UNIVERSITEIT GENT

WISKUNDIGE MODELLERING IN DE INGENIEURSWETENSCHAPPEN
Faculteit Ingenieurswetenschappen en Architectuur
Universiteit Gent
AJ 2024/2025

Mock-examen: opgaven

- Examenduur: 3h15min (4h voor studenten die door een BST recht hebben op een langere examentijd)
- Open boek: pdf file van cursus en file met Maple-commando's kan via PC worden geraadpleegd
- Ook Maple-file met commando's kan worden gebruikt
- Maple: kan als hulpmiddel worden gebruikt, maar antwoorden worden schriftelijk gegeven. Schrijf in je antwoord waarvoor Maple gebruikt.

---

1. (**3 punten**) Voor algemene vierkante matrices $\mathbf{A}$ definiëren we $\sin(\mathbf{A})$, via de machtreeks van de sinus-functie:

   taylor

   $$\sin(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \mathbf{A}^{2n+1}.$$

   a. Bepaal via matrixdiagonalisatie een compacte uitdrukking (sommeer eventuele machtreeksen) voor de matrix $\sin(\mathbf{A})$, waarbij $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   b. Bepaal nu ook voor $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ een compacte uitdrukking voor $\sin(\mathbf{A})$.

2. (**6 punten**) Beschouw het gedeelte R van de cilinder $x^2 + z^2 = 1$ met $z \leq 0$ begrepen tussen de vlakken $y = -1$ en $y = 1$. Noteer met D_1 het grondvlak van de halve cilinder, en met D_2 het bovenvlak. Beschouw het oppervlak $\mathcal{S} = R \cup D_1 \cup D_2$. De rechthoek $\mathcal{C}$ in het XY-vlak is de rand van $\mathcal{S}$. Gegeven is het vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\ \mathbf{e}_x - x\ \mathbf{e}_y + z\ \mathbf{e}_z$.

   a. Maak een schets van de beschreven meetkundige situatie. Duid alle namen (R, D_1, D_2, $\mathcal{S}$ en $\mathcal{C}$) aan die bij deze schets passen.

   b. Gebruik de stelling van Stokes om de lijnintegraal

   $$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$$

   om te zetten in een oppervlakte-integraal over $\mathcal{S}$. De zin op $\mathcal{C}$ mag door uzelf gekozen worden maar moet duidelijk aangegeven worden op de figuur.

1)

$$\sin(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot A^{2n+1}$$

$$\sin(A) = \underbrace{M}_{\text{rechtereigenvectoren}} \cdot \underbrace{\sin(D)}_{\begin{pmatrix} \sin(\lambda) & 0 \\ 0 & \sin(\lambda) \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{M^{-1}}_{\text{rechtereigenvectoren}}$$

// maple

we calculeren de Jordaanvorm

$$J, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{dus } \sin(A) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin(2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^T \quad \text{// maple}$$

$$\boxed{= \frac{\sin(2)}{4} \cdot A}, \text{ met } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Als } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \sin(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin(2) \end{pmatrix} = \sin(2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

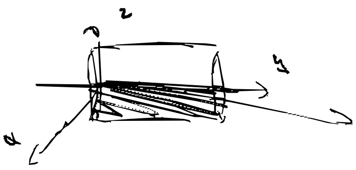
2) $x^2 + z^2 = 1$ met $z \le 0$,

$F(x,y,z) = (-y^2, -x, 1)$

$\vec{x} = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$, met $R = 1$

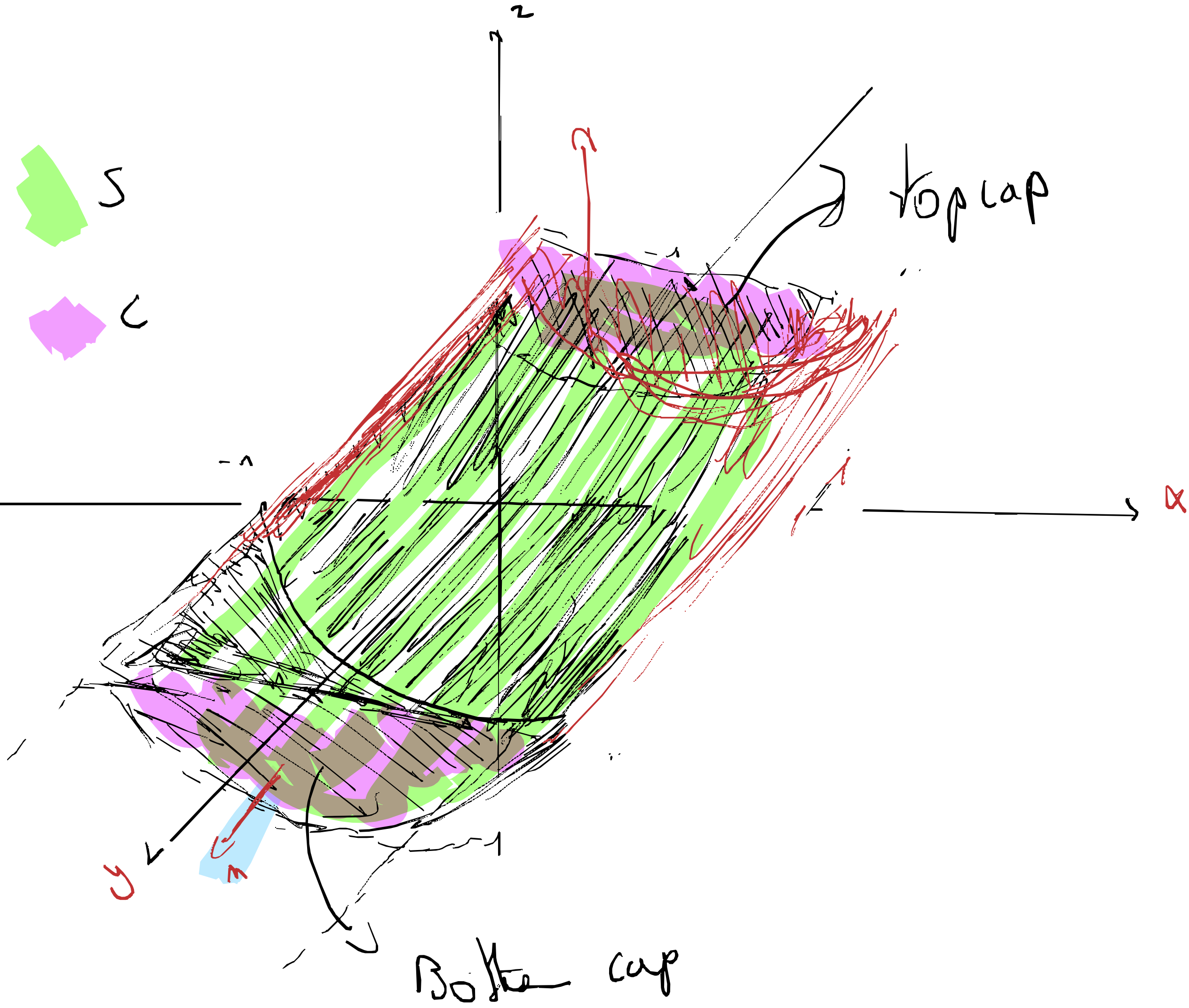
↳ cilindercoördinaten

$x^2 + z^2 = 1$ is een cilinder met elke y.



enkel bottom, dus $\pi \to 2\pi$

via maple tekenen we:



$$\int_C F \cdot dx = \int_S d\vec{\sigma}\,(\vec{\nabla} \times \vec{F}) = (0, 0, -1 + 2y)$$

eerst berekenen we de curl in Maple.

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \cdot dS$$

normaal

$n = \nabla f = (0, -1, 0)$

$$= \iint (0, 0, -1 + 2y) \cdot (0, -1, 0)\, dx\, dz = 0$$

c. Bereken de bekomen oppervlakte-integraal.

3. (**6 punten**) Beschouw de uitwijking van een bepaalde snaar met lengte $L = 2$. De partiële differentiaalvergelijking die de uitwijking $u(x,t)$ van de snaar in kwestie beschrijft leest (bemerk de tweede extra 'wrijvingsterm' in het linkerlid):

$$\partial_t^2 u(x,t) + \partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t)$$

De uitwijking $u(x,t)$ voldoet ook aan randvoorwaarden

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ \partial_x u(x,t)\big|_{x=2} = 0 \end{cases}$$

Op het begintijdstip $t = 0$ voldoen de uitwijking en snelheid van de snaar aan

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ \partial_t u(x,t)\big|_{t=0} = \Big(\sin(\frac{\pi}{4}x)\Big)^3 \end{cases}$$

- Vind de oplossing $u(x,t)$ voor $(x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty[$ met behulp van scheiden der veranderlijken. Schrijf deze als superpositie van reëele (!) normale modes en bepaal de expansiecoëfficienten in hun meest compacte vorm.
- Bespreek het limiet gedrag voor $t \to +\infty$.

4. (**3 punten**) Op N regelmatig verdeelde tijdstippen $t_n = nh$ $(n = 0, 1, \ldots N-1)$ wordt de hoogte $y(t_n) \equiv y_n$ van een voorwerp gemeten, met h de tijd tussen twee metingen.
De exacte positie van het voorwerp wordt gegeven door $y(t)$. Men wil nu, gebruik makend van de meetpunten y_n, de snelheid op de tijdstippen t_n zo goed mogelijk bepalen.

Gegeven is een eindige differentie-formule voor de snelheid in t_n voor $n = 0, 1, 2, \ldots, N-3$.

$$y'(t_n) \approx v_n = \frac{Ay_n + By_{n+1} + Cy_{n+2}}{h}$$

Bepaal de coëfficienten A, B en C zodat de bovengrens op de absolute fout $\big|y'(t_n) - v_n\big|$ kwadratisch schaalt met de stapgrootte h. (Je kan hierbij veronderstellen dat $y(t)$ voldoende braaf is.)

5. (**2 punten**) Beschouw het continue signaal

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

We bekomen een discreet signaal door deze functie te samplen als

$$x_n = f(n\Delta t), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

Toon analytisch aan dat de discrete fourier componenten $\widetilde{x}_k$ gegeven worden door

$$\widetilde{x}_k = \frac{1}{2i\sqrt{N}}\left(e^{i(\frac{\omega}{2}\Delta t - \pi\frac{k}{N})(N-1)}\frac{\sin\big((\frac{\omega}{2}\Delta t - \frac{\pi}{N}k)N\big)}{\sin\big(\frac{\omega}{2}\Delta t - \frac{\pi}{N}k\big)} - e^{-i(\frac{\omega}{2}\Delta t + \frac{\pi}{N}k)(N-1)}\frac{\sin\big((\frac{\omega}{2}\Delta t + \frac{\pi}{N}k)N\big)}{\sin\big(\frac{\omega}{2}\Delta t + \frac{\pi}{N}k\big)}\right)$$

Hiervoor kan je gebruik maken van

$$\sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

4) we hebben y_n, y_{n+1} en y_{n+2} nodig.

$y_n = y(t_n)$

$y_{n+1} = y(t_n + h)$ (1)

$y_{n+2} = y(t_n + 2h)$ (2)

$$(1) = y(t_n) + h\,y'(t_n) + \frac{h^2}{2}\cdot y''(t_n) + \frac{h^3}{6}\,y'''(t_n) + O(h^4)$$

$$(2) = y(t_n) + 2h\,y'(t_n) + \frac{4h^2}{2}\cdot y''(t_n) + \frac{8h^3}{6}\cdot y'''(t_n) + O(h^4)$$

$$y'(t_n) \approx v_n = \frac{A\,y_n + B\,y_{n+1} + C\,y_{n+2}}{h}$$

$$= \frac{A\,y(t_n) + B\left(y(t_n) + h\,y'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{6}y'''(t_n) + O(h^4)\right) + C\left(y(t_n) + 2h\,y'(t_n) + \frac{4h^2}{2}\cdot y''(t_n) + \frac{8h^3}{6}\cdot y'''(t_n) + O(h^4)\right)}{h}$$

simplified form:

$$= \frac{y(t_n)\cdot(A+B+C) + h\,y'(t_n)\left(B+2C\right) + h^2\,y''(t_n)\left(\frac{1}{2}B+2C\right) + h^3\cdot y'''(t_n)\left(\frac{1}{6}B + \frac{4}{3}C\right) + O(h^4)}{h}$$

Om een hoogstens kwadratische fout te maken moet

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ \boxed{B+2C = 1} \\ \frac{1}{2}B + 2C = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ 1 omdat dit de enige is van factor die we willen maken.

solve this in maple:

$$\begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = 2 \\ C = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

5) $f(t) = \sin(\omega t)$ (*)

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n e^{-i2\pi k n/N}$$

(*) $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, dus als $\alpha_n = \sin(\omega n \Delta t)$

$$\Rightarrow \frac{e^{i\omega n \Delta t} - e^{-i\omega n \Delta t}}{2i}$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}_k = \frac{1}{2i\sqrt{N}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{i\omega n \Delta t} - e^{-i\omega n \cdot \Delta t} \right) \cdot e^{-i2\pi \frac{k n}{N}}$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{N}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{in\left(\omega \Delta t - \frac{2\pi k}{N}\right)} - e^{-in\left(\omega \Delta t - \frac{2k\pi}{N}\right)} \right)$$

met $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1 - z^N}{1 - z}$

waar: $z_1 = e^{in\left(\omega \Delta t - \frac{2\pi k}{N}\right)}$ zo $\hat{\alpha}_k = \dfrac{1}{2i\sqrt{N}} \cdot \left[\dfrac{1 - z_1^N}{1 - z_1} - \dfrac{1 - z_2^N}{1 - z_2} \right]$

$z_2 = e^{-in\left(\omega \Delta t - \frac{2k\pi}{N}\right)}$

....

gelieve er!

3)

$$\partial_t^2 u(x,t) + \partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t)$$

randvw:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ \partial_x u(x,t)\big|_{x=L} = 0 \end{cases}$$

Begin:

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ \partial_t u(x,t)\big|_{t=0} = \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)^3 \end{cases}$$

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

$$\Leftrightarrow T''(t)\,X(x) + T'(t)\,X(x) = X''(x)\cdot T(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} + \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

(1) for $X(x)$: $X''(x) + \sigma\cdot X(x) = 0$

(2) for $T(t)$: $T''(t) + T'(t) + \sigma\, T(t) = 0$

(1): if $\sigma > 0$: $X(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$

apply $X(0) \Rightarrow 0 + B = 0$, so

$$X(x) = A\sin(kx)$$

apply $X'(L) = 0$

$$X'(L) = -Bk\sin(kx) + Ak\cos(kx) = 0$$

$$= \cos(kx) = 0 \Leftrightarrow kx = \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi\cdot 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\pi + 2n\pi}{4}$$

so $X_n(x) = A\sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{L}x\right)$

(2) $T''(t) + T'(t) + \sigma\, T(t) = 0$ met $\sigma = k^2$

$$\Rightarrow T''(t) + T'(t) + k^2\, T(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + z + k^2 = 0$$

$$T_n(t) = e^{-t/2}\left(c_1\cos\left(\sqrt{k^2 - \tfrac{1}{4}}\,t\right) + c_2\cdot\sin\left(\sqrt{k^2 - \tfrac{1}{4}}\,t\right)\right)$$

so the normal modes:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-t/2}\left(c_1\cos\left(\sqrt{k^2 - \tfrac{1}{4}}\,t\right) + c_2\cdot\sin\left(\sqrt{k^2-\tfrac{1}{4}}\,t\right)\right)\right)\sin(kx)$$

Nu zoeken we c_1 en c_2 via de beginvw:

De begin-voorwaarden waren:

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ \partial_t u(x,t)\big|_{t=0} = \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)^3 \end{cases}$$

1) $u(x,0) = 0$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_1\cdot\sin(kx) = 0, \quad c_1 = 0!$$

2) $\partial_t u(x,t)\big|_{t=0} = \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)^3$

$$\rightarrow u'(x,t)\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t/2}\left(c_2\sqrt{k^2 - \tfrac{1}{4}}\cdot\cos\left(\sqrt{k^2 - \tfrac{1}{4}}\,t\right)\right)\cdot\sin(k,x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_2\cdot\sqrt{k^2 - \tfrac{1}{4}}\cdot\sin(k,x) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)^3$$

$\parallel$ A

$$\text{So } u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A\cdot e^{-t/2}\sin\left(\sqrt{k^2 - \tfrac{1}{4}}\,t\right)\cdot\sin(kx)$$

als $t = \infty \rightarrow u(x,t) = 0!$ (zoals verwacht)