# wimo ex

Lupy Dog

August 2024

## Vraag 1

**Beschouw de rij gedefinieerd door de recursierelatie $y_{n+1} = y_n + ay_{n-1}$ met $y_0 = y_1 = 1$. Bepaal uit de matrixverg. voor deze rij de constante $a$ zodat de rij het volgende asymptotisch gedrag heeft:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = 3.$$

## Vraag 2

**Beschouw het volgende gekoppelde vervalproces, waarbij atoomkernen van type A vervallen maar kernen van type B of C, en kernen van type B op hun beurt vervallen maar kernen van type C (met $\alpha_i$ positieve reëelgetallen):**

$$\begin{aligned} A'(t) &= -(\alpha_1 + \alpha_2)A(t) \\ B'(t) &= -\alpha_3 B(t) + \alpha_1 A(t) \\ C'(t) &= \alpha_2 A(t) + \alpha_3 B(t) \end{aligned} \tag{1}$$

**We starten dit proces met $A(0) = A_0$ en $B(0) = C(0) = 0$.**

**Bepaal $C(t)$ door gebruik te maken van Laplacetransformaties (Mag met Maple).**

**Verklaar bovendien het asymptotisch gedrag van $C(t)$ voor grote $t$ uit de aard van het beschreven proces (één zin).**

# Vraag 3

**Beschouw de volgende genijgde golfverg.**

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(x,t) = 0$$

**Bepaal handmatig (zonder Maple) de const.** $a$ **en** $b$ **in de volgende coördinatentransformatie:** $u = x + at$**,** $v = x + bt$ **zodat de vgl. in de nieuwe coördinaten reduceert tot (met** $c$ **een const.):**

$$c\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\psi(u,v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\psi(u,v) = 0$$

**[met** $\psi(u,v) = \phi(x(u,v), t(u,v))$**]**

## Vraag 4

**Beschouw het gedeelte $R$ met de sfeer $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ begrensd tussen de vlakken $y = -\sqrt{3}$ en $y = 1$. Het oppervlak $D_1$ is de schijf die bekomen wordt door doorsnijding van het vlak $y = -\sqrt{3}$ met de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, het oppervlak $D_2$ is de schijf die bekomen wordt door doorsnijding van het vlak $y = 1$ met dezelfde bol $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Het oppervlak $U = R \cup D_1 \cup D_2$ vormt het grensoppervlak van een ingesloten volume $V$. Gegeven is een vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{e}_x + z^2\mathbf{e}_y + z^2\mathbf{e}_z$.**

a) **Maak een schets v/d beschreven geometrische situatie. Duid alle namen ($R$, $D_1$, $D_2$, $V$) aan die bij de schets passen.**

b) **Bereken zonder gebruik te maken van een integraalstelling de oppervlakte-integraal: $\oint_U d\sigma\, \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}^{->u}$, met de normaalvector uitwendig zijnd t.o.v. $V$.**

c) **Gebruik nu een integraalstelling om de totale oppervlakte-integraal te herschrijven als een volume-integraal en verklaar hiermee het gevonden resultaat in 4b.**

## Vraag 5

**Beschouw de 1D golfverg. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ als beschrijving voor geluidsgolven in een lange buis met lengte $L$. We nemen zowel de linker- als de rechterkant ($x = 0$, $x = L$, respectievelijk) rond de buis gesloten (Neumann R.V.W.).**

a) **Gezien de R.V.W. wordt de algemene opl. gevonden als een som van normale modes: $u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n c_n(t) y_n(x)$. Gebruik scheiding van veranderlijken om de D.V. voor $y_n(x)$ en $c_n(t)$ te bepalen.**

b) **Los de vgl. voor $y_n(x)$ en $c_n(t)$ op. (Leid hierbij voor $y_n(x)$ zelf expliciet de specifieke sinus- $\sin$- of cosinus- $\cos$-vormige functie af die voldoen aan de randvoorwaarden.)**

c) **Onder de gestelde randvoorwaarden is de energie $E$ constant, met $E$ gegeven door:**

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left( \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right)$$

*** Werk zonder Maple deze integraal uit voor een algemene normale mode $u_n(x,t) = c_n(t) y_n(x)$, en verifieer bovendien dat $E$ onafhankelijk is van $t$.**

*** Doe hetzelfde voor een algemene oplossing v/d vorm: $u(x,t) = \sum_n c_n(t) y_n(x)$.**

d) **Bepaal tot slot de specifieke oplossing horende bij de volgende beginvoorwaarden: $u(x,0) = 0$ en $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$.**