Algebra 2

Uni Heidelberg

Mit Liebe gemacht von:
Nikolaus Schäfer

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Moduln

In dieser Vorlesung steht die Bezeichnung "Ring" stets für einen (nicht notwendig kommutativen) Ring mit 1.
In diesem Kapitel sei R ein Ring

1. Grundlagen über Moduln

Definition 1.0.1. Ein R**-Linksmodul** ist eine abelsche Gruppe $(M,+)$ zusammen mit einer Abbildung $R\times M \to M$, $(a,x) \mapsto ax$ (skalare Multiplikation), sodass für alle $a,b \in R$, $x,y \in M$ gilt:
(a) $a(x+y) = ax+ay$
(b) $(a+b)x = ax+bx$
(c) $a(bx) = (ab)x$
(d) $1x = x$
Ein R**-Rechtsmodul** ist eine abelsche Gruppe $(M,+)$ zusammen mit einer Abbildung $M\times R \to M$, $(x,a) \mapsto xa$, sodass für alle $a,b \in R$, $x,y \in M$ gilt:
(a') $(x+y)a = xa+ya$
(b') $x(a+b) = xa+xb$
(c') $x(ab) = (xa)b$
(d') $x1 = x$

Anmerkung: Es bezeichnet R^{op} den zu R entgegengesetzten Ring, d.h. Menge R mit derselben Addition, sowie Multiplikation $a_{\text{op}} \cdot b := b\cdot a$. Ist M ein R-Rechtsmodul, so wird M durch $ax := xa$ zu einem R^{op}-Linksmodul.
Beachte: Es ist dann $a(bx) = (bx)a = (xb)a = x(ba) = (ba)x = (a_{\text{op}} \cdot b)x$ für $a,b \in R$, $x,y \in M$.
Analog andersherum.

Im Folgenden betrachten wir in der Regel nur R-Linksmoduln, und unter einem R**-Modul** verstehen wir einen R-Linksmodul

- Forderung (a) impliziert, dass für alle $a \in R$ die Abbildung:

$$\ell_a : M \to M, \quad x \mapsto ax$$

  zum Ring $End(M)$ aller Gruppenhomomorphismen $M \to M$ gehört.
  (mit $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(f\cdot g)(x) := (f\circ g)(x) = f(g(x))$ für $f,g \in End(M)$, $x \in M$).
  Nach (b)-(d) ist die Abbildung $\varphi : R \to End(M)$, $a \mapsto \ell_a$ ein Ringhomomorphismus.
  Umgekehrt macht jeder Ringhomomorphismus $\varphi : R \to End(M)$ eine abelsche Gruppe $(M,+)$ zu einem R-Modul via $ax := \varphi(a)(x)$

- Für alle $x \in M$ ist $0x = 0$, $(-1)x = -x$, und für alle $a \in R$ ist $a0 = 0$ (leicht zu sehen)

Beispiel 1.0.2.
(a) K Körper. Dann K-Modul = K-Vektorraum
(b) Jede abelsche Gruppe G ist ein $\mathbb{Z}$-Modul via

$$\mathbb{Z}\times G \to G, \quad (n,x) \mapsto nx := \begin{cases} \underbrace{x+\ldots+x}_{\text{n-mal}} & n>0 \\ 0 & n=0 \\ -(\underbrace{x+\ldots+x}_{\text{(-n)-mal}}) & n<0 \end{cases}$$

Für jeden Ring R gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$ (analog zu Algebra 1), insbesondere gibt es für jede abelsche Gruppe G genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to End(G)$, d.h. genau eine Struktur als $\mathbb{Z}$-Modul, sodass die Moduladdition mit der gegebenen Addition auf G übereinstimmt (nämlich obige).

Definition 1.0.3. M, M' R-Moduln, $\varphi : M \to M'$
φ heißt ***R*-Modulhomomorphismus (*R*-linear)**, wenn für alle $x, y \in M$, $a \in R$ gilt:
(a) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
(b) $\varphi(ax) = a\varphi(x)$
$Hom_R(M, M')$ bezeichnet die Menge der R-Modulhomomorphismen von M nach M'.

Anmerkung: $Hom_R(M, M')$ ist eine abelsche Gruppe bzgl. $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ für $f, g \in Hom_R(M, M')$

Beispiel 1.0.4. M R-Modul, $\varphi \in Hom_R(M, M) =: End_R(M) \subseteq End_{\mathbb{Z}}(M) = End(M)$
Den Polynomring $R[X]$ kann man wie über kommutativen Ringen definieren, die Einsetzungsabbildung

$$R[X] \to R, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i b^i \qquad \text{für ein } b \in R$$

ist aber im Allgemeinen kein Ringhomomorphismus ("X vertauscht mit Elementen aus R, b im Allgemeinen nicht")
Die Abbildung $\psi : R[X] \to End(M)$, $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \varphi^i$, da φ R-linear. Somit wird M zum $R[X]$-Modul.

Definition 1.0.5. M, M' R-Moduln, $\varphi : M \to M'$ R-linear
φ heißt:
Monomorphismus $\Leftrightarrow$ φ injektiv (Notation: $M \hookrightarrow M'$)
Epimorphismus $\Leftrightarrow$ φ surjektiv (Notation: $M \twoheadrightarrow M'$)
Isomorphismus $\Leftrightarrow$ φ bijektiv (Notation: $M \xrightarrow{\sim} M'$)
Existiert ein Isomorphismus zwischen M, M' so heißen M, M' isomorph.
Notation: $M \cong M'$

Anmerkung: φ Isomorphismus $\Rightarrow$ φ^{-1} Isomorphismus

Bemerkung 1.0.6. M, M' R-Moduln. Dann gilt:
(a) R kommutativ $\Rightarrow$ $Hom_R(M, M')$ ist ein R-Modul via $(a\varphi)(x) := a\varphi(x)$ für $a \in R$, $\varphi \in Hom_R(M, M')$, $x \in M$
(b) $End_R(M) = Hom_R(M, M)$ ist ein Unterring von $End(M) = End_{\mathbb{Z}}(M)$
(c) Die Abbildung $\phi : Hom_R(R, M) \to M$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ ist ein Isomorphismus abelscher Gruppen (hierbei R in natürlicher Weise als R-Modul). Ist R kommutativ, so ist ϕ ein Isomorphismus von R-Moduln.
(d) $End_R(R) \cong R^{\mathrm{op}}$

Definition 1.0.7. M R-Modul, $N \subseteq M$
N heißt **(*R*-)Untermodul** von M, wenn gilt:
(a) $0 \in N$
(b) $x + y \in N$ für alle $x, y \in N$
(c) $ax \in N$ für alle $a \in R$, $x \in N$

Beispiel 1.0.8.
(a) Betrachte R als R-Linksmodul. Dann sind die Untermoduln von R genau die Linksideale in R. (analog die Rechtsideale für R als R-Rechtsmodul).
(b) M R-Modul $\Rightarrow$ $\{0\}$ (meist kurz als 0 geschrieben), $M \subseteq M$ sind Untermoduln (triviale Untermoduln).
$(M_i)_{i \in I}$ Familie von Untermoduln von M. $\Rightarrow$ $\bigcap\limits_{i \in I} M_i \subseteq M$ ist ein Untermodul
$\sum\limits_{i \in I} M_i := \{\sum\limits_{i \in I} x_i | x_i \in M_i, x_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\} \subseteq M$ ist ein Untermodul
(c) M, M' R-Moduln, $\varphi \in Hom_R(M, M')$, $N \subseteq M$ Untermodul, $N' \subseteq M'$ Untermodul

$\Rightarrow \varphi(N) \subseteq M'$ ist ein Untermodul, $\varphi^{-1}(N') \subseteq M$ ist ein Untermodul.
$im(\varphi) := \varphi(M)$ heißt das Bild von φ
$\ker(\varphi) := \varphi^{-1}(\{0\})$ heißt der Kern von φ.
Es gilt: φ injektiv $\Leftrightarrow \ker(\varphi) = 0$, φ surjektiv $\Leftrightarrow im(\varphi) = M'$

Bemerkung 1.0.9. *M R-Modul, $N \subseteq M$ Untermodul*
Dann ist die Faktorgruppe M/N via $a(x+N) := ax+N$, $a \in R$, $x \in M$, ein R-Modul, der **Faktormodul** von M nach N.
Die kanonische Abbildung $\pi : M \longrightarrow M/N$, $m \mapsto m+N$ ist ein Modulepimorphismus mit $\ker\pi = N$.

Beispiel 1.0.10. *$I \subseteq R$ Linksideal, M R-Modul*
$\Rightarrow IM := \{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i | n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M\} \subseteq M$ ist ein Untermodul von M.
Ist I ein zweiseitiges Ideal, dann ist R/I ein Ring.
(beachte: Zweiseitigkeit von I geht ein bei der Wohldefiniertheit der Multiplikation:

$$R/I \times R/I \longrightarrow R/I, \quad (a+I, b+I) \mapsto ab+I$$

M/IM ist ein R/I-Modul mittels $(a+I)(x+M) := ax+IM$ $(a \in R, x \in M)$.

Satz 1.0.11. *M, M' R-Moduln, $N \subseteq M$ Untermodul, $\pi : M \longrightarrow M/N$ kanonische Projektion, $\varphi : M \longrightarrow M'$ R-Modulhomomorphismus. Dann sind äquivalent:*
(i) $N \subseteq \ker\varphi$
(ii) Es existiert genau ein Modulhomomorphismus $\bar{\varphi} : M/N \longrightarrow M'$ mit $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M' \\ & M/N \arrow[ur, dotted, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Satz 1.0.12. *(Homomorphiesatz)*
M, M' R-Moduln, $\varphi : M \longrightarrow M'$ Homomorphismus
Dann existiert ein R-Modulisomorphismus $\bar{\varphi} : M/\ker(\varphi) \xrightarrow{\sim} im\varphi$ mit $\bar{\varphi}(x+\ker\varphi) = \varphi(x)$ für alle $x \in M$

Satz 1.0.13. *(Isomorphiesätze) M R-Modul, $N_1, N_2 \subseteq M$ Untermoduln. Dann gilt:*
(a) $N_1/N_1 \cap N_2 \xrightarrow{\sim} (N_1+N_2)/N_2$, $x+N_1 \cap N_2 \mapsto x+N_2$
ist ein Isomorphismus.
(b) Ist $N_2 \subseteq N_1$, so ist
$(M/N_2)/(N_1/N_2) \xrightarrow{\sim} M/N_1$, $(x+N_2)N_1/N_2 \mapsto x+N_1$
ist ein Isomorphismus.

Satz 1.0.14. *M R-Modul, $N \subseteq M$ Untermodul, $\pi : M \longrightarrow M/N$ kanonische Abbildung. Dann gibt es eine Bijektion:*

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Untermoduln } M' \text{ von } M \text{ mit } M' \supseteq N\} & \longrightarrow & \{\text{Untermoduln von } M/N\} \\ M' & \longmapsto & \pi(M') \\ \pi^{-1}(L) & \longleftarrow\!\!\shortmid & L \end{array}$$

die inklusionserhaltend ist.

Bemerkung 1.0.15. *$(M_i)_{i \in I}$ Familie von R-Moduln*
Dann gilt: $\prod\limits_{i \in I} M_i$ ist ein R-Modul mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation und heißt das **direkte Produkt** der M_i.
Die Projektionsabbildung $P_j : \prod\limits_{i \in I} M_i \longrightarrow M_j$, $(m_i)_{i \in I} \mapsto m_j$ sind R-Modulhomomorphismen.

Satz 1.0.16. (UE Produkt) $(M_i)_{i\in I}$ Familie von R-Moduln
Dann gilt: Für jeden R-Modul M ist die Abbildung:

$$Hom_R(M, \prod_{i\in I} M_i) \to \prod_{i\in I} Hom_R(M, M_i), \quad \varphi \mapsto (\varphi_i \circ \varphi)_{i\in I}$$

eine Bijektion, d.h. für jede Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ von R Modulhomomorphismen. $\varphi_i : M \to M_i$ existiert genau ein R-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to \prod_{i\in I} M_i$ mit $\varphi_i \circ \varphi = \varphi_i$ für alle $i \in I$ (nämlich der durch $\varphi(x) := (\varphi_i(x))_{i\in I}$)

Definition 1.0.17. $(M_i)_{i\in I}$ Familie von R-Moduln
Der Untermodul

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \{(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i | \text{ fast alle } m_i = 0\} \subseteq \prod_{i\in I} M_i$$

heißt die **direkte Summe** der M_i.

Die Inklusionsabbildungen $q_j : M_j \to \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, $x \mapsto (x_i)_{i\in I}$ mit $x_i = \begin{cases} x & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
sind R-Modulhomomorphismen

Anmerkung: Ist I endlich, dann ist $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i = \prod\limits_{i\in I} M_i$

Satz 1.0.18. (UE Summe) $(M_i)_{i\in I}$ Familie von R-Moduln
Dann gilt: Für jeden R-Modul M ist die Abbildung

$$Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, M) \to \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, M), \quad \psi \mapsto (\psi \circ q_i)_{i\in I}$$

eine Bijektion, d.h. für jede Familie $(\psi_i)_{i\in I}$ von R-Modulhomomorphismen $\psi_i : M_i \to M$ existiert genau ein R-Modulhomomorphismus $\psi : \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \to M$ mit $\psi \circ q_i = \psi_i$
(nämlich der durch $\psi((m_i)_{i\in I}) = \sum\limits_{i\in I} \psi_i(m_i)$ definierte.)

Notation: I Indexmenge, M R-Modul
$M^I := \prod_{i\in I} M$, $M^{(I)} = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, $M^r := M^{\{1,\dots,r\}} = M^{(\{1,\dots,r\})}$

Bemerkung 1.0.19. M R-Modul, $(M_i)_{i\in I}$ Familie von Untermoduln von M.
Dann erhalten wir (aus UE $\bigoplus$ mit $\psi_i : M_i \hookrightarrow M$ Inklusionsabbildung) einen R-Modulhomomorphismus

$$\psi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M, \quad (m_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} m_i \quad \text{mit} \quad im(\psi) = \sum_{i\in I} M_i$$

Ist ψ injektiv, so heißt die Summe $\sum\limits_{i\in I} M_i$ direkt, und wir schreiben auch $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ für $\sum_{i\in I} M_i$

Anmerkung: In dieser Situation von 1.0.19 gilt

- $\sum\limits_{i\in I} M_i$ direkt $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{i\in J} M_i$ direkt für alle endlichen Teilmengen $J \subseteq I$
- $M_1 + M_2 = M_1 \oplus M_2 \Leftrightarrow M_1 \cap M_2 = 0$

Definition 1.0.20. M R-Modul, $x \in M$
Die Abbildung $f_x : R \to M$, $a \mapsto ax$ ist ein R-Modulhomomorphismus, das Linksideal

$$ann_R(x) := \ker(f_x) = \{a \in R | ax = 0\}$$

heißt der **Annulator** von x.
Das Bild $im(f_x) = Rx = \{ax | a \in R\}$ heißt der **von x erzeugte Untermodul von M**.
Allgemeiner heißt für eine Teilmenge $X \subseteq M$ und N Untermodul mit $X \subseteq N$:

$$\begin{aligned} RX := <X>_R := \sum_{x \in X} Rx = im(R^{(X)} \quad &\to \quad M) = \bigcap_{X \subseteq N \subseteq M} N \\ (a_x)_x \in X \quad &\mapsto \quad \sum_{x \in X} a_x X \end{aligned}$$

der **von X erzeugte Untermodul von M**.

Definition 1.0.21. M R-Modul, $(x_i)_{i \in I}$ Familie von Elementen aus M, $\psi : R^{(I)} \to M$, $(a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i x_i$
$(x_i)_{i \in I}$ heißt
Erzeugendensystem von M über $R \Leftrightarrow \psi$ surjektiv $\Leftrightarrow M$ stimmt mit den von $(x_i)_{i \in I}$ erzeugten Untermodul von M überein
linear unabhängig $\Leftrightarrow \psi$ injektiv
Basis von M über $R \Leftrightarrow \psi$ bijektiv
M heißt **endlich erzeugt** $\Leftrightarrow M$ besitzt ein endliches Erzeugendensystem
M heißt **frei** $\Leftrightarrow M$ besitzt eine Basis

Anmerkung:

- Ist $R = K$ ein Körper, so sind alle K-Moduln frei (LA1)
- Im Allgemeinen ist dies jedoch falsch: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist eine abelsche Gruppe ($= \mathbb{Z}$-Modul), die nicht frei als $\mathbb{Z}$-Modul ist.
- Jeder R-Modul M ist ein Faktormodul eines freien R-Moduls, denn:

$$R^{(M)} \to M, \quad (a_x)_{x \in M} \mapsto \sum_{x \in M} a_x x \quad \text{ist surjektiv}$$

- Basen eines freien R-Moduls können unterschiedliche Länge haben

Satz 1.0.22. A kommutativer Ring, $A \neq 0$, $n_1, n_2 \in N$
Dann gilt: $A^{n_1} \cong A^{n_2} \Rightarrow n_1 = n_2$

Definition 1.0.23. A kommutativer Ring, M freier A-Modul mit endlicher Basis
Die Kardinalität dieser Basis heißt der **Rang** von M. (unabhängig von der Wahl einer endlichen Basis nach 1.22)

2. Exakte Folgen

Definition 2.0.1. Eine **exakte Folge (exakte Sequenz)** von R-Moduln ist eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ von R-Modulhomomorphismen. $f_i : M_i \to M_{i+1}$ für ein (endliches oder unendliches) Intervall $I \subseteq \mathbb{Z}$, sodass

$$im(f_i) = \ker f_{i+1} \text{ für alle } i \in I \text{ mit } i+1 \in I \text{ gilt}$$

Schreibweise: $\quad \ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$
Eine exakte Folge der Form

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

heißt eine **kurze exakte Folge** (hierbei sind die äußeren Abbildungen die Nullabbildungen.)
Die Exaktheit von 2.1 bedeutet explizit:

- f injektiv
- g surjektiv
- $im(f) = \ker(g)$

Anmerkung: M, N, R-Moduln, $f : M \longrightarrow N$ R-Modulhomomorphismus
Falls f injektiv, dann ist $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow N/im(f) \longrightarrow 0$ exakt.
Falls f surjektiv, so ist $0 \longrightarrow \ker(f) \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ exakt.

Ist $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Folge von R-Moduln, und setzen wir $N := \ker(g)$, so induziert g einen Isomorphismus $\bar{g} : M/N \xrightarrow{\sim} M''$, und f beschränkt sich zu einen Isomorphismus $f : M' \xrightarrow{\sim} N$.
(d.h.
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr"', "\tilde{f}"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & M'' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook] & M \arrow[r] & M/N \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & 0
\end{tikzcd}$$
ist ein kommutierendes Diagramm mit exakten Zeilen)

Ist $M_i' \longrightarrow M_i \longrightarrow M_i''$, $i \in I$ eine Familie exakter Folgen von R-Moduln, dann sind auch die Folgen

$$\prod_{i\in I} M_i' \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i'' \text{ sowie } \bigoplus_{i\in I} M_i' \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i''$$

(mit komp. Abb.) exakt.

Satz 2.0.2.

$$0 \longrightarrow M' \underset{t}{\overset{f}{\rightleftarrows}} M \underset{s}{\overset{g}{\rightleftarrows}} M'' \longrightarrow 0$$

kurze exakte Folge von R-Moduln. Dann sind äquivalent:
(i) Es existiert ein Untermodul $N' \subseteq M$ mit $M = \ker(g) \oplus N' = im(f) \oplus N'$
(ii) Es existiert ein R-Modulhomomorphismus $s : M'' \to M$ mit $g \circ s = id_{M''}$
(iii) Es existiert ein R-Modulhomomorphismus $t : M \to M'$ mit $t \circ f = id_{M'}$
Ist eines dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt, sagt man, dass die kurze exakte Folge **spaltet**. In diesem Fall gilt: $M \cong M' \oplus M''$. Der Homomorphismus s heißt ein **Schnitt** von g.

Satz 2.0.3. $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ exakte Folge von R-Moduln, M'' freier R-Modul
Dann spaltet die obige Folge.

Folgerung 2.0.4. $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ exakte Folge von R-Moduln, M', M'' freie R-Moduln
Dann ist auch M ein freier R-Modul.

Anmerkung: Ist R kommutativ und haben M, M' endliche Basen, dann zeigt der Beweis:

$$rg(M) = rg(M') + rg(M'')$$

Bemerkung 2.0.5. $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ exakte Folge von R-Moduln.
Dann gilt:
(a) M endlich erzeugt $\Rightarrow M''$ endlich erzeugt
(b) M', M'' endlich erzeugt $\Rightarrow M$ endlich erzeugt

Anmerkung: Aus M endlich erzeugt folgt im Allgemeinen nicht, dass M' endlich erzeugt ist.

Beispiel 2.0.6. K Körper, $R = K[X_1, X_2, \ldots]$
R ist als R-Modul offensichtlich endlich erzeugt (von 1)
Setze $I := \{f \in R |$ konstanter Term von f ist $= 0\}$
Dann ist I ein Ideal in R, aber I ist nicht endlich erzeugt als R-Modul, denn:
Angenommen es existiert $f_1, \ldots, f_r \in I$ mit $I = \sum\limits_{i=1}^{r} R f_i$
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$, sodass $f_1, \ldots, f_r \in K[X_1, \ldots, X_r] \subseteq R$
Problem: $X_{n+1} \notin I$ (denn: andernfalls $X_{n+1} = a_1 f_1 + \ldots + a_r f_r$ mit $a_1, \ldots, a_r \in R$, denn: Setze $X_1 = \ldots = X_n = 0$, $X_{n+1} = 1$, also $1 = 0$) $\lightning$

Bemerkung 2.0.7. $M_1, \ldots, M_r$ R-Moduln. Dann sind äquivalent:
(i) $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} M_i$ ist endlich erzeugt
(ii) $M_1, \ldots, M_r$ sind endlich erzeugt

Anmerkung: Ist $M = \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$ mit $|I| = \infty$, $M_i \neq 0$ für alle $i \in I$, dann ist M nicht endlich erzeugt, denn:
Für $x_1, \ldots, x_s \in M$ existiert ein $J \subsetneq I$ mit $x_1, \ldots, x_s \in \bigoplus\limits_{j \in J} M_j$, also $\sum\limits_{i=1}^{s} R x_i \subseteq \bigoplus\limits_{j \in J} M_j \subsetneq \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$

Bemerkung 2.0.8. (Fünferlemma)
kommutatives Diagramm aus R-Moduln mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_4"] & M_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

φ_1 surjektiv, φ_2, φ_4 Isomorphismen, φ_5 injektiv.
Dann ist φ_3 ein Isomorphismus.

Anmerkung: Wird meist in der Situation $M_1 = N_1 = M_5 = N_5 = 0$ angewendet

Bemerkung 2.0.9. (Schlangenlemma)
kommutatives Diagramm von R-Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"'] & N \arrow[r, "g"'] & N'' &
\end{tikzcd}$$

Dann existiert eine exakte Folge

$$\ker \varphi' \longrightarrow \ker \varphi \longrightarrow \ker \varphi'' \xrightarrow{\delta} coker \varphi' \longrightarrow coker \varphi \longrightarrow \varphi''$$

wobei δ die sogenannte Übergangsabbildung ist (Konstruktion siehe Beweis) und die restliche Abbildungen durch f', f, g', g induziert sind.
Ist f' injektiv, dann auch $\ker \varphi' \longrightarrow \ker \varphi$ injektiv. Ist g surjektiv, dann auch $coker \varphi \longrightarrow \varphi''$.

3. Noethersche und Artinsche Moduln

Definition 3.0.1. M R-Modul
M heißt noethersch $\Leftrightarrow$ Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.

Anmerkung: M noethersch $\Rightarrow$ M endlich erzeugt

Beispiel 3.0.2. K Körper, V K-Vektorraum. Dann gilt: V noethersch $\Leftrightarrow$ V endlichdimensional.

Satz 3.0.3. M, R-Modul. Dann sind äquivalent:
(i) M noethersch
(ii) Jede aufsteigende Kette $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \dots$ von Untermoduln wird stationär, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$, sodass $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$
(iii) Jede nichtleere Menge von Untermoduln von M enthält ein maximales Element.
Man sagt in diesem Fall auch: Die Untermoduln von M erfüllen die aufsteigende Kettenbedingung.

Bemerkung 3.0.4. $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ exakte Folge von R-Moduln
Dann sind äquivalent:
(i) M noethersch
(ii) M' und M'' sind noethersch

Bemerkung 3.0.5. $M_1, \dots, M_r$ R-Moduln. Dann sind äquivalent:
(i) $\bigoplus_{i=1}^{r} M_i$ noethersch
(ii) $M_1, \dots, M_r$ noethersch

Definition 3.0.6. R heißt linksnoethersch (bzw. rechtsnoethersch), wenn R als Links-(bzw. Rechts-) modul über sich selbst noethersch ist. R heißt noethersch, wenn R links- und rechtsnoethersch ist.

Anmerkung: Es gibt Ringe, die rechtsnoethersch, aber nicht linksnoethersch sind (und umgekehrt)

Beispiel 3.0.7.
(a) R Schiefkörper (Divisionsring) (d.h. $R \backslash \{0\}$ ist eine Gruppe bzgl. " $\cdot$").
Dann ist R noethersch, denn: Wegen $Ra = R = aR$ für alle $a \in R \backslash \{0\}$ sind die einzigen Linksideale (Rechtsideale) in R durch $0, R$ gegeben, diese sind endlich erzeugt.
(b) K Körper, $R = K[X_1, X_2, \dots]$ ist nicht noethersch nach Bsp. 2.6

Bemerkung 3.0.8. R linknoetherscher Ring, M endlich erzeugter R-Modul
Dann ist M noethersch

Bemerkung 3.0.9. R linksnoetherscher Ring, $I \subseteq R$ zweiseitiges Ideal
Dann ist R/I linksnoethersch

Anmerkung: Unterringe noetherscher Ringe sind im Allgemeinen nicht noethersch

Bemerkung 3.0.10. M, N R-Moduln mit $M \cong M \oplus N$, $N \neq 0$
Dann ist M nicht noethersch.

Satz 3.0.11. R linksnoetherscher Ring, $R \neq 0$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
Dann gilt: $R^{n_1} \cong R^{n_2} \Rightarrow n_1 = n_2$

Anmerkung:

- Obiger Satz zeigt, dass der Begriff des Ranges freier Moduln auch für endlich erzeugte freie Moduln über linksnoetherschen Ringen wohldefiniert ist
- Jeder Körper ist linksnoethersch $\Rightarrow$ Erhalten neuen Beweis für Ergebnis aus LA1

Satz 3.0.12. (Hilbertscher Basissatz)
R linksnoethersch Ring. Dann ist $R[X]$ linksnoethersch

Folgerung 3.0.13.
(a) R linksnoetherscher Ring $\Rightarrow R[X_1, \ldots, X_n]$ linksnoethersch
(b) A, B kommutative Ringe, $\varphi : A \to B$ Ringhomomorphismus, sodass B von $\varphi(A)$ un einer endlichen Menge $\{x_1, \ldots, x_r\}$ als Ring erzeugt wird. Dann gilt:
A noethersch $\Rightarrow B$ noethersch

Definition 3.0.14. M R-Modul
M heißt artinsch $\Leftrightarrow$ Für jede absteigende Kette $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ von Untermoduln von M gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M_i = M_n$ für alle $i \geq n$ **(absteigende Kettenbedingung)**

Definition 3.0.15. R heißt linksartinsch (bzw. rechtsartinsch), wenn R als Links- bzw. Rechtsmodul über sich selbst artinsch ist. R heißt artinsch, wenn R links- und rechtsartinsch ist.

Beispiel 3.0.16.
(a) Jeder endliche Ring ist artinsch (und noethersch)
(b) $\mathbb{Z}$ ist kein artinscher Ring, denn $\mathbb{Z} \supsetneq 2\mathbb{Z} \supsetneq 4\mathbb{Z} \supsetneq 8\mathbb{Z} \supsetneq \ldots$
(c) M endliches Monoid, K Körper, $R = K[M]$ Monoidring (vgl. Algebra 1- Übungen) $\Rightarrow R$ linksartinsch, denn: $K[M]$ ist ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, jeder $K[M]$-Untermodul von $K[M]$ ist ein K-Vektorraum von $K[M]$. Ebenso: $K[M]$ rechtsartinsch, d.h. $R = K[M]$ ist artinsch.

Bemerkung 3.0.17. $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ exakte Folge von R-Moduln
Dann sind äquivalent:
(i) M artinsch
(ii) M', M'' artinsch

Folgerung 3.0.18. $M_1, \ldots, M_n$ R-Moduln. Dann sind äquivalent:
(i) $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ artinsch
(ii) $M_1, \ldots, M_n$ sind artinsch

Folgerung 3.0.19. R linksartinscher Ring, M endlich-erzeugter R-Modul. Dann ist M artinsch

Definition 3.0.20. M R-Modul
M heißt endlich koerzeugt $\Leftrightarrow$ Für jede Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Untermoduln von M mit $\bigcap_{i \in I} M_i = 0$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcap_{j \in J} M_j = 0$.

Anmerkung: $N \subseteq M$ Untermodul. Dann:

- M/N endlich koerzeugt $\Leftrightarrow$ Für jede Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Untermoduln von M mit $\bigcap_{i \in I} M_i = N$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcap_{j \in J} M_j = N$

- N endlich erzeugt $\Leftrightarrow$ Für jede Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Untermoduln von M mit $\sum\limits_{i\in I} M_i = N$ existiert eine endliche Teilmege $J \subseteq I$ mit $\sum\limits_{j\in J} M_j = N$

Satz 3.0.21. M R-Modul. Dann sind äquivalent:
(i) M ist artinsch
(ii) Jede nichtleere Menge von Untermoduln von M enthält ein minimales Element
(iii) Jeder Faktormodul von M ist endlich koerzeugt

Teil II.

Homologische Algebra

In diesem Kapitel sei R stets ein Ring

4. Kategorien

Definition 4.0.1. Eine Kategorie C besteht aus

- einer Klasse ObC von Objekten

einer Menge $Mor_C(A,B)$ von Morphismen für alle $A,B \in ObC$

- einer Verknüpfung

$$\circ : Mor_C(B,C) \times Mor_C(A,B) \longrightarrow Mor_C(A,C)$$

für alle $A,B,C \in ObC$,
wobei folgende Axiome gelten:
(K1) $Mor_C \cap Mor_C(A',B') = \emptyset$, falls $A \neq A'$ oder $B \neq B'$
(K2) Für alle $A,B,C,D \in ObC$, $f \in Mor_C(A,B)$, $g \in Mor_C(B,C)$, $h \in Mor_C(C,D)$ gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad \text{(Assoziativität)}$$

(K3) Für jedes $A \in ObC$ existiert ein Morphismus $id_A \in Mor_C(A,A)$, sodass für alle $B \in ObC$, $f \in Mor_C(A,B)$, $g \in Mor_C(B,A)$ gilt: $f \circ id_A = f$, $id_A \circ g = g$

Anmerkung:

- Man sagt "Klasse" statt Menge, um Paradoxien wie die "Menge aller Mengen" zu vermeiden. Trotzdem schreiben wir $A \in ObC$, um zu sagen, dass A zu ObC gehört (und werden ObC im Folgenden wie eine Menge behandeln).

- In den folgeden Abschnitten werden wir mengentheoretisch Probleme ignorieren und häufig von Mengen sprechen, auch wenn es sich nur um Klassen handelt

- Für $f \in Mor_C$ schreiben wir auch $f : A \longrightarrow B$. A heißt Quelle und B heißt Ziel von f; wegen (K1) sind diese eindeutig bestimmt.

- Für $A \in ObC$ ist id_A eindeutig bestimmt (analoges Argument wie bei Monoiden: $id_A = id'_A \circ id_A = id'_A$)

Beispiel 4.0.2.

- Mengen: Kategorie der Mengen mit Abbildungen von Mengen als Morphismen

- Ringe: Kategorie der Ringe mit Ringhomomorphismen als Morphismen

- R-Modul: Kategorie der R-(Links)-Moduln mit R-Modulhomomorphismen als Morphismen

- Topologien: Kategorien der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen als Morphismen

- $ObC = \{*\}$, $Mor_C(*,*) := M$, wobei M Monoid, $\circ$ = Verknüpfung in M.

Definition 4.0.3. C Kategorie. Die zu C duale Kategorie C^{op} ist die Kategorie mit

- $ObC^{op} = ObC$

- $Mor_{C^{op}}(A,B) := Mor_C(B,A)$ für $A,B \in ObC^{op} = ObC$
- $\circ_{op} Mor_{C^{op}}(A,B) \times Mor_{C^{op}}(B,C) \longrightarrow Mor_{C^{op}}(A,C)$, $(f,g) \longmapsto f \circ g$ für $A,B,C \in ObC$

Anmerkung:

- Übergang von C zu $C^{op} \hat{=}$ Pfeile umdrehen
- $(C^{op})^{op} = C$

Definition 4.0.4. $C, \mathcal{D}$ Kategorien
Ein (kovarianter) Funktor $F : C \to \mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung

$$ObC \longrightarrow Ob\mathcal{D}, \quad A \longmapsto FA$$

und Abbildungen

$$Mor_C(A,B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{D}}(FA,FB), \quad f \longmapsto F(f)$$

für alle $A,B \in ObC$, sodass gilt:
F1) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle $f \in Mor_C(A,B)$, $g \in Mor_C(B,C)$, $A,B,C \in ObC$
F2) $F(id_A) = id_{FA}$ für alle $A \in ObC$

Beispiel 4.0.5.
(a) Vergiß-Funktoren, z.B. R-Mod $\to$ Mengen, R-Mod $\to \mathbb{Z}$-Mod, …
(b) C Kategorie $\Rightarrow$ Jedes Objekt $X \in ObC$ induziert einen Funktor

$$Mor_C(X,-) : C \longrightarrow \text{ Mengen }, A \longmapsto Mor_C(X,A)$$

Für $f \in Mor_C(A,B)$ ist hierbei $f_*^X := Mor_C(X,-)(f)$ gegeben durch

$$f_*^X : Mor_C(X,A) \longrightarrow Mor_C(X,B), \quad g \longmapsto f \circ g \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_*^X"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

(c) $M \in R$-Mod
$\Rightarrow Hom_R(M,-) : R$-Mod $\to \mathbb{Z}$–Mod, $N \mapsto Hom_R(M,N)$ ist ein Funktor

Definition 4.0.6. C, $\mathcal{D}$ Kategorien Ein kontravarianter Funktor F von C nach $\mathcal{D}$ ist ein Funktor $F : C^{op} \to \mathcal{D}$, d.h. besteht aus einer Abbildung

$$ObC \longrightarrow Ob\mathcal{D}, \quad A \longmapsto FA$$

und Abbildungen

$$Mor_C(A,B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{D}}(FB,FA), \quad f \longmapsto F(f)$$

für alle $A,B \in ObC$, sodass gilt:
(F1') $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ für $f \in Mor_C(A,B)$, $g \in Mor(B,C)$, $A,B,C \in ObC$
(F2') $F(id_A) = id_{FA}$ für alle $A \in ObC$

Beispiel 4.0.7.

(a) $\mathcal{C}$ Kategorie $\Rightarrow$ Jedes Objekt $Y \in Ob\mathcal{C}$ induziert einen kontravarianten Funktor

$$Mor_{\mathcal{C}}(-,Y) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{ Mengen }, \quad A \longmapsto Mor_{\mathcal{C}}(A,Y)$$

Für $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ ist $f_Y^* := Mor_{\mathcal{C}}(-,Y)(f)$ gegeben durch

$$f_Y^* : Mor_{\mathcal{C}}(B,Y) \longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(A,Y), \quad g \longmapsto g \circ f$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_Y^*(g)"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(b) $N \in R$-Mod
$\Rightarrow Hom_R(-,N) : R\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}, \ M \mapsto Hom_R(M,N)$
ist ein kontravarianter Funktor.

Anmerkung:

- Sind $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ Funktoren, so ist auf naheliegende Weise der Funktor $G \circ F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$
- Unter Funktoren werden kommutative Diagramme auf kommutativen Diagrammen abgebildet

Definition 4.0.8. $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ Kategorien
Das Produkt $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ ist diejenige Kategorie mit
$Ob(C \times D) = Ob\mathcal{C} \times Ob\mathcal{D}$, $Mor_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((A_1,B_1),(A_2,B_2)) = Mor_{\mathcal{C}}(A_1,A_2) \times Mor_{\mathcal{D}}(B_1,B_2)$
und "komponentenweisem $\circ$"

Definition 4.0.9. $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ Kategorien
Ein Bifunktor F "von $\mathcal{C}$ kreuz $\mathcal{D}$ nach $\mathcal{E}$" ist ein Funktor $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$

Beispiel 4.0.10.
(a) $\bigoplus : R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}, \ (M,N) \mapsto M \oplus N$ ist ein Bifunktor.
(b) $\mathcal{C}$ Kategorie $\Rightarrow \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to$ Mengen , $(M,N) \mapsto Mor_{\mathcal{C}}(M,N)$ ist ein Bifunktor.

Definition 4.0.11. $\mathcal{C}$ Kategorie, $A, B \in Ob\mathcal{C}$, $f : A \to B$
f heißt Monomorphismus $\Leftrightarrow$ Für alle $C \in Ob\mathcal{C}$, $g_1, g_2 : C \to A$ gilt: $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$
$\Leftrightarrow$ Für alle $C \in Ob\mathcal{C}$ ist $f_*^C : Mor_{\mathcal{C}}(C,A) \to Mor_{\mathcal{C}}(C,B)$ injektiv
f heißt Epimorphismus $\Leftrightarrow$ Für alle $C \in Ob\mathcal{C}$, $g_1, g_2 : B \to C$ gilt: $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$
$\Leftrightarrow$ Für alle $C \in Ob\mathcal{C}$ ist $f_C^* : Mor_{\mathcal{C}}(B,C) \to Mor_{\mathcal{C}}(A,C)$ injektiv
f heißt Isomorphismus $\Leftrightarrow$ Es existiert ein $g : B \to A$ mit $f \circ g = id_B$ und $g \circ g = id_A$

Anmerkung: In der Situation von 4.0.11 gilt:

- f Monomorphismus in $\mathcal{C} \Leftrightarrow f$ Epimorphismus in $\mathcal{C}^{op}$
- f Isomorphismus in $\mathcal{C} \Leftrightarrow f$ Isomorphismus in $\mathcal{C}^{op}$
- Ist f ein Isomorphismus und $g : B \to A$ mit $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$, dann ist g eindeutig bestimmt (und wird mit f^{-1} bezeichnet) denn:
  $g_1, g_2 : B \to A$ mit dieser Eigenschaft $\Rightarrow g_1 = g_1 \circ id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = id_A \circ g_2 = g_2$
- In Mengen ist f Monomorphismus $\Leftrightarrow f$ injektiv, f Epimorphismus $\Leftrightarrow f$ surjektiv, f Isomorphismus $\Leftrightarrow f$ bijektiv. Im Allgemeinen ist dies für Kategorien, in denen die Morphismen Abbildungen sind, jedoch falsch (vgl. Bsp. 4.0.13)

Bemerkung 4.0.12. $\mathcal{C}$ Kategorie, $A, B \in Ob\mathcal{C}$, $f : A \to B$ Isomorphismus
Dann ist f ein Monomorphismus und ein Epimorphismus

Anmerkung: Die Umkehrung von 4.0.12 ist im Allgemeinen falsch, siehe nächstes Bsp.

Beispiel 4.0.13.
(a) Sei $\mathcal{C}$ = Top die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen
Wir betrachten $id : (\mathbb{R}$, diskrete Topologie$) \to (\mathbb{R}$, Standardtopologie$)$. Dies ist eine stetige Abbildung, Monomorphismus und Epimorphismus, aber kein Isomorphismus (kein stetiges Inverses)
(b) Sei $\mathcal{C}$ = Ringe, $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ Inklusion
f ist ein Monomorphismus und Epimorphismus
(denn: Für $g_1, g_2 : \mathbb{Q} \to R$ Ringhomomorphismus in einen Ring R mit $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, d.h. $g_1|_{\mathbb{Z}} = g_2|_{\mathbb{Z}}$ folgt $g_1 = g_2$ wegen universeller Eigenschaft $\mathbb{Q}$ als Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$)
aber kein Isomorphismus.
Insbesondere ist ein Epimorphismus in $\mathcal{C}$ im obigen Sinne ("kategorieller Epimorphismus") nicht dasselbe wie ein surjektiver Ringhomomorphismus.

Definition 4.0.14. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren
Eine natürliche Transformation t von F nach G (Bez.: $t : F \Rightarrow G$) ist eine Familie $(t_A)_{A \in Ob\mathcal{C}}$ von Morphismen $t_A \in Mor_{\mathcal{D}}(FA, GA)$, sodass

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & GA \arrow[d, "G(f)"] \\ FB \arrow[r, "t_B"] & GB \end{tikzcd}$$

für alle $A, B \in Ob\mathcal{C}$, $f : A \to B$ kommutiert.
Sprechweise auch: $t_A : FA \to GA$ ist natürlich in A.

Beispiel 4.0.15.
(a) $\mathcal{C}$ Kategorie, $A, B \in Ob\mathcal{C}$, $f : A \to B$
$\Rightarrow f^* = (f_Y^*)_{Y \in Ob\mathcal{C}} : Mor_{\mathcal{C}}(B, -) \Rightarrow Mor_{\mathcal{C}}(A, -)$
ist eine natürliche Transformation von Funktoren $\mathcal{C} \to$ Mengen, denn für $Y_1, Y_2 \in Ob\mathcal{C}$, $g : Y_1 \to Y_2$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Mor_{\mathcal{C}}(B, Y_1) \arrow[r, "f_{Y_1}^*"] \arrow[d, "g_*^B"'] & Mor_{\mathcal{C}}(A, Y_1) \arrow[d, "g_*^A"] \\ Mor_{\mathcal{C}}(B, Y_2) \arrow[r, "f_{Y_2}^*"'] & Mor_{\mathcal{C}}(A, Y_2) \end{tikzcd}$$

denn: Für: $\varphi : B \to Y_1$ ist

$$(g_*^A \circ f_{Y_1}^*)(\varphi) = g_*^A(\varphi \circ f) = g \circ \varphi \circ f = f_{Y_2}^*(g \circ \varphi) = (f_{Y_2}^* \circ g_*^B)(\varphi)$$

(b) Sei K-VR die Kategorie der K-Vektorräume über einem festen Körper K (lineare Abbildungen als Morphismen).
Für $V \in K$-Vektorraum sei $V^* := Hom_K(V, K)$ der Dualraum.
Die kanonische Abbildungen $\varphi_V : V \to V^{**}$, $w \mapsto \varphi_V(w) : V^* \to K$ ist natürlich in V,

$$\psi \mapsto \psi(w)$$

denn für $V, W \in K$-VR, $f : V \to W$ lineare Abbildung kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_v"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "\varphi_w"'] & W^{**} \end{tikzcd} \quad (\text{mit } f^{**}: V^{**} \to W^{**}, (\varphi : V^* \to K) \mapsto f^{**}(\varphi): W^* \to K, \psi \mapsto \varphi(\underbrace{\psi \circ f}_{\in V^*})$$

d.h. $\varphi : id_v \Rightarrow \_^{**}$ ist eine natürliche Transformation von $id : K\text{-VR} \to K\text{-VR}$ nach $\_^{**} : K\text{-VR} \to K\text{-VR}$

Definition 4.0.16. C, $\mathcal{D}$ Kategorien, $F, G : C \to \mathcal{D}$ Funktoren, $t : F \Rightarrow G$ natürliche Transformation
t heißt natürliche Äquivalenz $\Leftrightarrow$ Für alle $A \in ObC$ ist $t_A : FA \to GA$ ein Isomorphismus in $\mathcal{D}$ (Notation: $t :\tilde{\Rightarrow} G$)

Anmerkung: Ist $t : F \tilde{\Rightarrow} G$ eine natürliche Äquivalenz, denn es existiert eine natürliche Äquivalenz $t^{-1} : G \tilde{\Rightarrow} G$ via $t_A^{-1} = (t_A)^{-1} : GA \to FA$

Beispiel 4.0.17. Es bezeichne $K\text{-VR}_{<\infty}$ die Kategorie der endlichdimensionalen K-VR
Dann ist die natürliche Transformation $\varphi : id \Rightarrow \_^{**}$ aus Bsp. 2.0.15 eine natürliche Äquivalenz

Definition 4.0.18. C, $\mathcal{D}$ Kategorien, $F : C \to \mathcal{D}$ Funktor
F heißt Kategorienäquivalenz $\Leftrightarrow$ Es gibt einen Funktor $G : \mathcal{D} \to C$ und natürliche Äquivalenzen $F \circ G \tilde{\Rightarrow} id_{\mathcal{D}}$, $G \circ F \tilde{\Rightarrow} id_C$

Beispiel 4.0.19. Der Funktor $\_^* : K\text{-VR}_{<\infty} \to (K\text{-VR}_{<\infty})^{op}$, $V \mapsto V^*$ ist eine Kategorieäquivalenz, denn mit $\tilde{\_}^* : (K\text{-VR}_{<\infty})^{op} \to K\text{-VR}_{<\infty}$, $W \mapsto W^*$ gilt offenbar $\tilde{\_}^* \circ \_^* = \_^{**}$, und $\varphi : id \tilde{\Rightarrow} \_^{**}$ ist eine natürliche Äquivalenz, analog andersherum (d.h. die Kategorie $K\text{-VR}_{<\infty}$ ist selbstdual).

Satz 4.0.20. (Yoneda-Lemma)
C Kategorie, $A \in ObC$, $F : C \to$ Mengen Funktor
Dann gibt es eine Bijektion

$$\begin{aligned} \phi : \{\text{natürliche Transformation } t : Mor_C(A, -) \Rightarrow F\} &\longrightarrow F(A) \\ t &\longmapsto t_A(id_A) \end{aligned}$$

Folgerung 4.0.21. C Kategorie, $A, B \in ObC$
Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \underline{\psi} : Mor_C(B, A) &\longrightarrow \{\text{natürliche Transformation } Mor_C(A, -) \Rightarrow Mor_C(B, -)\} \\ \psi : B \to A &\longmapsto \psi^* : Mor_C(A, -) \to Mor_C(B, -) \end{aligned}$$

bijektiv

Anmerkung:

- Folgerung 4.0.21 liefert einen sogenannten Funtor $C^{op} \longrightarrow Funk(C, \text{Mengen})$, $A \mapsto Mor_C(A, -)$, wobei $Funk(C, \text{ Mengen})$ die Funktorkategorie von C nach Mengen bezeichnet (Objekte: Funktoren: $C \to$ Mengen, Morphismen: natürliche Tranformation) ("Yoneda- Einbettung")
- Folgerung 4.0.21 liefert insbesondere ein Verallgemeinerung des Satzes von Cayley aus der Gruppentheorie: Für eine Gruppe G ist $G \hookrightarrow S(G)$, $g \mapsto \tau_g$ (Linkstransformation mit $g \in G$) ein injektiver Gruppenhomomorphismus.
  Wende 4.0.21 an auf:
  - C = Kategorie mit $ObC = \{\cdot\}$, $Mor_C(\cdot, \cdot) = G$
  - $A = B = \cdot$

$\Rightarrow$ Erhalten Bijektion:

$$\begin{array}{rcl} G = Mor_C(\cdot,\cdot) & \longrightarrow & \{\text{natürliche Transformation } Mor_C(\cdot,-) \Rightarrow Mor_C(\cdot,-)\} \\ g & \longmapsto & g^* : Mor_C(\cdot,-) \Rightarrow Mor_C(\cdot,-) \quad (\widehat{=}\tau_g : G \to G) \end{array}$$

5. Abelsche Kategorien

Definition 5.0.1. C Kategorien, $A \in ObC$
A heißt Anfangsobjekt $\Leftrightarrow$ Für alle $M \in ObC$ ist $Mor_C(A, M)$ einelementig
Endobjekt $\Leftrightarrow$ Für alle $M \in ObC$ ist $Mor_C(M, A)$ einelemetig

Anmerkung:

- Falls sie existieren sind Anfangs- bzw. Endobjekte eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus (denn: A_1, A_2 Anfangsobjekte $\Rightarrow Mor_C(A_1, A_2) = \{\alpha\}$, $Mor_C(A_1, A_2) = \{\beta\}$, $Mor_C(A_1, A_1) = \{id_{A_1}\}$, $Mor_C(A_2, A_2) = \{id_{A_2}\}$, insbesondere $\beta \circ \alpha = id_{A_1}$, $\alpha \circ \beta = id_{A_2}$

Definition 5.0.2. C Kategorie
$0 \in ObC$ heißt Nullobjekt $\Leftrightarrow$ 0 ist sowohl Anfangs- als auch Endobjekt.
Existiert in C ein Nullobjekt 0, so enthält $Mor_C(A, B)$ für alle $A, B \in ObC$ ein ausgezeichnetes Element, der Nullmorphismus $A \to 0 \to B$

Anmerkung: Der Nullmorphismus in $Mor_C(A, B)$ ist unabhängig von der Wahl des Nullobjekts:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & B \\ & \tilde{0} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Beispiel 5.0.3.
(a) In Mengen ist $\emptyset$ ein Anfangsobjekt, jede einelementige Menge ist ein Endobjekt.
Insbesondere existiert in Mengen kein Nullobjekt.
(b) In Ringe ist $\mathbb{Z}$ ein Anfangsobjekt und der Nullring ein Endobjekt. In Ringe existiert also kein Nullobjekt
(c) In R-Mod ist der Nullmodul ein Nullobjekt

Definition 5.0.4. C Kategorie, $(A_i)_{i \in I}$ Familie von Objekten aus C
Ein Produkt $A, (p_i)_{i \in I})$ von $(A_i)_{i \in I}$ ist ein Objekt $A \in ObC$ zusammen mit Morphismen $p_i : A \to A_i$, sodass für alle $B \in ObC$ die Abbildung

$$Mor_C(B, A) \longrightarrow \prod_{i \in I} Mor_C(B, A_i), \quad f \longmapsto (p_i \circ f)_{i \in I}$$

bijektiv ist, d.h. für jede Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Morphismen $f_i : B \to A_i$ existiert ein eindeutig bestimmtes $f : B \to A$ mit $f_i = p_i \circ f$ für alle $i \in I$.

Bemerkung 5.0.5. C Kategorie, $(A_i)_{i \in I}$ Familie von Objekten aus C, $(A, (p_i)_{i \in I})$, $(A', (P'_i)_{i \in I})$ Produkte von $(A_i)_{i \in I}$.
Dann exisitert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus $f : A \to A'$, sodass für alle $i \in I$ gilt: $p'_i \circ f = p_i$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_i"'] & & A' \arrow[dl, "p'_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

Beispiel 5.0.6.
(a) In Mengen ist das Produkt das kartesische Produkt
(b) In R-Mod ist das Produkt das direkte Produkt
(c) In der Kategorie der endlichen abelschen Gruppen existiert kein Produkt der Familie $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$

Bemerkung 5.0.7. C Kategorie, $(A_i)_{i\in I}$ Familie von Objekten aus C
Ein Koprodukt $(A,(q_i)_{i\in I})$ von $(A_i)_{i\in I}$ ist ein Objekt $A \in ObC$ zusammen mit Morphismen $q_i : A_i \to A$, sodass $(A,(q_i)_{i\in I})$ ein Produkt von $(A_i)_{i\in I}$ in C^{op} ist, d.h. für alle $B \in ObC$ ist die Abbildung

$$Mor_C(A,B) \longrightarrow \prod_{i\in I} Mor_C(A_i,B), \quad f \longmapsto (f \circ q_i)_{i\in I}$$

bijektiv ist.
Falls existent, ist ein Koprodukt von $(A_i)_{i\in I}$ eindeutig bestimmt bis auf eindeutige Isomorphie (analog 5.0.5). Wir sprechen dann von dem Koprodukt und schreiben $A = \bigoplus_{i\in I} A_i \; (= \coprod_{i\in I} A_i)$

Beispiel 5.0.8.
(a) In Mengen ist da Koprdukt die disjunkte Vereinigung
(b) In R-Mod ist das Koprodukt die direkte Summe
(c) In der Kategorie der Gruppen existiert ein Koprodukt, das sogenannte freie Produkt (...)

Definition 5.0.9. $\mathcal{A}$ Kategorie
$\mathcal{A}$ heißt additiv, wenn gilt,
(A1) $\mathcal{A}$ hat ein Nullobjekt
(A2) In $\mathcal{A}$ existieren endliche Produkte
(A3) Für alle $A, B \in Ob\mathcal{A}$ trägt $Mor_{\mathcal{A}}(A,B)$ die Struktir einer abelschen Gruppe mit dem Nullmorphismus als neutralem Element, sodass für alle $A, B, C \in Ob\mathcal{A}$ die Verknüpfung

$$Mor_{\mathcal{A}}(B,C) \times Mor_{\mathcal{A}}(A,B) \xrightarrow{\circ} Mor_{\mathcal{A}}(A,C)$$

bilinear ist

Anmerkung: In einer additiven Kategorie $\mathcal{A}$ schreiben wir auch $Hom_{\mathcal{A}}$ für $Mor_{\mathcal{A}}$

Beispiel 5.0.10.
(a) R-Mod ist eine additive Kategorie
(b) Ringe ist keine additive Kategorie (kein Nullobjekt, vgl. 5.3(b))

Satz 5.0.11. $\mathcal{A}$ additive Kategorie, $A_1, A_2 \in Ob\mathcal{A}$, $(A_1 \times A_2, (p_1, p_2))$ Produkt von $A_1 \times A_2$.
$i_1 : A_1 \to A_1 \times A_2$ sei via UE gegeben durch $id_{A_1} : A_1 \to A_1$, $0 : A_1 \to A_2$
Analog sei $i_2 : A_2 \to A_1 \times A_2$ via UE gegeben durch $0 : A_2 \to A_1$, $id : A_2 \to A_2$.
Dann ist $(A_1 \times A_2, (i_1, i_2))$ ein Koprodukt von A_1, A_2 in $\mathcal{A}$.

Folgerung 5.0.12. $\mathcal{A}$ additive Kategorie
Dann existieren in $\mathcal{A}$ endliche Koprodukte

Definition 5.0.13. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ additive Kategorien, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor
F heißt additiv $\Leftrightarrow$ Für alle $A, A' \in Ob\mathcal{A}$ is die Abbildung

$$Hom_{\mathcal{A}}(A,A') \longrightarrow Hom_{\mathcal{B}}(FA,FA'), \quad f \longmapsto F(f)$$

ein Homomorphismus abelscher Gruppen

Anmerkung: F additiv $\Rightarrow F(A \oplus A') = F(A) \oplus F(A')$

Bemerkung 5.0.14. $\mathcal{A}$ additive Kategorie, $A, A' \in Ob\mathcal{A}$, $f : A \to A'$
Ein Kern (B, i) von f ist ein Objekt $B \in Ob\mathcal{A}$ zusammen mit einem Morphismus $i : B \to A$, sodass $f \circ i = 0$ ist und für alle $C \in Ob\mathcal{A}$ die Abbildung

$$Hom_{\mathcal{A}}(C, B) \longrightarrow \{g \in Hom_{\mathcal{A}}(C, A) | f \circ g = 0\}, \quad h \longmapsto i \circ h$$

bijektiv ist, d.h. für alle $g : C \to A$ mit $f \circ g = 0$ exisitert ein eindeutig bestimmter Morphismus $h : C \to B$ mit $g = i \circ h$:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & A' \\
C \arrow[u, dotted, "h"] \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ist (B', i') ein weiterer Kern von f, dann existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus $\alpha : B \to B'$ mit $i = i' \circ \alpha$:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "i"'] & & B' \arrow[dl, "i'"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Wir nennen (B, i) daher auch <u>den</u> Kern von f und schreiben $\ker f = (B, i)$ bzw. kürzer $\ker f = B$ oder auch $\ker f = i$ (kontextabhängig)

Anmerkung: Existenz von Kernen ist im Allgemeinen nicht gegeben

Beispiel 5.0.15. In R-Mod ist der kategorielle kern gegeben durch die Inklusion des gewöhnlichen Kerns:

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, hook, "i"] & A \arrow[r, "f"] & A' \\
C \arrow[u, dotted, "h"] \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

$f \circ g = 0 \Rightarrow im(g) \subseteq \ker f$, setze $h := g|^{\ker f} : C \to \ker f$, dann ist $i \circ h = g$ und h ist eindeutig mit dieser Bedingung.

Bemerkung 5.0.16. $\mathcal{A}$ additive Kategorie, $A, A' \in Ob\mathcal{A}$, $f : A \to A'$, $(\ker f, i)$ Kern von f.
Dann ist i eine Monomorphismus.

Bemerkung 5.0.17. Dual zum Kern definiert man den Kokern (Notation: $coker(f)$)
Die Aussagen 5.0.14, 5.0.16 gelten dual.

Definition 5.0.18. $\mathcal{A}$ additive Kategorie, $A, A' \in Ob\mathcal{A}$, $f : A \to A'$
$im(f) := \ker(coker(f))$ heißt das Bild von f
$coim(f) := coker(\ker(f))$ heißt das Kobild von f

Anmerkung: $im(f)$ kommt mit einem Monomorphismus $i' : im(f) \to A'$, $coim(f)$ mit einem Epimorphismus $q' : A \to coim(f)$

Beispiel 5.0.19. Sei $\mathcal{A} = R$-Mod, $f : A \to A'$ R-Modulhomomorphismus
Dann ist $im(f) = \ker(A'/im(f),\ A' \to A'/im(f)) = (im(f),\ im(f) \hookrightarrow A')$,
$coim(f) = coker(\ker(f),\ \ker(f) \hookrightarrow A) = (A/\ker(f),\ A \twoheadrightarrow A/\ker(f))$

Bemerkung 5.0.20. $\mathcal{A}$ additive Kategorie, $A, B \in Ob\mathcal{A}$, $f : A \to B$, sodass $\ker(f)$, $coker(f)$, $im(f)$, $coim(f)$ existieren, $(im(f), i')$ Bild von f, $(coim(f), q')$ Kobild von f.
Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\bar{f} : coim(f) \to im(f)$ mit $f = i' \circ \bar{f} \circ q'$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q'"] & B \\
coim(f) \arrow[r, dotted, red, "\bar{f}"'] & im(f) \arrow[u, "i'"']
\end{tikzcd}$$

Definition 5.0.21. $\mathcal{A}$ additive Kategorie
$\mathcal{A}$ heißt abelsche Kategorie, wenn gilt:
(Ab 1) Jeder Morphismus in $\mathcal{A}$ hat Kern und Kokern
(Ab 2) (Homomorphiesatz) Für jeden Morphismus $f : A \to A'$ in $\mathcal{A}$ ist der induzierte Morphismus $\bar{f} : coim(f) \to im(f)$ ein Isomorphismus

Beispiel 5.0.22.
(a) R-Mod ist eine abelsche Kategorie
(b) Die Kategorie der freien $\mathbb{Z}$-Moduln ist additiv, aber nicht abelsch: (Ab 1) nicht erfüllt
(c) Die Kategorie der abelsche topologischen Gruppen ist eine additive Kategorie, die (Ab 1) erfüllt, aber nicht (Ab 2): $id : \underset{\text{diskrete Topologie}}{(\mathbb{R}, +)} \to \underset{\text{Standardtopologie}}{(\mathbb{R}, +)}$, $\bar{id} = id$ ist kein Isomorphismus

Anmerkung: $\mathcal{A}$ abelsche Kategorie $\Rightarrow \mathcal{A}^{op}$ abelsche Kategorie (einziger nichttrivialer Punkt: Existenz endlicher Produkte, dies folgt jedoch aus 5.0.11)

Satz 5.0.23. $\mathcal{A}$ abelsche Kategorie, $A, A' \in Ob\mathcal{A}$, $f : A \to A'$ Monomorphismus und Epimorphismus.
Dann ist f ein Isomorphismus

Bemerkung 5.0.24. $\mathcal{A}$ abelsche Kategorie, $A, A' \in Ob\mathcal{A}$, $f : A \to A'$. Dann gilt:
(a) f Monomorphismus $\Leftrightarrow \ker(f) = 0$
(b) f Epimorphimus $\Leftrightarrow coker(f) = 0$

Definition 5.0.25. $\mathcal{A}$ abelsche Kategorie, $A, A', A'' \in Ob\mathcal{A}$
$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$ heißt exakte Folge $\Leftrightarrow im(f) \cong \ker(g)$ in dem Sinne, dass es einen Isomorphismus $im(f) \xrightarrow{\alpha} \ker(g)$ gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& A & \\
im(f) \arrow[ur, "i'"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & \ker(g) \arrow[ul, "i"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert (wobei $(\ker(g), i)$ Kern von g, $(im(f), i')$ Bild von f).

Satz 5.0.26. $\mathcal{A}$ abelsche Kategorie. Dann gilt:
(a) In $\mathcal{A}$ gilt das Fünferlemma
(b) In $\mathcal{A}$ gilt das Schlangenlemma
(c) Eine Folge $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ in $\mathcal{A}$ ist genau dann exakt, wenn für jeden $N \in Ob\mathcal{A}$ die Folge abelscher Gruppen

$$0 \to Hom_{\mathcal{A}}(M'', N) \to Hom_{\mathcal{A}}(M, N) \to Hom_{\mathcal{A}}(M', N)$$

exakt ist.
(d) Eine Folge $0 \to N' \to N \to N''$ in $\mathcal{A}$ ist genau dann exakt, wenn für jedes $M \in Ob\mathcal{A}$ die Folge abelscher

Gruppen

$$0 \to Hom_{\mathcal{A}}(M,N') \to Hom_{\mathcal{A}}(M,N) \to Hom_{\mathcal{A}}(M,N'')$$

exakt ist.

Definition 5.0.27. $\mathcal{A},\mathcal{B}$ abelsche Kategorien, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ additiver Funktor.
F heißt exakt $\Leftrightarrow$ F überführt kurze exakte Folgen in $\mathcal{A}$ in kurze exakte Folgen in $\mathcal{B}$
linksexakt $\Leftrightarrow$ Für jede exakte Folge $0 \to M' \to M \to M''$ in $\mathcal{A}$ ist die Folge $0 \to FM' \to FM \to FM''$ exakt.
rechtsexakte $\Leftrightarrow$ Für jede exakte Folge $M' \to M \to M'' \to 0$ in $\mathcal{A}$ ist die Folge $FM' \to FM \to FM'' \to 0$ exakt.

Anmerkung: F exakt $\Leftrightarrow$ F links- und rechtsexakt $\Leftrightarrow$ Für alle exakte Folgen $A' \to A \to A''$ in $\mathcal{A}$ ist $FA' \to FA \to FA''$ exakt

Definition 5.0.28. $\mathcal{A}$ abelsche Kategorie, $I,P \in Ob\mathcal{A}$
I heißt injektiv $\Leftrightarrow$ Für jeden Monomorphismus $i : A \hookrightarrow B$ und jeden Morphismus $f : A \to I$ existiert ein Morphismus $g : B \to I$ mit $g \circ i = f$, d.h. $i_I^* : Hom_{\mathcal{A}}(B,I) \to Hom_{\mathcal{A}}(A,I)$ surjektiv

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dotted, "g"] \\ I & \end{tikzcd}$$

P heißt projektiv $\Leftrightarrow$ P ist injektiv in $\mathcal{A}^{op}$, d.h. für jeden Epimorphismus $p : B \twoheadrightarrow A$ und jeden Morphismus $f : P \to A$ existiert ein Morphismus $g : P \to B$ mit $p \circ g = f$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "g"'] \\ B \arrow[r, two heads, "p"'] & A \end{tikzcd}$$

Bemerkung 5.0.29. $\mathcal{A}$ abelsche Kategorie, $I \in Ob\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:
(i) I injektiv
(ii) Der Funktor $Hom_{\mathcal{A}}(-,I) : \mathcal{A}^{op} \to \mathbb{Z}$-Mod ist exakt.

Bemerkung 5.0.30. $\mathcal{A}$ abelsche Kategorie, $P \in Ob\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:
(i) P projektiv
(ii) Der Funktor $Hom_{\mathcal{A}}(P,-) : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$-Mod ist exakt.

Definition 5.0.31. $\mathcal{C},\mathcal{D}$ (additive) Kategorien, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ (additive) Funktoren
F heißt linksadjungiert zu G (und G rechtsadjungiert zu F)
$\Leftrightarrow$ Es gib eine natürliche Äquivalenz

$$Mor_{\mathcal{C}}(-,G-) \overset{\sim}{\Rightarrow} Mor_{\mathcal{D}}(F-,-)$$

von Bifunktoren $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to$ Mengen (bzw. $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathbb{Z}$-Mod im additiven Fall).
Notation: $F \dashv G$

Beispiel 5.0.32. F : Mengen $\to K$-VR, $M \mapsto K^{(M)}$, $G : K$-VR $\to$ Mengen Vergiss-Funktor
Es ist $Mor_{\text{Mengen}}(M,V) \underset{bij.}{\cong} Mor_{K-VR}(K^{(M)},V)$ für alle Mengen M und K-VR, wobei die naheliegenden Diagramme kommutieren, d.h. wir haben eine natürliche Äquivalenz

$$Mor_{\text{Mengen}}(-,G-) \overset{\sim}{\Rightarrow} Mor_{K_VR}(F-,-), \text{ also } F \dashv G$$

Satz 5.0.33. $\mathcal{A},\mathcal{B}$ abelsche Kategorien, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ additive Funktoren mit $F \dashv G$.
Dann gilt:
(a) F ist rechtsexakt
(b) Ist F exakt, dann überführt G injektive Objekte aus $\mathcal{B}$ in injektive Objekte aus $\mathcal{A}$

(c) G ist linksexakt

(d) Ist G exakt, dann überführt F projektive Objekte aus $\mathcal{A}$ in projektive Objekte aus $\mathcal{B}$.

Definition 5.0.34. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktor
F heißt volltreu $\Leftrightarrow$ Für alle $A, B \in Ob\mathcal{C}$ ist die Abbildung $Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{D}}(FA, FB)$, $f \mapsto F(f)$ bijektiv.

Satz 5.0.35. (Einbettungssatz von Freyd-Mitchell)
$\mathcal{A}$ kleine abelsche Kategorie (d.h. $Ob\mathcal{A}$ ist eine Menge)
Dann exisitiert ein Ring R und ein volltreuer exakter Funktor $F : \mathcal{A} \to R$-Mod

Anmerkung:

- F induziert eine Äquivalenz zwischen $\mathcal{A}$ und einer vollen Unterkategorie von R-Mod (d.h. $\mathcal{C}$ ist eine Unterkategorei von R-Mod mit $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) = Hom_{R-Mod}(A, B)$ für alle $A, B \in Ob\mathcal{C}$).
- In $\mathcal{A}$ berechnete Kerne und Kokerne entsprechen über diese Äquivalenz Kernen und Kokernen in R-Mod (Achtung: injektive/projektive Objekte korrespondieren im Allgemeinen nicht zu injektiven/projektiven R-Moduln).

6. Projektive und injektive Moduln

Satz 6.0.1. $0 \to N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ Folge von R-Moduln. Dann sind äquivalent:
(i) $0 \to N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ exakt
(ii) Für jeden R-Modul M ist die Folge abelscher Gruppen

$$0 \to Hom_R(M,N') \xrightarrow{f_*^M} Hom_R(M,N) \xrightarrow{g_*^M} Hom_R(M,N'')$$

exakt
Insbesondere ist der Funktor $Hom_R(M,-) : R\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$ linksexakt.

Anmerkung: Der Funktor $Hom_R(M,-)$ ist im Allgemeinen nicht exakt.

Beispiel 6.0.2. Sei $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
Wir betrachten dei exakte Folge $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ von $\mathbb{Z}$-Moduln mit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x$, π kanonische Projektion
Die Abbildung $\pi_*^M : Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ist nicht surjektiv, denn:
Für $\varphi \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ gilt: $0 = \varphi(\bar{0}) = \varphi(\bar{1} + \bar{1}) = \varphi(2 \cdot \bar{1}) = 2\varphi(\bar{1})$, also $\varphi(\bar{1}) = 0$, d.h. $\varphi = 0$.
Insbesondere ist $\pi_*^M(\varphi) = \pi_*^M(0) = 0 \neq id_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$.
Mit anderen Worten: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist kein projektiver $\mathbb{Z}$-Modul

Satz 6.0.3. P R-Modul. Dann sind äquivalent:
(i) P ist ein projektiver R-Modul
(ii) $Hom_R(P,-) : R\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$ ist exakt
(iii) Für jeden Epimorphismus $\pi : M \twoheadrightarrow N$ von R-Moduln und jedem Homomorphismus $\varphi : P \to N$ existiert ein Homomorphismus $\psi : P \to M$ mit $\pi \circ \psi \varphi$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ M \arrow[r, two heads, "\pi", "p"'] & N \end{tikzcd}$$

(iv) Jede kurze exakte Folge $0 \to L \to M \to P \to 0$ von R-Moduln spaltet.
(v) Es gibt einen R-Modul P', sodass $P \oplus P'$ ein freier R-Modul ist (d.h. P ist direkter Summand einer freien R-Moduls).

Folgerung 6.0.4.
(a) Jeder freie R-Modul ist ein projektiver R-Modul
(b) Jeder R-Modul ist Faktormodul eines projektiven R-Moduls

Satz 6.0.5. $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ Folge von R-Moduln. Dann sind äquivalent:
(i) $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''0$ ist exakt.
(ii) Für jeden R-Modul N ist die Folge abelscher Gruppen

$$0 \to Hom_R(M'',N) \xrightarrow{g_N^*} Hom_R(M,N) \xrightarrow{f_N^*} Hom_R(M',N)$$

exakt.
Insbesondere ist der kontravariante Funktor: $Hom_R(-,N) : R\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$ linksexakt.

Anmerkung: $Hom_R(-, N)$ ist im Allgemeinen nicht exakt.

Beispiel 6.0.6. Sei $R = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}$
Wir betrachten die exakte Folge $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ von $\mathbb{Z}$-Moduln mit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x$, π kanonische Projektion
Die Abbildung $f^*_{\mathbb{Z}} : Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ ist nicht surjektiv, denn für alle $\varphi \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ ist $(f^*_{\mathbb{Z}}(\varphi))(x) = (\varphi \circ f)(x) = \varphi(2x) = 2\varphi(x) \in 2\mathbb{Z}$, insbesondere ist $f^*_{\mathbb{Z}}(\varphi) \neq id_{\mathbb{Z}}$.
Mit anderen Worten: $\mathbb{Z}$ ist kein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul.

Satz 6.0.7. Q R-Modul. Dann sind äquivalent:
(i) Q ist ein injektiver R-Modul
(ii) $Hom_R(-, Q) : R\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$ ist exakt
(iii) Für jeden Monomorphismus $\iota : L \to M$ von R-Moduln und jedem Homomorphismus $\varphi : L \to Q$ existiert ein Homomorphismus $\psi : M \to Q$ von R-Moduln mit $\psi \circ \iota = \varphi$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d] & M \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

(iv) Jede kurze exakte Folge $0 \to Q \to M \to N \to 0$ von R-Moduln spaltet.

Beispiel 6.0.8. K Körper, V K-Vektorraum
Dann ist V ein injektiver K-Modul, denn für jede exakte Folge $0 \to V \to M \to N \to 0$ von K-Moduln ist N ein freier K-Modul, d.h. die Folge spaltet.

Satz 6.0.9. (Baer-Kriterium)
Q R-Modul. Dann sind äquivalent:
(i) Q ist ein injektiver R-Modul
(ii) Für jedes Linksideal $I \subseteq R$ und jede R-lineare Abbildung $\varphi : I \to Q$ existiert eine R-lineare Abbildung $\psi : R \to Q$ mit $\psi|_I = \varphi$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"'] & R \arrow[dl, dotted, "\psi"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Definition 6.0.10. A Integritätsbereich (kommutativer nullteilerfreier Ring), M A-Modul
M heißt teilbar $\Leftrightarrow$ Für alle $a \in A \backslash \{0\}$ ist $aM = M$
$\Leftrightarrow$ Für alle $x \in M$, $a \in A \backslash \{0\}$ existiert ein $y \in M$ mit $x = ay$

Bemerkung 6.0.11. A Integritätsbereich, M injektiver A-Modul.
Dann ist M teilbar.

Bemerkung 6.0.12. A Hauptidealring, M A-Modul
Dann sind äquivalent:
(i) M injektiv
(ii) M teilbar

Beispiel 6.0.13.
(a) K Körper, V K-Vektorraum $\Rightarrow$ V teilbarer K-Modul, also injektiver K-Modul.
Ist $char(K) = 0$, dann ist V teilbarer $\mathbb{Z}$-Modul, also injektiver $\mathbb{Z}$-Modul (b) Faktormoduln teilbarer $\mathbb{Z}$-Moduln sind

teilbar, somit sind Faktormoduln injektiver $\mathbb{Z}$-Moduln wieder injektive $\mathbb{Z}$-Moduln.
(c) Nach (a) sind $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ injektive $\mathbb{Z}$-Moduln, nach (b) also auch $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Ziel: injektive R-Moduln = direkte Faktoren von kofreien R-Moduln

Anmerkung: M $\mathbb{Z}$-Modul
Dann ist $Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ via $(a\varphi)(r) := \varphi(ra)$ ein R-Modul
(beachte: $b(a\varphi)(r) = (a\varphi)(rb) = \varphi(rba) = ((ba)\varphi)(r))$4

Bemerkung 6.0.14. Dann ist $Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ ein injektiver R-Modul.
Insbesondere ist $R^V := Hom_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ein injektiver R-Modul

Definition 6.0.15. M R-Modul
M heißt kofrei $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Menge I mit $M \cong (R^V)^I = \prod_{i \in I} R^V$

Bemerkung 6.0.16. $(M_i)_{i \in I}$ Familie von R-Moduln. Dann gilt:
(a) $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ist ein projektiver R-Modul $\Leftrightarrow$ M_i projektiver R-Moduln für alle $i \in I$
(b) $\prod_{i \in I} M_i$ ist injektiver R-Modul $\Leftrightarrow$ M_i injektiver R-Moduln für alle $i \in I$.

Satz 6.0.17. M kofreier R-Modul. Dann ist M ein injektiver R-Modul.

Bemerkung 6.0.18. M R-Modul, $m \in M$, $m \neq 0$
Dann existiert ein R-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to R^V$ mit $\varphi(m) \neq 0$

Satz 6.0.19. Jeder R-Modul ist Untermodul eines kofreien, also insbesondere eines injektiven R-Moduls.

Folgerung 6.0.20. Q R-Modul. Dann sind äquivalent:
(i) Q ist injektiv
(ii) Es gibt einen R-Modul Q', sodass $Q \times Q'$ ein kofreier R-Modul ist (d.h. Q ist direkter Faktor eines kofreien R-Moduls)

7. Komplexe

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{A}$ stets eine abelsche Kategorie

Definition 7.0.1. Ein Komplex $A^\bullet$ in $\mathcal{A}$ ist eine Familie $(A^i, d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ von Objekten $A^i \in Ob\mathcal{A}$ und Morphismen $d_i : A^i \to A^{i+1}$ (Differentiale)

$$\dots A^{-1} \overset{d_{-1}}{\to} A^0 \overset{d_0}{\to} A_1 \overset{d_1}{\to} A_2 \to \dots$$

sodass $d_i \circ d_{i-1} = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt.
Ein Komplexhomomorphismus $f : A^\bullet \to B^\bullet$ von einem Komplex $A^\bullet$ in $\mathcal{A}$ in einem Komplex $B^\bullet$ in $\mathcal{A}$ ist eine Familie $f = (f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ von Homomorphismen $f_i : A^i \to B^i$, sodass für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt:
$d_i \circ f_i = f_{i+1} \circ d_i$, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d, "f_{i-1}"'] & A^i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"'] & A^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"'] & B^i \arrow[r, "d_i"'] & B^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

kommutiert

Anmerkung: Komplexe in $\mathcal{A}$ zusammen mit Komplexhomomorphismen bilden eine abelsche Kategorie (Kerne, Kokerne, endliche Produkte separat an jeder Stelle bilden)

Bemerkung 7.0.2. $A^\bullet$ Komplex in $\mathcal{A}$
Dann induzieren die Differentiale in natürlicher Weise Monomorphismen $im(d_{i-1}) \to \ker(d_i)$, $i \in \mathbb{Z}$

Definition 7.0.3. $A^\bullet$ Komplex in $\mathcal{A}$
$Z^i(A^\bullet) := \ker(d_i)$ heißen die i-Kozykel von $A^\bullet$
$B^i(A^\bullet) := im(d_{i-1})$ heißen die i-Koränder von $A^\bullet$
$H^i(A^\bullet) := \mathrm{coker}(im(d_{i-1}) \to \ker(d_i)) = \mathrm{coker}(B^i(A^\bullet) \to Z^i(A^\bullet))$ heißt die i-te Kohomologie von A.

Anmerkung: Ein Komplexhomomorphismus $f : A^\bullet \to B^\bullet$ induziert Homomorphismen $Z^i(f) : Z^i A^\bullet \to Z^i B^\bullet$, $B^i(f) : B^i A^\bullet \to B^i B^\bullet$, $H^i(f) : H^i A^\bullet \to H^i B^\bullet$

Satz 7.0.4. (Lange exakte Kohomologiefolge)
$0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$ kurze exakte Folge von Komplexen in $\mathcal{A}$ (d.h. die Morphismen sind Komplexhomomorphismen und für jedes $i \in \mathbb{Z}$ ist $0 \to A^i \to B^i \to C^i \to 0$ existent)
Dann existiert eine natürliche lange exakte Folge

$$\dots \to H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet) \to H^i(C^\bullet) \to H^{i+1}(A^\bullet) \to H^{i+1}(B^\bullet) \to H^{i+1}(C^\bullet) \to \dots$$

Definition 7.0.5. $A \in Ob\mathcal{A}$
Eine injektive Auflösung von A ist ein Komplex

$$I^\bullet : I^0 \stackrel{d_0}{\rightarrow} I^1 \stackrel{d_1}{\rightarrow} I^2 \rightarrow \dots$$

bestehend aus injektiven Objekten I^i aus $\mathcal{A}$ mit $I^i = 0$ für $i < 0$ zusammen mit einem Morphismus $\epsilon : A \rightarrow I^0$, sodass der augmentierte Komplex

$$0 \rightarrow A \stackrel{\epsilon}{\rightarrow} I^0 \stackrel{d_0}{\rightarrow} I^1 \stackrel{d_1}{I^2} \rightarrow \dots$$

exakt ist (Notation: $A \rightarrow I^\bullet$ injektive Auflösung von A)

Eine projektive Auflösung von A ist eine injektive Auflösung von A in $\mathcal{A}^{op}$, d.h. ein Komplex

$$P^\bullet : \dots \rightarrow P^{-2} \rightarrow P^{-1} \rightarrow \P^0$$

aus projektiven Objekten P^i aus $\mathcal{A}$ mit $P^i = 0$ für $i > 0$ zusammen mit einem Morphismus $\epsilon : P^0 \rightarrow A$ sodass der augmentierte Komplex

$$\dots \rightarrow P^{-2} \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^0 \stackrel{\epsilon}{\rightarrow} A \rightarrow 0$$

exakt ist (Notation: $P^\bullet \rightarrow A$ projektive Auflösung A)

Anmerkung: Man schreibt in obiger Situation auch $P_i = P^{-i}$ und $H_i(-) = H^{-i}(-)$

Definition 7.0.6. $\mathcal{A}$ hat genügend viele Injektive $\Leftrightarrow$ Für jedes $A \in Ob(\mathcal{A})$ existiert ein injektives Objekt $I \in Ob\mathcal{A}$ und ein Monomorphismus $i : A \rightarrow I$
$\mathcal{A}$ hat genügend viele Projektive $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^{op}$ hat genügend viele Injektive.

Beispiel 7.0.7. R-Mod hat nach 6.0.19 genügend viele Injektive und nach 6.0.4 genügend viele Projektive.

Bemerkung 7.0.8. $A \in Ob\mathcal{A}$. Dann gilt:
(a) Hat $\mathcal{A}$ genügend viele Injektive, dann hat A eine injektive Auflösung
(b) Hat $\mathcal{A}$ genügend viele Projektive, dann hat A eine projektive Auflösung

Satz 7.0.9. (Hufeisenlemma)

$\mathcal{A}$ habe genügend viele Injektive. Gegeben sei ein Diagramm (schwarz)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & I'^0 \arrow[r] \arrow[d] & I'^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & I^0 \arrow[r] \arrow[d] & I^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & I''^0 \arrow[r] \arrow[d] & I''^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{A}$, wobei die linke Spalte exakt sei, $A' \to I'^\bullet$ eine injektive Auflösung von A', $A'' \to I''^\bullet$ eine injektive Auflösung von A''. Dann lässt sich das Diagramm so zu einem kommutativen Diagramm ergänzen (grün), dass $A \to I^\bullet$ eine injektive Auflösung von A ist und die Spalten alle exakt sind.

Frage: In welchem Verhältnis stehen zwei injektive Auflösungen eines Objekts?

Definition 7.0.10. $A^\bullet, B^\bullet$ Komplexe in $\mathcal{A}$, $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ Komplexhomomorphismus.
f, g heißen homotop ($f \sim g$) $\Leftrightarrow$ Es existieren Homomorphismen $s^i : A^{i+1} \to B^i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ mit

$$f_i - g_i = d_{i-1} \circ s^{i-1} + s^i \circ d_i$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & A^i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, shift right, "f_i"'] \arrow[d, shift left, "g_i"] \arrow[dl, "s^{i-1}"] & A^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dl, "s^i"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"'] & B^i \arrow[r] & B^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Anmerkung:

- Homotopie von Komplexhomomorphismen ist eine Äquivalenzrelation
- Sind $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ Komplexhomomorphismen mit $f \sim g$ und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von $\mathcal{A}$ in eine abelsche Kategorie $\mathcal{B}$, dann erhalten wir einen Komplexhomomorphismen $Ff, Fg : FA^\bullet \to FB^\bullet$ mit $Ff \sim Fg$

Bemerkung 7.0.11. $A^\bullet$, $B^\bullet$ Komplexe in $\mathcal{A}$, $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ Komplexhomomorphismen mit $f \sim g$
Dann gilt: $H^i(f) = H^i(g) : H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet)$

Definition 7.0.12. $A^\bullet$, $B^\bullet$ Komplexe in $\mathcal{A}$, $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ Komplexhomomorphismus
f heißt **Homotopieäquivalenz** $\Leftrightarrow$ es existiert ein $g : B^\bullet \longrightarrow A^\bullet$ Komplexhomomorphismus mit $g \circ f \sim id_{A^\bullet}$ und $f \circ g \sim id_{B^\bullet}$
Quasiisomorphismus $\Leftrightarrow$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ ist $H^i f : H^i A^\bullet \longrightarrow H^i B^\bullet$ ein Isomorphismus

Bemerkung 7.0.13. $A^\bullet, B^\bullet$ Komplexe in $\mathcal{A}$, $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ Homotopieäquivalenz
Dann ist f ein Quasiisomorphismus

Anmerkung: Nicht jeder Quasiisomorphismus ist eine Homotopieäquivalenz

Satz 7.0.14. Gegeben sei folgendes Diagramm von Komplexen in $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\varphi"'] & E^0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f_0"] & E^1 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f_1"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\eta"'] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

sodass gilt:

- Die obere Zeile ist exakt
- Alle I^i, $i \geq 0$ sind injektiv

Dann existiert ein Komplexhomomorphismus $f : E^\bullet \longrightarrow I^\bullet$, der φ fortsetzt in dem Sinne, dass $f_0 \circ \epsilon = \eta \circ \varphi$. Ist $g : E^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ ein weiterer solcher Komplexhomomorphismen, dan ist $g \sim f$

Folgerung 7.0.15. $A \in Ob\mathcal{A}$, $A \xrightarrow{\epsilon} I^\bullet$, $A \xrightarrow{\eta} J^\bullet$ injektive Auflösungen von A. Dann existiert eine Homotopieäquivalenz $f : I^\bullet \longrightarrow J^\bullet$ mit $f_0 \circ \epsilon = \eta$, diese ist eindeutig bestimmt bis auf Homotopie.

Folgerung 7.0.16. $I^\bullet$ exakter Komplex von injektiven Objekten in $\mathcal{A}$ mit $I^i = 0$ für $i << 0$. Dann ist $0^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ eine Homotopieäquivalenz.

8. Abgeleitete Funktoren

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven, $\mathcal{B}$ eine abelsche Kategorie und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter additiver Funktor

Bemerkung 8.0.1. $i \geq 0$. Für jedes Objekt $A \in Ob\mathcal{A}$ fixieren wir eine injektive Auflösung $A \to I^\bullet$ von A und setzen

$$R^i F(A) := H^i(FI^\bullet)$$

Ist $\varphi : A \to A'$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$ und sind $A \to I^\bullet$, $A' \to I'^\bullet$ injektive Auflösungen von A, A', dann existieren ein bis auf Homotopie eindeutig bestimmten $f : I^\bullet \to I'^\bullet$, das φ fortsetzt.
Wir setzen $R^i F(\varphi) := H^i(Ff)$.
Auf diese Weise wird $R^i F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zu einem additiven Funktor.
Wird auf dieselbe Art und Weise mit einer anderen Wahl von injektiven Auflösungen ein Funktor $R^{\hat{i}} F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ konstruiert, dann sind $R^i F(A)$ und $R^{\hat{i}} F(A)$ kanonisch isomorph für alle $A \in Ob\mathcal{A}$, und es gibt eine natürliche Äquivalenz $R^i F \overset{\sim}{\Rightarrow} R^{\hat{i}} F$
$R^i F$ heißt der **i-te rechtsabgeleitete Funktor** von F.

Bemerkung 8.0.2. Es gilt:
(a) $R^\circ F = F$
(b) Ist F exakt, dann ist $R^i F = 0$ für alle $i > 0$

Satz 8.0.3. $0 \to A' \to A \to A'' \to O$ exakte Folge in $\mathcal{A}$.
Dann existieren natürliche Morphismen

$$\delta^i : R^i F(A'') \longrightarrow R^{i+1} F(A') \quad \text{für jedes } i \geq 0,$$

sodass die Folge

$$\begin{array}{cl} 0 & \to \; FA' \to FA \to FA'' \\ & \overset{\delta^0}{\to} \; R^1 FA' \to R^1 FA \to R^1 FA'' \\ & \to \; \dots \\ & \vdots \\ & \to \; R^i FA' \to R^i FA \to R^i FA'' \\ & \overset{\delta^i}{\to} \; R^{i+1} FA' \to R^{i+1} FA \to R^{i+1} FA'' \\ & \to \; \dots \end{array}$$

exakt ist. Ist

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm, wobei die untere Zeile exakt ist, so kommutiert für alle $i \geq 0$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R^iF(A'') \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d] & R^{i+1}F(A') \arrow[d] \\ R^iF(B'') \arrow[r, "\delta_i"'] & R^{i+1}F(B') \end{tikzcd}$$

Definition 8.0.4. $A \in Ob\mathcal{A}$
A heißt **F-azylisch** $\Leftrightarrow R^iF(A) = 0$ für alle $i \geq 1$

Bemerkung 8.0.5. $A \in Ob\mathcal{A}$ injektiv
Dann ist A F-azyklisch

Satz 8.0.6. $A \to J^\bullet$ Auflösung von A durch F-azyklische Objekte, d.h. $J^\bullet$ ist ein Komplex mit $J^i = 0$ für $i < 0$ und J^i F-azyklisch für $i \geq 0$, sodass der augmentierte Komplex

$$0 \longrightarrow A \longleftrightarrow J^1 \longrightarrow J^2 \longrightarrow \dots$$

exakt ist.
Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $R^iF(A) \cong H^i(FJ^\bullet)$ für alle $i \geq 0$

Anmerkung: Die Theorie der linksabgeleiteten rechtsexakten Funktoren lässt sich analog entwickeln:
$\mathcal{A}$ abelsche Kategorie mit genügend vielen Projektiven, $\mathcal{B}$ abelsche Kategorie, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ rechtsexakter Funktor.
Wir wählen für jedes Objekt $A \in Ob\mathcal{A}$ eine projektive Auflösung $P_\bullet \to A$ und setzen

$$L_iF(A) := H_i(FP_\bullet)$$

Rest analog

9. $delta$-Funktoren

Im Folgenden seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsche Kategorien

Definition 9.0.1. Ein **δ-Funktor** $H = (H^n)_{n\geq 0}$ ist eine Familie additiver Funktoren $H^n : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zusammen mit Homomorphismen $\delta : H^n(C) \to H^{n+1}(A)$ für alle $n \geq 0$ und jede kurze exakte Folge
$0 \to A \to B \to C \to 0$, sodass gilt: (D1) δ ist funktoriell, d.h. ist

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutierendes Diagramm in $\mathcal{A}$ mit exakten Zeilen dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H^n(C) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(C') & \xrightarrow[\delta]{} & H^{n+1}(A') \end{array}$$

in $\mathcal{B}$ für alle $n \geq 0$.
(D2) Für jede kurze exakte Folge $0 \to A \to B \to C \to 0$ in $\mathcal{A}$ ist eine lange Folge

$$\ldots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A) \longrightarrow \ldots$$

exakt in $\mathcal{B}$

Beispiel 9.0.2. $\mathcal{A}$ habe genügend viele Injektive, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linksexakt
$\Rightarrow H := (R^n F)_{n\geq 0}$ ist ein δ-Funktor nach 8.0.3

Definition 9.0.3. $H = (H^n)_{n\geq 0} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ δ-Funktor
H heißt **universell** $\Leftrightarrow$ Für jeden δ-Funktor $H' = (H'^n)_{n\geq 0} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ setzt sich jede natürliche Transformation $f^0 : H^0 \Rightarrow H'^0$ eindeutig zu einem Homomorphismus von δ-Funktoren fort, d.h. zu einer Familie $f = (f^n)_{n\geq 0}$ von natürlichen Transformationen $f^n : H^n \Rightarrow H'^n$, die auf naheliegende Weise mit den δ's verträglich sind.

Bemerkung 9.0.4. Sind F, G universelle δ-Funktoren mit $F^\circ = G^\circ$, dann gibt es eine kanonische natürliche Äquivalenz von δ-Funktoren $F \overset{\sim}{\Rightarrow}$.

Definition 9.0.5. $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ additiver Funktor.
F heißt auslöschbar $\Leftrightarrow$ Für jedes $A \in Ob\mathcal{A}$ existiert ein $A' \in Ob\mathcal{A}$ und ein Monomorphismus $u : A \hookrightarrow A'$ mit $F(u) = 0$

Satz 9.0.6. $H = (H^n)_{n\geq 0} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ δ-Funktor, sodass H^n auslöschbar für alle $n \geq 1$.
Dann ist H universell.

Folgerung 9.0.7. $\mathcal{A}$ have genügend viele Injektive, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linksexakt.
Dann ist $(R^n F)_{n \geq 0}$ ein universeller δ-Funktor.

10. Ext und Erweiterungen

Definition 10.0.1. M, N R-Moduln
Wir setzen $Ext_R^n(M,N) := R^n Hom_R(M,-)(N)$ für $n \geq 0$
Explizit: Wähle eine injektive Auflösung $N \to I^\bullet$ von N, dann ist

$$Ext_R^n(M,N) = H^n(Hom_R(M,I^\bullet))$$

Satz 10.0.2. M, N R-Moduln
Dann gibt es kanonische Isomorphismen

$$Ext_R^n(M,N) \cong R^n Hom_R(-,N)(M)$$

für alle $n \geq 0$, insbesondere kann $Ext_R^n(M,N)$ auch über eine projektive Auflösung $P_\bullet \to M$ von M berechnet werden via $Ext_R^n(M,N) = H^n(Hom_R(P_\bullet, N))$

Satz 10.0.3. A Hauptidealring, M, N A-Moduln
Dann gilt: $Ext_A^n(M,N) = 0$ für alle $n \geq 2$

Bemerkung 10.0.4. M, N R-Moduln
$\mathcal{E}(M,N) :=$ {exakte Folgen $0 \to N \to E \to M \to 0$ von R-Moduln} Wir definieren auf $\mathcal{E}(M,N)$ eine Relation "$\sim$" wie folgt:
$0 \to N \to E \to M \to 0 \sim 0 \to N \to E' \to M \to 0$
$\Leftrightarrow$ Es existiert ein Homomorphismus $\alpha : E \to E'$, sodass

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutiert (nach dem Fünferlemma ist α ein Isomorphismus)
"$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{E}(M,N)$.
Wir setzen $E(M,N) := \mathcal{E}(M,N)/\sim$
$E(M,N)$ enthält ein ausgezeichnetes Element, die Äquivalenzklasse der spaltenden exakten Folge $0 \to N \to N \oplus M \to M \to 0$

Satz 10.0.5. M, N R-Moduln
Dann gibt es eine Bijektion $\Psi : E(M,N) \longrightarrow Ext_R^1(M,N)$

Anmerkung: Das im Beweis konstruierte Ψ ist unabhängig von der Wahl $\epsilon : P \twoheadrightarrow M$ und bildet die Klasse der spaltenden Erweiterungen auf das Nullelement in $Ext_R^1(M,N)$ ab.

Teil III.

Kommutative Algebra

In diesem Kapitel sei A stets ein kommutativer Ring (mit Eins)

11. Grundlagen

Definition 11.0.1. A heißt **lokal** $\Leftrightarrow$ A besitzt genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$.
In diesem Fall heißt $k := A/\mathfrak{m}$ der **Restklassenkörper** von A.

Bemerkung 11.0.2. $\mathfrak{m} \subseteq A$ maximales Ideal. Dann sind äquivalent:
(i) A ist lokal mit maximales Ideal m
(ii) $A \backslash \mathfrak{m} \subseteq A^*$
(iii) $A \backslash \mathfrak{m} = A^*$
(iv) $1 + \mathfrak{m} \subseteq A^*$

Definition 11.0.3. $x \in A$. x heißt nilpotent $\Leftrightarrow$ Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$.

Anmerkung: Ist $A \neq 0$, dann ist jedes nilpotente Element ein Nullteiler, Umkehrung ist im alllgemeinen falsch.

Bemerkung 11.0.4. $\mathcal{M}(A) := \{x \in A | x \text{ ist nilpotent}\}$ ist ein Ideal in A, das Nilradikal von A. Der Ring $A/\mathcal{M}(A)$ hat keine nilpotenten Elemente $\neq 0$

Satz 11.0.5. $\mathcal{M}(A) = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \subseteq A \text{ Primid}} \mathfrak{p}$

Bemerkung 11.0.6. $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ Primideale in A, $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$.
Dann existiert ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_j$

Bemerkung 11.0.7. $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \subseteq A$ Ideale, $\mathfrak{p}$ Primideal in A mit $\mathfrak{p} \supseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$.
Dann existiert ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_j$.
Ist $\mathfrak{p} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$, dann existiert ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_j$

Bemerkung 11.0.8. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ Ideale, $a \in A$
$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} := \{x \in A | x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$ heißt der **Idealquotient** $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$
$\mathfrak{b} : \mathfrak{b}$ ist ein Ideal in A.
$ann(\mathfrak{a}) := (0) : \mathfrak{a} = \{x \in A | x\mathfrak{a} = 0\}$ heißt der Annullator von $\mathfrak{a}$
$ann(a) := ann((a)) = \{x \in A | xa = 0\}$

Anmerkung:

- $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{c} \Leftrightarrow a \subseteq \mathfrak{c} : \mathfrak{b}$
- Die Menge der Nullteiler von A is gegeben durch $\bigcup\limits_{x \in A \backslash \{0\}} ann(x)$

Beispiel 11.0.9. $A = \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $(m, n) \neq (0) \Rightarrow (m) : (n) = (\frac{m}{ggT(m,n)})$

Definition 11.0.10. $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal
$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{x \in A | \text{Es ex. } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n \in \mathfrak{a}\}$ heißt das **Radikal** von $\mathfrak{a}$

Anmerkung:

- $\sqrt{(0)} = \mathcal{M}(A)$

- Ist $\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion, dann ist
  $\sqrt{\mathfrak{a}} = \{x \in A | \text{Es ex.} n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n \in \mathfrak{a}\} = \{x \in A | \pi(x) \in \mathcal{M}(A/\mathfrak{a})\}$
  $= \pi^{-1}(\mathcal{M}(A/\mathfrak{a})) = \pi^{-1}(\bigcap\limits_{\mathfrak{p} \subseteq A/\mathfrak{a} PI} \mathfrak{p}) = \bigcap\limits_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq API \\ \text{mit } \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}}} \mathfrak{p}$ (insbesondere is $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Ideal)

Definition 11.0.11. B kommutativer Ring, $f : A \longrightarrow B$ Ringhomomorphismus, $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal, $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal.
$\mathfrak{a}^e := Bf(a) = \{\sum\limits_{endl} b_i f(a_i) | b_i \in B, a_i \in \mathfrak{a}\}$ heißt die **Erweiterung** von $\mathfrak{a}$ auf B.
$\mathfrak{b}^c := f^{-1}(\mathfrak{b})$ heißt die **Kontraktion** von $\mathfrak{b}$ auf A.

Anmerkung:

- $\mathfrak{a}^e, \mathfrak{b}^c$ sind Ideale in B bzw. A
- Wir können f faktorisieren in $A \overset{p}{\twoheadrightarrow} imf \overset{i}{\hookrightarrow} B$
  Die Situation für p ist einfach, i ist kompliziert.
- $\mathfrak{q} \subseteq B$ Primideal $\Rightarrow \mathfrak{q}^c \subseteq A$ Primideal wegen $\underbrace{A/f^{-1}(\mathfrak{q})}_{\mathfrak{q}^c} \hookrightarrow \underbrace{B/\mathfrak{q}}_{\text{nullteilerfrei}}$
- Ist $\mathfrak{p} \subseteq A$ Primideal, dann ist $\mathfrak{p}^e \subseteq B$ im Allgemeinen kein Primideal
  (Übung: p Primzahl mit $p = 1(\mod 4)$. Unter $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[i]$ ist $(p)^e$ ein Produkt zweier verschiedener Primideale).

Bemerkung 11.0.12. B kommutativer Ring, $f : A \longrightarrow B$ Ringhomomorphismus, $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal, $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal.
Dann gilt:
(a) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$
(b) $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$
(c) $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b}^{ce}$
(d) $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$

Satz 11.0.13. B kommutativer Ring, $f : A \longrightarrow B$ Ringhomomorphismus
$C := \{\mathfrak{a} \subseteq A \text{ Ideal} | \mathfrak{a} \text{ ist Kontraktion eines Ideals aus } B\}$
$E := \{\mathfrak{b} \subseteq B \text{ Ideal} | \mathfrak{b} \text{ ist Erweiterung eines Ideals aus} A\}$
Dann gilt:
(a) $C = \{\mathfrak{a} \subseteq A \text{ Ideal} | \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}\}$
(b) $E = \{\mathfrak{b} \subseteq B \text{ Ideal} | \mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}\}$
(c) Die Abbildungen $\phi : C \longrightarrow E, \mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^e$ und $\psi : E \longrightarrow C, \mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b}^c$
sind zueinander inverse, inklusionserhaltende Bijektionen.

Erinnerung an LA: $T \in M(n \times n, A) \rightsquigarrow T^\# \in M(n \times n, A)$ ist die komplementäre Matrix zu T. Es ist $T^\# \cdot T = T \cdot T^\# = \det(T) E_n$. (LA Satz 17.20)

Satz 11.0.14. M endlich-erzeugter A-Modul, $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal, $\varphi \in End_A(M)$ mit $\varphi(M) \subseteq \mathfrak{a}M$.
Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathfrak{a}$ mit

$$\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \ldots + a_1\varphi + a_0 id_M = 0$$

Folgerung 11.0.15. M endlich-erzeugter A-Modul, $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal, mit $\mathfrak{a}M = M$
Dann existiert ein $a \in A$ mit $A \equiv 1 (mod \mathfrak{a})$ mit $aM = 0$

Satz 11.0.16. (Nakagama-Lemma)
A lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, M endlich-erz. A-Modul. $M/\mathfrak{m}M = 0$
Dann ist $M = 0$.

Folgerung 11.0.17. A lokaler Ring mit maximalem ideal $\mathfrak{m}$, M endlich-erz. A-Modul, $N \subseteq M$ Untermodul mit $M = \mathfrak{m}M + N$. Dann ist $M = N$.

Folgerung 11.0.18. A lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, M endlich erzeugter A-Modul, $x_1, \ldots, x_n \in M$.
Dann sind äquivalent:
(i) $x_1, \ldots, x_n$ ist ein Erzeugendensystem von M
(ii) Die Bilder $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ von $x_1, \ldots, x_n$ in $M/\mathfrak{m}M$ erzeugen den A/MN-Vektorraum $M/\mathfrak{m}M$

Anmerkung: Wichtig: M endlich-erzeugt ist eine Voraussetzung in 11.0.18

12. Lokalisierung

Erinnerung (an Algebra 1)
$S \subseteq A$ Untermonoid bzgl. "$\cdot$" (d.h. $1 \in S$ und $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$)
Definiere Relation "$\sim$" aus $A \times S$ wie folgt:
$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \Leftrightarrow$ Es existiert ein $t \in S$ mit $ta_2s_1 = ta_1s_2$
"$\sim$" ist Äquivalenzrelation, setze $S^{-1}A := A \times S/\sim$, $\frac{a}{s}$ bezeichnet die Äquivalenzklasse von $(a, s) \in A \times S$ $S^{-1}A$ ist ein kommutativer Ring via $\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} := \frac{a_1s_2 + a_2s_1}{s_1s_2}$, $\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1a_2}{s_1s_2}$
Es gibt einen kanonischen Ringhomomorphismus $\tau : A \longrightarrow S^{-1}A$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ (im Allgemeinen nicht injektiv)
τ injektiv $\Leftrightarrow S$ besteht nur aus Nichtnullteilern

Im Folgenden sei $S \subseteq A$ stets Untermonoid bzgl. "$\cdot$", Erweiterung und Kontraktion von Idealen sind bzgl. $\tau : A \longrightarrow S^{-1}A$ zu verstehen.

Bemerkung 12.0.1. $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal
$S^{-1}\mathfrak{a} := \mathfrak{a}^e = \{\frac{a}{s} | a \in \mathfrak{a}, s \in S\} \subseteq S^{-1}A$ ist ein Ideal.
Es gilt: $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}A \Leftrightarrow \mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$

Bemerkung 12.0.2. $\mathfrak{p} \subseteq A$ Primideal mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$
Dann ist $S^{-1}\mathfrak{p}$ ein Primideal in $S^{-1}A$

Bemerkung 12.0.3. Es gilt:
(a) Für die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Ideale in } A\} & \overset{\phi}{\longrightarrow} & \text{Ideale in } S^{-1}A \\ & \underset{\psi}{\longleftarrow} & \\ \mathfrak{a} & \longmapsto & \mathfrak{a}^e = S^{-1}\mathfrak{a} \\ \mathfrak{b}^c = \tau^{-1}(\mathfrak{b}) & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{b} \end{array}$$

gilt: $\phi \circ \psi = id_{\{\text{Ideale in } S^{-1}A\}}$, insbesondere ist ϕ surjektiv und ψ injektiv.
Beide Abbildungen sind inklusionserhaltend.
(b) Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Primideale in } A \text{ mit } \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} & \overset{\phi}{\longrightarrow} & \text{Primideale in } S^{-1}A \\ & \underset{\psi}{\longleftarrow} & \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & \mathfrak{p}^e = S^{-1}\mathfrak{p} \\ \mathfrak{q}^c = \tau^{-1}(\mathfrak{q}) & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q} \end{array}$$

sind bijektiv und invers zueinander, beide sind inklusionserhaltend.

Bemerkung 12.0.4. $\mathfrak{p} \subseteq A$ Primideal, $S := A \backslash \mathfrak{p}$ (ist Untermonoid)
$A_\mathfrak{p} := S^{-1}A$ heißt die Lokalisierung von A bei $\mathfrak{p}$.
$A_\mathfrak{p}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $S^{-1}\mathfrak{p}$.

Erweiterung und Kontraktion liefern inklusionserhaltende Bijektionen zweischen der Menge der Primideale in A, die in $\mathfrak{p}$ enthalten sind, und der Menge der Primideale in $A_\mathfrak{p}$

Beispiel 12.0.5. $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{p} = (p)$ für eine Primzahl p
$\Rightarrow \mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} | m,n \in \mathbb{Z}, ggT(m,n) = 1, p \nmid n\}$ ist lokal mit maximalen Ideal $p\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} | m,n \in \mathbb{Z}, ggT(m,n) = 1, p|m, p \nmid n\}$.

Bemerkung 12.0.6. M A-Modul
Wir definieren eine Relation "$\sim$" auf $S \times M$ wie folgt:

$$(s_1, m_1) \sim (s_2, m_2) \Leftrightarrow \text{Es existiert ein } t \in S \text{ mit } ts_2m_1 = ts_1m_2$$

"$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation.
Wir setzen $S^{-1}M := (S \times M)/\sim$, $\frac{m}{s}$ bezeichnet die Äquivalenzklasse von $(s,m) \in S \times M$.
$S^{-1}M$ ist ein $S^{-1}A$-Modul via:

$$\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} := \frac{s_2m_1 + s_1m_2}{s_1s_2}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} := \frac{am}{st} \quad (\text{für } m_1, m_2, m \in M, s_1, s_2, s, t \in S)$$

$S^{-1}M$ heißt Quotientenmodul von M nach S.
Es gibt eine natürliche Abbildung $\tau : M \to S^{-1}M$, $m \mapsto \frac{m}{1}$

Anmerkung: $S^{-1}M$ ist auch eine A-Modul via $a \cdot \frac{m}{s} := \frac{a}{1} \cdot \frac{m}{s} = \frac{am}{s}$
τ ist dann ein Homomorphismus von A-Moduln.

Satz 12.0.7. M, N A-Moduln, $\varphi : M \to N$ A-linear, $\tau_M : M \to S^{-1}M$, $\tau_N : N \to S^{-1}N$
Dann gibt es genau eine S^{-1} A-lineare Abbildung

$$S^{-1}\varphi : S^{-1}M \to S^{-1}N \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau_M"'] & N \arrow[d, "\tau_N"] \\ S^{-1}M \arrow[r, dashed, "S^{-1}\varphi"'] & S^{-1}N \end{tikzcd}$$

mit $S^{-1}\varphi \circ \tau_M = \tau_N \circ \varphi$
Auf diese Weise wird $S^{-1}\_ : A - Mod \to S^{-1}A - Mod$
zu einem additiven Funktor.

Satz 12.0.8. $S^{-1}\_ : A - Mod \to S^{-1}A - Mod$ ist ein exakter Funktor

Folgerung 12.0.9. M A-Modul, $N \subseteq M$ Untermodul
Dann ist $S^{-1}N$ ist in natürlicher Weise Untermodul von $S^{-1}M$, und es gilt: $S^{-1}(M/N) \cong S^{-1}M/S^{-1}N$
(Wir identifizieren diese Moduln im Folgenden)

Bemerkung 12.0.10. M, N A-Moduln, $\varphi : M \to N$ A-linear. Dann gilt:
(a) $\ker(S^{-1}\varphi) = S^{-1}(\ker\varphi)$ (b) $coker(S^{-1}\varphi) = S^{-1}(coker\varphi)$
(c) $im(S^{-1}\varphi) = S^{-1}(im\varphi)$

Bemerkung 12.0.11. Für die Abbildung:

$$\begin{array}{ccc} \{A\text{-Untermoduln von } M\} & \stackrel{\phi}{\longrightarrow} & \{S^{-1}A\text{-Untermoduln von } S^{-1}M\} \\ & \underset{\psi}{\longleftarrow} & \\ N & \longmapsto & S^{-1}N \\ \tau^{-1}(p) & \longleftarrow & p \end{array}$$

gilt $\phi \circ \psi = id_{\{S^{-1}A-\text{Untermoduln von } S^{-1}M\}}$, inbesondere ϕ surjektiv und ψ injektiv. Beide Abbildungen sind inklusionserhaltend

Folgerung 12.0.12. Es gilt:
(a) M endlich-erz. A-Modul $\Rightarrow S^{-1}M$ endlich-erz. $S^{-1}A$-Modul
(b) M noetherscher A-Modul $\Rightarrow S^{-1}M$ noetherscher $S^{-1}A$-Modul

Definition 12.0.13. M A-Modul, $\mathfrak{p} \subseteq A$ Primideal
Wir setzen $S := A \setminus \mathfrak{p}$
$M_\mathfrak{p} := S^{-1}M$ heißt die Lokalisierung von M bei $\mathfrak{p}$
Für einen Homomorphismus $\varphi : M \to N$ von A-Moduln ist entsprechend $\varphi_\mathfrak{p} = S^{-1}\varphi : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ definiert.

Anmerkung: Eine Eigenschaft (E) eines A-Moduls M nennt man eine "lokale Eigenschaft", wenn gilt:
M erfüllt (E) $\Leftrightarrow M_\mathfrak{p}$ erfüllt (E) für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$.

Satz 12.0.14. M A-Modul. Dann sind äquivalent:
(i) $M = 0$
(ii) $M_\mathfrak{p} = 0$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$
(iii) $M_\mathfrak{m} = 0$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$

Folgerung 12.0.15. $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ Folge von A-Moduln.
Dann sind äquivalent:
(i) $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ exakt
(ii) $M'_\mathfrak{p} \xrightarrow{f_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \xrightarrow{g_\mathfrak{p}} M''_\mathfrak{p}$ exakt für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$
(iii) $M'_\mathfrak{m} \xrightarrow{f_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} \xrightarrow{g_\mathfrak{m}} M''_\mathfrak{m}$ exakt für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$

Folgerung 12.0.16. M, N A-Moduln, $f : M \to N$ A-Modulnhomomorphismus.
Dann gilt:
(a) f injektiv $\Leftrightarrow f_\mathfrak{m}$ injektiv für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A \Leftrightarrow f_\mathfrak{p}$ injektiv für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$
(b) f surjektiv $\Leftrightarrow f_\mathfrak{m}$ surjektiv für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A \Leftrightarrow f_\mathfrak{p}$ surjektiv für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$
(c) $f = 0 \Leftrightarrow f_\mathfrak{m} = 0$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A \Leftrightarrow f_\mathfrak{p} = 0$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$

Bemerkung 12.0.17. A nullteilerfrei, $K = Quot(A)$
Die natürliche Abbildung $A \to K$ bzw. $A_\mathfrak{p} \to K$, $\mathfrak{p}$ Primideale in A, sind alle injektiv, fasse also A bzw. $A_\mathfrak{p}$ als Unterringe von K auf.
Dann gilt:

$$A = \bigcap_{\mathfrak{p} \subseteq A PI} A_\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ max. Id.}} A_\mathfrak{m}$$

13. Tensorprodukt und flache Moduln

Definition 13.0.1. L, M, N A-Moduln, $\varphi : M \times N \to L$
φ heißt A-bilinear $\Leftrightarrow$ Für jedes $n \in N$ ist die Abbildung $M \to L$, $m \mapsto \varphi(m,n)$ A-linear und für jedes $m \in M$ ist die Abbildung $N \to L$, $n \mapsto \varphi(m,n)$ A-lienar.

Definition 13.0.2. M, N A-Moduln
Ein Tensorprodukt von M und N über A ist ein A-Modul T zusammen mit einer A-bilineare Abbildung $\tau : M \times N \to T$, sodass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:
Für jeden A-Modul L und jede A-bilineare Abbildung $\varphi : M \times N \to L$ gibt es genau einen A-Modulhomomorphismus $\alpha : T \to L$, sodass $\alpha \circ \tau = \varphi$ ist:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "\varphi", "bil."'] \arrow[dr, "\tau"'] & & L \\ & T \arrow[ur, dashed, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Satz 13.0.3. M, N A-Moduln
Dann gilt:
(a) Es gibt ein Tensorprodukt von M, N über A
(b) Sind T, T' Tensorprodukte von M, N über A mit A-bilinearer Abilldung $\tau : M \times N \to T$, $\tau' : M \times N \to T'$, dann existiert genau A-Modulhomomorphismus $\alpha : T \to T'$ mit $\alpha \circ \tau = \tau'$. α ist ein Isomorphismus.
Mit anderen Worten, das Tensorprodukt von M, N ist eindeutig bestimmt bis auf einen eindeutigen Isomorphismus
(c) Ist T eine Tensorprodukt von M, N über A mit A-bilinearer Abbildung $\tau : M \times N \to T$ und setzen wir für $m \in M, n \in N$

$$m \otimes n := \tau(m,n)$$

dann wird T erzeugt von den Elementen $m \otimes n$, $m \in M$, $n \in N$, d.h. jedes Element von τ ist von der Form $\sum_{i=1}^{r} (m_i \otimes n_i)$ mit $a_i \in A$, $m_i \in M$, $n_i \in N$.
Hierbei gilt:

$$(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n, \quad m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n'$$
$$(am) \otimes n = a(m \otimes n) = m \otimes (an)$$

für alle $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $a \in A$
Notation für Tensorprodukt von M und N über A: $M \otimes_A N$

Anmerkung: Für $m \in M$ ist stets $m \otimes 0 = 0$, denn $m \otimes 0 = m \otimes (0 + 0) = m \otimes 0 + m \otimes 0$
Analog: $0 \otimes n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 13.0.4.
(a) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$, denn:
Seien $a, b \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \Rightarrow$ es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na = 0$, es existiert ein $b' \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $nb' = b \Rightarrow a \otimes b = a \otimes (nb') = (na) \otimes b' = 0 \otimes b' = 0$

(b) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = 0$, denn:
Für $a \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist $a \otimes b = (3a) \otimes b = a \otimes (3b) = a \otimes 0 = 0$

Bemerkung 13.0.5. M, M', N, N' A-Moduln, $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ A-Modulhomomorphismus
Dann gibt es genau einen A-Modulhomomorphismus

$$f \otimes g : M \otimes N \to M' \otimes N'$$

mit $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ für alle $m \in M$, $n \in N$.

Folgerung 13.0.6. M, N A-Moduln
dann sind $M \otimes_A - : A - Mod \to A - Mod$ und $- \otimes_A N : A - Mod \to A - Mod$ additive Funktoren.
Hierbei setzen wir für $N_1, N_2 \in A - Mod$, $\varphi \in Hom_A(N_1, N_2)$

$$(M \otimes_A -)(\varphi) := id_m \otimes \varphi : M \otimes N_1 \to M \otimes N_2, \quad m \otimes n \mapsto m \otimes \varphi(n)$$

(analog für $- \otimes_A N$)

Bemerkung 13.0.7. L, M, N A-Moduln, $(N_i)_{i \in I}$ Familie von A-Moduln.
Dann gibt es natürliche Isomorphismen
(a) $M \otimes_A A \cong M \cong A \otimes_A M$
(b) $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$
(c) $(L \otimes_A M) \otimes_A N \cong L \otimes_A (M \otimes N)$
(d) $M \otimes_A (\bigoplus_{i \in I} N_i) \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes N_i)$

Anmerkung: Das Tensorprodukt kommutiert im Allgemeinen nicht mit direkten Produkten (Übung)

Folgerung 13.0.8. M, N freie A-Moduln
Dann ist $M \otimes_A N$ ein freier A-Modul.

Bemerkung 13.0.9. B kommutativer Ring, $f : A \to B$ Ringhomomorphismus, M A-Modul.
Dann ist B ein A-Modul via $A \times B \to B$, $(a, b) \mapsto f(a)b$,
und $M \otimes_A B$ ist ein B-Modul via $B \times (M \otimes_A B) \to M \otimes_A B$, $(b, \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes b_i) \mapsto \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes bb_i$

Bemerkung 13.0.10. B kommutativer Ring, M A-Modul, L B-Modul, N A-Modul und B-Modul mit $a(bx) = b(ax)$ für alle $a \in A, b \in Bx \in N$ ("N ist ein (A, B)-Bimodul")
Dann ist $M \otimes_A N$ in natürlicher Weise ein B-Modul, $N \otimes_B L$ ein A-Modul, und es ist

$$(M \otimes_A N) \otimes_B L \cong M \otimes_A (N \otimes_B L) \quad \text{(Isomorphismus von A- und von B-Moduln)}$$

Bemerkung 13.0.11. M A-Modul, $S \subseteq A$ Untermonoid bzgl "$\cdot$"
Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus: (von A-Moduln und von $S^{-1}A$-Moduln)

$$S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M$$

Bemerkung 13.0.12. M, N A-Moduln, $S \subseteq A$ Untermonoid bzgl. "$\cdot$"
Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus von $S^{-1}A$-Moduln

$$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \cong S^{-1}(M \otimes_A N)$$

Bemerkung 13.0.13. L, M, N A-Moduln
Dann gilt: $Hom_A(M \otimes_A N, L) \cong Hom_A(M, Hom_A(N, L))$ (natürl.)
Insbesondere ist $- \otimes_A N ???? Hom_A(N, -)$

Folgerung 13.0.14. M, N A-Moduln
Dann sind die Funktoren $M \otimes_A -$ und $- \otimes_A N$ rechtsexakt.

Beispiel 13.0.15.
$- \otimes_A N$ ist im Allgemeinen nicht exakt:
Sei $A = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
Wir betrachten die exakte Folge $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$, wobei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x$, π kanonische Projektion
Es ist $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0$, und die Abbildung $f \otimes_A id_N : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist die Nullabbildung, denn für $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist $(f \otimes_A id_N)(x \otimes y) = f(x) \otimes y = 2x \otimes y = x \otimes 2y = x \otimes 0 = 0$

Bemerkung 13.0.16. M A-Modul, $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal.
Dann gilt: $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$

Definition 13.0.17. M A-Modul
M heißt flach $\Leftrightarrow - \otimes_A M$ ist exakt $\Leftrightarrow M \otimes_A -$ ist exakt

Bemerkung 13.0.18.
P projektiver A-modul. Dann ist P flach

Bemerkung 13.0.19.
M, N flache Moduln. Dann ist $M \otimes_A N$ flach.

Bemerkung 13.0.20. $(M_i)_{i \in I}$ Familie von A-Moduln. Dann sind äquivalent:
(i) $\bigoplus_{i \in I} M_i$ flach
(ii) M_i flach für alle $i \in I$

Bemerkung 13.0.21. B kommutativer Ring, $f : A \to B$ Ringhomomorphismus, M flacher A-Modul.
Dann ist $B \otimes_A M$ ein flacher B-Modul.

Bemerkung 13.0.22. $S \subseteq A$ Untermonoid bzgl "$\cdot$".
Dann ist $S^{-1}A$ einflacher A-Modul.

Beispiel 13.0.23.
A nullteilerfrei $\Rightarrow Quot(A)$ flacher A-Modul.

Bemerkung 13.0.24. M A-Modul. Dann sind äquivalent:
(i) M ist ein flacher A-Modul
(ii) $M_{\mathfrak{p}}$ ist ein flacher $A_{\mathfrak{p}}$-Modul für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$
(iii) $M_{\mathfrak{m}}$ ist ein flacher $A_{\mathfrak{m}}$-Modul für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$

Erinngerung (an LA2, 29.15) M A-Modul
$T(M) := \{x \in M |$es ex. ein $a \in A, a$ kein Nullteiler, mit $ax = 0\}$ Torsionsuntermodul von M.
M heißt torsionsfrei $\Leftrightarrow T(M) = \{0\}$

Bemerkung 13.0.25. A nullteilerfrei, M flacher A-Modul. Dann ist M torsionsfrei.

Bemerkung 13.0.26. M A-Modul. Dann sind äquivalent:
(i) Für jede Folge $N' \to N \to N''$ von A-Moduln gilt,
$N' \to N \to N''$ exakt $\Leftrightarrow N' \otimes_A M \to N \otimes_A M \to N'' \otimes_A M$ exakt.
(ii) M ist flach und für alle maximalen Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist $M/\mathfrak{m} \neq 0$
(iii) M ist flach und für alle A-Moduln N gilt: $N \otimes_A M = 0 \Rightarrow N = 0$
(iv) M ist flach und für alle A-Modulhomomorphismen $\varphi : N_1 \to N_2$ gilt:

$$\varphi \otimes_A id_M : N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M$$

ist die Nullabbildung $\Rightarrow \varphi = 0$.

Ist eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt, so heißt M ein **treuflacher A-Modul**.

Beispiel 13.0.27. (a) $\mathbb{Q}$ ist flacher $\mathbb{Z}$-Modul nach 13.22, aber kein treuflacher $\mathbb{Z}$-Modul, denn: $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$
(b) $A^{(I)}$ ist ein treuflacher A-Modul für $I \neq \emptyset$, denn:

- $A^{(I)}$ ist flach, da freier A-Modul
- Sei N A-Modul mit $N \otimes_A A^{(I)]} = 0 \Rightarrow \bigoplus_{i \in I} N = 0 \Rightarrow N = 0$

Insbesondere ist $A[X] \cong A^{(\mathbb{N}_0)}$ ein treuflacher A-Modul

14. Tor

Definition 14.0.1. M, N A-Moduln
Wir setzen $Tor_n^A(M,N) := L_n(M \otimes_A -)(N)$ für $n \geq 0$
Explizit: Wähle eine projektive Auflösung $Q_\bullet \to N$, dann ist $Tor_n^A(M,N) = H_n(M \otimes_A Q_\bullet)$

Satz 14.0.2. M A-Modul
Dann ist $(Tor_n^A(M,-))_{n\geq 0}$ ein universeller homologischer δ-Funktor, d.h.

- $Tor_n^A(M,-) : A-Mod \to A-Mod$ sind additive Funktoren für alle $n \geq 0$
- Für jede exakte Folge $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ gibt es Verbindungshomomorphismen $\delta : Tor_{n+1}^A(H,N'') \xrightarrow{\delta} Tor_{n-1}^A(M,N')$, sodass die lange Folge

$$\ldots \to Tor_{n+1}^A(M,N'') \xrightarrow{\delta} Tor_n^A(M,N') \to Tor_n^A(M,N) \to Tor_n^A(M,N'') \xrightarrow{\delta} Tor_{n-1}^A(M,N') \to \ldots$$

  exakt ist, δ ist funktionell (vgl. 9.0.1)

- Für jeden homologischen δ-Funktor $H' = (H'_n)_{n\geq 0} : A-Mod \to A-Mod$ setzt sich jede natürliche Transformation $f_0 : M \otimes_A - \Rightarrow H'_0$ eindeutig zu einem homologischen δ-Funktor fort.

Satz 14.0.3. M, N, A-Moduln
Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $Tor_n^A(M,N) \cong L_n(- \otimes_A N)(M)$ für alle $n \geq 0$, insbesondere kann $Tor_A^n(M,N)$ auch über eine projektive Auflösung $P_\bullet \to M$ von M berechnet werden via $Tor_n^A(M,N) = H_n(P_\bullet \otimes_A N)$

Folgerung 14.0.4. M flacher A-Modul, N A-Modul.
Dann ist M $(- \otimes_A N)$-azyklisch.

Folgerung 14.0.5. M, N A-Moduln
Dann gilt: $Tor_n^A(M,N) \cong Tor_n^A(N,M)$ für alle $n \geq 0$

Bemerkung 14.0.6. $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exakte Folge von A-Moduln, M'' flach, N A-Modul
Dann ist die Folge

$$0 \to M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0$$

exakt.

Satz 14.0.7. A lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper $k = A/\mathfrak{m}$, M endlich-erz. A-Modul.
Dann sind äquivalent:
(i) M ist frei
(ii) M ist projektiv
(iii) M ist flach
(iv) $Tor_1^A(A/\mathfrak{a}, M) = 0$ für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$.
Ist A noethersch, dann sind (i) - (iv) äquivalent zu (v) $Tor_1^A(k,M) = 0$

Folgerung 14.0.8. M endlich-erz. A-Modul. Dann sind äquivalent:
(i) M flacher A-Modul

(ii) $M_\mathfrak{p}$ ist ein freier $A_\mathfrak{p}$-Modul für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$
(iii) $M_\mathfrak{m}$ ist ein freier $A_\mathfrak{m}$-Modul für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$

Satz 14.0.9. A HIR, M, N A-Moduln
Dann ist $Tor_n^A(M,N) = 0$ für alle $n \geq 2$

Bemerkung 14.0.10. M A-Modul, $a \in A$ kein Nullteiler.
Dann gilt: $Tor_1^A(A/(a), M) \cong \{x \in M | ax = 0\}$

15. Ganze Ringerweiterung und Dimension

In diesem Abschnitt bedeute "Ringerweiterungßtets Erweiterung kommutativer Ringe

Definition 15.0.1. $B|A$ Ringerweiterung
$B|A$ heißt endlich $\Leftrightarrow$ B ist endlich-erz. als A-Modul
$b \in B$ heißt ganz über A $\Leftrightarrow$ $A[b]|A$ ist endlich.
$B|A$ heißt ganz $\Leftrightarrow$ Alle $b \in B$ sind ganz über A.

Anmkerung: $B|A$, $C|B$ endlicher Ringerweiterung $\Rightarrow$ $C|A$ endliche Ringerweiterung, denn: $(b_i)_{i=1,\ldots,n}$ Erzeugendensystem von B als A-Modul, $(c_j)_{j=1,\ldots,m}$ Erzeugendensystem von C als B-Modul
$\Rightarrow (b_i c_j)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$ Erzeugendensystem von C als A-Modul.

Satz 15.0.2. $B|A$ Ringerweiterung, $b \in B$. Dann sind äquivalent:
(i) b ist ganz über A
(ii) Es gibt $n \in \mathbb{N}$, $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in A$ mit

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = 0 \qquad (*)$$

(iii) Es gibt einen Zwischenring $A \subseteq Z \subseteq B$, sodass $b \in Z$ ist und $Z|A$ endlich ist.
(iv) Es gibt einen $A[b]]$-Modul M mit $ann_{A[b]}M = 0$, der als A-Modul endlich-erz. ist.

Anmerkung: Ist $B|A$ eine Körpererweiterung, dann:
$b \in B$ ganz über A $\Leftrightarrow$ b algebraisch über A
$B|A$ ganz $\Leftrightarrow$ $B|A$ algebraisch.

Folgerung 15.0.3. Es gilt:
(a) $B|A$ endlich $\Rightarrow$ $B|A$ ganz
(b) $C|B|A$ Ringerweiterung, $c \in C$ ganz über A $\Rightarrow$ c ganz über B.

Beispiel 15.0.4. $\mathbb{Z}[i]|\mathbb{Z}$ ist ganz, denn: $\mathbb{Z}[i]|\mathbb{Z}$ ist endlich, da $1, i$ Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}[i]$ als $\mathbb{Z}$-Modul

Satz 15.0.5. $C|B|A$ Ringerweiterung. Dann sind äquivalent:
(i) $B|A$ ganz und $C|B$ ganz
(ii) $C|A$ ganz

Bemerkung 15.0.6. $B|A$ ganze Ringerweiterung, $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal
Dann ist $B/\mathfrak{b}|A/\mathfrak{b} \cap A$ eine ganze Ringerweiterung.

Bemerkung 15.0.7. $B|A$ ganze Ringerweiterung, $S \subseteq A$ Untermonoid $''\cdot''$
Dann ist $S^{-1}B|S^{-1}A$ eine ganze Ringerweiterung.

Bemerkung 15.0.8. $B|A$ Ringerweiterung. Dann gilt:
$\overline{A}^B := \{b \in B | b \text{ ganz über } A\}$ ist ein Unterring von B mit $A \subseteq \bar{A}^B$,
der **ganze Abschluss von** A **in** B.
A heißt **ganzabgeschlossen in** B $\Leftrightarrow$ $\bar{A}^B = A$
$\bar{A}^B|A$ ist eine ganze Ringerweiterung und $\bar{A}^B$ ist ganzabgeschlossen in B.

Bemerkung 15.0.9. $B|A$ Ringerweiterung, $S \subseteq A$ Untermonoid bzgl. $''\cdot''$
Dann gilt: $\overline{S^{-1}A}^{S^{-1}B} = S^{-1}(\bar{A}^B)$
Insbesondere gilt: A ganzabgeschlossen in $B \Rightarrow S^{-1}A$ ganzabgeschlossen in $S^{-1}B$.

Definition 15.0.10. A nullteilerfrei
Der **ganze Abschluss** von A ist der ganze Abschluss von A in $Quot(A)$.
A heißt **normal(ganzabgeschlossen)** $\Leftrightarrow$ A stimmt mit seinem ganzen Abschluss überein.

Bemerkung 15.0.11. A faktoriell. Dann ist A normal.

Beispiel 15.0.12. $\bar{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}(i)} = \mathbb{Z}[i]$, denn: $\mathbb{Z}[i]|\mathbb{Z}$ ganz, $\mathbb{Z}[i]$ ist normal, da faktoriell

Bemerkung 15.0.13. A normal, $S \subseteq A$ Untermonoid bzgl. "$\cdot$"
Dann ist $S^{-1}A$ normal.

Bemerkung 15.0.14. A nullteilerfrei. Dann sind äquvialent:
(i) A normal
(ii) $A_\mathfrak{p}$ normal für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$
(iii) $A_\mathfrak{m}$ normal für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq A$

Bemerkung 15.0.15. $B|A$ ganze Ringerweiterung, B nullteilerfrei.
Dann sind äquivalent:
(i) A ist eine Körper
(ii) B ist ein Körper

Definition 15.0.16. $B|A$ Ringerweiterung, $\mathfrak{p} \subseteq B$, $\mathfrak{p}' \subseteq A$ Primideale
$\mathfrak{p}$ **liegt über** $\mathfrak{p}' \Leftrightarrow \mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap A$.

Satz 15.0.17. $B|A$ ganze Ringerweiterung. Dann gilt:
(a) ("Lying over") Zu jedem Primideal $\mathfrak{p}' \subseteq A$ existiert ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq B$, sodass $\mathfrak{p}$ über $\mathfrak{p}'$ liegt.
(b) Sind $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ Primideale in B, die über demselben Primideal $\mathfrak{p}' \subseteq A$ liegen, dann ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$
(c) Liegt das Primideal $\mathfrak{p}$ von B über dem Primideal $\mathfrak{p}'$ von A, dann gilt:

$$\mathfrak{p} \text{ maximales Ideal} \Leftrightarrow \mathfrak{p}' \text{ maximales Ideal}$$

Folgerung 15.0.18. $B|A$ ganze Ringerweiterung, $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ Primidealkette in B
Dann ist $\mathfrak{p}_0 \cap A \subsetneq \mathfrak{p}_1 \cap A \subsetneq \ldots, \subsetneq \mathfrak{p}_r$ in B mit $\mathfrak{p}_r \cap A$ eine Primideal-Kette in A

Folgerung 15.0.19. ("Going up") $B|A$ ganze Ringerweiterung, $\mathfrak{p}'_0 \subsetneq \mathfrak{p}'_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}'_r$ Primidealkette in A,
$\mathfrak{p}_0$ Primideal in B mit $\mathfrak{p}_0 \cap A = \mathfrak{p}'_0$
Dann existiert eine Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ in B mit $\mathfrak{p}_i \cap A = \mathfrak{p}'_i$ für $i = 0, \ldots, r$

Definition 15.0.20. $A \neq 0$
Eine endliche Kette von $n+1$ Primidealen $\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \ldots \supsetneq \mathfrak{p}_n$ heißt eine **Primidealkette der Länge** n **in** A
Für ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ heißt

$$ht(\mathfrak{p}) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 | p = \mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \ldots \supsetneq \mathfrak{p}_n \text{ ist eine Primideal-Kette der Länge } n \text{ in } A\}$$

die **Höhe** von $\mathfrak{p}$.
$\dim(A) := \sup\{ht(\mathfrak{p}) | \mathfrak{p} \text{ Primideal in } A\}$ heißt die **(Krull-)Dimension** von A.

Beispiel 15.0.21. (a) K Körper $\Rightarrow \dim(K) = 0$, denn (0) ist das einzige Primideal in K
(b) A HIR, der kein Körper ist $\Rightarrow \dim(A) = 1$

denn: Es existiert ein Primideal $\neq (0)$ in A, denn es existiert ein maximales Ideal $\neq (0)$ in A.
Sei $\mathfrak{p}$ Primideal in A, $\mathfrak{p} \neq 0 \Rightarrow$ Es existiert ein Primelement $\pi \in A$ mit $\mathfrak{p} = (\pi)$.
Es ist $ht(\mathfrak{p}) = 1$, denn ist $(0) \neq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ Primideal, dann existiert ein $\tilde{\pi} \in A$ mit $\mathfrak{q} = (\tilde{\pi}) \Rightarrow \pi | \tilde{\pi} \Rightarrow \pi$ assoziiert zu $\tilde{\pi} \Rightarrow \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, also $ht(\mathfrak{p}) = 1$

Satz 15.0.22. $B|A$ ganze Ringerweiterung, $\mathfrak{p}' \subseteq A$ Primideal. Dann gilt:
(a) $\dim(B) = \dim(A)$
(b) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von B über $\mathfrak{p}'$ ist $\dim(A/\mathfrak{p}') = \dim(B/\mathfrak{p})$ und $ht(\mathfrak{p}) \leq ht(\mathfrak{p}')$
(c) Falls $ht(\mathfrak{p}') < \infty$, dann existiert Primideal $\mathfrak{p}$ von B über $\mathfrak{p}'$ mit $ht(\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{p}')$

Anmerkung: Im Allgemeinen ist $ht(\mathfrak{p}) \neq ht(\mathfrak{p}')$

Satz 15.0.23. ("Going down") $B|A$ ganze Erweiterung nullteilerfreier Ringe, A normal, $\mathfrak{p}'_0 \supsetneq \mathfrak{p}'_1 \supsetneq \ldots \supsetneq \mathfrak{p}'_r$ Primideal-Kette in A, $\mathfrak{p}_0$ Primideal in B über $\mathfrak{p}'_0$
Dann existiert eine Primideal-Kette $\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \ldots \supsetneq \mathfrak{p}_n$ in B mit $\mathfrak{p}_i \cap A = \mathfrak{p}'_i$ für $i = 0, \ldots, r$
Insbesondere gilt: ist $\mathfrak{p}'$ ein Primideal in A und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in B über A, dann ist $ht(\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{p}')$

16. Direkte und projektive Limiten

Definition 16.0.1. I Menge, $\leq$ Halbordnung auf I
$(I, \leq)$ heißt **gerichtet** $\Leftrightarrow$ Für alle $a, b \in I$ existiert ein $c \in I$ mit $a \leq c$ und $b \leq c$.
Für den Rest des Abschnitts sei $(I, \leq)$ stets eine gerichtete halbgeordnete Menge.

Definition 16.0.2. Ein über I indiziertes **direktes System** (induktives System) von A-Moduln besteht aus

- einer Familie $(M_i)_{i\in I}$ von A-Moduln
- einer Familie $(\varphi_{ij})_{i,j\in I, i\leq j}$ von A-Modulhomomorphismen $\varphi_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$ **Übergangsabbildugnen** sodass gilt:
  - $\varphi_{ij} = id_{M_i}$ für alle $i \in I$
  - $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ für alle $i, j, k \in I$ mit $i \leq j \leq k$

  Im Folgenden schreiben wir dafür kurz $(M_i, \varphi_{ij})_I$

Beispiel 16.0.3.
(a) $I = \mathbb{N}$ mit "$\leq$", M A-Modul, $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ Folge von Untermoduln von M, $\varphi_{ij} : M_i \hookrightarrow M_j$ Inklusion für $i \leq j$. Dies liefert ein direktes System von A-Moduln
(b) M A-Modul, I eine Menge von Untermoduln von M, die gerichtet bzgl. "$\subseteq$" sei. Setze $M_i := i$ für $i \in I$. Dann ist $(M_i)_{i\in I}$ ist ein direktes System von A-Moduln mit den Inklusionen als Übergangsabbildung.
(c) M A-Modul, I Menge der endlich-erz. Untermoduln von M ist gerichtet bzgl. "$\subseteq$" (mit $M_1, M_2 \subseteq M$ endlich-erz. ist auch $M_1 + M_2$ endlich-erz.), dies liefert ein Bsp. für (b)
(d) $I = \mathbb{N}$ mit $|$-Halbordnung, $M_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$

$$\varphi_{ij} : \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/j\mathbb{Z}, a + i\mathbb{Z} \mapsto \frac{j}{i}a + j\mathbb{Z} \quad \text{für } i|j$$

liefert ein direktes System von $\mathbb{Z}$-Moduln

Bemerkung 16.0.4. Ein Homomorphismus von direkten Systemen $(M_i, \varphi_{ij}^M)_I$ ins direkte System $(N_i, \varphi_{ij}^N)_I$ ist eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ von A-Modulhomomorphismen $f_i : M_i \longrightarrow N_i$, sodass $\varphi_{ij}^N \circ f_i = f_j \circ \varphi_{ij}^M$ für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ gilt:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_{ij}^M"'] & N_i \arrow[d, "\varphi_{ij}^N"] \\ M_j \arrow[r, "f_j"'] & N_j \end{tikzcd}$$

Die über I indizierten direkten Systeme von A-Moduln bilden zusammen mit obigen Homomorphismen eine abelsche Kategorie (alles komponentenweise definiert)
Bezeichnung: I-Dir-A-Mod

Definition 16.0.5. Ein **direkter Limes** des direkten Systems $(M_i, \varphi_{ij})_I$ von A-Moduln (induktiver Limes, Kolimes) ist eine A-Modul M zusammen mit einer Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ von A-Modulhomomorphismen $\varphi_i : M_i \longrightarrow M$, sodass

$\varphi_i = \varphi_j \circ \varphi_{ij}$ für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ ist, sodass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:
Für jeden A-Modul N und jede Familie $(\psi_i)_{i\in I}$ von A-Modulhomomorphismen $\psi_i : M_i \to N$ mit $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ für alle $i \leq j$ existiert ein eindeutig bestimmter A-Modulhomomorphismus $\psi : M \to N$ mit $\psi_i = \psi \circ \varphi_i$ für alle $i \in I$.
Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & N & \\
 & M \arrow[u, dotted, "\psi"] & \\
M_i \arrow[uur, "\psi_i"] \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[rr, "\varphi_{ij}"'] & & M_j \arrow[uul, "\psi_j"'] \arrow[ul, "\varphi_j"']
\end{tikzcd}$$

Satz 16.0.6. $(M_i, \varphi_{ij})_I$ direktes System von A-Moduln.
Dann gilt:
(a) Setzt man $L := \dot{\bigcup\limits_{i\in I}} M_i$ und für $x, y \in L$, $x = m_i \in M_i$

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ Es ex. } k \in I \text{ mit } i \leq k, j \leq k \text{ mit } \varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(y)$$

dann ist "$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf L.
Hierbei ist $\dot{\bigcup\limits_{i\in I}} M_i := \bigcup\limits_{i\in I} (M_i \times \{i\})$, man identifiziert $M_i \times \{i\}$ mit M_i.
(b) Setzt man $M := L/\sim$, dann wird M auf natürliche Weise zu einem A-Modul und die Abbildung $\varphi_i : M_i \to M$, $x \mapsto \bar{x}$ sind A-Modulhomomorphismen.
Für jedes $m \in M$ existiert ein $i \in I$, $m_i \in M_i$ mit $m = \varphi_i(m_i)$
(c) $(M, (\varphi_i)_{i\in I})$ ist ein direkter Limes von $(M_i, \varphi_{ij})_I$
(d) Ist $(M', (\varphi_i')_{i\in I})$ ein weiterer direkter Limes des obigen direkten Systems, dann existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus $\gamma : M \to M'$ mit $\gamma \circ \varphi = \varphi_i'$ für alle $i \in I$.
Notation: $M = \lim\limits_{\to i \in I} M_i$

Beispiel 16.0.7. (vgl. 16.0.3)
(a) $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M$ mit den Inklusionen als Übergangsabbildung.
$\lim\limits_{\to i\in\mathbb{N}} M_i = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i \subseteq M$, wobei $\varphi : M_i \hookrightarrow \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i$ Inklusion.

$$\begin{tikzcd}
 & N & \\
 & \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i \arrow[u, dotted] & \\
M_i \arrow[uur, "\psi_i"] \arrow[ur, hook, "\varphi_i"] \arrow[rr, hook, "\varphi_{ij}"'] & & M_j \arrow[uul, "\psi_j"'] \arrow[ul, hook', "\varphi_j"']
\end{tikzcd}$$

$\psi_j \circ \varphi_{ij} = \psi_i$ für $i \leq j$, d.h. $\psi_j|_{M_i} = \psi_i$

(b) $(M_i)_{i\in I}$ bzgl., "$\subseteq$" gerichtete Familie von Untermoduln von M, indiziert über sich selbst
$\Rightarrow \lim\limits_{\to i\in I} M_i = \bigcup\limits_{i\in I} M_i$
(c) $(M_i)_{i\in I}$ Familie der endlich-erz. Untermoduln von $M \Rightarrow \lim\limits_{\to i\in I} M_i = \bigcup\limits_{i\in I} M_i = M$, denn: jedes Element aus M liegt in einem endlich-erz. Untermodul von M.

Bemerkung 16.0.8. $(f_i)_{i\in I} : (M_i, \varphi_{ij}^M)_I \longrightarrow (N_i, \varphi_{ij}^N)_I$ Homomorphismus direkter Systeme von A-Moduln.
Dann existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus

$$\lim_{\to i\in I} f_i : \lim_{\to i\in I} M_i \to \lim_{\to i\in I N_i}$$

mit $(\lim\limits_{\to} f_i)\circ\varphi_i^M = \varphi_i^N \circ f_i$ für alle $i\in I$:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_i^M"'] & N_i \arrow[d, "\varphi_i^N"'] \\ \lim\limits_{\to i\in I} M_i \arrow[r, "\lim\limits_{\to} f_i"'] & \lim\limits_{\to i\in I} N_i \end{tikzcd}$$

Folgerung 16.0.9.
$\lim\limits_{\to i\in I} - : I-Dir-A-Mod \longrightarrow A-Mod$ ist ein additiver Funktor.

Beispiel 16.0.10. (vgl. Bsp. 16.3(d)) $I=\mathbb{N}$ mit "|"-Halbordnung, $M_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$,
$\varphi_{ij} : \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$, $a+i\mathbb{Z} \mapsto \frac{j}{i}a + j\mathbb{Z}$ für $i|j$
Setze $f_i : \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} (\frac{1}{i}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $a+i\mathbb{Z} \mapsto \frac{a}{i}+\mathbb{Z}$
$\psi_{ij} : (\frac{1}{i}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \hookrightarrow (\frac{1}{j})/\mathbb{Z}$, $\frac{a}{i}+\mathbb{Z} \mapsto \frac{a}{i}+\mathbb{Z}$ für $i|j$
$\Rightarrow ((\frac{1}{i}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}, \psi_{ij})_{\mathbb{N}}$ ist ein direktes System von $\mathbb{Z}$-Moduln, und

$$(f_i)_{i\in\mathbb{N}} : (\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}, \varphi_{ij})_{\mathbb{N}} \to ((\frac{1}{i}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}, \psi_{ij})_{\mathbb{N}}$$

ist ein Isomorphismus direkter Systeme (beachte: $\psi_{ij}\circ f_i = f_j \circ \varphi_{ij}$ für $i|j$, denn:
$(\psi_{ij}\circ f_i)(a+i\mathbb{Z}) = \psi_{ij}(\frac{a}{i}+\mathbb{Z}) = \frac{a}{i}+\mathbb{Z}$,
$(f_j\circ p_{ij})(a+i\mathbb{Z}) = f_j(\frac{j}{i}a + j\mathbb{Z}) = \frac{ja}{ij}+\mathbb{Z} = \frac{a}{i}+\mathbb{Z}$
$\underset{16.0.9}{\Rightarrow} \lim_{\to i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \cong \lim\limits_{\to i\in\mathbb{N}} (\frac{1}{i}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \underset{16.7(b)}{=} \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} (\frac{1}{i}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

Bemerkung 16.0.11. $(M_i, \varphi_{ij})_I$ direktes System von A-Moduln, N A-Modul.
Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\lim_{\to i\in I}(M_i\otimes_A N) \cong (\lim_{i\in I} M_i)\otimes_A N$$

Satz 16.0.12. Der Funktor $\lim\limits_{\to i\in I} - : I-Dir-A-Mod \to A$-Mod ist exakt.

Anmerkung: $\lim\limits_{i\in I} -$ ist linksadjungiert zum "konstanten System-Funktor":

$$\begin{aligned} I-const : A-Mod &\longrightarrow I-Dir-A-Mod \\ M &\longmapsto (M, id_M)_I \end{aligned}$$

denn: $Hom_{A-Mod}(\lim\limits_{\to i\in I} M_i, N) \cong Hom_{I-Dir-A-Mod}((M_i,\varphi_{ij})_I, I-const(N))$

Folgerung 16.0.13. $(M_i,\varphi_{ij})_I$ direkte System flacher A-Moduln
Dann ist $\lim\limits_{i\in I} M_i$ flach

Folgerung 16.0.14. M A-Modul, sodass jeder endlich-erz. Untermodul von M flach ist. Dann ist M flach.

Definition 16.0.15. $J \subseteq I$ heißt **kofinal** $\Leftrightarrow$ Für jedes $i \in I$ existiert ein $j \in J$ mit $i \leq j$.

Anmerkung:

- Ist $J \subseteq I$ kofinal, dann ist J gerichtet, denn: $i, j \in J \overset{J \text{ gerichtet}}{\Rightarrow}$ Es existiert ein $k \in I$ mit $i, j \leq k$ und es existiert ein $l \in J$ mit $k \leq l \Rightarrow i, j \leq l$.

- Ist $(M_i, \varphi_{ij})_I$ ein direktes System, dann ist auch $(M, \varphi_{ij})_J$ ein direktes System und es gibt einen eindeutig bestimmten Homomorphismus

$$\iota : \lim_{\to i \in J} M_i \longrightarrow \lim_{\to i \in I} M_i$$

mit $iota \circ \varphi_i^J = \varphi_i^I$ für alle $i \in J$:

$$\begin{tikzcd}
& \lim_{\to i \in I} M_i & \\
& \lim_{\to i \in J} M_i \arrow[u, dotted, "\iota"] & \\
M_i \arrow[ruu, "\varphi_i^I"] \arrow[ru, "\varphi_i^J"] \arrow[rr, "\varphi_{ij}"'] & & M_j \arrow[luu, "\varphi_j^I"'] \arrow[lu, "\varphi_j^J"']
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 16.0.16. $J \subseteq I$ kofinal, $(M_i, \varphi_{ij})_I$ direktes System von A-Moduln
Dann ist der natürliche Homomorphismus

$$\iota : \lim_{\to i \in I} M_i \longrightarrow \lim_{\to i \in I} M_i$$

ein Isomorphismus.

Definition 16.0.17. Ein über I indiziertes **projektives System** von A-Moduln besteht aus

- eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von A-Moduln
- einer Familie $(\varphi_{ij})_{i,j \in I, i \leq j}$ von A-Modulhomomorphismen $\varphi_{ij} : M_j \to M_i$ **(Übergangsabbildungen)**, sodass gilt:
  - $\varphi_{ij} = id_{M_i}$ für alle $i \in I$
  - $\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}$ für alle $i, j, k \in I$ mit $i \leq j \leq k$

Im Folgenden schreiben wir dafür kurz $(M_i, \varphi_{ij})_I$

Beispiel 16.0.18.
(a) $I = \mathbb{N}$ mit $\leq$, M A-Modul, $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ Folge von Untermoduln von M, $\varphi_{ij} : M_j \hookrightarrow M_i$ Inklusion für $i \leq j$.
Dies liefert ein projektives System von A-Moduln.
(b) M A-Modul, I Menge von Untermoduln von M, die gewichtet bzgl. "$\supseteq$" sei.
Setze $M_i = i$. Dann ist $(M_i)_{i \in I}$ ein projektives System mit den Inklusionen als Übergangsabbildung.
(c) $I = \mathbb{N}$ mit $''|''$-Halbordnung, $M_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$, $\varphi_{ij} : \mathbb{Z}/j\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$, $a + j\mathbb{Z} \mapsto a + i\mathbb{Z}$ für $i|j$ liefert ein projektives System von $\mathbb{Z}$-Moduln

(d) $I = \mathbb{N}$ mit "$\leq$", p Primzahl, $M_i = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$, $\varphi_{ij} : \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$, $a + p^j\mathbb{Z} \mapsto a + p^i\mathbb{Z}$ für $i \leq j$ liefert ein projektives System von $\mathbb{Z}$-Moduln

Bemerkung 16.0.19. Ein Homomorphismus vom projektiven System $(M_i, \varphi_{ij}^M)_I$ ins projektive System $(N_i, \varphi_{ij}^N)_I$ ist eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ von A-Modulhomomorphismen $f_i : M_i \to N_i$, sodass $\varphi_{ij}^N \circ f_j = f_i \circ \varphi_{ij}^M$ für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$:

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "f_i"] & N_i \\
M_j \arrow[u, "\varphi_{ij}^M"'] \arrow[r, "f_j"'] & N_j \arrow[u, "\varphi_{ij}^N"']
\end{tikzcd}$$

Die über I indizierten projektiven System von A-Moduln bilden zusammen mit obgigen Homomorphismus eine abelsche Kategorie (alles komponentenweise definiert).
Bezeichnungen: $I - Pro - A - Mod$

Beispiel 16.0.20. Ein **projektiver Limes** des projektiven Systems $(M_i, \varphi_{ij})_I$ von A-Moduln ist ein A-Modul M zusammen mit einer Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ von A-Modulhomomorphismen $\varphi_i : M \to M_i$, sodass $\varphi_i = \varphi_{ij} \circ \varphi_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ ist, sodass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:
Für jeden A-Modul N und jede Familie $(\psi_i)_{i\in I}$ von A-Modulhomomorphismen $\psi_i : N \to M_i$ mit $\psi_i = \varphi_{ij} \circ \psi_j$ für alle $i \leq j$ existiert ein eindeutig bestimmter A-Modulhomomorphismus $\psi : N \to M$ mit $\psi_i = \varphi_i \circ \psi$ für alle $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[ddl, "\psi_i"'] \arrow[d, dotted, "\psi"] \arrow[ddr, "\psi_j"] & \\
 & M \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[dr, "\varphi_j"] & \\
M_i & & M_j \arrow[ll, "\varphi_{ij}"]
\end{tikzcd}$$

Satz 16.0.21. $(M_i, \varphi_{ij})_I$ projektives System von A-Moduln. Dann gilt:
Setzt man

$$M := \{(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i | \varphi_{ij}(m_j) = m_i \text{ für alle } i \leq j\},$$
$$\varphi_i : M \to M_i, (m_j)_{j\in I} \mapsto m_i$$

dann ist $(M, (\varphi_i)_{i\in I})$ ein projektiver Limes von $(M_i, \varphi_{ij})_I$.
Ist $(M', (\varphi'_i)_{i\in I})$ ein weiterer projektiver Limes des obigen Systems, dann existiert ein eindeutig besimmter Isomorphismus $\gamma : M' \to M$ mit $\varphi \circ \gamma = \varphi'_i$ für alle $i \in I$.
Notation: $M = \lim\limits_{\longleftarrow i\in I} M_i$

Beispiel 16.0.22. (vgl. Bsp 16.18)
(a) $M \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ mit Inklusionen als Übergangsabbildung

$\Rightarrow \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} M_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_i \subseteq M$ (mit $\varphi_i : \bigcap_{i\in I} M_i \hookrightarrow M_i$ Inklusionen)

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[dl, "\psi_i"'] \arrow[dr, "\psi_j"] \arrow[d, dotted] & \\
 & \bigcap_{i\in I} M_i \arrow[dl, hook] \arrow[dr, hook] & \\
M_i & & M_j \arrow[ll, hook']
\end{tikzcd}$$

alternativ: $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_i \longrightarrow \{(m_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} M_i | m_j = m_i \text{ für alle } i \leq j\}$

$m \longmapsto (m)_{i\in\mathbb{N}}$

(b) $(M_i)_{i\in I}$ bzgl. "$\supseteq$" gerichtete Familie von Untermoduln von M, indiziert über sich selbst

$\Rightarrow \varprojlim_{i\in I} M_i = \bigcap_{i\in I} M_i$

(c) $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ bezeichnet man mit $\hat{\mathbb{Z}}$

(d) $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ bezeichnet man mit $\mathbb{Z}_p$

Bemerkung 16.0.23. $(f_i)_{i\in I} : (M_i, \varphi_{ij}^M)_I \longrightarrow (N_i, \varphi_{ij}^N)_I$ Homomorphismus projektiver Systeme von A-Moduln. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus.

$$\varprojlim_{i\in I} f_i : \varprojlim_{i\in I} M_i \longrightarrow \varprojlim_{i\in I} N_i$$

mit $\varphi_i^N \circ \varprojlim_{i\in I} f_i = f_i \circ \varphi_i^M$ für alle $i \in I$ (wobei φ_i^N bzw. φ_i^M die Strukturmorphismen zwischen $\varprojlim N_i$ bzw. $\varprojlim M_i$ sind):

$$\begin{tikzcd}
\lim \varprojlim_{i\in I} M_i \arrow[r, "\varprojlim f_i"'] \arrow[d, "\varphi_i^M"'] & \varprojlim_{i\in I} N_i \arrow[d, "\varphi_i^N"'] \\
M_i \arrow[r, "f_i"'] & N_i
\end{tikzcd}$$

Explizit: $(\varprojlim)((m_i)_{i\in I}) = (f_i(m_i))_{i\in I}$

Folgerung 16.0.24.

$\lim \varprojlim_{i\in I} - : I - Pro - A - Mod \longrightarrow A$-Mod ist ein additiver Funktor

Satz 16.0.25. Der Funktor $\varprojlim_{i\in I} - : I - Pro - A - Mod \longrightarrow A$-Mod ist linksexakt.

Anmerkung: $\varprojlim_{i\in I}$ − ist im Allgemeinen nicht rechtsexakt.

Beispiel 16.0.26. Wir betraachten die exakte Folge projektiver Systeme von $\mathbb{Z}$-Moduln über $I = \mathbb{N}$:

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}, \cdot p)_{\mathbb{N}} \overset{(\cdot p^n)_{n\in\mathbb{N}}}{\longrightarrow} (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})_{\mathbb{N}} \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, Projektionsabbildung) \longrightarrow 0$$

$$\begin{tikzcd}
n+1: & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p^{n+1}"] \arrow[d, "\cdot p"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\text{proj.}"] \arrow[d, "id_{\mathbb{Z}}"] & \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\text{proj}"] & 0 \\
n: & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p^n"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\text{proj.}"'] & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Das projektive System $(\mathbb{Z}, \cdot p)_{\mathbb{N}}$ ist via

$$\begin{tikzcd}
n+1 & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p^{n+1}"] \arrow[d, "\cdot p"'] & p^{n+1}\mathbb{Z} \arrow[d, hook] \\
n & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p^n"'] & p^n\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

isomorph zum System $p\mathbb{Z} \supseteq p^2\mathbb{Z} \supseteq \dots$ von $\mathbb{Z}$-Untermoduln von $\mathbb{Z}$, d.h. projektiver Limes ist isomorph zu $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} p^n\mathbb{Z} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} p^n\mathbb{Z} = 0$
Erhalte im projektiven Limes exakte Folge

$$0 \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_p \quad \text{mit } f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p, \quad x \mapsto (x + p^n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$$

f ist nicht surjektiv: Es existiert kein $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv 1 + p \dots + p^{n-1} (mod p^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $(p \neq 2)$
(alternativ: $\mathbb{Z}_p$ überabzählbar).

Definition 16.0.27. $(M_i, \varphi_{ij})_{\mathbb{N}}$ (bzgl. "$\leq$") projektives System von A-Moduln
Das System erfüllt die **Mittag-Leffler-Bedingung** (ML) $\Leftrightarrow$ Für jedes $i \in \mathbb{N}$ wird die Folge

$$M_i = \varphi_{ii}(M_i) \supseteq \varphi_{i,i+1}(M_{i+1}) \supseteq \varphi_{i,i+2}(M_{i+2}) \supseteq \dots$$

stationär

Anmerkung: Sind die Homomorphismen φ_{ij} alle surjektiv oder sind alle M_i endlich, so ist (ML) erfüllt.
Das System $(\mathbb{Z}, \cdot p)$ von der linken Seite der Folge in Bsp. 16.0.26 erfüllt (ML) nicht:

$$\mathbb{Z} \supseteq p\mathbb{Z} \supseteq p^2\mathbb{Z} \supseteq \dots$$

Bemerkung 16.0.28.
$0 \longrightarrow (K_i, \varphi_{ij}^K)_{\mathbb{N}} \xrightarrow{(f_i)_{i\in\mathbb{N}}} (M_i, \varphi_{ij}^M)_{\mathbb{N}} \xrightarrow{(g_i)_{i\in\mathbb{N}}} (N_i, \varphi_{ii}^N)_{\mathbb{N}} \longrightarrow 0$ exakte Folge in $\mathbb{N} - Pro - A - Mod$
$(K_i, \varphi_{ij}^K)_{\mathbb{N}}$ erfülle (ML). Dann ist die Folge

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} K_i \longrightarrow \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} M_i \longrightarrow \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} N_i \longrightarrow 0$$

exakt.

Bemerkung 16.0.29. $J \subseteq I$ kofinal, $(M_i, \varphi_{ij})_I$ projektives System von A-Moduln.
Dann ist der natürlich Homomorphismus

$$\epsilon: \varprojlim_{i\in I} M_i \longrightarrow \varprojlim_{i\in J} \quad , \quad (m_i)_{i\in I} \longmapsto (m_j)_{j\in J}$$

ein Isomorphismus.

17. Diskrete Bewertungsringe

Definition 17.0.1. K Körper, $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$
v heißt **diskrete Bewertung** auf K, wenn gilt:
(DB1) $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$
(DB2) $v(xy) = v(x) + v(y)$
(DB3) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$
für alle $x, y \in K$.
In diesem Fall heißt v **triviale Bewertung** $\Leftrightarrow v(K) = \{0, \infty\}$
normierte Bewertung $\Leftrightarrow$ v surjektiv
$\underset{v(x^n)=nv(x)}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein $x \in K$ mit $v(x) = 1$

Anmerkung: $v(K^*)$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$, denn $v|_{K^*} : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist Gruppenhomomorphismus
Somit $v(K^*) = m\mathbb{Z}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Es gilt dann:

- v trivial $\Leftrightarrow m = 0$
- Ist v nichttrivial, so ist durch $v' : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{m} v(x), & \text{falls} x \neq 0 \\ \infty, & \text{falls} x = 0 \end{cases}$
  eine normierte diskrete Bewertung gegeben.

Beispiel 17.0.2. A faktoriell, p Primelement in A.
Jedes $x \in Quot(A)$, $x \neq 0$, lässt sich eindeutig schreiben als

$$x = p^r \frac{a}{b} \qquad \text{mit } p \nmid a, p \nmid b, r \in \mathbb{Z}$$

Setze $v_p(x) := r$, $v_p(0) := \infty$, dann ist v_p eine normierte diskrete Bewertung auf $Quot(A)$, denn:

- (DB1), (DB2) klar
- (DB3): Seien $x, y \in K$. Falls $x = 0$ oder $y = 0$, dann (DB3) klar
  Falls $x, y \neq 0$, dann $x = p^r \frac{a}{b}$, $y = p^s \frac{c}{d}$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$, $p \nmid a, p \nmid b, p \nmid c, p \nmid d$, OE $r \geq s$
  $\Rightarrow x + y = p^r \frac{a}{b} + p^s \frac{c}{d} = p^s(p^{r-s} \frac{a}{b} + \frac{c}{d}) = p^s(\frac{p^{r-s}ad+bc}{bd})$
  $\Rightarrow v_p(x+y) = \underbrace{v_p(p^s)}_{=s} + \underbrace{v_p(\frac{p^{r-s}ad+bc}{bd})}_{\geq 0} \geq s$
- v_p normiert wegen $v_p(p) = 1$.

Satz 17.0.3. K Körpe, v diskrete Bewertung auf K. Dann gilt:
(a) $0_v := \{x \in K | v(x) \geq 0\}$ ist ein nullteilerfreier Ring mit $Quot(0_V) = K$
(b) $O_v^* := \{x \in K | v(x) = 0\}$
(c) 0_v ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m}_v := \{x \in K | v(x) > 0\}$$

(d) 0_v ist ein Hauptidealring
(e) 0_v ist ein Körper $\Leftrightarrow$ v ist trivial
(f) Ist v normiert, dann gilt:

$$p \in 0_v \text{ ist Primelement in } 0_v \Leftrightarrow v(p) = 1$$

Die Primelemente von 0_v sind alle zueinander assoziiert, jedes Primelement erzeugt $\mathfrak{m}_v$.

Definition 17.0.4. A heißt **diskreter Bewertungsring** (DBR) $\Leftrightarrow$ A ist ein lokaler HIR, der kein Körper ist.

Satz 17.0.5. A DBR, p Primelement von A. Dann gilt:
(a) Jedes Element $x \in Quot(A)$, $x \neq 0$, lässt sich eindeutig darstellen als

$$x = up^n$$

mit $u \in A^*$, $n \in \mathbb{Z}$. Hierbei ist n unabhängig von der Wahl von p
(b) Die Abbildung

$$v = v_A : Quot(A) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, x \mapsto \begin{cases} u, \text{ falls } x = up^n, u \in A^* \\ \infty, \text{ falls } x = 0 \end{cases}$$

ist eine normierte diskrete Bewertung auf $Quot(A)$ mit $0_v = A$.

Folgerung 17.0.6. K Körper. Dann sind die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} \{\text{normierte diskrete Bewertungen } v \text{ auf } K\} & \longrightarrow & \{\text{Unterringe } A \text{ von } K | A \text{ ist DBR mit Quot(a) = K}\} \\ & \longleftarrow & \\ v & \longmapsto & 0_v \\ v_A & \longleftarrow\!\shortmid & A \end{array}$$

bijektiv und invers zueinander

Bemerkung 17.0.7. A lokal, noethersch, nullteilerfrei, $\dim(A) = 1$, $\mathfrak{m}$ maximales Ideal von A, $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{a}$.

Satz 17.0.8. A noethersch, lokal, nullteilerfrei mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$.
Dann sind äquivalent:
(i) A ist ein DBR
(ii) $\dim(A) = 1$ und A ist normal
(iii) $\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal $\neq (0)$
(iv) A ist faktoriell und besitzt bis auf Assoziiertheit genau ein Primelement.