

Slotbemerk: specifiek voor de 1D golfvergelijking is dat de algemene oplossing kan geschreven worden als de som van een rechtslopende en een linkslopende golf, met snelheid $\pm c$:

$$\phi(x, t) = \phi_+(x - ct) + \phi_-(x + ct). \quad (8.1.34)$$

Dit zien we explicet door (8.1.33) te herschrijven:

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{\phi}_+(k) e^{ik(x-ct)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{\phi}_-(k) e^{ik(x+ct)}, \quad (8.1.35)$$

met $\hat{\phi}_{\pm}(k) = \frac{\hat{\phi}_1(k) \pm i\hat{\phi}_2(k)}{2}$.

8.2 Laplacetransformatie

8.2.1 Definitie en eigenschappen

Een beperking van de Fouriertransformatie is de voorwaarde van absolute integreerbaarheid, die bijvoorbeeld polynomiaal stijgende functies $f(t) \stackrel{\lim t \rightarrow \infty}{\sim} t^\alpha$ met $\alpha \geq -1$, of exponentieel stijgende functies $f(t) \stackrel{\lim t \rightarrow \infty}{\sim} e^{\alpha t}$ met $\alpha > 0$ uitsluit. Ook de Fouriertransformatie van de circulaire functies $\sin \omega t, \cos \omega t$ is singulier. De Laplace transformatie is een uitbreiding van de Fouriertransformatie die deze beperkingen overstijgt. Deze integraaltransformatie wordt gedefinieerd als:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{+\infty} dt f(t) e^{-zt}}, \quad (8.2.36)$$

hier is z een complexe parameter. $\mathcal{L}[f](z)$ wordt het **Laplacebeeld** of de **Laplace-transformatie** genoemd van f . We bemerken twee belangrijke verschillen met de Fouriertransformatie:

1. Anders dan bij de Fouriertransformatie wordt er nu over het interval $[0, +\infty[$ geïntegreerd. Twee functies $f_1(t)$ en $f_2(t)$ die samenvallen op de positieve reële as, $f_1(t) = f_2(t)$ voor $t \geq 0$, hebben dus hetzelfde Laplacebeeld. We kunnen de Laplacetransformatie ook formeel herschrijven als een integraal over de volledige reële as:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \theta(t) e^{-zt}, \quad (8.2.37)$$

met $\theta(t)$ de Heaviside functie:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (8.2.38)$$

De functie $\tilde{f}(t) = f(t)\theta(t)$ verdwijnt voor $t < 0$. Dergelijke functies worden ook nog *causale functies* genoemd.

Laplace Transformation

$$\hat{f}(\omega) := \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot f(t) \cdot e^{-i\omega t}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

\downarrow
 $f(t) = e^t$

$$F(z) = \mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{+\infty} dt \cdot f(t) \cdot e^{-zt} \quad \begin{matrix} \text{Laplace} \\ \text{def: } z = \sigma + i\omega \end{matrix}$$

1) $t \in [0, +\infty]$, $f_1(t), f_2(t), f_3(t) = f_2(t)$, $t \geq 0$

causaal: $\hat{f}(t) = \Theta(t) \cdot f(t)$, $\Theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

Heaviside

2) Exponentiel dampeding

$$z = \sigma + i\gamma \quad |e^{-zt}| = e^{-\sigma t}$$

$f(t) \leq M e^{\sigma t}$, voor $\sigma > \sigma_0$, zodat $F(z)$ bestaat

Voorbereiden:

$\bullet f(t) = 1$ $\rightarrow F(z) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L dt \cdot e^{-zt} = \frac{1}{z} (1 - e^{-zL})$

$$= \frac{1}{z} \text{ voor } \operatorname{Re}(z) > 0$$

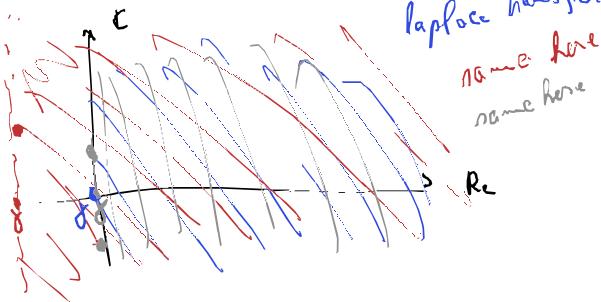
maar voor $\operatorname{Re}(z) \leq 0 \rightarrow \text{infinite dus niet definiert in Reel domain}$

$\bullet f(t) = e^{\alpha t}$

$$F(z) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L dt \cdot e^{-(z-\alpha)t}$$

$$= \frac{1}{z-\alpha} \quad \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(\alpha)$$

Laplace transformatie is gedefinieerd



$\bullet f(t) = \cos(\omega t) \quad \omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(z) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L dt \cdot \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) e^{-zt} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{e^{-(z-i\omega)t}}{e^{-i\omega t}} + \frac{e^{-(z+i\omega)t}}{e^{i\omega t}} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-i\omega} + \frac{1}{z+i\omega} \right) = \frac{z}{z^2 + \omega^2} \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

Laplace voor allen? Ween $\int_0^L f(t) e^{-zt} dt \rightarrow$ van mocht convergeren.
 $\bullet f(t) = \frac{1}{t}$ (niet convergeren voor $t=0$)

2. Schrijven we $z = x + iy$ dan hebben we $|e^{-zt}| = e^{-xt}$. Het is dankzij deze exponentiële factor dat het convergentiegedrag van de Laplaceintegraal voor $t \rightarrow +\infty$ beter is dan voor de Fourierintegraal. In het bijzonder hebben we dat, voor functies $f(t)$ die voor $t \geq 0$ voldoen aan $|f(t)| < M e^{s_0 t}$ voor reële constanten M en s_0 , de Laplaceintegraal zal convergeren indien $\operatorname{Re}(z) > s_0$, in het deel dus van het complexe vlak dat rechts ligt van de verticale rechte $x = s_0$.

Voorbeelden.

- Het Laplacebeeld van $f(t) = 1$.

$$\int_0^{+\infty} dt e^{-zt} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L dt e^{-zt} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-zL}}{z} \quad (8.2.39)$$

Schrijven we $e^{-zL} = e^{-(x+iy)L} = e^{-xL}e^{-iyL}$, dan is het duidelijk dat de integraal convergeert, $\lim_{L \rightarrow \infty} e^{-zL} = 0$, voor $x > 0$, i.e. $\operatorname{Re}(z) > 0$. Voor $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ convergeert de Laplacetransformatie niet. We vinden dus:

$$\mathcal{L}[1](z) = \frac{1}{z} \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (8.2.40)$$

- Het Laplacebeeld van $f(t) = e^{at}$ met a een complexe constante.

$$\int_0^{+\infty} dt e^{at} e^{-zt} = \int_0^{+\infty} dt e^{-(z-a)t} = \lim_{L \rightarrow +\infty} dt \int_0^L e^{-(z-a)t} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-(z-a)L}}{z - a}. \quad (8.2.41)$$

Analoog aan het voorgaande voorbeeld bekomen we dat

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} e^{-(z-a)L} = 0 \quad \text{als } \operatorname{Re}(z - a) > 0, \quad (8.2.42)$$

terwijl in alle andere gevallen deze limiet niet bestaat. We vinden dus

$$\mathcal{L}[e^{at}](z) = \frac{1}{z - a} \quad \operatorname{Re}(z - a) > 0. \quad (8.2.43)$$

- Het Laplacebeeld van $\cos(at)$ met a een reële constante. Uit $\cos(at) = \frac{1}{2}(e^{iat} + e^{-iat})$ vinden we uit het vorige voorbeeld, door toepassing van de lineariteit (8.0.2):

$$\mathcal{L}[\cos(at)](z) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{iat}] + \mathcal{L}[e^{-iat}]) = \frac{1}{2(z - ia)} + \frac{1}{2(z + ia)} = \frac{z}{z^2 + a^2} \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (8.2.44)$$

In deze voorbeelden zien we explicet, in overeenstemming met de bemerking 2 hierboven, dat voor een Laplacetransformeerbare functie $f(t)$ het Laplacebeeld $F(z)$

bestaat in een rechterdeel van complex vlak, $\operatorname{Re}(z) > \gamma_f$. Men spreekt hier over de *convergentieabscis* γ_f . Typisch kunnen we γ_f ook rechtstreeks aflezen uit het Laplacebeeld als de reële waarde van het meest rechtse singuliere punt van $F(z)$. Men kan zich ook afvragen of alle functies $f(t)$ Laplacetransformeerbaar zijn, i.e. een Laplacebeeld hebben in een deel van het complexe vlak? Het antwoord is neen, zo zal de Laplace-integraal $\mathcal{L}[f](z)$ van $f(t) = e^{t^2}$ of $f(t) = t^\alpha$ met $\alpha \leq -1$ voor geen enkele waarde van z convergeren; in het eerste geval doordat de Laplaceintegraal divergeert op oneindig, in het tweede geval doordat er een divergentie optreedt rond nul.

In tabel 8.2.1 geven we een overzicht van gangbare Laplacetransformaties:

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)](z)$
1	$\frac{1}{z}$
$\exp(at)$	$\frac{1}{z-a}$
$t^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{z^{n+1}}$
\sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2z^{\frac{3}{2}}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{z^2 + a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{z}{z^2 + a^2}$
$t \sin(ta)$	$\frac{2az}{(z^2 + a^2)^2}$
$t \cos(ta)$	$\frac{z^2 - a^2}{(z^2 + a^2)^2}$
$\sin(at + b)$	$\frac{z \sin(b) + a \cos(b)}{z^2 + a^2}$
$\cos(at + b)$	$\frac{z \cos(b) - a \sin(b)}{z^2 + a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{z^2 - a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{z}{z^2 - a^2}$

Tabel 8.1: Bekende Laplacetransformaties

Enkele eigenschappen van de Laplacetransformatie (toon deze als **oefening** zelf aan). Als de functies f en g laplacebeelden $F(z)$ en $G(z)$ bezitten voor respectievelijk $\operatorname{Re}(z) > \gamma_f$ en $\operatorname{Re}(z) > \gamma_g$, dan geldt:

- **Translatie:** $\mathcal{L}[f(t-a)\theta(t-a)](z) = \exp(-az)F(z)$, $\operatorname{Re}(z) > \gamma_f$, $a > 0$;
- **Lineariteit:** $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](z) = \alpha F(z) + \beta G(z)$, in $\operatorname{Re}(z) > \max(\gamma_f, \gamma_g)$;
- **Demping:** $\mathcal{L}[f(t) \exp(-at)](z) = F(z+a)$, $\operatorname{Re}(z+a) > \gamma_f$;
- **Schaalwijziging:** $\mathcal{L}[f(at)](z) = \frac{1}{a}F\left(\frac{z}{a}\right)$, $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{a}\right) > \gamma_f$, $a > 0$;
- **Afleiding in frequentie-domein:** $\frac{d}{dz}\mathcal{L}[f(t)](z) = \mathcal{L}[-tf(t)](z)$, $\operatorname{Re}(z) > \gamma_f$,

8.2.2 De inverse Laplacetransformatie

De Laplacetransformatie kan enkel nuttig zijn als we Laplacegetransformeerde functies $F(z)$ via de inverse transformatie kunnen terugbrengen naar het originele domein:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(z)](t). \quad (8.2.45)$$

Wat betreft het gedefinieerd zijn van deze inverse operatie hebben we vooreerst de belangrijke stelling van Lerch: Als $\mathcal{L}[f_1(t)](z) = \mathcal{L}[f_2(t)](z)$ dan is voor $t > 0$, $f_1(t) = f_2(t) + N(t)$ met

$$\int_0^{t_0} N(t) dt = 0 \quad \forall t_0 > 0 \quad (8.2.46)$$

of $N(t) \neq 0$ in een aftelbaar aantal punten. Bij ingenieurstoepassingen, waar we met (stuksgewijs) **continue functies** werken, kunnen we $N(t) = 0$ nemen, en **is de inverse Laplace transformatie dus uniek bepaald**.

Deze inverse transformatie wordt algemeen gegeven door de Bromwich integraal, die een integratie vergt in het complexe vlak, wat buiten het bestek van deze cursus valt. De inverse transformatie voor een bepaalde $F(z)$ kan in vele gevallen ook gevonden worden door het Laplacebeeld $F(z)$ via bovenstaande eigenschappen van de Laplacetransformatie te herschrijven als een lineaire combinatie van gekende Laplacebeelden uit bovenstaande tabel. Zie de voorbeelden hieronder. Ook Maple zal in vele gevallen een analytisch antwoord geven, zie de commandos 'laplace' (Laplacetransformatie) en vooral 'invlaplace' (inverse Laplacetransformatie).

Voorbeelden

- We starten met het Laplacebeeld $L(z) = \frac{z}{z^2+2z+2}$ in $\operatorname{Re}(z) > -1$. Schrijven we dit beeld als

$$L(z) = \frac{z}{1+(z+1)^2}, \quad \operatorname{Re}(z) > -1 \quad (8.2.47)$$

$$\tilde{L} = \text{const } e^{-t} - \sin t e^{-t}$$

Bewijz dampingseigenschap

$$\mathcal{L} [f(t) e^{-at}] (z) = \int_0^\infty dt f(t) e^{-(z+a)t}$$
$$= \mathcal{L} [f(t)] (z+a)$$

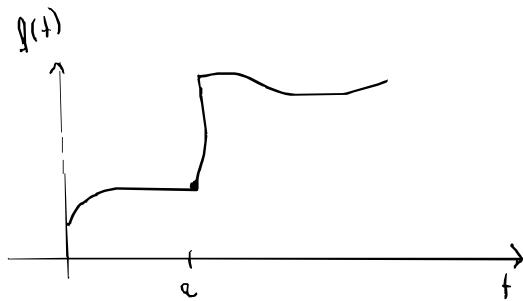
een daling in het lichtdomein is een translatie
van een logische daling in

Inverse

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$$
$$\xleftarrow{z^{-1}}$$

inv Laplace (maple)

„old school“



dan denken we aan een combinatie van cosinus, sinus en de dempingseigenschap, aangezien

$$L(z) = \frac{z+1}{1+(z+1)^2} - \frac{1}{1+(z+1)^2} = \mathcal{L}[\cos(t)\exp(-t)](z) - \mathcal{L}[\sin(t)\exp(-t)](z), \quad (8.2.48)$$

zodat een Laplace-origineel gegeven wordt door $f(t) = \exp(-t)(\cos(t) - \sin(t))$ dat continu is in $[0, +\infty[$

- Gegeven het Laplacebeeld $L(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ in $\operatorname{Re}(z) > 0$. Dit kunnen we herschrijven als

$$L(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (8.2.49)$$

Hierin herkennen we

$$L(z) = \mathcal{L}[1](z) - \mathcal{L}[\exp(-t)](z), \quad (8.2.50)$$

zodat een origineel gegeven wordt door $f(t) = (1 - \exp(-t))$ dat continu is in $[0, +\infty[$.

- Gegeven het Laplacebeeld $L(z) = \frac{z}{z^2-1}$ in $\operatorname{Re}(z) > 1$. We kunnen dit herschrijven als

$$L(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}}{z+1} \quad (8.2.51)$$

Hierin herkennen we

$$L(z) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\exp(t)](z) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[\exp(-t)](z), \quad (8.2.52)$$

zodat $f(t) = \cosh(t)$ een Laplace-origineel is dat continu is in $[0, +\infty[$.

8.2.3 Laplacetransformatie van afgeleiden

Met het oog op het oplossen differentiaalvergelijkingen, is het net als voor de Fouriertransformatie interessant van de Laplacetransformatie van de afgeleide functie $f'(t)$ te bekijken. We hebben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)](z) &= \int_0^{+\infty} dt f'(t) e^{-zt} \\ &= f(t)e^{-zt}|_0^\infty + z \int_0^{+\infty} dt f(t) e^{-zt} \\ &= z\mathcal{L}[f(t)](z) - f(0) \quad (\text{voor } \operatorname{Re}(z) > \gamma_f), \end{aligned} \quad (8.2.53)$$

waar we op de tweede lijn partieel integratie gebruikten en op de derde lijn gebruikten dat $|f(t)| < M e^{\gamma_f t}$. We hebben dus voor een continue afleidbare functie $f(t)$ met Laplacebeeld $F(z)$:

$$\mathcal{L}[f'(t)](z) = zF(z) - f(0) \quad (8.2.54)$$

Laplacetransformations von gebrochenen

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)](z) = \int_0^\infty dt f'(t) e^{-zt}$$

$$= f(t) e^{-zt} + z \cdot \int_0^\infty dt f(t) e^{-zt}$$

$$= -\dot{f}(0) + z \cdot \mathcal{L}[f(t)](z)$$

nachwende

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)](z) &= -\dot{f}^{(n-1)}(0) + z \cdot \mathcal{L}[f^{(n-1)}(t)](z) \\ &= -\dot{f}^{(n-1)}(0) - 2\dot{f}^{(n-2)}(0) - \dots - 2^{n-1} \cdot \dot{f}(0) + 2^n \cdot \mathcal{L}[f(t)](z) \end{aligned}$$

Vorfreihen

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + \omega_0^2 \cdot u(t) = \sin \omega t \\ u(0) = u_0 \\ \dot{u}(0) = u_1 \end{cases}$$

$$u(t) \rightarrow U(z) \quad \mathcal{L}[\ddot{u}(t)](z) = -u_1 - 2u_0 + z^2 U(z)$$

$$-u_1 - 2u_0 + z^2 \cdot U(z) + \omega_0^2 \cdot U(z) = \frac{\omega \omega}{z^2 + \omega^2}$$

$$U(z) = \frac{1}{(z^2 + \omega_0^2)} \left(\frac{\omega \omega}{z^2 + \omega^2} + u_1 + 2u_0 \right)$$

→ inverse:

$$u(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{u_1}{\omega_0} \cdot \sin \omega t + \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{u_1}{\omega_0} \sin \omega t \right)$$

Via inductie vinden we dan (voor voldoende afleidbare functies):

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](z) = z^n F(z) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (8.2.55)$$

Een Laplacetransformatie zal een differentiaalvergelijking dus omzetten in een algebraïsche vergelijking, met inbegrip van de beginvoorwaarden.

Voorbeeld. Als voorbeeld beschouwen we de harmonische oscillator vergelijking met externe periodieke kracht (tweede geval van § 5.3), met algemene beginvoorwaarden:

$$\begin{cases} u'' + \omega_0^2 u = a \sin \omega t, \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{cases} \quad (8.2.56)$$

De Laplacegetransformeerde vergelijking leest dan:

$$z^2 U(z) - zu_0 - u_1 + \omega_0^2 U(z) = \frac{a\omega}{z^2 + \omega^2} \quad (8.2.57)$$

Dit lossen we op naar $U(z)$:

$$U(z) = \frac{zu_0 + u_1}{z^2 + \omega_0^2} + \frac{a\omega}{(z^2 + \omega^2)(z^2 + \omega_0^2)}. \quad (8.2.58)$$

De oplossing $u(t)$ volgt dan uit de inverse Laplacetransformatie: $u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(z)](t)$. We bepalen deze hier handmatig. De inverse transformatie van de eerste term identificeren we makkelijk via de tabel (8.2.1):

$$U_1(z) = \frac{zu_0 + u_1}{z^2 + \omega_0^2} \quad \rightarrow \quad u_1(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{u_1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (8.2.59)$$

De tweede term heeft iets meer werk nodig:

$$U_2(z) = \frac{a\omega}{(z^2 + \omega^2)(z^2 + \omega_0^2)} = \frac{a\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\frac{1}{z^2 + \omega^2} - \frac{1}{z^2 + \omega_0^2} \right) \quad (8.2.60)$$

waaruit we dan opnieuw via de tabel (8.2.1) halen:

$$u_2(t) = \frac{a\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \quad (8.2.61)$$

Nemen we alles samen dan vinden we uiteindelijk:

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{L}^{-1}[U_1(z) + U_2(z)](t) \\ &= u_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{u_1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right). \end{aligned} \quad (8.2.62)$$