omega t_0}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dw \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{i\omega(t_0-t)}$$

$$\int(t-t_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dw \cdot e^{i\omega(t_0-t)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dw \cdot e^{i\omega(t-t_0)}$$

$$\boxed{\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = e^{-i\omega t_0}}$$

Rechtshoekig puls

$$\hat{f}(a) = h \cdot \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} dt e^{-at} = h \cdot \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)$$

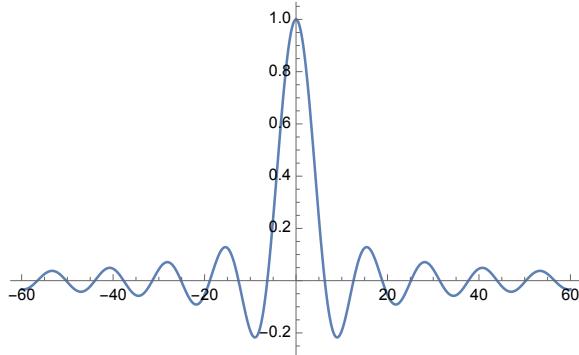
$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\Delta \omega} \int_{-\frac{\Delta \omega}{2}}^{\frac{\Delta \omega}{2}} d\omega e^{-i\omega t} \approx \frac{1}{\Delta \omega} \int_{-\frac{\Delta \omega}{2}}^{\frac{\Delta \omega}{2}} d\omega e^{-i\omega t}$$

$$\Delta \omega \gg \frac{1}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \Delta t \gg \frac{1}{\Delta \omega}$$

vinden we:

$$\begin{aligned}
 \hat{h}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \\
 &= h \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} e^{-i\omega t} dt \\
 &= h \frac{\sin(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\frac{\omega}{2}}
 \end{aligned} \tag{8.1.14}$$



Figuur 8.2: De functie (8.1.14) voor $h = \Delta t = 1$.

We zien dat deze functie gepiekt is rond $\omega = 0$, met $\hat{h}(0) = h\Delta t$. En dat de breedte $\Delta\omega$ gaat als $\frac{1}{\Delta t}$. Heel korte pulsen in het tijdsdomein, impliceert een brede functie in het frequentiedomein en omgekeerd:

$$\Delta\omega \times \Delta t \gtrsim 1 \tag{8.1.15}$$

Dit fenomeen is welbekend in de muziek, waar heel korte staccato's onvermijdelijk een spreiding $\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t}$ voor de geluidsfrequenties betekenen. Het is ook een belangrijke wetmatigheid bij communicatie. Het maximum aantal bits dat per seconde kan worden verstuurd, f_B is begrensd door de bandbreedte $\Delta\omega$ van het communicatiekanaal: $f_B \sim 1/\Delta t \lesssim \Delta\omega$. Dezelfde wiskundige relatie speelt ook in de kwantumphysica waarbij een deeltje door een golffunctie wordt beschreven. Hierbij beschrijft de golffunctie in het 'tijdsdomein' dan de spreiding in de positie x en deze in het 'frequentiedomein' de spreiding in het momentum $p = \hbar\omega$ van het deeltje. Wat dan uiteindelijk $\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar$ geeft, de beroemde onzekerheidsrelatie van Heisenberg.

Bemerkt ook dat voor $h = 1/\Delta t$, de pulsfunctie $h_{\Delta t}(t)$, in de limiet $\Delta t \rightarrow 0$ een representatie van de Dirac-delta functie geeft: $\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} h_{\Delta t}(t)$. In deze limiet vinden we voor de Fouriergetransformeerde $\hat{h}(\omega) = 1$ voor $\omega \in]-\infty, +\infty[$, wat consistent is met (8.1.12).

Eigenschappen van de Fouriertransformatie

Enkele belangrijke eigenschappen van de Fouriertransformatie zijn:

- **Translatie in de tijd:** $\mathcal{F}[f(t - a)](\omega) = e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$ met $\omega \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$;
- **Complexe toevoeging:** $\mathcal{F}[\overline{f(t)}](\omega) = \overline{\mathcal{F}[f(-t)](\omega)}$, $\omega \in \mathbb{R}$;
- **Translatie in de frequentie:** $\mathcal{F}[e^{iat} f(t)](\omega) = \hat{f}(\omega - a)$, $\omega \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$;
- **Modulatie:** $\mathcal{F}[f(t) \cos(at)](\omega) = \frac{1}{2} (\hat{f}(\omega - a) + \hat{f}(\omega + a))$, $\omega \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$;
- **Schaalwijziging:** $\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$, $\omega \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- **Tijdsreversie:** $\mathcal{F}[f(-t)](\omega) = \hat{f}(-\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.
- **Afleiding in frequentie-domein:** $\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f(t)](\omega) = -i \mathcal{F}[tf(t)](\omega)$

We geven het bewijs van de eerste eigenschap bij wijze van voorbeeld (bewijs de overige eigenschappen zelf als **oefening**). Er geldt dat

$$\mathcal{F}[f(t - a)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t - a) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} ds f(s) e^{-i\omega(s+a)}, \quad (8.1.16)$$

waarbij we de substitutie $s = t - a$ doorgevoerd hebben. Deze laatste uitdrukking kunnen we herschrijven als:

$$e^{-i\omega a} \int_{-\infty}^{+\infty} ds f(s) e^{-i\omega s} = e^{-i\omega a} \hat{f}(\omega), \quad (8.1.17)$$

waaruit het gestelde volgt.

8.1.2 Convolutietheorema

Beschouw een signaal $f(t)$ dat wordt *geconvoluteerd* met een *transferfunctie* $g(t)$:

$$F(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau g(t - \tau) f(\tau) \quad (8.1.18)$$

Voor de Fouriertransformatie van $F(t)$ krijgen we dan eenvoudigweg het product van de Fouriertransformaties van $f(t)$ en $g(t)$:

$$\mathcal{F}[(f * g)(t)](\omega) = \hat{F}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega). \quad (8.1.19)$$

Convolution theorem

$$F(t) = (f * g)(t) \quad (H = \int_{-\infty}^{+\infty} dz f(z) \cdot g(t-z))$$

$$\hat{F}(\omega) = F[f * g](\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$$



Hoppe die geometrische

$$f_T(t) \quad f_T(t) = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} dz \cdot f_C(z) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} dz f(z) h(t-z) \quad (T, \frac{1}{T})$$

$$\hat{f}_T(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \frac{\sin(\omega \cdot T)}{(\omega \cdot T)}$$

8. 1 - 3 Fouriertransformate von Ableitungen

$$F[f'(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot f'(t) \cdot e^{-i\omega t} = \cancel{f(t)} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i \omega \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot f(t) \cdot e^{-i\omega t}$$

$$F[f^{(n)}(t)](\omega) = (i\omega)^n F[f(t)](\omega)$$

Bewijs. Voor $\hat{F}(\omega)$ hebben we:

$$\begin{aligned}
 \hat{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau g(t-\tau) f(\tau) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} g(t-\tau) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f(\tau) e^{-i\omega \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{-i\omega t'} g(t') \\
 &= \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega),
 \end{aligned} \tag{8.1.20}$$

(op de derde lijn gaan we hier over op de nieuwe integratievariabele $t' = t - \tau$).

Toepassing: running mean. Dikwijs kan het interessant zijn om uit een functie $f(t)$ een 'lopend gemiddelde' (=running mean) te halen. Neem bijvoorbeeld de stap van weerdata naar klimaatdata, waarbij we geïnteresseerd zijn in de evolutie van de gemiddelde temperatuur, eerder dan de ogenblikkelijke temperatuur. Concreet willen we dan het signaal $f(t)$ vertalen naar een ogenblikkelijk gemiddelde via :

$$F_T(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} dt' f(t') \tag{8.1.21}$$

Dit is een convolutie met de pulsfunctie (8.1.13) (met $h = \frac{1}{T}$ en $\Delta t = T$):

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau h(t-\tau) f(\tau). \tag{8.1.22}$$

In het frequentiedomein wordt dit dan:

$$\hat{F}_T(\omega) = \hat{f}(\omega) \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}}. \tag{8.1.23}$$

8.1.3 Fouriertransformatie van afgeleiden

Een belangrijke eigenschap is dat de Fouriertransformatie van de afgeleide van een functie $f(t)$ op een heel eenvoudige manier gerelateerd is aan de Fouriertransformatie van de functie zelf:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f'(t)](\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt f'(t) e^{-i\omega t} \\
 &= f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \frac{d}{dt} e^{-i\omega t} \\
 &= i\omega \mathcal{F}[f(t)](\omega),
 \end{aligned} \tag{8.1.24}$$

waarbij we op de tweede lijn een partiële integratie toepasten en op de derde lijn gebruik maken van $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ wat volgt uit de absolute integreerbaarheid. Een afgeleide

folg Verzerrung

$$\partial_t^2 \phi(x,t) - c^2 \cdot \partial_x^2 \cdot \phi(x,t) = 0$$

R.v. $\begin{cases} \phi(x,t) \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \pm \infty \end{cases}$

$$\text{B.V.: } \phi(x,0) = f(x), \quad \partial_t \phi(x,t) \Big|_{t=0} = g(x)$$

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{\phi}(k,t) e^{+ikx} \quad \hat{\phi}(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi(x,t) e^{-ikx}$$

$$\partial_t^2 \hat{\phi}(k,t) + c^2 k^2 \hat{\phi}(k,t) = 0$$

$$\hat{\phi}(k,t) = \hat{\phi}_1(k) \cos ck - t + \hat{\phi}_2(k) \sin ck.$$

$$\hat{\phi}_1(k) = \hat{f}(k), \quad c k \hat{\phi}_2(k) = \hat{j}(k)$$

in het tijdsdomein vertaalt zich dus naar de vermenigvuldiging met een factor $i\omega$ in het frequentiedomein. Dit veralgemeend naar n -de orde afgeleiden:

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)](\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}[f(t)](\omega) \quad (8.1.25)$$

Hierdoor vertalen differentiaalvergelijkingen in het originele domein zich naar dikwijls makkelijker op te lossen algebraische vergelijkingen in het Fourierdomein.

Toepassing: Fouriertransformatie van golfvergelijking.

Beschouw de 1D golfvergelijking op de volledige reële as,

$$\partial_t^2 \phi(x, t) - c^2 \partial_x^2 \phi(x, t) = 0, \quad x \in]-\infty, \infty[, \quad t \in [0, +\infty[\quad (8.1.26)$$

met beginvoorwaarden:

$$\phi(x, 0) = f(x) \quad \partial_t \phi(x, t)|_{t=0} = g(x) \quad (8.1.27)$$

We lossen dit op door gebruik te maken van een Fourierrepresentatie voor de x -variabele (niet de t -variabele!):

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{\phi}(k, t) e^{ikx} \quad (8.1.28)$$

Hiervoor brengen we de vergelijkingen (8.1.26) en (8.1.30) naar het Fourierdomein (k -domein), door toepassing van de Fouriertransformatie op elke term in de vergelijking:

$$\partial_t^2 \hat{\phi}(k, t) + k^2 c^2 \hat{\phi}(k, t) = 0 \quad k \in]-\infty, \infty[, \quad t \in [0, +\infty[\quad (8.1.29)$$

$$\hat{\phi}(k, 0) = \hat{f}(k) \quad \partial_t \hat{\phi}(k, t)|_{t=0} = \hat{g}(k), \quad (8.1.30)$$

waarbij we gebruik maken van het feit dat de afgeleiden naar t commuteren met de x -integratie, $\int dx \partial_t^n(\dots) = \partial_t^n (\int dx (\dots))$, en van (8.1.25) ($\partial_x \rightarrow ik$). Voor een vaste k is (8.1.29) de harmonische vergelijking met eigenfrequentie $\omega_0 = c|k|$. Zo vinden we onmiddellijk als algemene oplossing:

$$\hat{\phi}(k, t) = \hat{\phi}_1(k) \cos ckt + \hat{\phi}_2(k) \sin ckt. \quad (8.1.31)$$

Leggen we ook nog de beginvoorwaarden op, dan krijgen we:

$$\hat{\phi}_1(k) = \hat{f}(k) \quad \text{en} \quad \hat{\phi}_2(k) = \frac{1}{ck} \hat{g}(k). \quad (8.1.32)$$

Tot slot brengen we ϕ terug naar het x -domein, en vinden we de oplossing:

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk (\hat{\phi}_1(k) \cos ckt + \hat{\phi}_2(k) \sin ckt) e^{ikx}, \quad (8.1.33)$$

met $\hat{\phi}_1(k)$ en $\hat{\phi}_2(k)$ gegeven door (8.1.32). Dezelfde strategie kan ook toegepast worden op (partiële) differentiaalvergelijkingen van een andere vorm, zie hiervoor de oefeningenlijst bij dit hoofdstuk.

Slotbemerk: specifiek voor de 1D golfvergelijking is dat de algemene oplossing kan geschreven worden als de som van een rechtslopende en een linkslopende golf, met snelheid $\pm c$:

$$\phi(x, t) = \phi_+(x - ct) + \phi_-(x + ct). \quad (8.1.34)$$

Dit zien we explicet door (8.1.33) te herschrijven:

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{\phi}_+(k) e^{ik(x-ct)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{\phi}_-(k) e^{ik(x+ct)}, \quad (8.1.35)$$

met $\hat{\phi}_{\pm}(k) = \frac{\hat{\phi}_1(k) \pm i\hat{\phi}_2(k)}{2}$.

8.2 Laplacetransformatie

8.2.1 Definitie en eigenschappen

Een beperking van de Fouriertransformatie is de voorwaarde van absolute integreerbaarheid, die bijvoorbeeld polynomiaal stijgende functies $f(t) \stackrel{\lim t \rightarrow \infty}{\sim} t^\alpha$ met $\alpha \geq -1$, of exponentieel stijgende functies $f(t) \stackrel{\lim t \rightarrow \infty}{\sim} e^{\alpha t}$ met $\alpha > 0$ uitsluit. Ook de Fouriertransformatie van de circulaire functies $\sin \omega t, \cos \omega t$ is singulier. De Laplace transformatie is een uitbreiding van de Fouriertransformatie die deze beperkingen overstijgt. Deze integraaltransformatie wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{+\infty} dt f(t) e^{-zt}}, \quad (8.2.36)$$

hier is z een complexe parameter. $\mathcal{L}[f](z)$ wordt het **Laplacebeeld** of de **Laplace-transformatie** genoemd van f . We bemerken twee belangrijke verschillen met de Fouriertransformatie:

1. Anders dan bij de Fouriertransformatie wordt er nu over het interval $[0, +\infty[$ geïntegreerd. Twee functies $f_1(t)$ en $f_2(t)$ die samenvallen op de positieve reële as, $f_1(t) = f_2(t)$ voor $t \geq 0$, hebben dus hetzelfde Laplacebeeld. We kunnen de Laplacetransformatie ook formeel herschrijven als een integraal over de volledige reële as:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \theta(t) e^{-zt}, \quad (8.2.37)$$

met $\theta(t)$ de Heaviside functie:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (8.2.38)$$

De functie $\tilde{f}(t) = f(t)\theta(t)$ verdwijnt voor $t < 0$. Dergelijke functies worden ook nog *causale functies* genoemd.