

Zero to Hero: WiMo

Niels Savvides

2024/10/30

1 Analyse in 1 veranderlijke: enkele aspecten

1.1 Continuiteitseigenschappen van functies

Functie $f(x)$ is continue over $]a, b[$ als:

1. $f(x)$ bestaat in elk punt
2. de limiet van $f(x)$ bestaat in elk punt

Continue afgeleide: $f(x)$ is continue (zie hierboven) en $f'(x)$ bestaat in elk punt. Dit kan:

1. gladde functies zijn: elk afgeleide is continue
2. stuksgewijs: $f(x)$ heeft een singulariteit, maar het bestaat in deel intervallen $]a, c[$ $]c, b[$

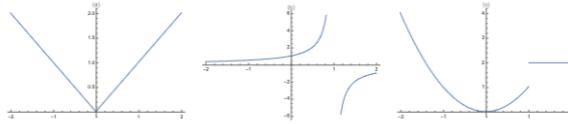


Figure 1: a) Continue functie, stuksgewijs continue afgeleide (als je afleid krijg je een singulairiteit) b) Heeft een singulairiteit, dus stuksgewijs continu, stuksgewijs glad continu afleidbaar c) Deze is glad stuksgewijs continu afleidbaar, is ook stuksgewijs continu

1.2 Taylorontwikkeling

We willen zaken gaan benaderen. Hiervoor gebruiken we:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

waarbij a het **werkpunt** is.

Veel voorkomende Taylorontwikkelingen:

See Figure 2.

Storingsrekening

Zie Figuur 4.

Of Maple solution 3.

1.3 Twee eenvoudige differentiaalvergelijkingen

1.3.1 Eerste orde differentiaalvergelijking

$$y'(x) = \lambda y(x)$$

$$\begin{aligned}
 - e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \\
 - \sin x &= 0 + x + \frac{x^2}{2} \cdot (\sin(0)) - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{k+1} \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 - \tan x &= \left(-\frac{1}{1-x} \right)^{\infty} \\
 - \frac{1}{1-x} &= 1 + x + \dots + x^n \quad \text{convergent voor } x \in]-1, 1[\\
 \hookrightarrow \text{propositie: de afgeleide van } \frac{1}{1-x} \text{ maakt negatief}\\
 \text{van door } -x \text{ daarin wordt het positief.} \\
 - \ln(1-x) &\approx - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} \right) \quad \text{van } x \in]-1, 1[
 \end{aligned}$$

Figure 2: Simply use the formulas

Als we dit uitwerken krijgen we:

$$\ln(y(x)) = \lambda x + C$$

$$y(x) = e^{\lambda x + C} = e^C e^{\lambda x} = C e^{\lambda x} \text{ met } C = y(0)$$

$$y(x) = y(0) e^{\lambda x}$$

Radioactief verval

Zie Figuur 5.

1.3.2 Tweede orde differentiaalvergelijking

$$y''(x) = \lambda y(x)$$

Hierbij heb je 3 gevallen:

1. $\lambda > 0$: $y(t) = A e^{\sqrt{\lambda}t} + B e^{-\sqrt{\lambda}t}$
2. $\lambda = 0$: $y(t) = A + Bt$
3. $\lambda < 0$: $y(t) = A \cos(\sqrt{-\lambda}t) + B \sin(\sqrt{-\lambda}t)$

1.3.3 Complexe getallen

Algemene vorm: $z = a + bi$

waarbij a reeel, b imaginair en $i^2 = -1$

$$\text{inverse: } (a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

$$\text{complement: } z = a + bi \rightarrow z^* = a - bi$$

$$\text{modulus: } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

in polaire vorm:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (\text{Dit kan via Taylor bewezen worden (zie oefeningen)})$$

Okey, nu nog een paar goniometrische formules:

```

> # x^3 + epsilon · x = 1
> f := x → x^3 + epsilon · x = 1
f := x → x^3 + e · x = 1 (1)
> # When epsilon is null, we get x = 1
> g := 1 + u · epsilon + v · epsilon^2
g := v e^2 + u e + 1 (2)
> f_subs := subs(x = g, f(x))
f_subs := (v e^2 + u e + 1)^3 + e (v e^2 + u e + 1) = 1 (3)
> f_expand := expand(f_subs)
f_expand := e^6 v^3 + 3 e^5 u v^2 + 3 e^4 u^2 v + 3 e^4 v^2 + e^3 u^3 + 6 e^3 u v + e^3 v + 3 e^2 u^2
+ e^2 u + 3 v e^2 + 3 u e + e + 1 (4)
> # First keep the left hand side
> left_hand_side := lhs(f_expand)
left_hand_side := e^6 v^3 + 3 e^5 u v^2 + 3 e^4 u^2 v + 3 e^4 v^2 + e^3 u^3 + 6 e^3 u v + e^3 v
+ 3 e^2 u^2 + e^2 u + 3 v e^2 + 3 u e + e + 1 (5)
> # Extract coeff 1 and 2
> coeff_1 := coeff(left_hand_side, epsilon, 1)
coeff_1 := 3 u + 1 (6)
> coeff_2 := coeff(left_hand_side, epsilon, 2)
coeff_2 := 3 u^2 + u + 3 v (7)
> solve({coeff_1 = 0, coeff_2 = 0}, {u, v})
{u = -1/3, v = 0} (8)
> # Final result
> result := subs({u = -1/3, v = 0}, g)
result := -e/3 + 1 (9)

```

Figure 3: Maple solution

Storingreeksing

$$\alpha^3 + \varepsilon u = 1$$

1) if $\varepsilon = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

$$\rightarrow \alpha_0 = 1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2$$

Vul in: $(1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2)^3 + \varepsilon(1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2) \approx 1$

$(1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2)^3 \approx 1$

1) 1.

2) $3\alpha_1 \varepsilon$ (fint en dan)

$\Rightarrow 3\alpha_1 \varepsilon^2 + 3\alpha_2 \varepsilon$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

~~$\Rightarrow 3\alpha_1 \varepsilon + \varepsilon^2(2\alpha_1^2 + 3\alpha_1) + \varepsilon(1 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2) \approx 1$~~

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 3\alpha_1 + 1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{3}\varepsilon$$

Figure 4: 1. Merk op dat als epsilon 0 is, dan is $x = 1$. Dus we benaderen value 1: $1 + \varepsilon.u + \varepsilon^2.v$. Vul dit in the main equation. Gebruik maple om dit op te lossen en vul u en v in x_1

Radioactie

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda$$

$$\Leftrightarrow \ln(N(t)) = -\lambda t + C$$

$$\Leftrightarrow N(t) = e^{-\lambda t} \cdot e^C = N_0(t)$$

$$\Leftrightarrow N(t) = N_0(t) \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\text{halveringstijd: } \frac{N_0}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{N_0(t)}{2} = N_0(t) \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right), \ln(1) = -\lambda t_{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1) = \lambda t_{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1)}{\lambda} = t_{1/2}$$

Figure 5: Vindt eerst de differentiaalvergelijking (zie eerste differentiaalvergelijking). Dan kunnen we de oplossing gelijkstellen aan $N_0/2$. Werk dit uit en je hebt $t_{1/2}$ gevonden

$$\begin{aligned}\sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ \cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\end{aligned}$$

1.3.4 Hoofdstelling van de algebra

Als we een kwadratisch veelterm hebben: $ax^2 + bx + c = 0$

Dan vinden we de nulpunten (oplossingen) met:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

met $b = -4 * a * c$ vinden we de discriminant.

2 Lineare Algebra

2.1 Lineare onafhankelijkheid

Lineare onafhankelijkheid betekent dat de vectoren niet op een lijn liggen. Dit betekent dat de determinant van de matrix niet 0 is. Maar ook dat de vectoren niet een lineaire combinatie van elkaar zijn.

Voorbeeld: beschouw de drie vectoren (we gebruiken hier al de kolom-notatie voor vectoren)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad (2.1.3)$$

Figure 6: 1. Merk op dat als epsilon 0 is, dan is $x = 1$. Dus we benaderen value 1: $1 + \epsilon.u + \epsilon^2.v$. Vul dit in the main equation. Gebruik maple om dit op te lossen en vul u en v in x_1

v_1, v_2, v_3 zijn lineair onafhankelijk. Maar v_1 en v_2 bijvoorbeeld, vormen een lineaire combinatie van v_3

2.2 Inproduct, Norm, Orthogonaliteit

- **Inproduct:** $uv = \sum_{i=1}^n u_i v_i$

- **Norm:** $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

Side note: om de **hoek** tussen 2 vectoren te vinden, $\frac{uv}{\|u\|\|v\|} = \cos(\theta)$

2.3 Gramm-Schmidt

Dit gaat ons toelaten om een basis te vinden van vectoren.

$$v_1 = u_1 / \|u_1\|$$

$$v_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1$$

$$v_x = \dots$$

Ook definieerd het dat een vector $v = v^{\parallel} + v^{\perp}$

Waarbij v^{\parallel} de projectie is van v op u en v^{\perp} de projectie op de orthogonale basis.

$$v^{\parallel} = (u_1 \dot{y})u_1 + (u_2 \dot{y})u_2 + \dots$$

2.3.1 Voorbeeld Gramm-Schmidt

Zie Figuur 7.

```

> with(LinearAlgebra):
> v_1 := Vector([1, 1, 0])
      v_1 := 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (1)

> v_2 := Vector([0, 1, 1])
      v_2 := 
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
 (2)

> v_3 := Vector([1, 0, 1])
      v_3 := 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
 (3)

> u_1 :=  $\frac{v_1}{\text{Norm}(v_1, 2)}$ 
      u_1 := 
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (4)

> u_2 :=  $\frac{(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1)}{\text{Norm}(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1, 2)}$ 
      u_2 := 
$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$
 (5)

> u_3 :=  $(v_3 - ((u_2 \cdot v_3) \cdot u_2) - ((u_1 \cdot v_3) \cdot u_1)) / \text{Norm}(v_3 - ((u_2 \cdot v_3) \cdot u_2) - ((u_1 \cdot v_3) \cdot u_1), 2)$ ;
      (6)

```

Figure 7: Hier gebruiken we dus de iteratieve formule om de basis te vinden.

Note: Dit kan uitgebreid worden naar functieruimtes. Hiervoor gaan we een oefening zien in het werkcollege.

2.4 Matrices

Typische vorm: $y = Ax$

Het **getransponeerde** is A^T , de rijen worden kolommen en omgekeerd.

Hier geldt dan dat: $(AB)^T = B^T A^T$, dus je draait de matrices om

2.5 Kolomruimte, rijruimte, nulruimte

- **Kolomruimte:** alle mogelijke lineaire combinaties van de kolommen ($K(A)$)
- **Rijruimte:** alle mogelijke lineaire combinaties van de rijen ($K(A^T)$)
- **Nulruimte:** alle vectoren die op 0 worden afgebeeld ($N(A)$ of $N(A^T)$)

Zeer belangrijk is dat:

$N(A)$ complementair is aan $K(A^T)$ en $N(A^T)$ is complementair aan $K(A)$

Bij de representatie van het vlak heb je een **rang**. Dit is basically de hoeveelheid kolommen van Q niet nul zijn.

2.5.1 Voorbeeld definities

Zie Figuur 8.

2.6 Matrix Inverse

$$x = A^{-1}y$$

Typisch gezien is dit gedaan via: $\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$

Wat heel nuttig is is dat $AA^{-1} = I$ en $A^{-1}A = I$. Dit kan heel wat schrijfwerk vermijden

Weer zoals bij transponeren geldt dat $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2.7 Projectie en kleinste kwadraten benadering

Zoals we eerder hebben gezien bij Gramm-Schmidt, kunnen we $v = v^{\parallel} + v^{\perp}$ schrijven.

We kunnen er iets abstracter boven plakken en werken met een **Projector**.

Deze is gedefinieerd als: $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ (deze vorm is niet al te belangrijk).

Met de nieuwe definitie P kunnen we nu zeggen dat $v = Pv + (I - P)v$

The following properties hold:

1. $P^2 = P$
2. $P^T = P$

2.7.1 Voorbeeld Projectie

Zie Figuur 9.

2.8 Kleinste kwadraten fit

$$x = (A^T A)^{-1} A^T y$$

Dit gaat ons toelaten om te fitten op data.

In Maple wordt dit gedaan via `LinearAlgebra:-LeastSquares`.

Vorlesung 5:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

max m:
2 a 4:

Endlich linear aufg.
holomorph!

$$K(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad n=2$$

$$N(A^T) = \overline{0}$$

$$K(A^T) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$N(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{durch rechnen darf man nur:} \quad A\alpha = 0$$

$$A\vec{\alpha} = \vec{b}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = b_1 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = b_2 \end{cases}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{b_1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{b_2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

linear Rcm:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_p + \vec{\alpha}_o$$

orthogonale Vektoren $\Delta = \perp N(A)$

Figure 8:

```

[> with(LinearAlgebra):
=> A := Matrix([[1, 0], [0, 1], [0, c]])
      A := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$
 (1)
=> p := A.(Transpose(A).A)-1.Transpose(A)
      p := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2+1} & \frac{c}{c^2+1} \\ 0 & \frac{c}{c^2+1} & \frac{c^2}{c^2+1} \end{bmatrix}$$
 (2)
=> subs(c = 0, p)
      
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 (3)

```

Figure 9:

2.9 Vierkante matrices

2.9.1 Determinant

De determinant is super handig. Hoe berekenen we deze?

Let \mathbf{A} be a 3×3 matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

The determinant of \mathbf{A} , denoted as $\det(\mathbf{A})$ or $|\mathbf{A}|$, is calculated as:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Expanding the terms, we have:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Properties:

1. $\det(A) = \det(A^T)$
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3. $\det(A) = 0 \rightarrow \text{linear dependent}$

2.10 Basic rotation matrix

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

So a typical transformation equation looks like:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ with the middle matrix being **inverse**.}$$

2.10.1 Example

See Figure 10 and 11.

Voorbeeld: geroteerde basis. Beschouw de basis $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_x = (1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_y = (0, 1)$ en de geroteerde basis $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{e}'_x = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{e}'_y = (-\sin \theta, \cos \theta)$. Wat is de transformatie, die voor een vector de componenten $\mathbf{x}' = (x', y')$ t.o.v. de geroteerde basis geeft, in functie van de originele componenten $\mathbf{x} = (x, y)$.

Figure 10: Rotation opgave

2.11 Eigenvectoren, eigenwaarden, diagonalisatie en de Jordan-decompositie

v_i is een eigenvector van A als $Av_i = \lambda_i v_i$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

- geometrische multipliciteit: aantal lineair onafhankelijke eigenvectoren (je moet de eigenvalue invullen en row echelon reduced form verkrijgen. Dan zie je hoeveel eigenvectoren er degelijk zijn)

Figuur 12 toont een voorbeeld van de multipliciteit.

- algebraïsche multipliciteit: aantal keer dat de eigenwaarde voorkomt in de determinant

Indien alle geometrische multipliciteiten gelijk zijn aan de algebraïsche multipliciteiten, dan is de matrix diagonaliseerbaar. $A = MDM^{-1}$

met D een diagonale matrix met de eigenwaarden op de diagonaal. en M een matrix met de eigenvectoren.

```

> restart: with(LinearAlgebra):
>
> M := Matrix([[cos(theta), -sin(theta)], [sin(theta), cos(theta)]])
M := 
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$
 (1)

> inv := MatrixInverse(M)
inv := 
$$\begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} & \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \\ -\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} & \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \end{bmatrix}$$
 (2)

> v := Vector([x, y])
v := 
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
 (3)

> inv . v

$$\begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta)x}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} + \frac{\sin(\theta)y}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \\ -\frac{\sin(\theta)x}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} + \frac{\cos(\theta)y}{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} \end{bmatrix}$$
 (4)

```

Figure 11: Rotation antwoord

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{det}} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 = -\lambda(\lambda - 1) - 1(-\lambda - \lambda) + 1(1 + \lambda) \\ & = -\lambda^3 + \lambda + \lambda + 1 + \lambda \\ & = -\lambda^3 + 3\lambda + 1 \end{aligned}$$

\hookrightarrow calculate eigenvalues:

$$\lambda = -1, -1, 2$$

$$\text{Eigen } \lambda_1 = -1$$

$$\xrightarrow{\text{det}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{row reduction}} \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 = -x_2 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{det}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{if } n=1, t=1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{eigen vectors} \rightarrow \text{geometric mult.} = 2$$

Figure 12: Een voorbeeld van de multipliciteit

2.12 Jordan Form

$A = M J M^{-1}$ met J een Jordan matrix. Dit is nodig indien de dimensie van de eigenruimte (geometrische multiplicitet) kleiner is dan de algebraische multiplicitet. Aka, de matrix is niet diagonaliseerbaar.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \ddots & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Figure 13: Jordan matrix

This gives us:

2.12.1 Example

See Figure 16.

2.13 Matrixmachten en iteratieve matrixvergelijkingen

$A^k = MD^kM^{-1}$ voor diagonaliseerbare matrices

$A^k = MJ^kM^{-1}$ voor niet-diagonaliseerbare matrices

met diagonaal matrix:

iteratieve matrixvergelijking: $x_k = MD^kM^{-1}x_0$ Op deze manier kun je telkens de k de stap berekenen.

Dit is enkel voor de diagonaliseerbare matrices. ($A^k = MD^kM^{-1}$)

asymptotisch gedrag: $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lambda^k(v_L * u_0)v_1$

v_1 is een fixed point in het asymptotisch gedrag.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Figure 14: Jordan matrix example

Vinden we:

$$A = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 0 & -1 & 1/2+i & 1/2-i \\ 0 & 0 & 3/2+i/2 & 3/2-i/2 \\ 0 & 0 & 1/2+i & 1/2-i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+i \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2/5+i/5 & -1/5-3i/5 \\ 0 & 2/5-i/5 & -1/5+3i/5 \end{array} \right]$$

Hieruit lezen we de eigenwaarden af: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1 - i, \lambda_4 = 1 + i$ en corresponderende (rechter)-eigenvectoren:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/2+i \\ 3/2+i/2 \\ 1/2+i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1/2-i \\ 3/2-i/2 \\ 1/2-i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3.120)$$

en linker-eigenvectoren:

$$\mathbf{v}_{L1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{L2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{L3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/5+i/5 \\ -1/5-3i/5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{L4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/5-i/5 \\ -1/5+3i/5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Figure 15: Jordan matrix solution

Voorbeeld 2: Geef voor de matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.3.122)$$

de eigenwaarden, en eigenvectoren. We vinden (opnieuw met Maple):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Jordan-vorm}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Jordan-vorm}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3.123)$$

Uit de Jordan-vorm (middenste matrix) zien we dat er twee verschillende eigenwaarden zijn: $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 2$, waarbij de algebraische multipliciteit van λ_2 gelijk is aan drie en de geometrische multipliciteit gelijk aan twee. De eigenvector \mathbf{v}_1 horende bij λ_1 lezen we af in de eerste kolom van de eerste matrix (\mathbf{M}), de twee eigenvectoren \mathbf{v}_2 en \mathbf{v}_3 horende bij λ_2 lezen we af in kolom twee en kolom vier:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.124)$$

(Uit de structuur van de Jordan-vorm volgt dat de derde kolomvector geen eigenvector is.)

Figure 16: Jordan matrix example 2

$$\mathbf{D}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Figure 17: Diagonaal matrix

2.13.1 Voorbeeld

Zie Figuur 18.

Toepassing: De Fibonacci rij: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$, is een bekende recursieve rij die blijkbaar terug te vinden is in allerhande processen in de natuur. Ze wordt bepaald door de recursie-relatie $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$, met als startvoorwaarden $x_0 = 0, x_1 = 1$. We kunnen hier als volgt een iteratieve matrixvergelijking aan associëren. Stellen we $\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix}$, dan hebben we $\mathbf{u}_k = \mathbf{A}\mathbf{u}_{k-1}$ met

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} (= \mathbf{MDM}^{-1}), \quad (2.3.132)$$

waarbij we de matrix in de laatste gelijkheid, bvb. via Maple JordanForm diagonaliseerden. Vervolgens vinden we uit (2.3.128):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k = \mathbf{MD}^k \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u}_0 &= \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad (2.3.133) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix} \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

waarbij de laatste gelijkheid benaderend geldt voor grote k . We vinden dus de uitdrukking

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \right) \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \quad (2.3.134)$$

voor de Fibonacci-getallen, alsook de asymptotische ratio $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1}/x_k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ wat de beroemde gulden snede is.

Het asymptotisch gedrag (grote k) kunnen we ook rechtstreeks uit de dominante eigenvectoren en corresponderende eigenwaarde halen. Uit (2.3.132) lezen we af dat:

$$\text{fixed point} \quad \mathbf{v}_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right) \quad \mathbf{v}_{L1} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \quad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \quad (2.3.135)$$

Uit (2.3.131) vinden we dan onmiddellijk het asymptotisch gedrag

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix} \approx \lambda_1^k (\mathbf{v}_{L1} \cdot \mathbf{u}_0) \mathbf{v}_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix}, \quad (2.3.136)$$

wat precies overeenkomt met de laatste benaderde gelijkheid in (2.3.134). Wat de asymptotische ratio x_{k+1}/x_k betreft, vinden we ook onmiddellijk $\mathbf{u}_k \approx \lambda_1 \mathbf{u}_{k-1}$, waaruit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1}/x_k = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, consistent met het eerdere resultaat.

Figure 18: Fibonacci voorbeeld

In het bovenstaande zien we dat λ_1 de dominante eigenwaarde is. Daardoor kunnen we de fixed point berekenen met:

$$\lambda_1^k (v_{L1} \cdot u_0) v_1$$

Omdat λ_1 dominant is, nemen we voor v_1 de eerste kolom van M en voor v_{L1} de eerste rij van M^{-1}

Dit kan toegepast worden in de zogezegde **Markov proces**

algemene vorm: $u_k = P u_{k-1}$ waarbij P een matrix is die de overgangen tussen de verschillende states aangeeft met probabilitet. $\sum p_{ij} = 1$

Ook goed om te weten is dat wanneer de matrix strikt positieve getallen heeft, dat matrix P een uniek dominante eigenwaarde $\lambda_1 = 1$ heeft met v_1 een positieve eigenvector. Deze v_1 is dan ook een fixed point.

2.13.2 Voorbeeld Markov proces

Zie Figuur 19 and 20.

Voorbeeld. Neem volgend eenvoudig weermodel met 3 toestanden: zonnig, bewolkt en regen. En wanneer het zonnig is, een kans van 70% dat het de volgende dag ook zonnig is, 10% kans dat het bewolkt is, en 20% kans dat het regent. Wanneer het bewolkt is, 40% kans dat het zonnig wordt, 20% kans dat het bewolkt blijft, en 40% kans dat het de volgende dag regent. En wanneer het regent, 20% kans dat het de volgende dag zonnig wordt, 30% dat het bewolkt wordt, en 50% kans dat het zal regenen. Dit geeft de volgende Markov matrix:

Figure 19: Markov proces

2.14 Matrixexponent en lineaire differentiaalvergelijkingen

Hier gaan we een matrix plaatsen de exponent.

$e^{At} = M e^{Dt} M^{-1}$ -*j* concreet voorbeeld

Algemeen:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

of

$$e^A = M e^{D} M^{-1} \quad e^A = M e^J M^{-1} \text{ (niet-diagonaliseerbare matrices)}$$

In matrix vorm zie je het volgende: 21

Note: Maple geeft de functie ‘MatrixExponential(A, t)’ om e^{At} te berekenen.

2.14.1 eerste-orde differentiaalvergelijking

$$y'(t) = Ay(t)$$

$$y(t) = e^{At} y(0)$$

2.14.2 n-de differentiaalvergelijkin

Hetzelfde als hierboven

2.14.3 Herschrijf de tweede-orde differentiaalvergelijking $y''(t) + w^2 y(t) = 0$

Zie Figuur 22.

2.15 Symmetrische matrices

- $A = A^T$ - A heeft enkel reele eigenwaarden - A heeft orthogonale eigenvectoren - $A = ODO^T$ met O een orthogonale matrix en D een diagonale matrix

Omdat $O^T = O^{-1}$, kunnen we zeggen dat $O^T O = I$

Ook is het zo dat geometrische multiplicitet = algebraïsche multiplicitet. -*j* A is diagonaliseerbaar.

```

restart;
with(LinearAlgebra):
A := Matrix([[0.7, 0.4, 0.2], [0.1, 0.2, 0.3], [0.2, 0.4, 0.5]])
A := 
$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$
 (1)

A := convert(A, rational)
A := 
$$\begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
 (2)

J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])
J, Q := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{5}}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{5}}{10} \end{bmatrix},$$
 (3)


$$\left[ \left[ \frac{28\sqrt{5}}{(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, \frac{-71+31\sqrt{5}}{2(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, \right. \right.$$


$$\left. \frac{7+3\sqrt{5}}{2(-5+8\sqrt{5})} \right],$$


$$\left[ \frac{11\sqrt{5}}{(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, -\frac{-29+11\sqrt{5}}{2(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2(-5+8\sqrt{5})} \right]$$


$$\left. \left[ \frac{20\sqrt{5}}{(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, -\frac{-21+10\sqrt{5}}{(-5+8\sqrt{5})(8+\sqrt{5})}, -\frac{2+\sqrt{5}}{-5+8\sqrt{5}} \right] \right]$$


evalf(Q) (4)

```

Figure 20: Markov proces solution

$$e^{t\mathbf{J}_n(\lambda)} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^{t\lambda} \\ 0 & 0 & e^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}e^{t\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda} \end{bmatrix}$$

Figure 21: Matrix exponent

Voorbeeld. Herschrijf de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0, \quad (2.3.154)$$

als een lineair stelsel van eerste orde vergelijkingen, en los deze vervolgens op.

Oplossing: Met $\mathbf{y}(t) = (y'(t), y(t))$, kunnen we (2.3.154) herschrijven als:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{bmatrix}. \quad (2.3.155)$$

Verder vinden we:

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\omega \sin \omega t \\ \frac{1}{\omega} \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}, \quad (2.3.156)$$

waaruit we de oplossing kunnen aflezen als tweede component van $\mathbf{y} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{y}_0$:

$$y(t) = y(0) \cos \omega t + \frac{y'(0)}{\omega} \sin \omega t, \quad (2.3.157)$$

wat inderdaad overeenkomt met de oplossing (1.3.23) die we in het vorige hoofdstuk poneerden.

Figure 22: Tweede-orde differentiaalvergelijking

2.16 SVD (Singular Value Decomposition)

$$A = U\Sigma V^T$$

of

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$$

met U en V orthogonale matrices en Σ een diagonale matrix met singular values

U is mxm, V is nxn en Σ is mxn

2.16.1 Example SVD

Als we compressie willen uitvoeren moeten we essentially SVD uitvoeren, maar onze som wordt beperkt door een rang r'

$$A = \sum_{i=1}^{r'} \sigma_i u_i v_i^T$$

Hoofdstuk 3: Integratie en afleiding in R^n

Partiele afgeleiden

$$D_i f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Example

Higher order partial derivatives:

Basically hetzelfde, doe het gewoon na elkaar, van binnen naar buiten

Kettingregel

When deriving, make sure to derive the respected variable as well.

Coordinaten transformaties

Hier gaan we de coordinaten transformeren naar een andere coordinatenstelsel. (om het probleem zo gemakkelijk mogelijk te maken)

Example

1. Calculeer de ρ en θ naar x en y 2. vorm de chain rule: $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}$ 3. doe hetzelfde voor met respect tot y . 4. Vermenigvuldig twee maal met elkaar door de dubbele afgeleide 5. som met elkaar 6. Je hebt nu de laplacian

Gradient en de differentiaal

gradient operator: $\nabla = \sum_{i=1}^n e_i \partial_i$

Via deze gradient kunnen we de richtingsafgeleide berekenen (variatie van een functie langs een kromme)

$$\nabla f \cdot \frac{dx}{dt}$$

Example

Hier zien we dat de gradient $\nabla = (\partial_x, \partial_y) = (1, 1)$ (want $f(x, y) = x + y$)

de richtingsafgeleide is dan $\nabla * f * \frac{d}{dt} = (1, 1) * (x_0, y_0) = x_0 + y_0$

Als je de integraal pakt van $t = 0$ naar $t = 1$: $\int_0^1 x_0 + y_0 dt = x_0 + y_0$

\therefore De gradient operator en richtingsafgeleide wordt gebruikt bij zaken zoals stochastic gradient descent, waar we proberen de lokale minima te vinden.

Example

1. Calculate the gradient

$$\nabla f = (\partial_x, \partial_y) = (y, x)$$

onze veldijn: $c = xy$ Note: We willen uiteindelijk kunnen zeggen dat onze richtingsafgeleide = 0, we hebben dus ∇f nodig

$$y = \frac{c}{x}$$

$$dy = -\frac{c}{x^2} dx$$

We weten ook dat onze displacement along the kromme $dx = (dx, dy)$

$$\text{We weten nu wel } dy \text{ dus we vullen dit in: } dx = (dx, -\frac{c}{x^2} dx) = dx(1, -\frac{c}{x^2})$$

$$\text{We weten ook wat } c \text{ is: } dx(1, -\frac{xy}{x^2}) = dx(1, -\frac{y}{x})$$

Nu dat we de displacement hebben, vinden we de richtingsafgeleide:

$$\nabla f * dx = (y, x) * dx(1, -\frac{y}{x}) = ydx - ydx = 0$$

Taylorreeks

Als wij Δ_{xi} (tweede term van taylorreeks), zien we $\nabla f * \Delta_{xi}$

Dit is een stationair punt wanneer $\nabla f = 0$

Er zijn hierbij 3 gevallen voor 1 variable:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} > 0 \Rightarrow$ minimum - $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} < 0 \Rightarrow$ maximum - $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0 \Rightarrow$ saddle point (stationair buigpunt)

Voor meerdere variabelen, maken we gebruik van de Hessiaan dat voorkomt in de tweede orde term van de taylorreeks:

- Hessiaan is symmetrisch, dus $H = ODO^T$

- als alle $\lambda_i > 0 \Rightarrow$ minimum - als alle $\lambda_i < 0 \Rightarrow$ maximum - als er zowel positieve als negatieve λ_i zijn \Rightarrow saddle point - als er eigenwaarden zijn die = 0, dan krijg je in sommige richtingen een stationair buigpunt gedefinieerd door de derde orde term van taylorreeks

Example

![maple solution](./hessian.pdf)

Formularium

Taylorontwikkeling

- $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$

- $\sin(x) = x$ voor kleine x

Differentiaalvergelijkingen

- $y'(x) = \lambda y(x)$
- $y''(x) = \lambda y(x)$ (hier werden 3 gevallen besproken)

Complexe getallen

- $z = a + bi$ (algemene vorm)
- $i^2 = -1$
- **inverse:** $(a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$
- **complement:** $z = a + bi \rightarrow z^* = a - bi$
- **modulus:** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Hoofdstelling van de algebra

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

met $b = -4 * a * c$

Lineare Algebra

$$\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \cos(\theta) \quad // \text{ Hoek tussen twee vectoren}$$

$$v^{\parallel} = (u_1 \cdot v) u_1 + (u_2 \cdot v) u_2 + \dots \quad // \text{ Projectie van } v$$

Oefeningen

Huis 1

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> t := taylor(sqrt(x+4)^3,x=0,3);
v := sqrt(y+4)^3;
t :=  $8 + 3x + \frac{3}{16}x^2 + O(x^3)$ 
v :=  $(y+4)^{3/2}$  (1)

> # voor  $5^{3/2}$  nemen we x=1
> x_1 := evalf( $8 + 3 + \frac{3}{16}$ )
x_1 := 11.18750000 (2)

> # Wat is de fout? Wel, dat zal de derde term zijn ( $O(x^3)$ )
> error_1 := abs( $\frac{x^3}{6} \cdot \text{diff}(v, y\$3)$ );
error_1 := evalf(subs(y=0, x=1, error_1))
error_1 :=  $\frac{|x|^3}{16|y+4|^{3/2}}$ 
error_1 := 0.007812500000 (3)

> # voor  $6^{3/2}$  nemen we x=2
> x_2 := evalf( $8 + 3 \cdot 2 + \frac{3}{16} \cdot 2^2$ )
x_2 := 14.75000000 (4)

> error_2 := abs( $\frac{x^3}{6} \cdot \text{diff}(v, y\$3)$ )
error_2 :=  $\frac{|x|^3}{16|y+4|^{3/2}}$  (5)

> error_2 := evalf(subs(x=2, y=0, error_2))
error_2 := 0.06250000000 (6)

> # Waarom nemen we y=0? Omdat dit de grootste fout zou maken, we
nemen altijd max. Dus fout \element {0, 1, 2}

```

Figure 23: Exercise 1

```

> restart:
> # i
> limit( sin(3·x) / sinh(x), x = 0 )           3
(1)
> # ii
> limit( (tan(x) - tanh(x)) / (sinh(x) - x), x = 0 )   4
(2)
> # iii
> limit( (sqrt(1 - a·x) - sqrt(1 + a·x)) / x, x = 0 ) -a
(3)
> # IV
> limit( (ln(1 + x) + ln(1 - x)) / x^2, x = 0 ) -1
(4)

```

Figure 24: Exercise 2

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta \quad B:$$

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightarrow e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\
 &= 1 + i\theta - \frac{i\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^4}{24} + \dots \\
 &= \underbrace{i\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots\right)}_{\cos\theta} + \underbrace{-\frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + \dots}_{i\sin\theta} \\
 &= \cos\theta + i\sin\theta
 \end{aligned}$$

Figure 25: Exercise 3

$$\begin{aligned}
 a &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 a \cdot b &= 1 \cdot (-1) + (1 \cdot 1) + (-1 \cdot 0) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A < ab^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Figure 26: Exercise 4

WC 1

```

> p := x→x·(x - 1) - a
      p := x→x·(x - 1) - a
                                         (1)

> # i
> p_i := subs(a = 0, p(x))
      p_i := x(x - 1)
                                         (2)

> solve(p_i = 0)
      0, 1
                                         (3)

> # Dus lambda = 0, en lambda = 1
> # Benader naar x = 0
> x_0 := 0 + u·a + v·a2
      x_0 := v a2 + u a
                                         (4)

> p_subs_0 := subs(x = x_0, p(x))
      p_subs_0 := (v a2 + u a) (v a2 + u a - 1) - a
                                         (5)

> p_expand_0 := expand(p_subs_0)
      p_expand_0 := a4 v2 + 2 a3 u v + a2 u2 - v a2 - u a - a
                                         (6)

> coeff_1_0 := coeff(p_expand_0, a, 1)
      coeff_1_0 := -u - 1
                                         (7)

> coeff_2_0 := coeff(p_expand_0, a, 2)
      coeff_2_0 := u2 - v
                                         (8)

> solve_0 := solve({coeff_1_0 = 0, coeff_2_0 = 0}, {u, v})
      solve_0 := {u = -1, v = 1}
                                         (9)

> result_0 := subs(u = rhs(solve_0[1]), v = rhs(solve_0[2]), x_0)
      result_0 := a2 - a
                                         (10)

>
> # Benader 1
> x_1 := 1 + u·a + v·a2
      x_1 := v a2 + u a + 1
                                         (11)

> p_subs_1 := subs(x = x_1, p(x))
      p_subs_1 := (v a2 + u a + 1) (v a2 + u a) - a
                                         (12)

> p_expand_1 := expand(p_subs_1)
      p_expand_1 := a4 v2 + 2 a3 u v + a2 u2 + v a2 + u a - a
                                         (13)

> coeff_1_1 := coeff(p_expand_1, a, 1)
      coeff_1_1 := u - 1
                                         (14)

> coeff_1_2 := coeff(p_expand_1, a, 2)
      coeff_1_2 := u2 + v
                                         (15)

> solve_1 := solve({coeff_1_1 = 0, coeff_1_2 = 0}, {u, v})
      solve_1 := {u = 1, v = -1}
                                         (16)

> result_1 := subs(u = rhs(solve_1[1]), v = rhs(solve_1[2]), x_1)

```

Figure 27: Exercise 1

```

> # Define the Taylor expansion for a forward approximation
Taylor_y := (h,t) → y(t) + h*diff(y(t),t) + (1/2)*h^2*diff(y(t),t$2) + (1/6)
    *h^3*diff(y(t),t$3) + (1/24)*h^4*diff(y(t),t$4):

# Define the Taylor expansion for a backward approximation
Taylor_g := (h,t) → y(t) - h*diff(y(t),t) + (1/2)*h^2*diff(y(t),t$2) - (1/6)
    *h^3*diff(y(t),t$3) + (1/24)*h^4*diff(y(t),t$4):

# Define the result expression
result := (h,t) → (Taylor_y(h,t) + Taylor_g(h,t) - 2*y(t)) / h^2:

# Simplify the result
simplified_result := simplify(result(h,t));


$$\text{simplified\_result} := \frac{h^2 \left( \frac{d^4}{dt^4} y(t) \right)}{12} + \frac{d^2}{dt^2} y(t) \quad (1)$$


>
> #i) kwadratisch
> #ii
> restart;
with(plots):
with(plottools):

t_val := evalf( $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ );

# Define the function y and its 2nd derivative
y := t → -cos(t);

# Define the error function as a function of h for a specific t
err := (h) → abs( $y(t_{\text{val}})$ 
    -  $\frac{(\cos(h+t_{\text{val}}) + \cos(h-t_{\text{val}}) - 2\cos(t_{\text{val}}))}{h^2}$ );

# Plot the error as a function of h with log-log scale
loglogplot(err(h), h = 10^{-8} .. 10^3);
t_val := 1.047197551
y := t → -cos(t)
err := h →  $|y(t_{\text{val}}) - \frac{\cos(h+t_{\text{val}}) + \cos(h-t_{\text{val}}) - 2\cos(t_{\text{val}})}{h^2}|$ 

```

Figure 28: Exercise 2

$$3) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{(2i, -1, 0, i)^T}{\sqrt{(2i)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2i \cdot (-1) + 1}} \cdot (2i, -1, 0, i)^T$$

$$= \left(\frac{2i}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, 0 \right)^T$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 =$$

$$v_3 = v_3 - \sum_{k=1}^{n-1} \langle v_k \cdot v_1 \rangle \cdot v_k$$

⋮

$$2) \quad \text{open } \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\omega'' = (v_1 \cdot v_2) v_1 + (v_2 \cdot v_1) v_2$$

$$\text{Rammen: } \omega = \omega'' + \omega^\perp$$

Figure 29: Exercise 3

```

#ii)
with(LinearAlgebra):
> v_1 := Vector([2·I, -1, 0, 0])

```

$$v_1 := \begin{bmatrix} 2I \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```

> v_2 := Vector([I, 0, 3, 1])

```

$$v_2 := \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

```

> u_1 := v_1 / Norm(v_1, 2)

```

$$u_1 := \begin{bmatrix} \frac{2I}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

```

> u_2 := (v_2 - (u_1 · v_2) · u_1) / Norm(v_2 - (u_1 · v_2) · u_1, 2)

```

$$u_2 := \begin{bmatrix} \frac{I}{255} \sqrt{255} \\ \frac{2\sqrt{255}}{255} \\ \frac{\sqrt{255}}{17} \\ \frac{\sqrt{255}}{51} \end{bmatrix} \quad (4)$$

```

> w := Vector([3, 1 - I, 2 + I, 1])

```

$$(5)$$

Figure 30: Exercise 3

Bord 1

```

> p := x→x·(x - 1)·(x - 2)·(x - 4) - a
      p := x→x·(x - 1)·(x - 2)·(x - 4) - a
                                         (1)
> x_0 := u·a + v·a2
      x_0 := v a2 + u a
                                         (2)
> p_subs := subs(x = x_0, p(x))
      p_subs := (v a2 + u a) (v a2 + u a - 1) (v a2 + u a - 2) (v a2 + u a - 4) - a
                                         (3)
> p_expand := expand(p_subs)
      p_expand := a8 v4 + 4 a7 u v3 + 6 a6 u2 v2 - 7 a6 v3 + 4 a5 u3 v - 21 a5 u v2 + a4 u4
      - 21 a4 u2 v + 14 a4 v2 - 7 a3 u3 + 28 a3 u v + 14 a2 u2 - 8 v a2 - 8 u a - a
                                         (4)
> # Only keep the 1st order and second order
>
> coeff_1 := coeff(p_expand, a, 1)
      coeff_1 := -8 u - 1
                                         (5)
> coeff_2 := coeff(p_expand, a, 2)
      coeff_2 := 14 u2 - 8 v
                                         (6)
> solve({coeff_1 = 0, coeff_2 = 0}, {u, v})
      {u = -1/8, v = 7/256}
                                         (7)
>

```

Figure 31: Exercise 1

$$2) \text{ i) } y'(t_n) \approx v_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

$$\begin{cases} c = t_n \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h \cdot y'(t_n) + \underbrace{\frac{h^2}{2} y''(f)}_{c} \quad f \in [t_n, t_{n+1}]$$

$$\Rightarrow v_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{y(t_n) + h \cdot y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(f) - y(t_n)}{h} \\ = y'(t_n) + \frac{h}{2} y''(f)$$

found: $|y'(t_n) - v_n| = \frac{h}{2} y''(f) = \frac{h}{6} c \rightarrow \text{linear.}$
 \hookrightarrow each division ≤ 2

ii)

$$y'(t_n) = v_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}$$

$$- y(t_{n+1}) = y(t_n) + h \cdot y'(t_n) + \underbrace{\frac{h^2}{2} y''(t_n)}_{c} + \underbrace{\frac{h^3}{6} y'''(f)}_{f \in [t_n, t_{n+1}]}$$

$$- y(t_{n-1}) = y(t_n) - h \cdot y'(t_n) + \underbrace{\frac{h^2}{2} y''(t_n)}_{c} - \underbrace{\frac{h^3}{6} y'''(f)}_{f \in [t_{n-1}, t_n]}$$

$$y'(t_n) = v_n = y(t_n) + h \cancel{y'(t_n)} + \cancel{\frac{h^2}{2} y''(t_n)} + \cancel{\frac{h^3}{6} y'''(f)} \\ - (y(t_n) - h \cancel{y'(t_n)} + \cancel{\frac{h^2}{2} y''(t_n)} - \cancel{\frac{h^3}{6} y'''(f)})$$

$$= y'(t_n) + \frac{h^2}{12} (y''(f_+) + y''(f_-))$$

$$|y'(t_n) - v_n| = \frac{h^2}{6} |y'''(f)| = \frac{h^2}{6} c \rightarrow \text{using maple you can see this.}$$

Figure 32: Exercise 2

```

> restart;
> with(plots):
>
> y := t->cos(t)
y := t-> cos(t)                                (1)
> exact_speed := t->-sin(t)
exact_speed := t-> -sin(t)                      (2)
> t_val := evalf( $\frac{\pi}{2}$ )
t_val := 1.570796327                            (3)
>
> forward_difference := (t, h)-> $\frac{y(t+h) - y(t)}{h}$ 
forward_difference := (t, h) ->  $\frac{y(t+h) - y(t)}{h}$           (4)
> central_difference := (t, h)-> $\frac{y(t+h) - y(t-h)}{2 \cdot h}$ 
central_difference := (t, h) ->  $\frac{y(t+h) - y(t-h)}{2 \cdot h}$       (5)
>
> forward_error := h->abs(exact_speed(t_val) - forward_difference(t_val, h))
forward_error := h -> |exact_speed(t_val) - forward_difference(t_val, h)| (6)
> central_error := h->abs(exact_speed(t_val) - central_difference(t_val, h))
central_error := h -> |exact_speed(t_val) - central_difference(t_val, h)| (7)
> loglogplot([central_error(h), forward_error(h)], h = 10-8 .. 1, color = [red, blue])

```

Figure 33: Exercise 2 part 2 Maple

$$3) \vec{v}_1 = (2, 3, 0) \text{ en } \vec{v}_2 = (1, -2, 3) \quad \text{inner product} = \text{dot product}$$

$$\text{i)} \vec{u}_1 = \vec{v}_1$$

$$2) \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \cdot \vec{u}_1$$

$$3) \vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \cdot \vec{u}_1 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_2\|^2} \cdot \vec{u}_2$$

$\left\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right\rangle = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \rightarrow \text{daarvan verder doen}$

$$\boxed{\vec{u}_k = \vec{v}_k - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{v}_k, \vec{u}_l \rangle}{\|\vec{u}_l\|^2} \cdot \vec{u}_l}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{(2, 3, 0)}{\sqrt{13}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, 0 \right) = \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, 0 \right)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1}{\| \vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 \|}, \text{ in maple:}$$

$$\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, 0 \right) \cdot (1, -2, 3)$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{6\sqrt{13}}{13}, 0 \right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, 0 \right)$$

$$= \left(\frac{52}{169}, -\frac{18 \cdot 13}{169}, 0 \right)$$

ii) zit maple

iii) berechnen \vec{u}_1 und \vec{u}_2 durch Vektoren mit
geparamter als v_1 von v_2 benennen we:

$$\vec{y} = (\vec{y} - \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_1$$

$$\text{dann } \vec{y}^\perp = \vec{y} - \vec{y}^{\parallel 34} \Rightarrow \vec{y} = \vec{y}^{\parallel} + \vec{y}^{\perp}$$

Figure 34: Exercise 3

```

restart;
with(plots): with(plottools);
{annulus, arc, arrow, circle, cone, cuboid, curve, cutout, cylinder, disk, dodecahedron, ellipse, ellipticArc, exportplot, extrude, getdata, hemisphere, hexahedron, homothety, hyperbola, icosahedron, importplot, line, octahedron, parallelepiped, pieSlice, point, polygon, polyhedronByName,
prism, project, rectangle, reflect, rotate, scale, sector, semitorus, sphere, stellate, tetrahedron, torus, transform, translate, triangulate}

v1 := (2|3|0)
v2 := (1, -2, 3)

v1 := [ 2 3 0 ]
v2 := [ 1
         -2
         3 ]

u1 := ( 2*sqrt(13) | 3*sqrt(13) | 0 )
u2 := ( 2*sqrt(13) | 3*sqrt(13) | 0 )

u1 := [ 2*sqrt(13) 3*sqrt(13) 0 ]
u2 := [ 4
         -18/13
         0 ]

origin := (0|0|0);

line_v1 := line(origin, v1, color=blue);
line_v2 := line(origin, v2, color=red);
line_u1 := line(origin, u1, color=green);
line_u2 := line(origin, u2, color=yellow);

# Display the lines together
display(line_v1, line_v2, line_u1, line_u2, axes=normal, scaling=constrained);

origin := [ 0 0 0 ]
line_v1 := CURVES([ [ 0. 0. 0. ], [ 2. 3. 0. ] ], COLOUR(RGB, 0, 0, 1.0000000))
line_v2 := CURVES([ [ 0. 0. 0. ], [ 1. -2. 3. ] ], COLOUR(RGB, 1.0000000, 0, 0.))
line_u1 := CURVES([ [ 0. 0. 0. ], [ 0.554700196225229 0.832050294337844 0. ], COLOUR(RGB, 0, 1.0000000, 0. ) ])
line_u2 := CURVES([ [ 0. 0. 0. ], [ 0.307692307692308 -1.38461538461538 0. ], COLOUR(RGB, 1.0000000, 1.0000000, 0. ) ])

```

Figure 35: Exercise 3 - plot

Huis 2

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt$$

met definitie $w_m = \text{span} \{ \cos(kt), \sin(kt), k=0, 1, \dots, n \}$

1) eerst orthogonale we met gram-schmidt:

$$\text{strand: } \cos(0 \cdot t) = 1$$

↳ we applying gram-schmidt to sequence of
 $\cos(kt)$ and $\sin(kt)$

initial set of functions:

$$f_0 = 1, f_1 = \cos(t), f_2 = \sin(t), f_3 = \cos(2t), f_4 = \sin(2t), \dots$$

dan is $w_0 = f_0 = 1$. We orthogonalise we met $\cos(kt)$

$$w_1 = f_1 - (f_0 \cdot f_1) w_0 = f_1 - (1 \cdot \cos(t)) = \cos(t)$$

↳ f_0 en f_1 are orthogonal on the plane

$$w_2 = f_2 - (w_0 \cdot f_2) w_0 - (w_1 \cdot f_2) w_1 = \sin(t)$$

↳ gekend rekenen in basissen vinden.

$$\text{Also we de norm tellen van } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Basis openc } \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t) dt = \pi$$

```

> restart;
> with(LinearAlgebra): with(plottools): with(plots):
> #i
v_1 := Vector([2, 3, 0])
v_1 := 
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (1)

> v_2 := Vector([1, -2, 3])
v_2 := 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
 (2)

> u_1 :=  $\frac{v_1}{\text{Norm}(v_1, 2)}$ 
u_1 := 
$$\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (3)

> u_2 :=  $\frac{(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1)}{\text{Norm}(v_2 - (u_1 \cdot v_2) \cdot u_1, 2)}$ 
u_2 := 
$$\begin{bmatrix} \frac{21\sqrt{2158}}{2158} \\ -\frac{7\sqrt{2158}}{1079} \\ \frac{3\sqrt{2158}}{166} \end{bmatrix}$$
 (4)

> # ii
> null_vector := Vector([0, 0, 0])
null_vector := 
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (5)

> line_v1 := line(null_vector, v_1, color = purple)
line_v1 := CURVES $\left(\begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 2. & 3. & 0. \end{bmatrix}, \text{COLOUR(RGB, 0.50196078, 0.,}\right.$  (6)

```

Figure 36: Exercise 3

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x + y + z = b_1} \\ \underline{2x - y + z = b_2} \\ 3x + 2z = b_3 \end{array} \right.$$

Naar, b_3 is lineair comb van b_1 en b_2

Figure 37: Huis 2 Exercise 1

- 2) - moet voldoende zijn en rijen/colommen moeten
 linear onafhankelijk zijn. Wanneer determinaat nog
 ook geen $0^{2 \times 2}$.

Figure 38: Huis 2 Exercise 2

3)

$$i) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \bullet$$

ii) $\det(AB) = 0 \neq \det(A) \cdot \det(B) = 0$
 omdat A niet singulair zijn of B.

Figure 39: Huis 2 Exercise 3

$$4) A\vec{\alpha} = \vec{y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(0) & \cos(0) \\ \cos(1) & \cos(1) \\ \cos(2) & \cos(2) \\ \cos(3) & \cos(3) \\ \cos(4) & \cos(4) \\ \cos(5) & \cos(5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,04 \\ 1,05 \\ -0,2 \\ -2 \\ -0,2 \\ 1,41 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\alpha} = (\Delta^T \cdot A)^{-1} \cdot \vec{b}^T = \begin{pmatrix} 1,04 \\ -0,34 \end{pmatrix}$$

(*)

drew using maple:

1) pointplot

2) plot(fit)

should be quite close

Figure 40: Huis 2 Exercise 4

```

# First define the data
> x := [0.04, 1.05, -0.2, -2, -0.2, 1.11];
x := [0.04, 1.05, -0.2, -2, -0.2, 1.11]

> t := [0, 1, 2, 3, 4, 5]
t := [0, 1, 2, 3, 4, 5]

> # Construct the matrix A
> A := Matrix([[cos(0), cos(0)], [cos(1), cos(2)], [cos(2), cos(4)], [cos(3), cos(6)], [cos(4), cos(8)], [cos(5), cos(10)]])
A := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \cos(1) & \cos(2) \\ \cos(2) & \cos(4) \\ \cos(3) & \cos(6) \\ \cos(4) & \cos(8) \\ \cos(5) & \cos(10) \end{bmatrix}$$


> # Perform kleinste kwadraten fit: x = A'A-1AT
> c := LeastSquares(A, Vector(x))
c := 
$$\begin{bmatrix} 1.040593609 \\ -0.9362867375 \end{bmatrix}$$


> x_function := t->c[1]*cos(t) + c[2]*cos(2*t);
x_function := t->c1*cos(t) + c2*cos(2*t)

> plot_points := pointplot([seq([t[i], x[i]], i=1..6)], color=red):
plot_fit := plot(x_function(t_), t_=0..5, color=blue):
display(plot_points, plot_fit)

```

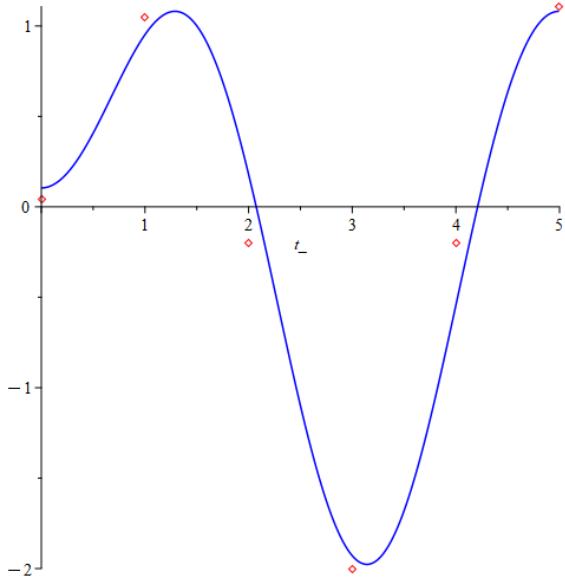


Figure 41: Huis 2 Exercise 4 Maple

```

> with(LinearAlgebra):
> p := Matrix([ [ 5/6, 1/6, 1/3 ], [ 1/6, 5/6, -1/3 ], [ 1/3, -1/3, 1/3 ] ])
      
$$p := \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(p, output = ['J', 'Q'])
      
$$J, Q := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{17}{6} & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$


```

Figure 42: Huis 2 Exercise 5: We zien dat de projector op het YZ vlak projecteert.

6) Hier moeten we matrix A vinden waervan twee vectoren

$v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 2, 0)$ in de rijruimte liggen,
waarbij de nullruimte orthogonaal is (relatief) van de
rijruimte.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, we moeten aantonen dat
 $\{k_1, k_2\}$ lineaire combinatie is
van K_{A^T} . Als dit het geval is is
dit deel van rijruimte.

Wat is b ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ b = 2c_2 \rightarrow b = -4 \\ 2 = c_1 \end{cases}$$

$1c_2$ in lineaire combinatie dan behoort niet tot
nullruimte

Figure 43: Huis 2 Exercise 6: Uit de cursus weten we dat er geen basis kan gevonden worden voor $K(A^T)$ en $N(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) einsetzen:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ 4 & 2-\lambda & 4 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(2-\lambda)((2-\lambda)(2-\lambda) - 4) - 1 \cdot (4(2-\lambda) - 8) + 2(4 - 2(2-\lambda)) = (2-\lambda)(\cancel{4} - \cancel{4}\lambda^2 - 2\lambda + \cancel{\lambda^2} - \cancel{4}) - (\cancel{8} - \cancel{4}\lambda \cancel{+ 8}) + 2(\cancel{4} - \cancel{4}\lambda + \cancel{4}) = (2-\lambda)(-4\lambda + \lambda^2) + 4\lambda - 4\lambda = 0$$

$$\Rightarrow -2\lambda^2 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 4\lambda = 0$$

$$\Rightarrow -2\lambda^2 + 6\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$$

\Rightarrow es gibt drei linear unabhängige Eigenvektoren.

Figure 44: Huis 2 Exercise 7

```

[> with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[2, 1, 2], [4, 2, 4], [2, 1, 2]])
      A := 
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
 (1)

[> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])
      J, Q := 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$
 (2)

```

Figure 45: Huis 2 Exercise 7 Maple

$$8) \begin{array}{ll} v_1 = 0 & v \\ v_2 = 3 & v \\ v_3 = 5 & w \end{array}$$

i) Basis voor ruimte is span $\{w\}$ omdat $Aw = 0$.
Kernruimte is dan $\{v, w\}$

ii) 1 oplossing: $Ax = b$
 $\rightarrow x = \frac{1}{3}v + \frac{1}{5}w$, alle oplossingen zijn veelvoud
van mutant: $x = \frac{1}{3}v + \frac{1}{5}w + k \cdot u$ met $k \in \mathbb{R}$

iii) $x = \alpha u + \beta v + \gamma w$
 $= 3v + 5w$, w is niet in de vergelijkingen dus
kan niet berdekt worden.

Figure 46: Huis 2 Exercise 8

$$\begin{aligned} 2) f_0'' &= \langle f(t), c_0 \rangle + \langle c_0, f(t) \rangle + \langle c_1, c_0 \rangle + \langle c_0, c_1 \rangle + \dots \\ \langle f(t), c_0 \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^2}{\sqrt{\pi}} \cdot dt = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi^{5/2} \\ \langle f(t), c_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(kt) \cdot dt = 4\sqrt{\pi} \frac{(-1)^k}{k^2} \\ \langle f(t), s_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin(kt) \cdot dt = 0 \\ \Rightarrow f_0 &= \frac{\sqrt{2}}{3} \pi^{5/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left\{ 4\sqrt{\pi} \frac{(-1)^k}{k^2} \cdot \sin(kt) \right\} + 0 \end{aligned}$$

Figure 58: Bord 2 Exercise 5 Part 2

$$k_1=0, k_2=3, k_3=5$$

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Basis voor } N(A) = \text{open } \subset U \xrightarrow{\text{dit is omdat } L_1 = 0} \\ \text{Basis voor } \mathcal{U}(A) = \text{open } \subset \mathcal{U} \cup U \end{array} \right.$$

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Nophasseing: } x = \frac{1}{2}v + \frac{1}{5}w \\ \text{alle: } x = \frac{1}{3}v + \frac{1}{5}w + k \cdot w, k \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

3) } $A\alpha = u \rightarrow$ vormt nullruimte \rightarrow geen oplossing.

Door de hash te 'ondertekenen' met een privésluitsel, kan de identiteit van een afzender niet ontkennen dat hij de data heeft oververfied en kan de afzender niet ontkennen dat hij de data heeft

identificatie: identificeert de bron van de data.

Identiteitsleer: Heeft geen invloed op het verborgen van communicatie.

Section Code

Verzekert dat de data niet is gewijzigd.
Identificatie: Verzekert dat het bericht van een specifieke entiteit komt (degene die het heeft geschreven).

v. Zowel zender als ontvanger hebben toegang tot de sleutel, dus het kan niet
bericht heeft verzonken.

Waarde: Versleutelt de data om deze privé te houden.

Entity authenticatie: Omdat de sleutel gedownload moet worden, kan de gebruiker niet meer op de website blijven.

Informatielekt: Verbergt niet het feit dat communicatie plaatstaat.
Opzichtigheid: Heeft geen integriteitsbescherming, maar het kan worden overgenomen met andere methoden (zoals een MAC) voor integriteitsbescherming.

Identiteit: Wanneer iets met de publieke sleutel wordt versleuteld, kan alleen de private sleutel het ontcijferen.

Data-origin authentication: Vooral wanneer gebruikt voor digitale identiteiten.

confidentiaaliteit: Verborgt niet het feit dat communicatie plaatsvindt.

Figure 47: Huis 2 Exercise 8 second version

g) $A = UV^T$

i) rang 1 matrix omdat $A = UV^T$, dan alle kolommen van A zijn lineaire combinaties van elkaar.

ii) $Au = \underbrace{d_u}_{\text{pijuwante}}$

$$Au = (UV^T)u = u(V^Tu) = (V^Tu)u$$

Au is een rechte vermenigvuldiging van u dus en dus is u een eigenvector

iii) $l_1 = V^Tu$

$d_2 = 0 \rightarrow$ eigenschap van rang 1 - matrizen.

iv)

$\text{trace}(A) = \text{sum van diagonale elementen}$

$$\text{trace}(A) = a_{11} + a_{22} = \underbrace{V^T}_{l_1} \underbrace{u}_{l_1}$$

Figure 48: Huis 2 Exercise 9

```

> with(LinearAlgebra):
> u := Vector([u1, u2])

$$u := \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \end{bmatrix} \quad (1)$$


> v := Transpose(Vector([v1, v2]))

$$v := \begin{bmatrix} v1 & v2 \end{bmatrix} \quad (2)$$


> A := u * v

$$A := \begin{bmatrix} u1 v1 & u1 v2 \\ u2 v1 & u2 v2 \end{bmatrix} \quad (3)$$


> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])

$$J, Q := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u1 v1 + u2 v2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{u2 v2}{u1 v1 + u2 v2} & \frac{u1 v1}{u1 v1 + u2 v2} \\ -\frac{u2 v1}{u1 v1 + u2 v2} & \frac{u2 v1}{u1 v1 + u2 v2} \end{bmatrix} \quad (4)$$


> # Hier kunnen we zien dat de rang = 1
> Eigenvalues(A)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ u1 v1 + u2 v2 \end{bmatrix} \quad (5)$$


> # We zien dus dat  $\lambda = u \cdot v^T$ 
> #  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = u1.v1 + u2.v2$ 
> Eigenvectors(A)

$$\begin{bmatrix} u1 v1 + u2 v2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{u1}{u2} & -\frac{v2}{v1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$


> # We zien hier dat u een eigenvector is!
>
> # Als laatste, de trace is simpel, onze  $\lambda_2 = u1.v1 + u2.v2$ . Als je kijkt
    naar A, en je telt de diagonaal op, dan zie je hetzelfde uitkomen ;)
```

Figure 49: Huis 2 Exercise 9 Maple

$$(t_1, b_1) = (10, 10, 1)$$

$$(t_2, b_2) = (21, 7, 4)$$

$$(t_3, b_3) = (31, -5, 2)$$

1) $y(t) = \sqrt{t} - \frac{3}{2} t^2 \quad | A \propto = 3$

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 10 & 1 \\ 7 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

→ check in maple

2) proof: $A^T (\tilde{y} - \tilde{y}) = 0$

$$\Leftrightarrow A^T \tilde{y} - A^T \tilde{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T \tilde{y} - A^T A (A^T A)^{-1} A^T \tilde{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T \tilde{y} - \underbrace{A^T A}_{A^T A^{-1}} (A^T A^{-1}) A^T \tilde{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T \tilde{y} - \underbrace{A^T}_{A^T A^{-1}} A^{-1} A^T \tilde{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \quad \square$$

Figure 50: Bord 2 Exercise 1

```

> restart: with(LinearAlgebra): with(plots): with(plottools):
> # i)
> A := Matrix([[1, 1], [2, 4], [3, 9]])
A := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$
 (1)

> y := Vector([10.1, 7.4, -5.2])
y := 
$$\begin{bmatrix} 10.1 \\ 7.4 \\ -5.2 \end{bmatrix}$$
 (2)

> result := LeastSquares(A, y)
result := 
$$\begin{bmatrix} 15.3552631578947 \\ -5.71315789473684 \end{bmatrix}$$
 (3)

> v_0 := result[1]
v_0 := 15.3552631578947 (4)

> g := result[2] · (-1) · (2)
g := 11.4263157894737 (5)

#ii) zie notes
#iii)
> y_tilde := A . result;
y_tilde := 
$$\begin{bmatrix} 9.64210526315789 \\ 7.85789473684210 \\ -5.35263157894737 \end{bmatrix}$$
 (6)

> column_space_vector := Column(A, 2);
column_space_vector := 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$
 (7)

> # Define line representing the column space K(A)
K_A := plot([t → column_space_vector[1]*t, t → column_space_vector[2]*t,
            t = -1 .. 3], color = blue, thickness = 2, title = "Column Space K(A)");
Error, (in plot) expected a range but received t = -1 .. 3

> # Plot the original data points y
data_points := plot([seq([i, y[i]], i = 1 .. 3)], style = point, symbol = circle, color
                    = black, title = "Data Points and Column Space");

```

Figure 51: Bord 2 Exercise 1 Maple

Wiskundige modellering in de ingenieurswetenschappen: Bordoefeningenles 2

Oefening 1

```
[> restart: with(plots):with(LinearAlgebra):with(plottools):  
oorsprong := <0,0,0>;
```

Constructie matrix A en vector y:

```
[> K1 := <1,2,3>;  
K2 := <1,4,9>;  
A := <K1|K2>;  
y := <10.1,7.4,-5.2>;
```

$$\begin{aligned} K1 &:= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ K2 &:= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \\ A &:= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \\ y &:= \begin{bmatrix} 10.1 \\ 7.4 \\ -5.2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Heeft dit stelsel een oplossing?

```
[> solve(A.<v0, -g/2>)=y, {v0,g});  
> Determinant(<K1|K2|y>);
```

5.8

(1.2)

We bepalen de kleinste kwadraten benadering en fit:

De onbekenden x bepalen kan op 2 manieren:

- met een stelsel (meest efficiënt)

```
[> solve((A^%T.A).(<v0,-g/2>)=A^%T.y,{v0,g});  
{g = 11.42631579, v0 = 15.35526316}
```

(1.3)

- met behulp van de matrix inverse

```
[> x := MatrixInverse(A^%T.A).A^%T.y;
```

Figure 52: Bord 2 Exercise 1 Maple Version 2: Warning, pdf is not fully loaded, go look in my files

$$\begin{array}{l}
 \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = 2 \\
 m_1 = 1 = 1 \quad m_2 = 1 \quad m_3 = 2 \\
 m_4 = 1 \quad m_5 = 1 \quad m_6 = 1
 \end{array}
 \rightarrow \text{dit is omdat we w-gorden}\newline
 \text{vorm hebben, dan}\newline
 \text{niet diagonaliseerbaar} \rightarrow m < m^2$$

Lijsevectoren:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow m < m^2$$

Figure 53: Bord 2 Exercise 2

(3) Uit de orthonormaliteit van de basis volgt dat

$$\begin{aligned}
 \|f(t) - f_0\|^2 &= \langle t^2 - f_0, t^2 - f_0 \rangle \\
 &= \langle t^2, t^2 \rangle - 2\langle f_0, t^2 \rangle + \langle f_0, f_0 \rangle \\
 &= \frac{2\pi^5}{5} - 2 \left(\frac{\pi^2}{3} \langle 1, t^2 \rangle + 4 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} \langle \cos(kt), t^2 \rangle \right) \\
 &\quad + \frac{2\pi^5}{9} + 16 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \langle \cos(kt), \cos(kt) \rangle \\
 &= \frac{8\pi^5}{45} - 32\pi \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} + 16\pi \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \\
 &= 16\pi \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} \right)
 \end{aligned}$$

Als $n \rightarrow +\infty$, dan $\|f(t) - f_0\| \rightarrow 0$, want

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Figure 59: Bord 2 Exercise 5 Part 3

```

[> with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[0, -1, 3, 0], [1, 0, 0, 1], [0, 0, 3, -1], [0, 0, 1, 1]])
      A := 
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
 (1)

=> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])
      J, Q := 
$$\begin{bmatrix} -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{I}{2} & \frac{I}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
 (2)
]

```

Figure 54: Bord 2 Exercise 2 Maple

$$3) \quad A = V_1 V_1^T + V_3 V_3^T$$

1) $K(A) = \text{span} \{ V_1, V_3 \}$

2) $K(A^T) = \text{span} \{ V_2, V_1 \}$

3) $N(A) : A\alpha = (V_1 V_1^T + V_3 V_3^T) \alpha = 0$

$$= V_1 (V_1^T \alpha) + V_3 (V_3^T \alpha) = 0$$

These need to be null, no look in direction on V_3 , thus

$$N(A) = \text{span} \{ V_3 \}$$

4) $N(A^T) : \text{we want to solve:}$

$$A^T y = (V_2 V_1^T + V_1 V_3^T) y = 0$$

$$= V_2 (V_1^T y) + V_1 (V_3^T y) = 0$$

$$\Rightarrow N(A^T) = \{ V_2 \}$$

Figure 55: Bord 2 Exercise 3

4)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T)$$

a. Is A symmetrisch?

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) ; A^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_2 e_1^T + e_1 e_2^T) \quad \checkmark$$

b. $A^L = A^R$?

$$A^L = \frac{1}{2} \cdot (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T)^2$$

$$= \frac{1}{2} (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T)$$

$$= \frac{1}{2} (e_1 e_2^T e_1 e_2^T + e_1 e_2^T \cdot e_2 e_1^T + e_2 e_1^T e_1 e_2^T \\ + e_2 e_1^T \cdot e_2 e_1^T)$$

$$= \frac{1}{2} (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) \neq A \rightarrow \text{green projection}$$

Figure 56: Bord 2 Exercise 4

$$l_m(u(t)) = l_m(a) - ct^2 - bt$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \\ 1 & t_5 & t_5^2 \end{pmatrix} \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} l_m(a) \\ -c \\ -b \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} l_m(y_1) \\ l_m(y_2) \\ l_m(y_3) \\ l_m(y_4) \\ l_m(y_5) \end{pmatrix}$$

Stoch im Graph: $\vec{\alpha} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y}$

$\therefore a = 5, 20, b = 0, 35, c = 0, 32$

plot same as homework.

Figure 60: WC 2 Exercise 1

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> inproduct := (f, g) → integrate(f*g, t = -infinity ..infinity);
NORM   := f → sqrt(inproduct(f, f)):

inproduct := (f, g) → integrate(g·f, t = -∞ ..∞)          (1)
> f0 := exp(-t^2/2)/NORM(exp(-t^2/2)):

> w1 := t*exp(-t^2/2)-f0*inproduct(f0, t*exp(-t^2/2));
f1 := w1/NORM(w1):
w1 :=  $t e^{-\frac{t^2}{2}}$                                          (2)

> w2 := t^2*exp(-t^2/2)-f1*inproduct(t^2*exp(-t^2/2), f1)-f0
      *inproduct(t^2*exp(-t^2/2), f0);
f2 := w2/NORM(w2):
w2 :=  $t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{2}$            (3)

> w3 := t^3*exp(-t^2/2)-f2*inproduct(t^3*exp(-t^2/2), f2)-f1
      *inproduct(t^3*exp(-t^2/2), f1)-f0*inproduct(t^3*exp(-t^2/2),
      f0);
f3 := w3/NORM(w3):
w3 :=  $t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{3 t e^{-\frac{t^2}{2}}}{2}$            (4)

> w4 := t^4*exp(-t^2/2)-f3*inproduct(t^4*exp(-t^2/2), f3)-f2
      *inproduct(t^4*exp(-t^2/2), f2)-f1*inproduct(t^4*exp(-t^2/2),
      f1)-f0*inproduct(t^4*exp(-t^2/2), f0);
f4 := w4/NORM(w4):
w4 :=  $t^4 e^{-\frac{t^2}{2}} - 3 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{3 e^{-\frac{t^2}{2}}}{4}$      (5)

> # i: de orthonormale basis is dus de span van <f_0, w_1, w_2, w_3, w_4, ...>
> # ii: zie notes

```

Figure 61: WC 2 Exercise 2

Lange oplossing

```
> g0 := fn(0)*inproduct(fn(0),g);
   g1 := fn(0)*inproduct(fn(0),g)+fn(1)*inproduct(fn(1),g);
   g2 := fn(0)*inproduct(fn(0),g)+fn(1)*inproduct(fn(1),g)+fn(2)*inproduct(fn(2),g);
   g3 := fn(0)*inproduct(fn(0),g)+fn(1)*inproduct(fn(1),g)+fn(2)*inproduct(fn(2),g)+fn(3)*inproduct(fn(3),g);
   g4 := fn(0)*inproduct(fn(0),g)+fn(1)*inproduct(fn(1),g)+fn(2)*inproduct(fn(2),g)+fn(3)*inproduct(fn(3),g)+fn(4)*inproduct(fn(4),g);
```

Korte oplossing (niet te kennen)

```
> g_n := n -> add(fn(i)*inproduct(fn(i),g),i=0..n);
Warning, (in g_n) `i` is implicitly declared local
```

Visualisatie

```
> app0 := plot(g_n(1), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=blue, legend="projectie op W[0]");
   app1 := plot(g_n(1), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=black, linestyle="dot", legend="projectie op W[1]", thickness=3);
   app2 := plot(g_n(2), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=red, legend="projectie op W[2]");
   app3 := plot(g_n(3), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=purple, linestyle="dot", legend="projectie op W[3]", thickness=3);
   app4 := plot(g_n(4), t=-5..5, view=[-5..5,-0.3..1.05], color=coral, legend="projectie op W[4]");
> gplot := plot(g, t=-5..5, thickness=1, color=black, legend="g(t)", thickness=2);
> display(gplot,app0, app1, app2, app3, app4);
```

Figure 62: WC 2 Exercise 2 Maple

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> e_1 := Vector([1, 0, 0])

$$e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> e_2 := Vector([0, 1, 0])

$$e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

> A :=  $\frac{1}{2} \cdot (e_1 \cdot \text{Transpose}(e_1) + e_2 \cdot \text{Transpose}(e_2) + e_1 \cdot \text{Transpose}(e_2)$ 

$$+ e_2 \cdot \text{Transpose}(e_1))$$


$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

> # Is A = Transpose(A)?
> Transpose(A)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

> # YES!
> # Is A = A^2?
> A^2

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

> # YEHAAAHHH
> # The subspace is thus e_1 + e_2

```

Figure 63: WC 2 Exercise 3 Maple

Huis 3

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[3, 4], [1, 0]])

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = [J,Q])

$$J, Q := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad (2)$$

> recursie_relatie := Q . MatrixPower(J, n) . Q-1 . Vector([1, 1])

$$\text{recursie\_relatie} := \begin{bmatrix} \frac{-3(-1)^n}{5} + \frac{84^n}{5} \\ \frac{3(-1)^n}{5} + \frac{24^n}{5} \end{bmatrix} \quad (3)$$

> limit_eq := recursie_relatie[1]

$$\text{limit\_eq} := \frac{-3(-1)^n}{5} + \frac{84^n}{5} \quad (4)$$

> limit_eq := recursie_relatie[2]

$$\text{limit\_eq} := \frac{3(-1)^n}{5} + \frac{24^n}{5}$$

> limit(limit_eq, n = infinity)
4

```

(5)

Figure 64: Huis 3 Exercise 1

$$y_{n+1} = 3y_n + 4y_{n-1}$$

$$y_0 = y_1 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n}$$

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{via maple}} \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

↓

via maple

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De recursie relatie zegt: $\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} = Q D^{n-1} Q^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$

(via maple)

$$\begin{matrix} \text{maple}, \\ = \dots \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{---}} \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \right) = q$$

Figure 65: Huis 3 Exercise 1

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{pmatrix} a & b & e & f \\ c & d & g & h \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & k & l \end{pmatrix} \\
 &= a \cdot \begin{pmatrix} d & g & h \\ 0 & i & j \\ 0 & k & l \end{pmatrix} - c \cdot \begin{pmatrix} b & e & f \\ 0 & i & j \\ 0 & k & l \end{pmatrix} \\
 &= ad \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} - cd \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
 &= (ad - cd) \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \det(a) \det(c) = \det(ac)
 \end{aligned}$$

Figure 66: Huis 3 Exercise 2

```

> with(LinearAlgebra):
> # First express the matrix ( N=2)
> A := Matrix([[a,b,e,f],[c,d,g,h],[0,0,i,j],[0,0,k,l]])
      
$$A := \begin{bmatrix} a & b & e & f \\ c & d & g & h \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & k & l \end{bmatrix}$$
 (1)

> Determinant(A)           
$$adil - adjk - bcil + bcjk$$
 (2)
> # This is the answer, the only thing now is to identify the result
> det_a := a·d - c·b       
$$det_a := ad - cb$$
 (3)
> det_b := e·h - g·f       
$$det_b := eh - gf$$
 (4)
> det_c := i·l - k·j       
$$det_c := il - kj$$
 (5)
> expand(det_a · det_c)    
$$adil - adjk - bcil + bcjk$$
 (6)
> # Look, same answer, thus it can be done like this.

```

Figure 67: Huis 3 Exercise 2

// Exercise 3

> # De recursie relatie is: $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$

> # Als we dit schrijven in matrix vorm krijgen we:

> restart: with(LinearAlgebra):

> A := Matrix([[1, 1], [1, 0]])

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])

$$J, Q := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (2)$$

> JK := Matrix($\left[\left[\left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k, 0 \right], \left[0, \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k \right] \right]$)

$$JK := \begin{bmatrix} \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k \end{bmatrix} \quad (3)$$

> Q_inverse := MatrixInverse(Q)

$$Q_{\text{inverse}} := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{(-5+\sqrt{5})\sqrt{5}}{10} \end{bmatrix} \quad (4)$$

> x_0 := 1

$$x_0 := 1 \quad (5)$$

> x_1 := $\frac{(1-\sqrt{5})}{2}$

$$x_1 := -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \quad (6)$$

> v_1 := Vector([x_1, x_0])

$$v_1 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

> result := Q • JK • Q_inverse • v_1

$$\begin{aligned}
result := & \left[\left[\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k + \frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{5} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k}{10} \right) \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right) \right. \right. \\
& - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \Big) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
& \left. \left. - \frac{(\sqrt{5}+1) \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k (-5+\sqrt{5})}{20} \right] , \right. \\
& \left[\left(-\frac{\sqrt{5} \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k}{5} + \frac{\sqrt{5} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k}{5} \right) \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right) \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sqrt{5} \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right)}{5} - \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k (-5+\sqrt{5})}{10} \right] \right]
\end{aligned} \tag{8}$$

```

> # calculate the limit
> limit(result[1], k = infinity)

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \tag{9}$$


```

```

> # Et voila ;)
>
> # Ok but for b) we need to add a small epsilon to this shit
> epsilon :=
> x_0 := 1 + e

$$x_0 := 1 + e \tag{10}$$


```

```

> x_1 :=  $\frac{(1 - \text{sqrt}(5))}{2} + e$ 

$$x_1 := \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + e \tag{11}$$


```

```

> v_1 := Vector([x_1, x_0])

$$v_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + e \\ 1 + e \end{bmatrix} \tag{12}$$


```

```

> result := Q . JK . Q inverse . v_1

$$result := \left[ \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k + \frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{5} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k}{10} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \right] \tag{13}$$


```

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sqrt{5}}{2} + e \Big) + \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right) \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{(\sqrt{5}+1) \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k (-5+\sqrt{5})}{20} \right) (1+e), \\
& \left[\left(-\frac{\sqrt{5} \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k}{5} + \frac{\sqrt{5} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k}{5} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + e \right) + \right. \\
& \left. - \frac{\sqrt{5} \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right)}{5} - \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^k (-5+\sqrt{5})}{10} \right] (1 \\
& + e)
\end{aligned}$$

> # calculate the limit

> $result := limit\left(\frac{result[1]}{result[2]}, k = infinity\right)$

$$result := \frac{3\sqrt{5} + 5}{5 + \sqrt{5}} \quad (14)$$

> evala(result)

$$\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \quad (15)$$

> # Hupa, correct bitches

```

> # We doen de uitdagende bijvraag niet aangezien dit wordt geskipped door
   professor.
> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([ [ 8/10, 3/10 ], [ 2/10, 7/10 ] ])

$$A := \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = [ 'J', 'Q' ])

$$J, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad (2)$$

> # Lambda_1 = 1, lam_2 =  $\frac{1}{2}$ ,
   obviously gaat lambda_1 domineren wanneer we exponentiële vorm
   nemen.
> # Aka,  $v_1 = \left[ \frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right]$  is het asymptotische vector. Let's proof this shit
> JK := Matrix([ [ 1, 0 ], [ 0, (1/2)^k ] ])

$$JK := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix} \quad (3)$$

> result := Q * JK * MatrixInverse(Q)

$$result := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^k}{5} & \frac{3}{5} - \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^k}{5} \\ \frac{2}{5} - \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^k}{5} & \frac{2}{5} + \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^k}{5} \end{bmatrix} \quad (4)$$

> # In this form, we can see if k -> infinity, then we get the answer we were
   looking for. Prove accepted.

```

Figure 68: Huis 3 Exercise 4

```

> restart : with(LinearAlgebra) :
> A := Matrix([ [ 98/100, 0, 0 ], [ 2/100, 97/100, 0 ], [ 0, 3/100, 1 ] ])
      
$$A := \begin{pmatrix} \frac{49}{50} & 0 & 0 \\ \frac{1}{50} & \frac{97}{100} & 0 \\ 0 & \frac{3}{100} & 1 \end{pmatrix}$$

> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])
      
$$J, Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{49}{50} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{97}{100} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

> MatrixPower(J, n)
      
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{49}{50}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{97}{100}\right)^n \end{pmatrix}$$

> # Here we see that Lambda_1 is dominant, so eigenvector 1 is dominant
> v_1 := Vector([0, 0, 1])
      
$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

> # everyone will die.
>

```

Figure 69: Exercise 5

6. Voor een Markov matrix is de som van de componenten van een vector \mathbf{x} gelijk aan de som van de componenten van \mathbf{Ax} . Bewijs dat voor eigenvectoren $\mathbf{Av}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k$, met $\lambda_k \neq 1$ de som van de componenten verdwijnt.

Verifieer ook voor de matrix A uit vraag 4.

Oplossing:

$$\sum_i (\mathbf{v}_k)_i = \sum_i (A\mathbf{v}_k)_i = \lambda_k \sum_i (\mathbf{v}_k)_i$$

$$(1 - \lambda_k) \sum_i (\mathbf{v}_k)_i = 0 \iff \lambda_k = 1 \text{ of } \sum_i (\mathbf{v}_k)_i = 0$$

Figure 70: Exercise 6

7. a) Schrijf de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0, \quad \text{met } y(t), a, b \in \mathbb{R} \quad (2)$$

als een eerste-orde matrix differentiaalvergelijking $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, met $\mathbf{y} = (\dot{y}, y)$, en los deze vergelijking vervolgens op.

Je vindt drie types kwalitatief verschillend gedrag van de oplossing, voor $a^2 > 4b$, $a^2 = 4b$ en $a^2 < 4b$. Verklaar dit gedrag vanuit de Jordan-vorm van \mathbf{A} .

Oplossing:

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= -a\dot{y} - by \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- $a^2 > 4b$:

We krijgen een diagonale Jordan vorm met 2 verschillende eigenwaarden. De basisoplossingen zijn $e^{\lambda_1 t}$ en $e^{\lambda_2 t}$.

- $a^2 = 4b$: In dit geval krijgen we een niet-diagonale Jordan vorm met $\lambda_1 = \lambda_2 = -a/2$. De basisoplossingen zijn $e^{\lambda_1 t}$ en $te^{\lambda_1 t}$.

- $a^2 < 4b$: De Jordanvorm is opnieuw diagonaal. We krijgen 2 complexe eigenwaarden. De basisoplossingen zijn gedempte oscillaties.

Figure 71: Exercise 7

```

> # A) is basically gwn Jordan Form en kijken wat je eigenwaarden
   eigenvectoren zijn lolz.
> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[-2, 2, 2], [-5, 4, 3], [0, 0, 2]])

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = [J,Q])

$$J, Q := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - I & 0 \\ 0 & 0 & 1 + I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} - \frac{2I}{5} & -\frac{1}{5} + \frac{2I}{5} \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{I}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{I}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

> # Hierboven is a)
> # Ok nu b) Het idee is simpel, we willen alpha_1, alpha_2 en y(t)
y0 := Vector([1, 1, 1]):
> constants := solve(Q.Vector([alpha1, alpha2, conjugate(alpha2)]) = y0,
   [alpha1, alpha2]);

$$\text{constants} := [[\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0]] \quad (3)$$

> # nu nog y(t). y(t) = Q · exp(D) · Q⁻¹ · y₀
> D_exp := Matrix([[exp(2·t), 0, 0], [0, exp((1 - I)·t), 0], [0, 0, exp((1 + I)·t)]])

$$D_{\text{exp}} := \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1-I)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(1+I)t} \end{bmatrix} \quad (4)$$

> y := Q · D_exp · MatrixInverse(Q) · y0

$$y := \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \quad (5)$$

> # Et voila.

```

Figure 72: Exercise 8

// Exercise 9

> *restart: with(LinearAlgebra):*

> $A := \text{Matrix}([[0, -1, 0, -1], [1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0]])$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> $J, Q := \text{JordanForm}(A, \text{output} = [\text{'J}', \text{'Q'}])$

$$J, Q := \left[\begin{array}{cccc} -\frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{3}}{2} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{-3 + I\sqrt{3}}, \frac{\frac{I}{3}\sqrt{3}}{-1 + I\sqrt{3}}, -\frac{1 + I\sqrt{3}}{(-3 + I\sqrt{3})(-1 + I\sqrt{3})}, -\frac{1}{-3 + I\sqrt{3}} \\ -\frac{-1 + I\sqrt{3}}{2(-3 + I\sqrt{3})}, \frac{1}{-3 + I\sqrt{3}}, -\frac{1}{-3 + I\sqrt{3}}, \frac{-1 + I\sqrt{3}}{2(-3 + I\sqrt{3})} \\ -\frac{2}{(-3 + I\sqrt{3})(-1 + I\sqrt{3})}, \frac{2}{(-3 + I\sqrt{3})(-1 + I\sqrt{3})}, \\ -\frac{2}{(-3 + I\sqrt{3})(-1 + I\sqrt{3})}, \frac{1 + I\sqrt{3}}{2(-3 + I\sqrt{3})} \\ -\frac{1}{-3 + I\sqrt{3}}, -\frac{1 + I\sqrt{3}}{(-3 + I\sqrt{3})(-1 + I\sqrt{3})}, \frac{1 + I\sqrt{3}}{(-3 + I\sqrt{3})(-1 + I\sqrt{3})}, \\ \frac{1}{-3 + I\sqrt{3}} \end{array} \right] \quad (2)$$

> $v := \text{Vector}([1, 0, 2, 1])$

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

> $result_1 := simplify(MatrixExponential(t \cdot A) \cdot v)[4]$

$$result_1 := \frac{2 \left(e^{-\frac{t}{2}} + \frac{3 e^{\frac{t}{2}}}{2} \right) \sqrt{3} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)}{3} + e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \quad (4)$$

=>

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[2, 3], [1, 0]])

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> J, Q := JordanForm(A, output = ['J', 'Q'])

$$J, Q := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (2)$$

> # Dit is i) lambda_1 = -1, lambda_2 = 3
> # ii)
> v_1 := Q[ .., 1]

$$v_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (3)$$

> v_2 := Q[ .., 2]

$$v_2 := \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (4)$$

> v_3 := Vector([1, 2])

$$v_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

> eq := <1, 2> = c1 * v_1 + c2 * v_2;

$$eq := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c1}{4} + \frac{3c2}{4} \\ -\frac{c1}{4} + \frac{c2}{4} \end{bmatrix} \quad (6)$$

> solve(eq, {c1, c2})

$$\{c1 = -5, c2 = 3\} \quad (7)$$


```

Figure 73: Exercise 1

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> # Oefening 2 vind ik maar brol, wordt nooit gevraagd
> # i)
> # Leer gwn matrixExponential te gebruiken
> A := Matrix([[1, 1], [1, 1]])
      A := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
 (1)
> MatrixExponential(A)
      
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} & \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} \end{bmatrix}$$
 (2)

```

Figure 74: Exercise 2

// Exercise 3

```
[> restart: with(LinearAlgebra): with(plots): with(plottools):  
[> #i)
```

```
[> P := Matrix([ [0, 0, 1, 0, 0], [1/2, 0, 0, 0, 0], [1/2, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1/2, 0], [0, 0, 0, 1/2, 1] ]])
```

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
[> T := 1/5 Matrix([[1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1]])
```

$$T := \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad (2)$$

```
[> G := a→a·P + (1 - a)·T
```

$$G := a \mapsto a \cdot P + (1 - a) \cdot T \quad (3)$$

```
[> #ii)
```

```
[> J, Q := JordanForm(G(a), output = [ 'J', 'Q' ])
```

(4)

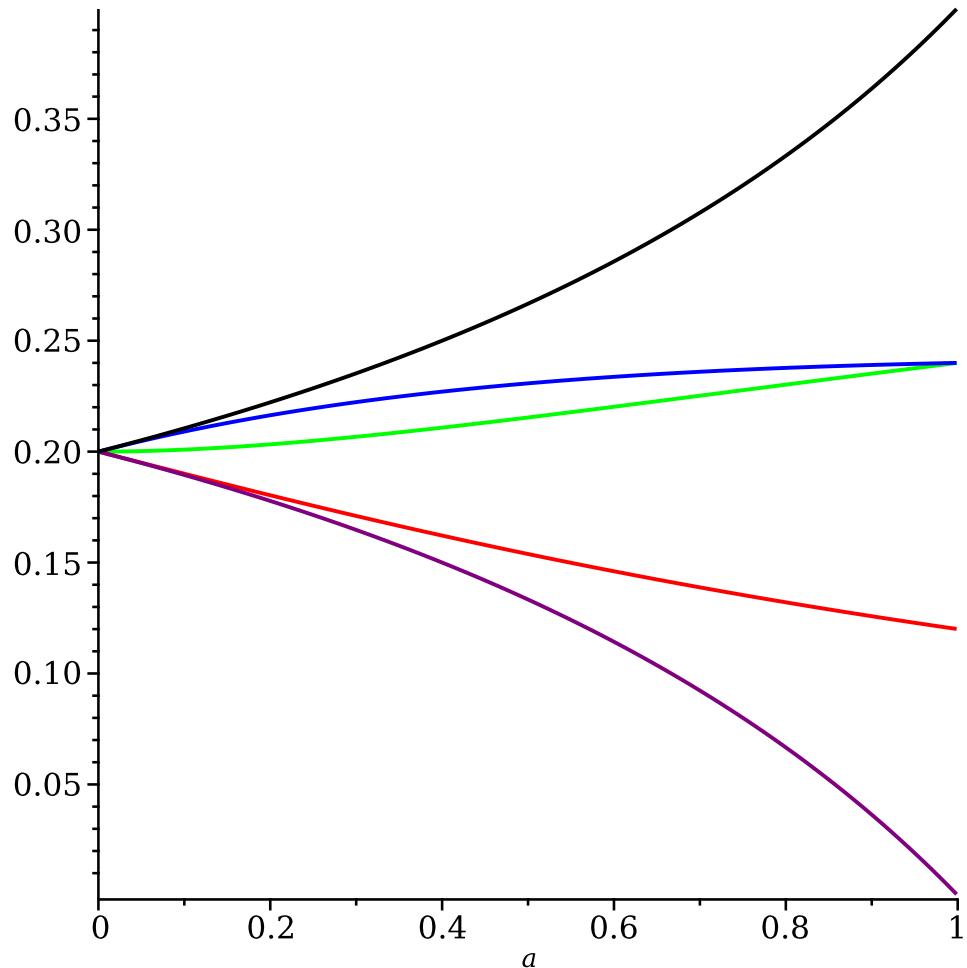
$$J, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2} - \frac{I}{2}\right)a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2} + \frac{I}{2}\right)a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \left[\frac{2(a^2 + a + 1)}{5(a^2 + 2a + 2)}, \frac{4}{25}, \right. \\ \left. \frac{3Ia + 10 + 2I + 5a}{10(2Ia + 3 + I + a)}, \frac{-\frac{I}{50}(11Ia^2 + 32Ia - 7a^2 - 4 + 32I - 14a)}{a^2 + 2a + 2}, 0 \right], \\ \left[\frac{a+2}{5(a^2 + 2a + 2)}, \frac{2}{25}, \frac{Ia - 6 + 4I - 4a}{10(2Ia + 3 + I + a)}, \right. \\ \left. \frac{\frac{I}{50}(2Ia^2 + 9Ia - 9a^2 - 18 + 14I - 23a)}{a^2 + 2a + 2}, 0 \right], \\ \left[\frac{a^2 + 3a + 2}{5(a^2 + 2a + 2)}, \frac{4}{25}, -\frac{4Ia + 4 + 6I + a}{10(2Ia + 3 + I + a)}, \right. \\ \left. \frac{\frac{I}{50}(9Ia^2 + 23Ia + 2a^2 + 14 + 18I + 9a)}{a^2 + 2a + 2}, 0 \right], \\ \left[\frac{2(-1+a)}{5(a-2)}, 0, 0, 0, -\frac{2(-1+a)}{5(a-2)} \right], \\ \left[-\frac{2}{5(a-2)}, -\frac{2}{5}, 0, 0, \frac{2(-1+a)}{5(a-2)} \right] \end{bmatrix}$$

> # Hier zien we alvast dat lambda 1 dominant is, dus eigenvector 1 is sexy
 > sol := Q[.., 1]

(5)

$$sol := \left[\begin{array}{l} \frac{2(a^2 + a + 1)}{5(a^2 + 2a + 2)} \\ \frac{a + 2}{5(a^2 + 2a + 2)} \\ \frac{a^2 + 3a + 2}{5(a^2 + 2a + 2)} \\ \frac{2(-1 + a)}{5(a - 2)} \\ -\frac{2}{5(a - 2)} \end{array} \right] \quad (5)$$

> `plot(sol, a = 0..1, color = [green, red, blue, purple, black]);`
`evalf(subs({a = 1}, sol));`



(6)

$$\begin{bmatrix} 0.2400000000 \\ 0.1200000000 \\ 0.2400000000 \\ 0. \\ 0.4000000000 \end{bmatrix} \quad (6)$$

> # we zien dus dat website 5 het meest zal worden bezocht

> #iii)

> $J, Q := JordanForm(G(1), output = ['J', 'Q'])$

$$J, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{I}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{I}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{10} - \frac{I}{10} & \frac{3}{10} + \frac{I}{10} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{10} + \frac{I}{5} & -\frac{1}{10} - \frac{I}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} - \frac{I}{10} & -\frac{1}{5} + \frac{I}{10} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> # antwoord is dan ofcourse v_1 en v_5 letsgo

> #iv)

> $state_n := (n, x0) \rightarrow Q \cdot J^n \cdot MatrixInverse(Q) \cdot x0 :$

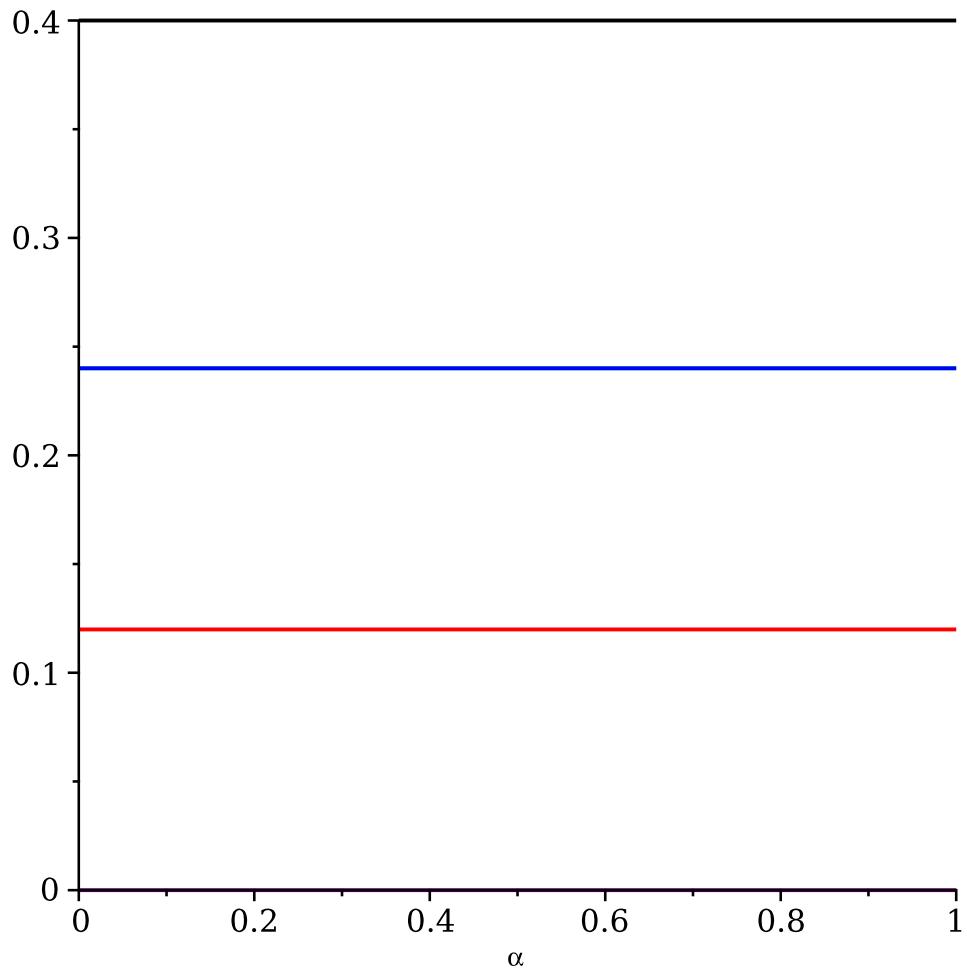
> # eerst uniform dus 0.2 prob per sprong

> $x0 := \langle 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2 \rangle;$

> $state_20 := state_n(20, x0) :$

> $plot1 := plot(state_20, alpha = 0..1, color = [green, red, blue, purple, black]);$

$$x0 := \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

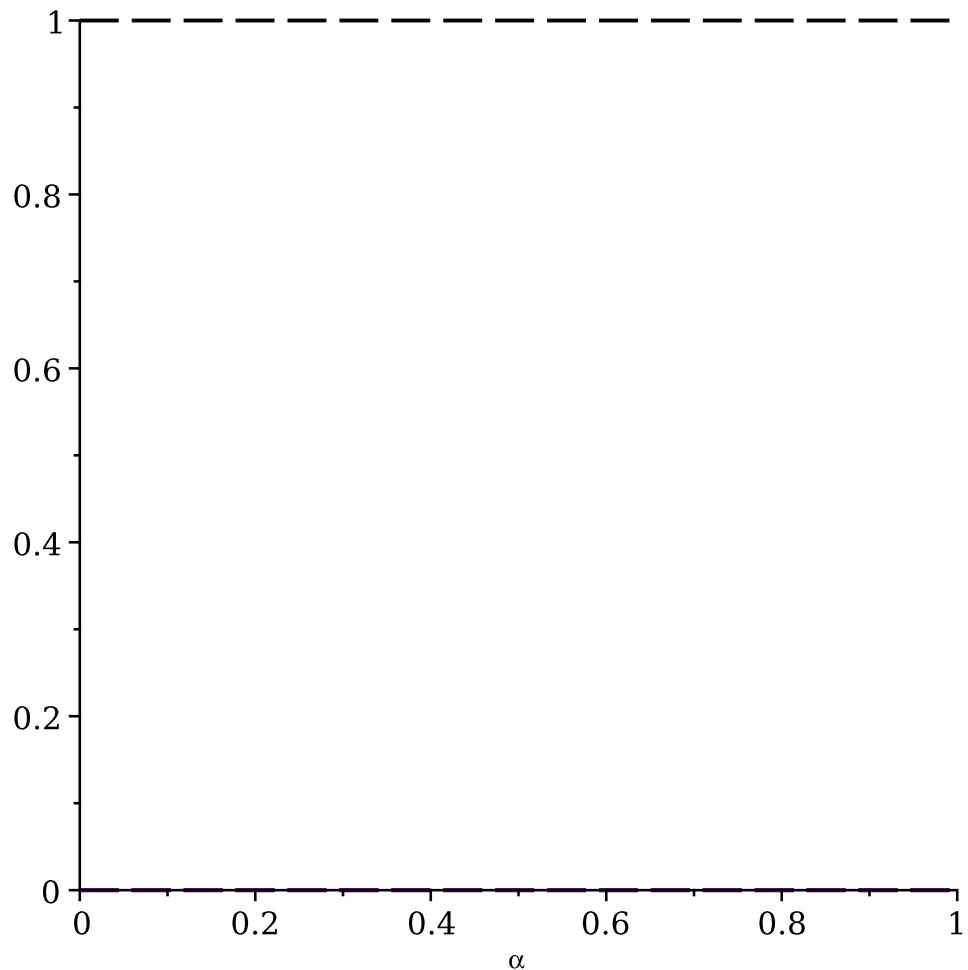


```

> # ik denk dat mijn Q en J niet goed zijn ingeladen, anyways I dont care
> # Nu kijken naar bezetting van website 4 en 5, dus 50 50
> x0 := <0, 0, 0, 0.5, 0.5>;
state_50 := state_n(20, x0) :
plot2 := plot(state_50, alpha = 0..1, color = [green, red, blue, purple, black],
linestyle = "dash");

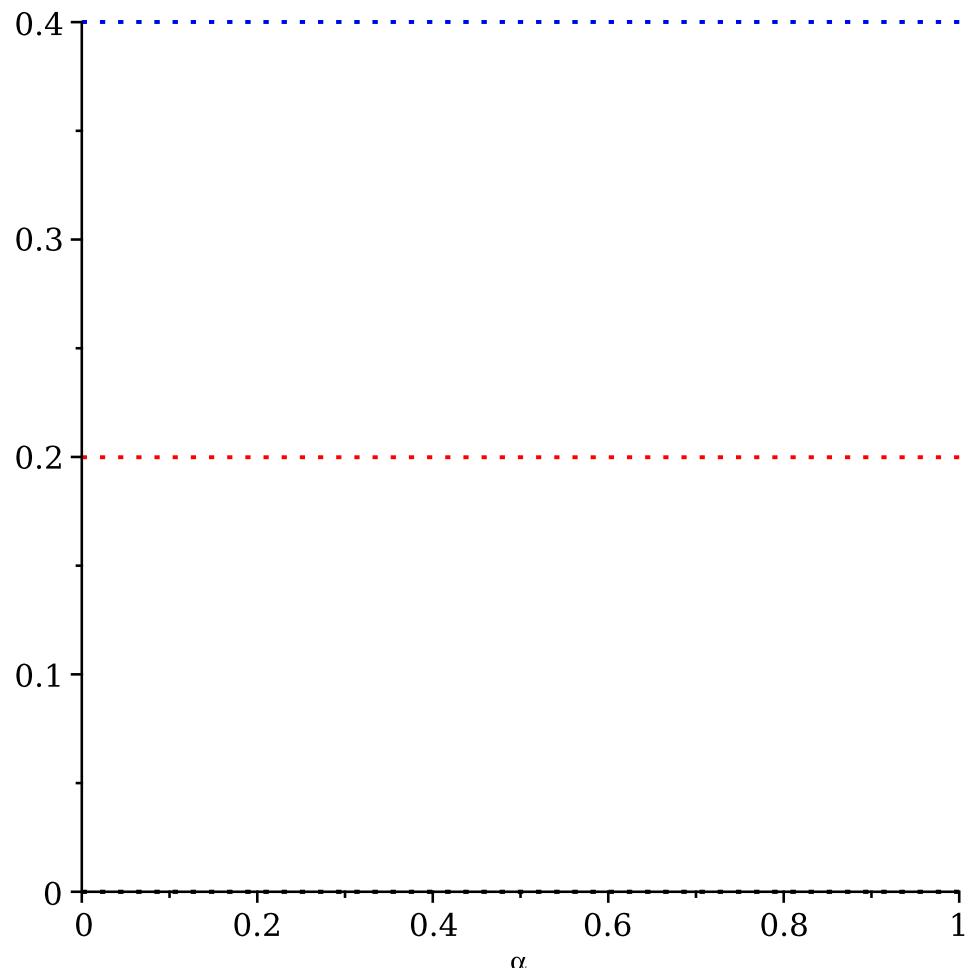
```

$$x0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$



```
> # Als laatste de bezetting van website 1, 2 en 3
> x0 := <1/3, 1/3, 1/3, 0, 0>;
state_50 := state_n(20, x0):
plot3 := plot(state_50, alpha = 0..1, color = [green, red, blue, purple, black],
linestyle = "dot");
```

$$x_0 := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



> #Warning, die plots kloppen niet, maar moet gewoonweg gevult worden
met de juiste J

▶

// Exercise 1

Wiskundige modellering in de ingenieurswetenschappen: Werkcollege 3

Oefening 1

> restart:with(plots):with(LinearAlgebra):

We definiëren de (6x6)-matrix A als functie van Ex, Ey en B

> $A := (Ex, Ey, B) \rightarrow \langle \langle 0|0|B|0|Ex\rangle, \langle 1|0|0|0|0\rangle, \langle -B|0|0|0|Ey\rangle, \langle 0|0|1|0|0\rangle, \langle 0|0|0|0|0\rangle \rangle;$
 $A(Ex,Ey,B);$

$A := (Ex, Ey, B) \mapsto \langle \langle 0|0|B|0|Ex\rangle, \langle 1|0|0|0|0\rangle, \langle -B|0|0|0|Ey\rangle, \langle 0|0|1|0|0\rangle, \langle 0|0|0|0|0\rangle \rangle$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & B & 0 & Ex \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B & 0 & 0 & 0 & Ey \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Ook de beginwaarden steken we in een vector(functie)

> $X0 := (x0, y0, vx0, vy0) \rightarrow \langle vx0, x0, vy0, y0, 1 \rangle:$
 $X0(x0, y0, vx0, vy0);$

$$\begin{bmatrix} vx0 \\ x0 \\ vy0 \\ y0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

De algemene oplossing wordt gevonden als

> $sol := \text{MatrixExponential}(t^*A(Ex,Ey,B)).X0(x0, y0, vx0, vy0);$
 $x_sol := sol[2];$
 $y_sol := sol[4];$
 $sol := \left[\left[\cos(tB) vx0 + \sin(tB) vy0 + \frac{Ex \sin(tB) - Ey \cos(tB) + Ey}{B} \right], \right.$
 $\left[\frac{\sin(tB) vx0}{B} + x0 + \frac{(-\cos(tB) + 1) vy0}{B} \right.$
 $\left. + \frac{BEyt - Ex \cos(tB) - Ey \sin(tB) + Ex}{B^2} \right],$
 $\left. \left[-\sin(tB) vx0 + \cos(tB) vy0 + \frac{Ex \cos(tB) + Ey \sin(tB) - Ex}{B} \right], \right]$

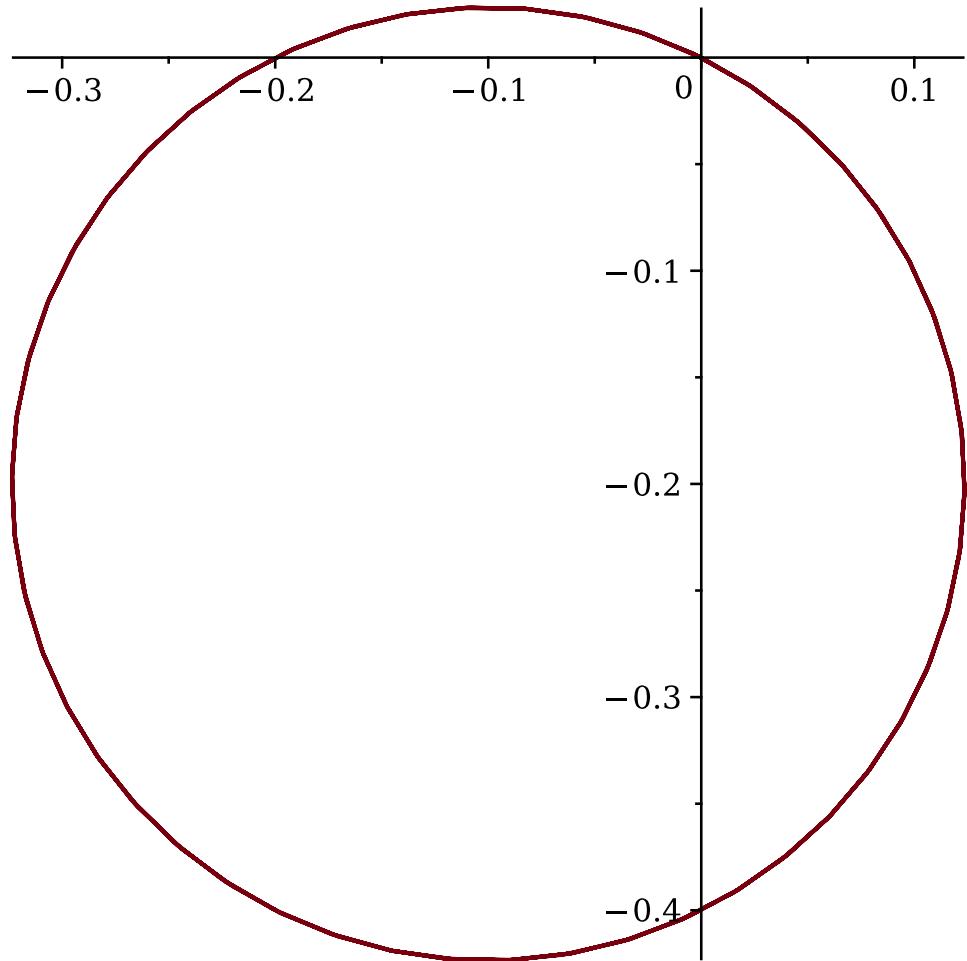
$$\begin{aligned}
& \left[\frac{(\cos(tB) - 1) vx0}{B} + \frac{\sin(tB) vy0}{B} + y0 \right. \\
& \left. + \frac{-B Ex t + Ex \sin(tB) - Ey \cos(tB) + Ey}{B^2} \right] \\
& \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
x_{sol} &:= \frac{\sin(tB) vx0}{B} + x0 + \frac{(-\cos(tB) + 1) vy0}{B} \\
&+ \frac{BEyt - Ex \cos(tB) - Ey \sin(tB) + Ex}{B^2} \\
y_{sol} &:= \frac{(\cos(tB) - 1) vx0}{B} + \frac{\sin(tB) vy0}{B} + y0 \\
&+ \frac{-B Ex t + Ex \sin(tB) - Ey \cos(tB) + Ey}{B^2}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Kijken we nu naar de concrete beginvoorwaarden voor $(Ex, Ey) = (0,0)$, $B=10$

```

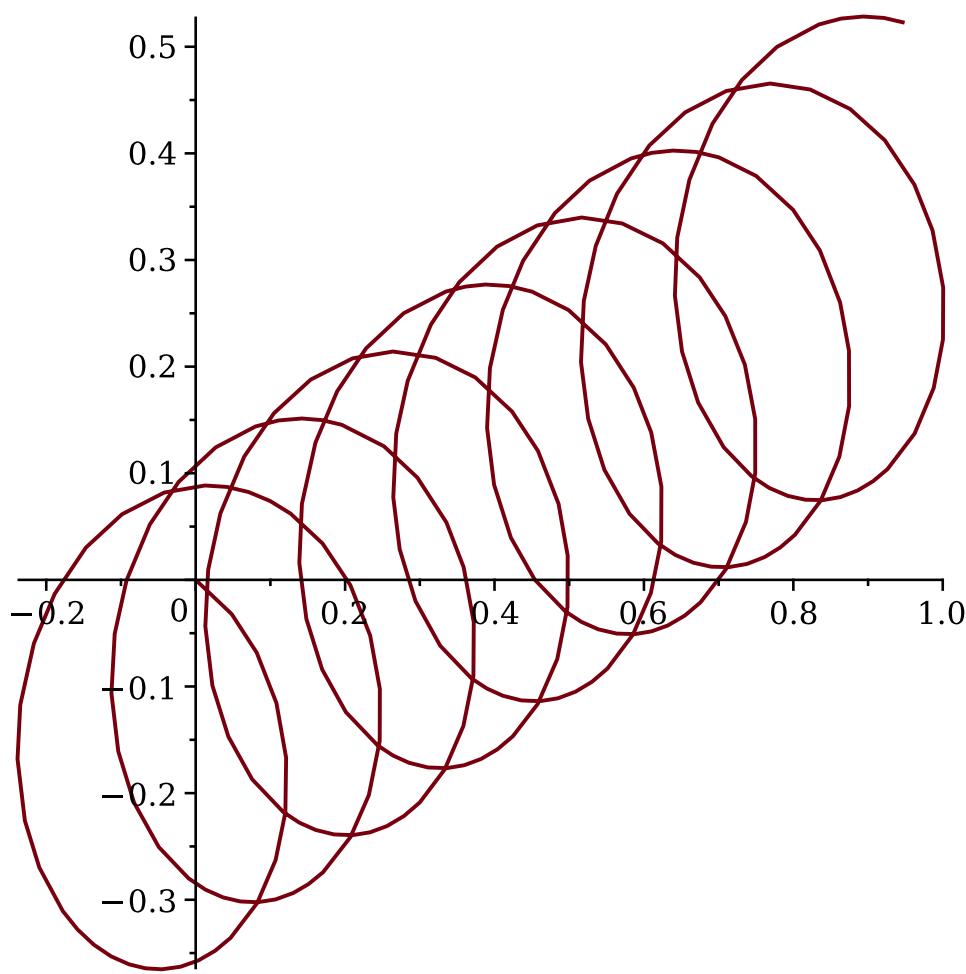
> sol_E0 := MatrixExponential(t*A(0,0,10)).X0(0,0,2,-1):
  x_sole0 := sol_E0[2]:
  y_sole0 := sol_E0[4]:
> plot([x_sole0, y_sole0, t=0..5]);

```



Analoog voor $(Ex, Ey) = (-1, 2)$

```
> sol_E := MatrixExponential(t*A(-1,2,10)).X0(0,0,2,-1):  
x_sole := sol_E[2]:  
y_sole := sol_E[4]:  
> plot([x_sole, y_sole, t=0..5]);
```



Het qualitatieve verschil is te zien in de Jordanvorm van de matrix A: indien E verschillend is van 0 verschijnen er Jordan-blokken, wat zal zorgen voor een verschillend gedrag wanneer men e exponentiële $\exp(t^*A)$ neemt

```
> JE0 := JordanForm(A(0,0,B));
JE := JordanForm(A(Ex,Ey,B));
```

$$JE0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -IB & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & IB & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$JE := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -IB & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & IB & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

► **Oefening 3**

► **Oefening 2**

```

> restart: with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([ [1, -1, 0], [0, 1/2, 0], [-3/4, 7/4, 1/4] ])
      
$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$
 (1)
> J, Q := JordanForm(A, output = [ 'J', 'Q' ])
      
$$J, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$
 (2)
> cosD := Matrix([[ (cos(Pi * J[1, 1])), 0, 0], [0, (cos(Pi * J[2, 2])), 0], [0, 0, (cos(Pi * J[3, 3]))]]);
      
$$cosD := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
 (3)
> result := Q * cosD * MatrixInverse(Q)
      
$$result := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
 (4)
> # Et voila

```

Figure 75: Exercise 2

```

[> restart: with(LinearAlgebra):
[> # First we define the relationship as matrix
[> A := Matrix([[a,b],[1,0]])

$$A := \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$


[> J, Q := JordanForm(A, output = [ 'J','Q'])

$$J, Q := \begin{bmatrix} \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \end{bmatrix}, \quad (2)$$


$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2\sqrt{a^2 + 4b}} & \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2\sqrt{a^2 + 4b}} \\ -\frac{1}{\sqrt{a^2 + 4b}} & \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4b}} \end{bmatrix}$$


[> result := Q . MatrixPower(J, n) . MatrixInverse(Q) . Vector([1, 1]):
[> limit_ := simplify(result[1] / result[2])

$$limit_ := \left( (\sqrt{a^2 + 4b} - a - 2b) \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n + (\sqrt{a^2 + 4b} + a + 2b) \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n \right) / \left( (\sqrt{a^2 + 4b} + a - 2) \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n - \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n (a - \sqrt{a^2 + 4b} - 2) \right) \quad (3)$$


[> limit(limit_, n = infinity)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( (\sqrt{a^2 + 4b} - a - 2b) \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n + (\sqrt{a^2 + 4b} + a + 2b) \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n \right) / \left( (\sqrt{a^2 + 4b} + a - 2) \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n - \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n (a - \sqrt{a^2 + 4b} - 2) \right) \quad (4)$$


```

Figure 76: Exercise 3