Werkcollege 10: oplossing

1. - Beschouw een snaar met lengte 1. De uitwijking van de snaar op elke positie x en tijdstip t wordt gegeven door $u(x,t)$. De uitwijking voldoet aan een golfvergelijking met dempingsterm:
   $$\partial_t^2 u + \partial_t u = \partial_x^2 u$$
   De snaar hangt vast aan beide uiteindes op een hoogte 0. De initiële uitwijking wordt gegeven door $f(x)$. De initiële snelheid wordt gegeven door $g(x)$.
   Gebruik scheiding der veranderlijken om de uitwijking $u(x,t)$ op elke positie $x \in [0,1]$ en elk tijdstip $t \in [0,+\infty[$ te bepalen.
   - Neem nu
   $$f(x) = -3x(x-1)$$
   $$g(x) = 2\sin(5\pi x)x$$
   en visualiseer de uitwijking (neem bv. 80 modes in de ontwikkeling) in functie van x op tijden $t = 0, 0.2, 0.5, 0.95$. Wat wordt de uitwijking indien $t \to +\infty$?

Solution:

- Scheiden der veranderlijken $u = X(x)T(t)$ levert vergelijking
  $$XT'' + XT' = TX''$$
  wat we herschrijven naar
  $$\frac{T''}{T} + \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}$$
  Beide leden moeten gelijk zijn aan een constante zodat we 2 gewone differentiaalvergelijkingen krijgen
  $$X'' = \sigma X$$
  $$T'' + T' = \sigma T$$
  We lossen de eerste op met homogene randvoorwaarden. (Merk op dat het gestelde probleem ook homogene randvoorwaarden heeft zodat we geen particuliere oplossing erbij moeten optellen.) Rekening houden met de homogene randvoorwaarden vinden we
  $$X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

end de mogelijke waarden voor de constante σ

$$\sigma_n = -(n\pi)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

De 2e differentiaal vergelijking (voor elke waarde van n) wordt

$$T_n'' + T_n' + (n\pi)^2 T_n = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

We lossen dit expliciet op door de karakteristieke vergelijking op te stellen, m.a.w. we vullen de oplossing: $T_n(t) = e^{zt}$ in en gaan op zoek naar de mogelijke waarden van z. We vinden

$$z^2 + z + (n\pi)^2 = 0$$

Met als oplossingen

$$z_\pm = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}}{2}$$

Zodat de oplossingen voor $T_n(t)$ gevonden worden als (na het nemen van de juiste lineaire combinaties, zie les gewone differentiaalvergelijkingen)

$$T_n(t) = s_n e^{-\frac{t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}}{2} t) + t_n e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}}{2} t)$$

Als totale homogene oplossing vinden we de superpositie

$$u_h(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(s_n e^{-\frac{t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}}{2} t) + t_n e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}}{2} t) \right) \sin(n\pi x)$$

wat ook onmiddelijk de volledige oplossing is aangezien we werken met homogene randvoorwaarden. Om de coëfficienten s_n, t_n te bepalen kijken we naar de beginvoorwaarden. De initiële uitwijking levert

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \sin(n\pi x)$$

De orthogonaliteitsrelaties leveren

$$s_n = 2\int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx$$

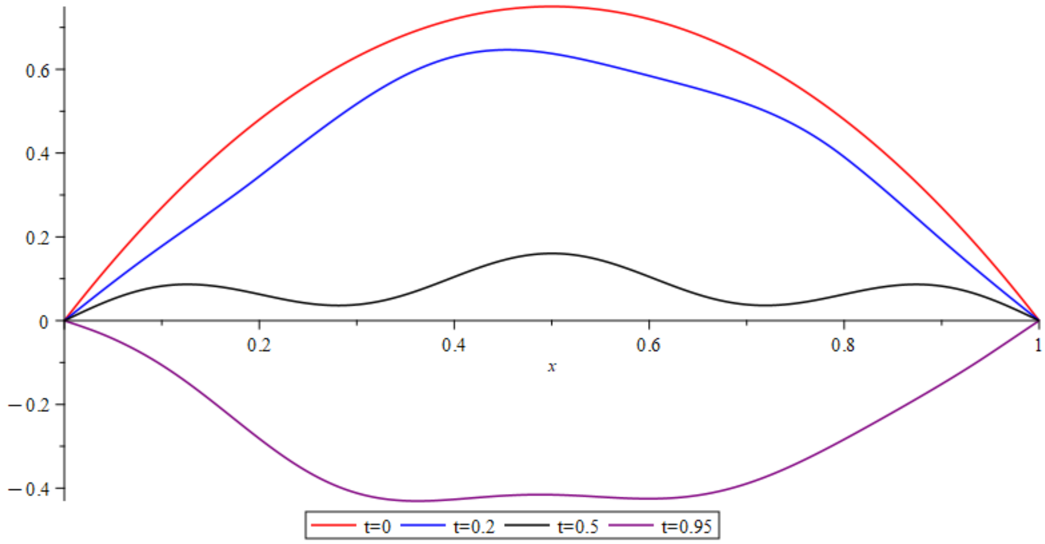
Voor de beginsnelheid vinden we (let hierbij op de **twee** termen in het rechterlid!)

$$\begin{aligned}
\partial_t u(x,0) = g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} s_n + t_n \frac{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}}{2} \right) \sin(n\pi x) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \sin(n\pi x) + \sum_{n=1}^{+\infty} t_n \frac{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}}{2} \sin(n\pi x)
\end{aligned}$$

Op de laatste regel kennen we de fourierontwikkeling van $f(x)$ zodat we vinden

$$\begin{aligned}
g(x) + \frac{1}{2} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} t_n \frac{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}}{2} \sin(n\pi x) \\
t_n &= \frac{4}{\sqrt{4n^2\pi^2 - 1}} \int_0^1 \big(g(x) + \frac{1}{2} f(x) \big) \sin(n\pi x) dx
\end{aligned}$$

- De uitwijkingen op de gevraagde tijden worden in onderstaande plot gevisualiseerd



2.
- Beschouw een staaf van lengte L met materiaalconstante α^2. Het linkeruiteinde wordt vastgehouden op temperatuur T_0, terwijl het rechteruiteinde geïsoleerd is. De begintemperatuur van de staaf wordt gegeven door de functie $g(x)$. Bepaal het temperatuursverloop $u(x,t)$ van de staaf voor elke $x \in [0, L]$ en $t \geq 0$.
  Bespreek het limietgedrag voor $t \to +\infty$?
- Pas toe en visualiseer met Maple in het geval dat $L = 2$, $T_0 = 1.5$ en $\alpha = 0.3$

$$g(x) = \frac{3}{2}x - x^2 + 1.5$$

  Geef ook de coëfficienten s_n in hun meest eenvoudige vorm.
- Doe hetzelfde voor een initiële verdeling

$$g(x) = \begin{cases} 1.5 & x < 1 \\ 0.5 & x > 1 \end{cases}$$

  Je kan hiervoor opnieuw gebruik maken van Maple commando

$$g := x- > \mathit{piecewise}(x < 1, 1.5, x > 1, 0.5);$$

Solution:

- We kunnen heel analoog als in het bordcollege te werk gaan. De temperatuursverdeling in een staaf wordt beschreven door de warmtevergelijking

$$\partial_t u(x,t) = \alpha^2 \partial_x^2 u(x,t)$$

Wat we verkort zullen noteren als

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

Voor dit geval liggen de plaats- en tijdsvariabelen in intervallen

$$x \in [0, L], \quad t \in [0, +\infty[$$

De rand- en beginvoorwaarden lezen respectievelijk

$$\begin{cases} u(0,t) = T_0 & t > 0 \\ u_x(L,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

We beginnen opnieuw met de oplossing te schrijven als som van particulier en homogeen deel, waarbij het eerste deel voor de inhomogene zorgt heeft en het tweede homogene randvoorwaarden heeft.

$$u(x,t) = u_p(x) + u_h(x,t)$$

Beide delen moeten opnieuw voldoen aan de golfvergelijking.

Stap 1: Scheiden der veranderlijken Voor het homogene deel we stellen een oplossing van de vorm

$$u_h(x,t) = X(x)T(t)$$

voorop en vullen deze in in de warmtevergelijking. Dit levert ¨

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t)$$

of nog

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Aan deze vergelijking moet voldaan zijn voor elke $x \in [0, L]$ en $t \in \mathbb{R}^+$. Aangezien het linkerlid onafhankelijk is van x en het rechterlid onafhankelijk van t moeten beide gelijk zijn aan een constante C, hier gekozen als $C = \alpha^2\sigma$ met σ een andere constante:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = C = \alpha^2\sigma$$

wat we kunnen schrijven als 2 gewone differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} X''(x) = \sigma X(x) \\ T'(t) = \alpha^2 \sigma T(t) \end{cases}$$

Stap 2: Bepaling normale modes Als $X(x)$ voldoet aan bepaalde homogene (Neumann of Dirichlet) randvoorwaarden zal $u_h(x,t) = X(x)T(t)$ aan diezelfde homogene randvoorwaarden voldoen. We gaan dus eerst op zoek naar de oplossingen van $X'' = \sigma X$ met homogene randvoorwaarden. Als 2e stap verwerken we dan de inhomogene randvoorwaarden.

– Homogene randvoorwaarden

We zoeken oplossingen van

$$X''(x) = \sigma X(x), \quad X(0) = 0, \quad X'(L) = 0$$

We hebben dus een Dirichletrandvoorwaarde in $x = 0$ en een Neumann-randvoorwaarde in $x = L$.
De op te lossen vergelijking is een gewone differentiaalvergelijking met 3 types oplossingen, afhankelijk van (het teken van) σ

1) $\sigma > 0$

$$X_1(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}$$

2) $\sigma = 0$

$$X_2(x) = c_1 + c_2 x$$

3) $\sigma < 0$

$$X_3(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx) \qquad \text{met } k^2 = -\sigma$$

Voor zowel X_1 als X_2 impliceren de randvoorwaarden dat $c_1 = c_2 = 0$ (ga dit zelf eens na!).
Voor X_3 vinden we voor de randvoorwaarde in $x = 0$

$$X_3(0) = c_1 = 0$$

Voor de randvoorwaarde in $x = L$ vinden we

$$X'(L) = kc_2 \cos(kL) = 0$$

of dus $c_2 = 0$ **tenzij (!)**

$$k = \frac{(2n+1)}{L}\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(Merk op dat hier n ook gelijk kan zijn aan 0 !)
De enige niet-triviale oplossingen van deze gewone differentiaalvergelijking met homogene randvoorwaarden zijn dus

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

of nog

$$\sigma_n = -\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

De niet-triviale oplossing X_n legt dus meteen ook de mogelijke waarden voor de constante σ vast.

Voor elk van deze keuzes van n vinden we een onafhankelijke oplossing voor de vergelijking $T' = \alpha^2 \sigma_n T$. Deze zijn

$$T_n(t) = e^{-(\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2L})^2 t}$$

Dit geeft ons voor elke n een *normale mode*

$$\boxed{u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-(\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2L})^2 t} \sin\big(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\big), \quad n \in \mathbb{Z}^+}$$

Elke lineaire combinatie van normale modes zal ook een oplossing zijn van de (lineaire) warmtevergelijking met bovenstaande homogene randvoorwaarden. De meest algemene oplossing leest dus

$$\boxed{u_h(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n e^{-(\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2L})^2 t} \sin\big(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\big)}$$

met s_n nog te bepalen reële constantes.

– <u>Inhomogene randvoorwaarden</u>

In een volgende stap gaan we op zoek naar het particuliere deel, met inhomogene randvoorwaarden.
In dit geval hebben we

$$\begin{aligned} u(0,t) &= T_0 \qquad & t \geq 0 \\ u'(L,t) &= j_L = 0 \qquad & t \geq 0 \end{aligned}$$

We vinden (tijdsonafhankelijke) oplossing

$$u_p(x) = T_0 + j_L x = T_0$$

Deze oplossing voldoen ook aan de warmtevergelijking. Als algemene oplossing vinden we

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_p(x) + u_h(x,t) \\ u(x,t) &= T_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} s_n e^{-(\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2L})^2 t} \sin\big(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\big) \end{aligned}$$

Stap 3: Verwerking beginvoorwaarde Tot slotte moeten de constantes s_n bepaald worden. Hiertoe gebruiken we de beginvoorwaarde $u(x,0) = g(x)$. Herschreven wordt dit

$$\begin{aligned} g(x) - \widetilde{u}(x) &= u_h(x,0) \\ g(x) - T_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \sin\big(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\big) \end{aligned}$$

De coëfficienten s_n kunnen nu bepaald worden met behulp van de orthogonaliteitsrelaties voor cosinussen en sinussen, in dit concrete geval gebruiken we (7.3.37). Dit levert

$$s_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\big(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\big)\big(g(x)-T_0\big)dx$$

Alles samen gevat vinden

$$u(x,t) = T_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} s_n e^{-(\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2L})^2 t} \sin\big(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\big)$$

met

$$s_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\big(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\big)(g(x)-T_0)dx$$

Tot slot zien w dat de tijdsafhankelijkheid gevat zit in (dalende) exponentiëlen. De *modes* met grootste factor in exponent zullen het snelst uitsterven, de mode met kleinste factor overleeft het langst. Als $t \to +\infty$ sterven alle modes uit zodat enkel de particuliere oplossing T_0 overblijft. We verwachten een constante eindverdeling.

- Zie Maple file voor implementatie.
- We zien opnieuw een Gibbsverschijnsel in de buurt van de discontinuïteit. Echter, bij de warmtevergelijking verdwijnt dit Gibbsverschijnsel onmiddelijk, in tegenstelling tot de warmtevergelijking. De warmteverdeling gaat zeer snel over tot een gladde verdeling.