

Als illustratie schrijven we expliciet de reeksoplossing neer met Dirichlet randvoorwaarden ($u(0, t) = T_1$ en $u(L, t) = T_2$) en beginvoorwaarde

$$u(x, 0) = f(x) \begin{cases} = T_1 & x \in [0, L/2] \\ = T_2 & x \in [L/2, L] \end{cases}. \quad (7.3.39)$$

Uit (7.3.34) vinden we:

$$s_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \left(\theta\left(\frac{L}{2} - x\right)T_1 + \theta\left(x - \frac{L}{2}\right)T_2 + (T_1 - T_2)\frac{x}{L} - T_1 \right),$$

(met $\theta(x)$ de Heaviside stapfunctie, $\theta(x) = 1$ voor $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ voor $x < 0$), waaruit uiteindelijk:

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= 0 \\ s_{2n} &= (T_2 - T_1) \frac{(-1)^n}{n\pi}, \end{aligned} \quad (7.3.40)$$

resulterend in de expansie (7.3.31) voor $u(x, t)$:

$$u(x, t) = T_1\left(1 - \frac{x}{L}\right) + T_2\frac{x}{L} + (T_2 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} e^{-(\alpha \frac{2\pi n}{L})^2 t} \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right). \quad (7.3.41)$$

In fig.7.1(a) tonen we de bekomen oplossing voor specifieke waarden van T_1, T_2, L . Bemerк dat de gevonden oplossing $u(x, t)$ **voor grote t tijdsonafhankelijk** wordt. Dit is ook wat we fysisch verwachten van een (warmte-)diffusieproces, na voldoende tijd wordt een evenwichtsconfiguratie bereikt. In de oplossing (7.3.31) manifesteert dit zich in het exponentiële verval van de pre-factor bij de modes $\propto \sin(\frac{\pi n}{L}x)$. De stationaire oplossing die overblijft is de particulier oplossing $\tilde{u}(x)$:

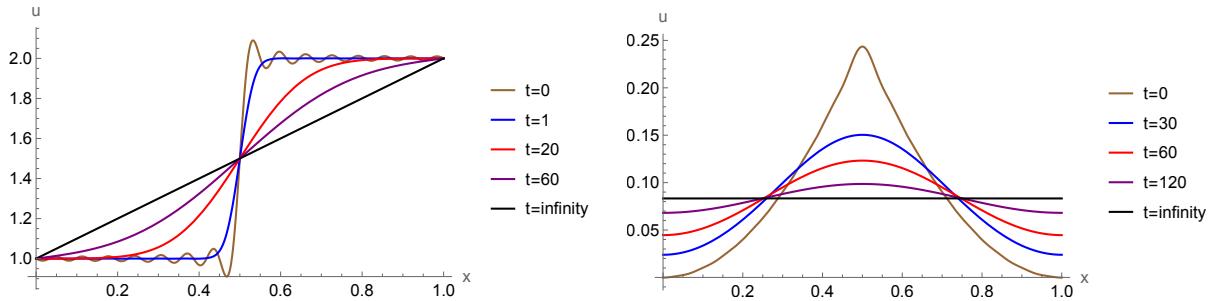
$$u(x, t) \xrightarrow{\lim_{t \rightarrow \infty}} \tilde{u}(x). \quad (7.3.42)$$

De tijdsschaal t_e waarover het evenwicht bereikt wordt, volgt dan uit de traagst afneemende exponentieel die in de expansie verschijnt. Voor het voorbeeld (7.3.41) is dit $e^{-(\alpha \frac{2\pi}{L})^2 t}$, waaruit $t_e \gtrsim (\frac{L}{2\pi\alpha})^2$. Algemeen zal deze tijdsschaal schalen als $(L/\alpha)^2$, met L de lengte van de geleider en α^2 de warmtecoëfficiënt. Ook deze schaling komt fysisch precies overeen met *diffusieve propagatie*.

Het exponentiële verval van de modes $\propto e^{-(\alpha \frac{\pi n}{L})^2 t}$ zorgt er ook voor dat voor groeiende t de reeks steeds sneller convergeert. In het bijzonder worden voor elke positieve t de hogere-orde coëfficienten gedempt, wat verklaart waarom het Gibbs fenomeen in figuur 7.1 (a) onmiddellijk verdwijnt.

7.3.1 Voorbeeldoefening

Beschouw een staaf van lengte L met een bepaalde warmtecoëfficiënt α^2 die aan elk van **de uiteinden geïsoleerd is** (= homogene Neumann randvoorwaarden). De initiële temperatuursverdeling leest: $u(x, 0) = T_0(x) = f(x) = T_c(\frac{x}{L})^2$ in het interval $[0, L/2]$ en $u(x, 0) = T_0(x) = f(x) = T_c(1 - \frac{x}{L})^2$ in het interval $[L/2, L]$. Bepaal de de temperatuursevolutie $u(x, t)$ als een reeksontwikkeling in normale modes.



Figuur 7.1: (a) De reeks (7.3.41) getrunceerd tot op $n = 15$, voor $\alpha = 0.02$, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $L = 1$. Bemerk de evolutie naar de x -afhankelijke evenwichtsconfiguratie $\tilde{u}(x)$ die lineair interpoleert tussen de twee vastgehouden temperaturen aan de uiteinden. Bemerk ook het Gibbs-fenomeen voor de reeksbenadering op $t = 0$ wanneer de exacte $u(x, t)$ discontinu is voor $x = L/2$. Deze discontinuitéit verdwijnt onmiddellijk voor $t > 0$, waardoor de volgende reeksbenaderingen veel beter convergeren. (b) De reeks (7.3.58) getrunceerd tot op $m = 15$, voor $\alpha = 0.02$, $T_c = 1$, $L = 1$. Voor de geïsoleerde warmtegeleider evolueert de temperatuur $u(x, t)$ geleidelijk aan naar een constante verdeling $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = s_0 = T_c/12$.

Stap 1: Scheiding der veranderlijken

Dit verloopt identiek als hierboven, we vinden (zie (7.3.17) en (7.3.18)):

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) = \sigma X(x), \\ T'(t) = \alpha^2 \sigma T(t). \end{array} \right. \quad (7.3.43)$$

$$(7.3.44)$$

Stap 2: Bepaling normale modes

Nu hebben we **homogene Neumann randvoorwaarden**, die zich opnieuw doorzetten naar $X(x)$:

$$X'(0) = X'(L) = 0, \quad (7.3.45)$$

met opnieuw de drie kwalitatief verschillende mogelijkheden:

- $\sigma > 0$

In dat geval hebben we (zie § 1.3 uit hoofdstuk 1) de algemene oplossing:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}, \quad (7.3.46)$$

high mode *randvoorwaarde*
en de randvoorwaarden (7.3.45) zullen opnieuw impliceeren dat $c_1 = c_2 = 0$, er bestaat dus geen niet-triviale oplossing ($X(x) \neq 0$).

- $\sigma = 0$

In dat geval hebben we de algemene lineaire oplossing:

$$X(x) = c_1 + c_2 x. \quad (7.3.47)$$

In tegenstelling tot in het (Dirichlet) geval van hierboven, bestaat er nu wel een niet-triviale oplossing. Uit $X'(0) = 0$ volgt $c_2 = 0$, waardoor we meteen ook hebben dat $X'(L) = 0$. Zo vinden we als niet-triviale oplossing van (7.3.43) horende bij $\sigma = 0$:

$$X(x) = 1. \quad (7.3.48)$$

- $\sigma < 0$

Hier hebben we de algemene oplossing:

$$X(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx), \quad (7.3.49)$$

met $\sigma = -k^2$. De eerste randvoorwaarde $X'(0) = 0$ impliceert onmiddellijk dat $c_2 = 0$. De tweede randvoorwaarde $X'(L) = 0$ leest dan: $-kc_1 \sin(kL) = 0$. Hieruit volgt dat $c_1 = 0$, tenzij $kL = \pi n$ met $n \in \mathbb{N}^+$.

Samengevat vinden we dus als niet-triviale oplossingen van (7.3.43) die voldoen aan de Neumann-randvoorwaarden (7.3.45) (bemerkt dat we starten bij $n = 0$, overeenkomend met de constante oplossing (7.3.48)):

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (7.3.50)$$

horende bij $\sigma_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$.

Gegeven zo'n oplossing $X_n(x)$ vinden we de bijkomende $T_n(t)$ dan als oplossing van (7.3.44) met $\sigma = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$:

$$T'_n(t) = \alpha^2 \sigma_n T_n(t), \quad (7.3.51)$$

waaruit:

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (7.3.52)$$

Nemen we de oplossingen voor X_n en T_n samen dan vinden we uiteindelijk de normale modes:

$$\boxed{u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (7.3.53)$$

En de meest algemene oplossing van de warmtevergelijking (7.3.13) die voldoet aan de homogene Neumann randvoorwaarden vinden we dan als reeksontwikkeling in deze normale modes:

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}, \quad (7.3.54)$$

met s_0, s_1, s_2, \dots bepaalde reële constantes.

Stap 3: verwerking van beginvoorwaarde *→ voor $s(n)$ te
uitevaluieren*

De beginvoorwaarde leest $u(x, 0) = f(x)$, of expliciet:

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) = T_c\left(\frac{x}{L}\right)^2 \theta(L/2 - x) + T_c\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \theta(x - L/2). \quad (7.3.55)$$

De coëfficiënten s_n volgen dan uit toepassing van de cosinus orthogonaliteitsrelaties (7.3.36). Enerzijds hebben we dan:

$$s_0 = \frac{1}{L} \int_0^L dx f(x) = \frac{T_c}{12}. \quad (7.3.56)$$

Anderzijds ⁴:

$$\begin{aligned} s_{2m+1} &= \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{L}x\right) = 0 \\ s_{2m} &= \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi(2m)}{L}x\right) = T_c \frac{(-1)^m}{m^2 \pi^2} \end{aligned} \quad (7.3.57)$$

Dit levert de gezochte expansie op voor $u(x, t)$:

$$u(x, t) = T_c \left(\frac{1}{12} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 \pi^2} e^{-(\alpha \frac{2\pi m}{L})^2 t} \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \right) \quad (7.3.58)$$

In figuur 7.1 (b) tonen we de evolutie van $u(x, t)$ (getruncceerd tot op $m = 15$).

7.4 Oplossing 1D golfvergelijking

De oplossingsmethode voor de 1D golfvergelijking loopt heel gelijkaardig als deze voor de 1D warmtevergelijking (vorige sectie). We doorlopen de verschillende stappen.

Stap 1: Scheiding der veranderlijken

De op te lossen vergelijking leest nu:

$$\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t) \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, \infty[, \quad (7.4.59)$$

en we stellen hiervoor opnieuw een oplossing van de vorm

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (7.4.60)$$

⁴Voor algemene $n \in \mathbb{R}$ geeft de evaluatie van de integraal: $\frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = 2T_c \frac{(-2 \sin(n\pi) + 2n\pi \cos(n\pi/2))}{(n\pi)^3}$, waaruit de uitdrukkingen (7.3.57) volgen. Je kan zelf ook zonder expliciete berekening aantonen uit het even karakter van $f(x)$, $f(x) = f(L - x)$, dat algemeen de coëfficiënten voor oneven $n = 2m + 1$ verdwijnen, $s_{2m+1} = 0$.