ABHANDLUNGEN DER DEUTSCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

Klasse für Mathematik und allgemeine Naturwissenschaften
Jahrgang 1950 Nr. 6

DER LEHRBRIEF ÜBER DEN KREISUMFANG

(AR-RISĀLA AL-MUḤĪṬĪYA)

VON

ĞAMŠĪD B. MAS'ŪD AL-KĀŠĪ

ÜBERSETZT UND ERLÄUTERT

VON

P. LUCKEY†

HERAUSGEGEBEN VON A. SIGGEL, MAINZ

1953

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

Inhalt

Vorwort des Herausgebers

Die Arbeit Dr. LUCKEYs zum „Lehrbrief über den Kreisumfang" des Ġīyāṯ ad-Dīn al-Kāšī war schon im Mai 1949 von der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin für die Abhandlungen angenommen worden. Die ersten Besprechungen zwischen ihm und mir über die Ausführung der Arbeit im einzelnen hatten stattgefunden, als Ende Juli 1949 die Nachricht von seinem Tode eintraf. So blieb mir wie bei seiner Arbeit über den „Schlüssel des Rechnens" von al-Kāšī die Aufgabe vorbehalten, die Herausgabe zu besorgen. Unerledigt geblieben war die Frage, ob und wie der arabische Text herausgegeben werden könne. Herr Dr. LUCKEY hatte keine Textausgabe beabsichtigt. Die Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin jedoch legte großen Wert darauf, entweder eine Photokopie der benutzten Handschrift oder eine nach dem vorliegenden Text emendierte Ausgabe beizugeben. Das Istanbuler Original stand nicht mehr zur Verfügung. Die Wiedergabe der in Berlin aufbewahrten Photokopien war so wenig scharf, daß sie sich drucktechnisch nicht verwerten ließ. So blieb mir nichts anderes übrig, als die von Dr. LUCKEY für seine Arbeit angefertigte, sehr sorgfältige Abschrift einer Textausgabe zugrunde zu legen und die Photokopien mit heranzuziehen.

Wie bei der Herausgabe der LUCKEYschen Arbeit über den „Schlüssel des Rechnens" des al-Kāšī, die inzwischen seitens der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft veröffentlicht ist, wird in Rücksicht darauf, daß der Verfasser nicht mehr gefragt werden kann, auf Änderungen möglichst verzichtet. Die Anlage, die der Verfasser der Arbeit gegeben hat, weicht von der bei der Herausgabe von orientalischen Handschriften üblichen ab; daher möchte ich einige dieser Besonderheiten beschreiben und die Zusätze angeben, die ich vornehmen mußte.

Der arabische Text folgt hinter dem Abschnitt „Erläuterungen". Er bietet nicht sämtliche Stücke der Originalhandschrift, sondern nur die Teile, die von Dr. LUCKEY übersetzt sind. Auf die zahlreichen arabischen Tafeln, welche die Zwischenrechnungen enthalten, konnte verzichtet werden aus denselben Gründen, aus denen heraus Dr. LUCKEY auch innerhalb der Übersetzung nur eine Übersicht der Ergebnisse dieser Tafeln gebracht hat. Die Arbeit beginnt also, wie es Dr. LUCKEY vorgesehen hatte, mit der „Übersetzung des Lehrbriefs über den Kreisumfang", während die „Bemerkungen über die Handschrift, den Text und die Übersetzung", die der Orientalist meist an erster Stelle sucht, als erster Abschnitt unter II, „Erläuterungen", zu finden sind. Die Signatur der Originalhandschrift im Armeemuseum zu Istanbul wurde von mir zugesetzt.

Um das Aufsuchen der mathemathischen Tafeln und der Figuren zu erleichtern, bin ich von dem Verfahren Dr. LUCKEYs, jedesmal auf die betreffende Seite zu verweisen, abgegangen und habe statt dessen in der Rubrik „Abkürzungen und Bezeichnungen" besondere Zusammenstellungen über die Unterbringung der Tafeln und der Figuren gegeben.

Bei Verweisungen auf Ziffern in den Tafeln habe ich für die wagerechten Rubriken der Tafeln den Ausdruck „Reihe" gewählt; die Reihe wird innerhalb der Tafel gezählt.

Aus drucktechnischen Gründen konnten leider die Ziffern 0 und 5 in den dezimalen Tafeln nicht in der Form wiedergegeben werden, wie sie sich bei al-Kāšī vorfinden. Das

Original gibt die 0 ähnlich unserer 0 wieder und die 5 mit dem Zeichen ꞡ. Vorliegende Arbeit wählt dafür die heutzutage im Orient üblichen Zeichen für 0 und 5. Außerordentlich bedauerlich ist es, daß sich nach den vorhandenen Photokopien keine Probeseite anfertigen ließ, die hätte beigegeben werden können.

Die von Dr. LUCKEY gewählten Termini technici deutscher Sprache für die arabischen mathematischen Fachausdrücke habe ich nicht geändert, obwohl sie bisweilen nicht schön sind. Dazu gehört in erster Linie die wörtliche Übersetzung von marfūʿ mit „Erhöhtes", da dies Wort sich ohne Bedenken einwandfrei mit „Potenz" hätte wiedergeben lassen. Klassische Philologen werden sicher auch an einigen Bildungen für die Brüche im Sexagesimalsystem Anstoß nehmen.

Das große Verdienst, das sich Dr. LUCKEY mit der Arbeit erworben hat, läßt sich zum Teil schon aus dem Vorwort erkennen, das gleichzeitig eine Gesamtübersicht über die Stellung al-Kāšīs in der Geschichte der islamischen Mathematik gibt. Eindringlicher wird es klar beim näheren Studium seiner Arbeit. Dabei sehen wir, daß die islamische Mathematik des ersten Viertels des XV. Jahrhunderts in der geschickten Behandlung arithmetischer Probleme dem damaligen Abendlande noch weit voraus war, obwohl die Blüte der islamischen Kultur ihren Höhepunkt längst überschritten hatte. Die Berechnung der Transzendenten π durch al-Kāšī ist bezüglich der Zahl der Stellen erst ein Jahrhundert später durch LUDOLF VAN CEULEN übertroffen worden, nicht aber in der Methodik der Berechnung, die bis heute als originell angesprochen werden muß.

Dr. LUCKEYs letzte Arbeiten zeigen, welchen Verlust die Forschung auf dem Gebiete der Geschichte der Mathematik, besonders der des islamischen Mittelalters erlitten hat.

Bei der Herausgabe der Arbeit hatte ich wertvolle Hilfe von Herrn Prof. Dr. R. HARTMANN, Berlin und von Herrn Dr. GIESECKE, Berlin, bei der Korrektur; letzterer hat auch die Tafeln 3b und 4a des arabischen Textes ausgeschrieben. Ihnen spreche ich hiermit meinen besten Dank aus.

A. Siggel, Mainz

Abkürzungen und Bezeichnungen

K. = al-Kāšī

Hs = Handschrift

3a (am Rande der Übersetzung) = Beginn von Blatt *3a* der Hs

18a10 = Blatt *18a*, Zeile *10* der Hs

In eckige Klammern [ ] sind die Übersetzungen von Wörtern eingeschlossen, die in der Hs vermutlich infolge eines Irrtums ausgefallen sind, ferner kleine Ergänzungen zur Verdeutlichung.

Winklige Klammern ⟨ ⟩ schließen die Übersetzung von Worten ein, die in der Hs vermutlich zu streichen sind.

Runde Klammern ( ) enthalten kurze Erläuterungen des Übersetzers.

Die kursiven Ziffern *1 2 3 4 5 6 7 8 9 0* in der Übersetzung entsprechen den „indischen" Ziffern ١ ٢ ٣ ۴ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ der Hs.

Die Buchstaben *a b g d h w z ḥ ṭ k l* der Figuren sind die Übersetzungen der Zeichen ا ب ج د ه و ز ح ط ك ل der Hs. (Die letzteren entsprechen den griechischen Buchstaben $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$ Ϝ $\zeta\ \eta\ \vartheta\ \varkappa\ \lambda$.)

In einem Kreise mit dem Durchmesser $d = 2r$ ist für einen Bogen a mit dem Zentriwinkel α

der Sinus $\quad \operatorname{Sin} a = r \sin \alpha,$

die Sehne $\quad \operatorname{Chord} a = 2 \operatorname{Sin} \frac{a}{2} = 2r \sin \frac{\alpha}{2}.$

Tafeln

	Seite		Seite
3a	7	18b	19
3b	12	19a	23/24
4a	13	19b	25/26
10b	14	20a	21
17a	15	20b	22
17b	16	21a	26/27
18a	17/18	21b	29
		22a	30/31

Figuren

	Seite
1a u. 1b	4
2	5
3	27
4	44
5	51

I.

ÜBERSETZUNG

DES

LEHRBRIEFS ÜBER DEN KREISUMFANG

Lob sei Gott, der da weiß das Verhältnis des Durchmessers zum Umfang, der da kennt *1b*
die Größe alles Zusammengesetzten und Einfachen, dem Schöpfer der Erde und der Himmel, dem Erschaffer des Lichtes in den Finsternissen! Segen und Heil über Muḥammad, den Auserwählten, den Mittelpunkt des Kreises der Prophetie und den Umfang der Durchmesser der rechten Leitung und des Rechts, und über seine Familie, die Guten, und seine Genossen, die Reinen!

Zur Sache: Es spricht das Geschöpf Gottes, des Erhabenen, das am meisten seiner Ver- 3
zeihung bedarf, Ǧamšīd b. Mas'ūd b. Maḥmūd, der Arzt, al-Kāšānī, zubenannt Ġiyāṯ, — möge Gott ihm sein Schicksal verschönern! —:

Archimedes bewies, daß der Umfang das Dreifache des Durchmessers um weniger 4
als ein Siebentel und um mehr als zehn Einundsiebzigstel des Durchmessers übertrifft. Die Spanne zwischen diesen beiden [Brüchen] ist also ein Vierhundertsiebenundneunzigstel. Mithin ist bei einem Kreise, dessen Durchmesser vierhundertsiebenundneunzig Ellen oder Ruten oder Farsang beträgt, die Größe seines Umfangs unbekannt und unsicher innerhalb *einer* Elle oder *einer* Rute oder *eines* Farsang, und bei dem größten Kreis, der auf der Erdkugel liegt, ist sie unbekannt innerhalb fünf Farsang, weil sein Durchmesser annähernd das Fünffache jenes Betrages in Farsang ist. Beim Gürtel des Tierkreises (der Ekliptik) ist sie unbekannt innerhalb von weit mehr als hunderttausend Farsang. Diese Beträge sind [schon] bei den Umfängen übermäßig groß, und wie wird es [erst] beim Flächeninhalt sein! Er (Archimedes) bestimmte nämlich den Umfang des dem Kreis einbeschriebenen Sechsundneunzigecks, der kleiner als der Umfang dieses Kreises ist, weil jede seiner Seiten kleiner als der Bogen ist, dessen Sehne sie ist, so daß alle Seiten zusammen kleiner als der ihm umbeschriebene Umfang sind; ferner [bestimmte er] den Umfang eines anderen, dem Kreis umbeschriebenen Vielecks, das dem ersten ähnlich ist, und bewies im ersten Lehrsatz des ersten Buchs seiner Schrift, daß er größer als der Umfang jenes Kreises ist, wobei die Spanne zwischen beiden [Vielecksumfängen] das ist, was [oben] angegeben wurde.

Abul-Wafā' al-Būzağānī erhielt durch eine Näherungsrechnung die Sehne eines halben 12
Dreihundertsechzigstels des Umfangs (Chord $\frac{1}{2}°$) in den Teilen, in denen der Durchmesser 120 beträgt, und vervielfachte dies mit siebenhundertzwanzig. [So] erhielt er den Umfang des dem Kreis einbeschriebenen Vielecks. Er ermittelte ferner den Umfang des ihm (dem Kreise) umbeschriebenen Vielecks, das ihm (dem einbeschriebenen) ähnlich ist, und behauptete:
Ist der Durchmesser hundertzwanzig, so ist der Umfang 376 und ein Bruch, der größer 15
als 59 10 59 Terzen und kleiner als 59 23 54 12 Quarten ist. Die Spanne zwischen beiden Beträgen ist 12 55 12 Quarten. Das ist für den größten auf der Erde liegenden Kreis annähernd tausend Ellen. Dabei beging er bei der Größe der Sehne der Hälfte eines Teils (Chord $\frac{1}{2}°$) einen Fehler, weil er sie zu 0 31 24 55 54 55 ansetzte. Das ist nicht richtig. Das Richtige ist 0 31 24 56 58 36, wofür wir den Nachweis beibringen werden.

Abur-Raiḥān al-Bīrūnī berechnete die Sehne von zwei Dreihundertsechzigsteln des Umfangs (Chord 2°). Er erhielt den Umfang des dem Kreise einbeschriebenen Einhundertachtzigecks zu 6 16 59 10 48 0 und den Umfang des ihm ähnlichen umbeschriebenen zu 6 17 1 58 19 6, nahm die Hälfte der Summe von beiden [Umfängen] als Umfang des Kreises und verwandelte ihn aus dem Nenner des Bruches der [Sexagesimal]ziffern unter der An-

20 nahme, daß der Durchmesser eins ist, in indische Ziffern. Das macht bei einem Kreise, der gleich dem größten auf der Erde liegenden Kreise ist, annähernd einen Farsang aus. Dabei beging er bei der Sehne von zwei Teilen (Chord 2°) einen Fehler, weil er sie zu 2 5 39 43 36 in Rechnung zog, während es 2 5 39 26 22 sein muß. Dagegen setzte er in der Sinustafel in seinem Masʿūdī'schen Kanon den Sinus von einem Teil, der die Hälfte der Sehne von zwei Teilen ist (Sin 1° = ½ Chord 2°), zu 1 2 49 43 an, was richtig ist, während er bei dem Doppelten hiervon einen Fehler beging.

22 Da diese Rechnungen irrig sind, wollen wir den Umfang des Kreises in den Teilen, in denen der Durchmesser bekannt ist, soweit ermitteln, daß wir sicher wissen, daß in einem Kreise, dessen Durchmesser gleich sechshunderttausend mal dem Durchmesser der Erde ist, die Spanne zwischen ihm (dem ermittelten Umfang) und dem wahren nicht ein einziges Haar ausmacht, das ein Sechstel der Breite eines mittleren Gerstenkorns ist, so daß sie
2a (die Spanne) bei einem [Kreise], der kleiner als jener ist, nichts ausmacht.

1 So faßte ich denn diesen Lehrbrief ab, der die Ermittlung hiervon enthält. Ich nenne ihn den „Lehrbrief über den Umfang" und biete ihn in zehn Abschnitten und einem Schluß dar, wobei ich Gott den Allmächtigen und Freigebigen um seine Hilfe bitte. Er ist der, der zum Weg des Richtigen leitet.

2

Erster Abschnitt

Bestimmung der Sehne eines Bogens, der die Summe eines Bogens von bekannter Sehne und der Hälfte seiner Ergänzung zum Halbkreis ist

Ich behaupte: Die Fläche (d. h. das Rechteck, das Produkt) der Summe des Durchmessers und der Sehne jedes Bogens, der kleiner als die Hälfte des Umfangs ist, mit der Hälfte des Durchmessers ist gleich dem Quadrat der Sehne eines Bogens, der gleich der Summe des ersten Bogens und der Hälfte seiner Ergänzung zum Halbkreis ist.

5 Zum Beweise zeichnen wir über der Linie *ab* den Halbkreis *agb* mit dem Mittelpunkt *h*, ziehen beliebig die Sehne *ag*, hälften seine (d. h. des Bogens *ag*) Ergänzung *bg* zum Halbkreis im Punkte *d* und ziehen *ad*.

6 Dann [lautet] die Behauptung: Die Fläche der Hälfte des Durchmessers mit der Summe von *ab* und *ag* ist gleich dem Quadrat von *ad*. (Hierzu vgl. Fig. 1a und 1b.)

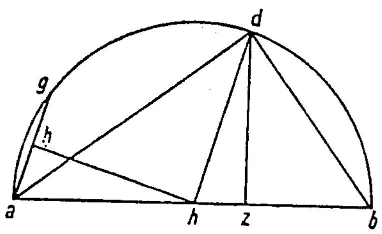

Fig. 1a

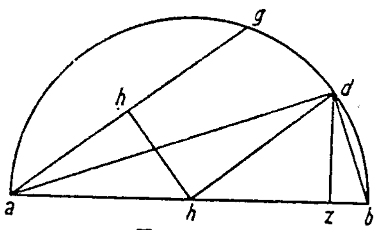

Fig. 1b

7 Beweis: Wir ziehen *bd*. Dann ist der Winkel *adb* ein rechter nach dem dreißigsten Lehrsatz des dritten [Buchs] der Elemente. Hierauf fällen wir vom Punkte *d* das Lot *dz* auf die Linie *ab*. Dann entstehen die beiden Dreiecke *dbz* und *daz*, die dem Dreieck *adb* ähnlich
10 sind nach dem achten Lehrsatz des sechsten [Buchs] der Elemente. Also ist das Verhältnis des Durchmessers *ab* zu *ad* gleich dem Verhältnis von *ad* zu *az*. Nach dem neunzehnten

Lehrsatz des siebenten [Buchs] der Elemente ist also die Fläche aus dem Durchmesser *ab* mit *az* gleich dem Quadrat von *ad*. Hierauf fällen wir vom Punkte *h* das Lot *hḥ* auf *ag*. Dann ist der Punkt *ḥ* die Mitte von *ag* nach dem dritten Lehrsatz des dritten [Buchs] der Elemente. Wir ziehen *hd*. Weil nun der Umfangswinkel *bag* vom Betrage der Hälfte des Bogens *gb* ist, die der Betrag des Winkels *bhd* ist, so sind die beiden Winkel [*haḥ* und *dhz*] einander gleich; also sind die beiden Dreiecke *aḥh* und *hzd* einander gleich, da die beiden Winkel *ḥ* und *z* rechte und die beiden Winkel *h* und *a*, sowie die beiden Seiten *ah* und *hd* 15
einander gleich sind. Also ist die Seite *hz* gleich der Seite *aḥ*, die die Hälfte von *ag* ist, und es ist die Fläche von *az*, d. h. der Summe der Hälfte des Durchmessers und *hz*, das aber die Hälfte von *ag* ist, mit dem Durchmesser gleich dem Quadrat von *ad*; und weil die Fläche einer von zwei Linien mit der Hälfte der anderen gleich der Fläche der Hälfte der ersteren mit der ganzen anderen ist, so ist die Fläche der Summe des Durchmessers und des Doppelten von *hz*, d. i. der Summe des Durchmessers und *ag*, mit der Hälfte des Durchmessers gleich dem Quadrat von *ad*, und dies ist das, was wir [beweisen] wollten.

Ist also *ag* in den Teilen bekannt, in denen die Hälfte des Durchmessers sechzig ist, 18
fügen wir dazu den Durchmesser und erhöhen die Summe um eine [Sexagesimal]stelle, so ist das Ergebnis das Quadrat von *ad*.

Zweiter Abschnitt 19

Bestimmung des Umfangs irgendeines dem Kreise einbeschriebenen Vielecks und des Umfangs des diesem ähnlichen umbeschriebenen Vielecks

Wir zeichnen über dem Durchmesser *ab* den Halbkreis *agb* mit dem Mittelpunkt *h* und 20
nehmen *ag* als ein Sechstel des Umfangs an (Vgl. Fig. 2). Dann ist die Sehne *ag* gleich *ah*,

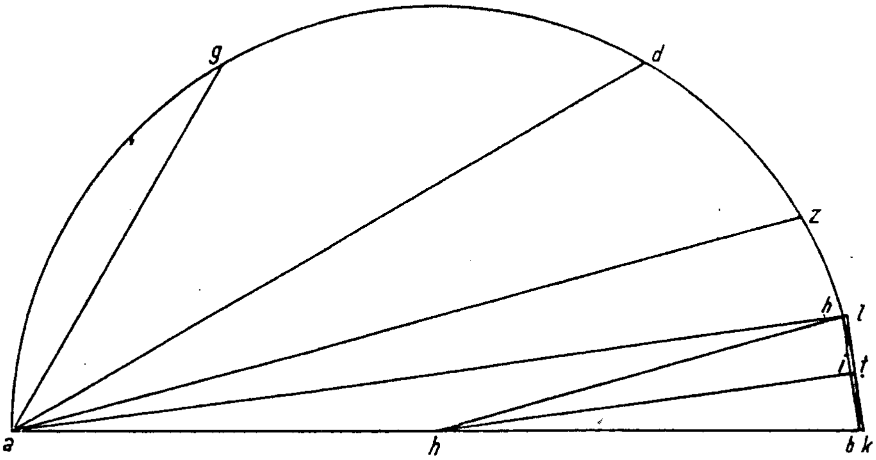

Fig. 2

der Hälfte des Durchmessers, nach dem fünfzehnten Lehrsatz des vierten [Buchs] der Elemente. Dann hälften wir *gb*, die Ergänzung von *ag* zum Halbkreis, in *d* und *db* in *z* und *zb* in *ḥ* und so [fort], so weit wir wollen. Nach dem, was wir im vorigen Abschnitt behandelten, wird dann aus *ag* [die Sehne] *ad* bekannt, hieraus wird *az* bekannt, hieraus wird *aḥ* bekannt, und so [fort], so weit wir wollen. Haben wir nun zum Beispiel *aḥ* erhalten und wollen die 2b

Sehne *bḥ* bestimmen, so ziehen wir das Quadrat von *aḥ* vom Quadrat des Durchmessers ab. Dann bleibt das Quadrat der Sehne *bḥ* übrig, weil der Winkel *aḥb* ein rechter ist nach dem dreißigsten Lehrsatz des dritten [Buchs] der Elemente, und so nach dem Lehrsatz der Braut
2 das Quadrat von *ab* gleich den beiden Quadraten von *aḥ* und *ḥb* ist. Dann hälften wir den Bogen *bḥ* in *ṭ* und ziehen *hṭ*. Dieses hälftet dann die Sehne in *i*. Wir legen im Punkte *ṭ* die Berührende *ṭl* an den Kreis, indem wir vom Punkte *ṭ* aus auf *ṭh* nach beiden Seiten die beiden Senkrechten *ṭk* und *ṭl* errichten, ziehen *hḥ* und verlängern [es] bis *l* und ebenso *hb* bis *k*. Dann ist *kl* parallel zu *bḥ*, und so wie *bḥ* eine Seite des dem Kreis einbeschriebenen
5 Vielecks ist, ist *kl* eine Seite des ihm umbeschriebenen und jenem ähnlichen Vielecks. Also sind die beiden Dreiecke *hkṭ* und *hlṭ* einander gleich und den beiden einander gleichen Dreiecken *hbi* und *hḥi* ähnlich. Also ist das Verhältnis von *hi* zu *hṭ*, der Hälfte des Durchmessers, gleich dem Verhältnis von *bi* zu *ṭk*, und das Verhältnis von *bḥ* zu *kl* ist ebenso groß. Also ist das Verhältnis von *hi* zu *iṭ*, dem Überschuß des Hintergliedes über das Vorderglied, gleich dem Verhältnis der Sehne *bḥ* zu dem Überschuß von *kl* über *bḥ*, und ebenso groß ist das Verhältnis zwischen allen Seiten (d. h. der Summe aller Seiten) des dem Kreis einbeschriebenen Vielecks, von dem eine Seite *bḥ* ist, und allen Überschüssen (d. h. der Summe aller Überschüsse) der Seiten des ihm umbeschriebenen Vielecks, von dem eine Seite *kl* ist, über die ersteren Seiten. *hi* ist die Hälfte von *aḥ*, weil die beiden Dreiecke *aḥb* und *hib* einander ähnlich sind, da die beiden Winkel *ḥ* und *i* rechte und folgende beiden Winkel einander gleich sind: *a*, der Umfangswinkel, den der Bogen *bḥ* unterspannt, und *h*,
10 der Mittelpunktswinkel, den die Hälfte des Bogens *bḥ* unterspannt, welche *bṭ* ist; *hb* ist die Hälfte von *ab*, also ist *hi* die Hälfte von *aḥ*. Wird also *hi* bekannt und *bḥ* bekannt und werden die genannten Verhältnisse bekannt, so werden also das dem Kreis einbeschriebene und das ihm umbeschriebene Vieleck bekannt, und dies ist das, was wir wollten.

11

Dritter Abschnitt

In wieviel Seiten wir den Umfang teilen und bis zu welcher [Sexagesimal]stelle wir bei der Rechnung die Genauigkeit treiben, um den Umfang derart herauszubekommen, daß es bei einem Kreis von der angegebenen Größe nicht ein Haar ausmacht

12 Wisse, daß bei einem Kreise, dessen Durchmesser sechshunderttausend mal so groß ist wie der Durchmesser der Erde, auch der Umfang sechshunderttausend mal so groß ist wie ihr Umfang. Also beträgt bei diesem Kreise

14–18

ein Grad	eintausendsechshundertsechsundsechzig und zwei drittel Erdumfänge
eine Minute	annähernd siebenundzwanzig und drei viertel ebensolche
eine Sekunde	annähernd dreitausendsiebenhundertvier Farsang, wobei der Umfang der Erde zu achttausend Farsang angenommen ist
eine Terze	annähernd zweiundsechzig Farsang
eine Quarte	annähernd ein Farsang und ein Drittel von einem zehntel [Farsang] ($\approx 1\frac{1}{30}$ Farsang)
eine Quinte	annähernd zweihundertsechs Ellen
eine Sexte	annähernd drei und eine drittel Elle
eine Septime	ein und ein drittel Finger, d. i. achtundvierzig Haar
eine Oktave	vier Fünftel der Dicke eines Haares von der Mähne des Pferdes, sogar noch weniger

Das ist so, wenn der Umfang dreihundertsechzig ist. Falls er dreihundertsiebenund- 13
siebzig [1]) und ein Bruch ist, so ist eine Oktave von ihm viel kleiner als vier Fünftel von der 15
Dicke eines Haars. Bestimmen wir also die Umfänge von zwei Vielecken derart, daß die Spanne zwischen den beiden Umfängen nicht eine einzige Oktave erreicht, so erreicht die Spanne zwischen beiden durchaus nicht ein einziges Haar, und auch erst recht nicht [diejenige] zwischen einem von beiden und dem wahren Umfang des Kreises.

Tafel 3 a

Wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl, beginnend mit dem Dreieck						
Zahl	fünfmal Erhöhtes	viermal Erhöhtes	dreimal Erhöhtes	zweimal Erhöhtes	einmal Erhöhtes	Seiten
0						3
1						6
2						12
3						24
4						48
5					1	36
6					3	12
7					6	24
8					12	48
9					25	36
10					51	12
11				1	42	24
12				3	24	48
13				6	49	36
14				13	39	12
15				27	18	24
16				54	36	48
17			1	49	13	36
18			3	38	27	12
19			7	16	54	24
20			14	33	48	48
21			29	7	37	36
22			58	15	15	12
23		1	56	30	30	24
24		3	53	1	0	48
25		7	46	2	1	36
26		15	32	4	3	12
27		31	4	8	6	24
28	1	2	8	16	12	48

Wiederholte Hälftung des Drittels des Umfangs													
Teile	Minuten	Sekunden	Terzen	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen
120													
60													
30													
15													
7	30												
3	45												
1	52	30											
0	56	15											
	28	7	30										
	14	3	45										
	7	1	52	30									
	3	30	56	15									
	1	45	28	7	30								
	0	52	44	3	45								
		26	22	1	52	30							
		13	11	0	56	15							
		6	35	30	28	7	30						
		3	17	45	14	3	45						
		1	38	52	37	1	52	30					
		0	49	26	18	30	56	15					
			24	43	9	15	28	7	30				
			12	21	34	37	44	3	45				
			6	10	47	18	52	1	52	30			
			3	5	23	39	26	0	56	15			
			1	32	41	49	43	0	28	7	30		
			0	46	20	54	51	30	14	3	45		
				23	10	27	25	45	7	1	52	30	
				11	35	13	42	52	33	30	56	15	
				5	47	36	51	26	16	45	28	7	30

Nachdem du nun weißt, daß das Verhältnis des inneren Vielecks zu dem Überschuß 19
des äußeren Vielecks über das innere gleich ist dem Verhältnis des Abstandes des Kreismittelpunktes von der Mitte der Seite zu seiner Ergänzung zur Hälfte des Durchmessers, d. h. zum Abstand der Mitte der Seite von der Mitte des Bogens, dessen Sehne die Seite ist, während er (dieser Abstand) sein Pfeil ist, und daß das Verhältnis der Hälfte des Durchmessers zum Umfang kleiner als ein Sechstel (1 : 6) ist um weniger als ein Drittel von einem

[1]) Hs: dreihundertsechsundsechzig; vgl. hierzu S. 55, Z. 8.

Siebentel davon (d. h. von $^1/_6$), müssen wir im Kreise ein Vieleck mit so vielen Seiten annehmen, daß das Verhältnis des Pfeils des Bogens jeder Seite zur Ergänzung des Pfeils zur Hälfte des Durchmessers kleiner als das Verhältnis des Sechstels einer Oktave zu eins ist um ein Drittel von einem Siebentel davon oder um mehr, nämlich acht Nonen oder [noch] kleiner, so daß die Sehne der Ergänzung des Bogens jeder Seite desselben hinter dem Durchmesser um weniger als sechzehn Nonen zurückbleibt, weil die genannte Sehne gleich dem Doppelten des genannten Abstandes ist. Dann ist der Überschuß des Quadrats des Durchmessers über ihr Quadrat kleiner als annähernd ihr (d. h. der 16 Nonen) Vierfaches, erhöht um eine Stelle, d. h. kleiner als eine Septime und vier Oktaven, so daß die Wurzel daraus, d. h. die Sehne jeder seiner Seiten (so!), [den Betrag von] sieben Quarten nicht überschreitet.

3a Hälften wir nun ein Drittel des Umfangs achtundzwanzigmal, so kommt ein Bogen heraus, der fünf Quarten und siebenundvierzig Quinten und einen Bruch in den Teilen be-
4 trägt, in denen der Umfang dreihundertsechzig Teile ist, wie das aus vorstehender Tafel
5 ersichtlich ist, und ohne allen Zweifel ist seine Sehne kleiner als sieben Quarten, weil die Sehne jedes Bogens unter der Voraussetzung, daß der Umfang dreihundertsechzig und der Durchmesser hundertzwanzig ist, den Bogen nicht um ein Drittel von einem Siebentel desselben übertrifft. Stellen wir nun in dem Kreise ein Vieleck her, von dem jene [Sehne]
10 eine seiner Seiten ist, so ist die Zahl seiner Seiten achthundertmillionen dreihundertfünfunddreißigtausend einhundertachtundsechzig, und ihre Erhöhtes (d. h. ihre Darstellung als ganze Sechzigerzahl) ist 1 2 8 16 12 48.

12 Da die erste (d. h. höchste) Stelle dieser Zahl eine fünfmal Erhöhte ist, müssen wir die
15 Größe einer einzigen Seite derart bestimmen, daß die Vernachlässigung der Brüche nicht eine einzige Einheit der dreizehnten Stelle ausmacht; denn wenn wir sie (die Seite) mit jener Zahl vervielfachen, so machen sie (die vernachlässigten Bruchstellen) beim Umfang nicht so viel aus, wie eine einzige Oktave, weil die Vervielfachung einer fünfmal Erhöhten mit einer Tredezime eine Oktave ergibt. Weil ferner die erste (d. h. höchste) Stelle des Betrages einer einzigen Seite kleiner als sieben Quarten ist, sein Ende bis zur dreizehnten [Stelle] reicht, und das Produkt von weniger als sieben Quarten mit einer Tredezime weniger als sieben an der siebzehnten Stelle ausmacht, so darf die Spanne (d. h. der Fehler) bei ihrem (der Seite) Quadrat jenen Betrag ($7 \cdot 60^{-17}$) nicht erreichen, und ebenso bei der zugehörigen Ergänzung, und ebenso bei der zugehörigen Erniedrigung um eine
20 Stelle, und so weiter bis zum Beginn der Rechnung. Bestimmen wir also die Sehnen so, wie wir in den beiden vorhergehenden Abschnitten angaben, bis der Umfang eines Vielecks herauskommt, dessen Seitenzahl 1 2 8 16 12 48 beträgt, und treiben wir bei der Rechnung die Genauigkeit bis zur achtzehnten Stelle, so kommt das Gewünschte heraus.

21 Vierter Abschnitt

3a, 21 Die Berechnungen

Wir fügen den Durchmesser 2 0 zur Seite 1 0 des Sechsecks; es kommt 3 0 heraus; dies erhöhen wir um eine Stelle; das gibt 3 0 0; daraus ziehen wir die Wurzel und fügen zu ihr 2 0; die Summe erhöhen wir um eine Stelle und ziehen daraus die Wurzel. In dieser Weise führen wir achtundzwanzig Berechnungen aus und gehen von einer Berechnung zur nächsten erst über, nachdem wir die Rechnung zwei- oder dreimal von vorne gemacht haben. Außerdem sichern wir uns durch die Waage der Rechnung, vervielfachen die heraus-

gekommene Wurzel mit sich selbst, rechnen es zwei- oder dreimal von vorne nach und fügen den Rest der Rechnung zu dem zweiten Ergebnis. [Dann wird] die Summe gleich der Zahl (d. h. dem Radikanden), wenn die Rechnung richtig ist. [Dies tun wir] zur Prüfung 25
und Sicherung ihrer Richtigkeit, damit nicht ein Versehen unterlaufe und sich in der Folge verbreite. Da es nun viele Ziffern sind, so gebrauchen wir nicht die Ziffern, deren Gebrauch unnötig ist. Das Verfahren der Wurzelausziehung und der Berechnung des Quadrats aus der Wurzel ist in dieser Art unsere eigene Erfindung, und dies ist das leichteste Verfahren bei diesem Gegenstand. Wir bringen in diesem Abschnitt die Tafeln der Berechnungen bei, damit das ein Muster für die Rechner und ein gebahnter Weg für diejenigen sei, die die Richtigkeit hiervon überprüfen wollen. Die Berechnungstafeln sind folgende: 28

Von den 28 Berechnungstafeln teile ich als Beispiele die erste, zweite, 15te und 28ste mit. Des Zusammenhangs wegen schicke ich diesen Beispielen die Überschriften aller 28 Tafeln voraus. Dazu gebe ich von jeder Wurzelausziehung K.s Ergebnis an, ferner seinen letzten Rest, d. i. den Rest, den er nach Bestimmung der vorletzten Stelle des Ergebnisses und Abziehung des zugehörigen Produktes erhielt. Die höchste Stelle jeder erhaltenen Wurzel ist einmal Erhöhtes, die letzte Oktodezimen. Die letzte Stelle des Restes ist bei der ersten Berechnung Oktodezimen, bei allen folgenden Undevizesen.

3b Erste Berechnung. Sie ergibt die Sehne des Drittels des Umfangs, d. i. die Sehne der Ergänzung des Sechstels [des Umfangs]. 6
Wurzel: 1 43 55 22 58 27 57 56 0 44 25 31 42 1 56 22 42 48 58 27
Rest: 3 16 27 Oktodezimen.

4a Zweite Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung der Hälfte des Sechstels des Umfangs. 12
Wurzel: 1 55 54 39 57 25 2 41 7[2]) 56 38 3 9 14 51 43 4 22 44 46.
Rest: 2 56 5 43 Nondezimen. Bei der Probe durch Vervielfachung 2 56 5 44.

4b Dritte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung des Viertels des Sechstels des Umfangs. 24
Wurzel: 1 58 58 24 10 48 24 30 46 47 22 13 4 44 26 38 36 37 48 27
Rest: 1 47 13 41.

5a Vierte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein Achtundvierzigstel des Umfangs ist. 48
Wurzel: 1 59 44 35 3 17 25 14 26 3 12 39 10 10 28 33 45 47 32 16
Rest: 1 4 48 21.

5b Fünfte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein Sechsundneunzigstel des Umfangs ist. 1 36
Wurzel: 1 59 56 8 42 6 26 35 40 40 17 55 44 14 58 19 34 54 29 34
Rest: 2 13 51 38.

6a Sechste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein Hundertzweiundneunzigstel des Umfangs ist. 3 12
Wurzel: 1 59 59 2 10 17 40 37 1 18 16 54 32 35 27 38 48 41 50 24
Rest: 1 35 28 39.

6b Siebente Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein Dreihundertvierundachtzigstel des Umfangs ist. 6 24
Wurzel: 1 59 59 45 32 33 32 54 1 54 51 41 6 50 27 35 53 38 54 49
Rest: 3 17 43 12.

7a Achte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein Siebenhundertachtundsechzigstel des Umfangs ist. 12 48
Wurzel: 1 59 59 56 23 8 19 57 33 17 31 8 29 4[3]) 41 15 7 13 12 11
Rest: 43 14 37.

---

[2]) Hs: 6. [3]) Hs: 17.

2

7b Neunte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein Tausendfünfhundertsechsunddreißigstel des Umfangs ist. 25 36
Wurzel: 1 59 59 59 5 47 4 47 8 29 50 15 57 23 28 51 40 19 11 12
Rest: 2 6 29 32.

8a Zehnte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein Dreitausendundzweiundsiebzigstel des Umfangs ist. 51 12
Wurzel: 1 59 59 59 46 26 46 11 1 11 51 41 51 14 21 59 25 0 45 19
Rest: 1 17 35 36.

8b Elfte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein Sechstausendeinhundertvierundvierzigstel des Umfangs ist. 1 42 24
Wurzel: 1 59 59 59 56 36 41 32 42 25 44 25 52 26 23 47 47 39 26 5
Rest: 19 26 38.

9a Zwölfte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 3 24 48-stel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 59 59 9 10 23 10 25 40 15 52 4 24 9 57 49 14 52
Rest: 3 28 54 22.

9b Dreizehnte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 6 49 36-stel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 59 59 47 17 35 47 35 44 42 3 15 53 31 50 58[4]) 28 25
Rest: 1 39 26 43.

10a Vierzehnte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 13 39 12-tel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 59 59 56 49 23 56 53 53 39 8 38 38 47 2 24 44 3
Rest: 11 1 49.

10b Fünfzehnte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 27 18 24-stel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 59 59 59 12 20 59 13 28 15 19 31 30 58 12 8 17 28
Rest: 1 51 11 42.

11a Sechzehnte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 54 36 48-stel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 69 59 59 48 5 14 48 22 3 14 24 14 41 49 38 3 27
Rest: 1 49 49 34.

11b Siebzehnte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 1 49 13 36-stel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 59 59 59 57 1 18 42 5 30 46 23 1 17 47 11 42 30
Rest: 2 0 56 36.

12a Achtzehnte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 3 38 27 12-tel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 15 19 40 31 22 41 27 26 25 31 47 7 33
Rest: 2 12 14 24.

12b Neunzehnte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 7 16 54 24-stel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 48 49 55 7 50 40 21 20 25 30 45 28 53
Rest: 3 31 41 48.

---

[4]) Hs: 28

13a Zwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 14 33 48 48-stel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 57 12 28 46 57 40 5[5]) 58 9 26 55[6]) 39 51
Rest: 3 22 54 56.

13b Einundzwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 29 7 37 36-stel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 59 18 7 11 44 25 1 19 25 3 14 48 34
Rest: 2 15 22 10.

14a Zweiundzwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 58 15 15 12-tel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 59 49 31 47 56 6 15 19 50 48 24 22 59
Rest: 3 58 1 23.

14b Dreiundzwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 1 56 30 30 24-stel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 59 57 22 56 59 1 33 49 57 40 23 19 33
Rest: 2 11 45 5. Bei der Probe durch Vervielfachung 2 11 45 6.

15a Vierundzwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 3 53 1 0 48-stel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 59 59 20 44 14 45 23 27 29 24 59 24 30
Rest: 2 0 2 49.

15b Fünfundzwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 7 46 2 1 36-stel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 59 59 50 11 3 41 20 51 52 21 14 27 2
Rest: 0 9 11 26.

16a Sechsundzwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 15 32 4 3 12-tel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 59 59 57 32 45 55 20 12 58 5 18 35 15
Rest: 1 0 41 58.

16b Siebenundzwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 31 4 8 6 24-stel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 59 59 59 23 11 28 50 3 14 31 19 38 43
Rest: 2 52 25 7, bei der Probe durch Vervielfachung 2 52 25 8.

17a Achtundzwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 1 2 8 16 12 48-stel des Umfangs ist.
Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 59 59 59 50 47 52 12 30 48 37 49 54 40
Rest: 2 41 35 19.

---

[5]) fehlt in Hs. [6]) Hs: 25.

Tafel 3b

Erste Berechnung

Sie ergibt die Sehne des Drittels des Umfangs, d. i. die Sehne der Ergänzung des Sechstels (des Umfangs)

Waage	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Grad	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen	Quattuor-dezimen	Quindezimen	Sexdezimen	Septendezimen	Oktodezimen	
	Einmal Erhöhtes 1		Grad 43		Minuten 55		Sekunden 22		Tertien 58		Quarten 27		Quinten 57		Sexten 56		Septimen 0		Oktaven 44		Nonen 25	
	3 1	0	0																			
(47)	2 1	56	49								1 1	49 47	48 23	49 13	59 44	43 24	34 53	47 51	7 52	9 45	35 54	
(18)		3 3	11 9	40	25							2 2	25 25	36 29	15 32	18 9	40 51	55 9	14 6	23 25	41 2	
(2)			1 1	19 16	35 12	28	4							6 3	43 27	8 50	49 45	46 56	7 55	58 55	39 52	
54				3 3	22 20	31 55	56 3	28	4					3 3	15 13	18 59	3 22	49 53	12 8	2 12	47 8	
11					1 1	36 33	52 31	31 50	56 40	24	9				1 1	18 16	40 12	56 36	3 50	50 52	39 30	
6						3 3	20 17	41 27	15 13	35 39	51 4	12	9			2 2	28 25	19 29	12 32	58 9	9 51	
24							3 3	14 13	1 59	56 22	46 53	47 8	51 11	16	16		2 2	49 46	40 16	48 36	17 46	
								0	2	33	53	39	39	43	44			3 3	24 20	11 55	31 4	
36									2	32	25	13	41	45	0	58	8	32	3 16	16	27	
13										1 1	28 26	25 36	57 9	58 8	43 43	1 18	51 16	27 40	44 36	50	25	
											1	49	48	49	59	43	34	47	7	9	35	
43											3	27	50	45	56	55	55	52	1	28	25	
33										3	27	50	45	56	55	55	52	0	44			
									3	27	50	45	56	55	55	52	0					
51								3	27	50	45	56	55	54	56				3	27	50	45
56							3	27	50	45	56	54	57					3	27	50	45	56
31						3	27	50	45	56	27						3	27	50	45	56	55
5					3	27	50	44	58							3	27	50	45	56	55	55
43				3	27	50	22								3	27	50	45	56	55	55	52
25			3	26	55									3	27	50	45	56	55	55	52	1
(45)		2	43										3	27	50	45	56	55	55	52	1	28
	1											3	27	50	45	56	55	55	52	1	28	50

31 Dezimen
42 Undezimen
1 Duodezime
56 Tredezimen
22 Quattuordezimen
42 Quindezimen
48 Sexdezimen
58 Septendezimen
57 Oktodezimen
richtig

Probe durch Ausrechnung des Quadrats

																	0	0 48	28 41	34		
															0	0 22	42 30	34 6	24 44	53 0	10 21	16
													0	0 1	56 40	15 8	46 20	38 10	30 15	17 24	36 46	56 24
											0	0 31	42 30	0 6	43 0	51 55	20 20	8 32	4 21	40 16	36 18	21 54
									0	0 44	25 17	22 55	13 28	38 25	30 15	0 24	22 0	54 58	8 25	9 12	54 20	40 54
							0	0 56	0 0	31 0	32 40	22 20	55 9	11 10	22 29	40 58	36 18	0 54	27 0	53 57	12 52	20 16
					0	0 27	57 40	40 51	8 51	0 20	0 0	16 0	8 42	24 32	10 11	13 15	57 29	39 27	54 39	0 12	56 0	0 0
			0	0 22	58 41	19 34	21 24	52 45	15 20	20 54	32 54	0 8	0 0	19 0	48 41	23 48	45 23	28 20	56 0	0 0	0 30	1 48
	0	0 43	55 39	15 25	46 20	53 10	10 21	9 16	54 26	55 6	6 25	25 39	12 53	0 12	0 0	41 0	4 0	0 0	0 18	22 20	44 12	17 55
		44 44	35 35	4 4	47 47	25 25	57 57	31 31	57 57	53 53	55 55	2 2	55 55	3 3	51 51	59 59	59 59	43 43	50 50	16 16	34 34	
	1	30	49	50	25	8	4	56	4	12	9	54	9	52	16	0	0	32	16 3	10 16	25 27	
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		(1)	*(1)*	*2*	*2*	*2*	*4*	*2*	*3*	*3*	*4*		*3*	*5*	*6*	*6*	*7*	*7*	*6*	*(7)*	*(7)*	

Tafel 4a

Zweite Berechnung

Sie ergibt die Sehne der Ergänzung der Hälfte des Sechstels des Umfangs

Einmal Erhöhtes	Grad	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen
1	55	54	39	57	25	2	41	7	56	38

3
9
14
51
43
4
22
44
46 Oktodezimen richtig

Waage	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Grad	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen	Quattuordezimen	Quindezimen	Sexdezimen	Septendezimen	Oktodezimen		
	3 1	43	55	22	58	27	57	56	0	44	25	31	42	1	56	22	42	48	58	57			
	2 2	40	25									12 11	11 35	11 27	49 59	3 44	43 30	46 16	39 6	36 47	56 39	48	
55		3 3	30 27	48	36								35 34	43 46	49 23	19 59	13 13	30 30	32 48	49 20	16 22	12 59	
12			2 2	34 30	22 40	37	21							57 54	25 5	19 30	59 38	59 47	44 41	28 15	53 11	13 42	
57				3 3	41 40	50 13	36 51	0	9					3 3	19 17	49 2	21 55	12 55	3 36	13 34	41 33	31 55	
10					1 1	36 36	45 35	55 33	51 17	40	25				2 2	46 46	25 8	16 21	26 16	39 17	7 53	36 51	
43							10 7	22 43	34 38	4 39	49	40	4				16 15	55 27	10 17	21 19	13 39	45 20	
19							2 2	38 38	55 24	24 42	10 36	51 28	38 13	12	1		1 1	27 25	53 0	1 5	34 18	25 6	
50									30 27	41 2	34 45	23 19	24 23	49 50	55 37	34	49	2 2	52 50	56 0	16 10	19 36	
34									3 3	38 36	49 22	4 2	0 35	59 10	17 45	47 0	53 45	56	2 16	56	5	43	
34										2 2	27 26	1 49	25 14	48 36	32 43	47 43	7 24	52 6	42 3	20	4		
44											3	12 51	11 49	11 19	49 54	3 50	43 5	46 22	39 15	36 52	56 38		
28										3	51	49	19	54	50	5	22	14	56				
24									3	51	49	19	54	50	5	22	7						
35								3	51	49	19	54	50	4	41				3	51	49	19	54
51							3	51	49	19	54	50	2					3	51	49	19	54	50
24						3	51	49	19	54	25						3	51	49	19	54	50	5
1					3	51	49	18	57							3	51	49	19	54	50	5	22
23				3	51	48	39								3	51	49	19	54	50	5	22	15
48			3	50	54									3	51	49	19	54	50	5	22	15	53
		2	55										3	51	49	19	54	50	5	22	15	53	16
	1											3	51	49	19	54	50	5	22	15	53	16	3
		Probe durch Ausrechnung des Quadrats															0	0 22	44 40	20			
															0	0 43	4 3	20 40	10 19	39 48	36 28	36	
													0	0 14	51 46	39 45	25 38	3 42	36 2	14 36	18 20	42 54	
											0	0 3	9 8	12 15	50 12	45 36	54 33	27 9	57 40	3 51	48 1	9 40	
									0	0 56	38 34	2 50	45 2	8 42	6 5	9 51	6 13	48 18	27 21	17 15	55 1	0 26	
							0	0 41	7 6	51 25	20 50	34 24	12 24	1 42	57 2	8 51	33 3	5 45	50 0	1 28	42 34	29 51	
					0	0 25	2 1	37 50	35 36	6 54	18 4	36 33	24 53	36 12	6 15	1 50	15 0	0 6	18 6	9 9	34 1	6 38	
			0	0 39	57 52	22 15	55 22	1 30	48 1	26 18	39 36	6 57	39 2	23 55	20 1	1 52	16 25	2 58	3 0	1 21	3 8	13 24	
	0	0 55	54 49	35 30	45 35	51 6	18 37	16 3	15 23	1 45	54 0	17 50	5 1	0 22	14 4	38 47	16 6	4 32	26 35	2 28	48 1	6 54	
		56 56	44 44	47 47	11 11	1 1	18 18	0 0	55 55	47 47	0 0	15 15	48 48	46 46	57 57	40 40	56 56	28 28	19 19	48 48	25 25	8 8	
0	1	50	25	48	36	25	21	54	9	10	25	0	4	28	1	0	49	52	16 2	24 56	4 5	0 44	
	3	43	55	22	58	27	57	56	0	44	25	31	42	1	56	22	42	48	58	57	0	0	
		(I)	(I)	3	2	2	3	2	4	5	5	3	4	4	8	4	6	7	5	6	7		

Taf. 10b

Fünfzehnte Berechnung

Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 27 18 24-stel des Umfangs ist

Einmal Erhöhtes	Grad	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen
1	59	59	59	59	59	12	20	59	13	28

15
19
31
30
58
12
8
17
28 Oktodezimen richtig

Waage	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Grad	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen	Quattuor-dezimen	Quindezimen	Sexdezimen	Septendezimen	Oktodezimen		
	3 3	59 50	59 59	59 59	59 56	56 0	49 0	23 0	56 1	53	53	39	8	38	38	47	2	24	44	3			
0					3 3	56 55	49 59	23	55 59	0	1				3 3	52 51	48 59	33	9 59	49 58	39 27	14 52	
50							49 47	23 59	56	53	52 59	38	24			0	48 47	33 59	9	51	11 59	22 40	
35							1 1	23 19	56 59	53	53	0 59	44 28	6	40			33 32	9 0	51 0	11 0	42 0	
0								3 3	56 55	53 59	53	1 59	16 58	31 26	58 16	18	1	1 1	9 8	51 0	11 0	42 0	
24									0	53 51	53 59	1 59	18 59	5 59	42 39	29 21	1 5	36	1 49	51	11	42	
56										1 1	53 51	1 59	18	6	3 59	7 15	55 31	47 35	55 16	21	4		
26											1 0	1 59	18	6	3	52 59	24 36	12 10	38 29	41 36	56 44	3	45
39												1 1	18 15	6 59	3	52	48 59	2 29	9 49	5 17	11 30	56 31	15 44
20													2 2	6 3	3 59	52	48	32 59	19 10	47 45	41 41	24 11	31 26
33														2 1	3 59	52	48	33	9 59	2 12	0 20	13 59	5 0
7															3 3	52 59	48	33	9 59	49 58	39 24	14 41	5 58
33														3	59			59	58	24	41	58	26
30													3	59			59	58	24	41	58	26	56
45												3	59			59	58	24	41	58	26	56	15
2											3	59			59	58	24	41	58	26	28		
20										3	59			59	58	24	41	58	13				
7									3	59			59	58	24	40	59						
46								3	59			59	59	24	20				3	59			59
14							3	59			59	58	12					3	59			59	58
2						3	59	59	59	58	59						3	59			59	58	24
					3	59	59	58	59							3	59			59	58	24	41
					(Quadrat)													8	17 16	43			
																58	12 11	7 48	52	8	43	43	
														31	30 29	57 30	2	13	56	56	8	8	
												15	19 18	30 41	29	59	27	27	13	13	56	56	
										13	28 27	14 32	45	4	11	11	59	59	27	27	13 11	3 36	
								20	59 58	12 1	47	14	47	47	4	4	11	11	59 6	6 12	0 10	19 0	
						59	12 11	19 48	40	38	14	14	14	14	47	47	4 3	3 0	48 6	10 20	20 30	30 29	
				59	59 58	58 1	1	13	8	8	38	38	14	14	14 2	5 36	36 9	5 20	0 14	18 45	41 4	7 7	
	0	59	59 58	58 1	1 58	59	59 58	59	13 58	13	8 12	8	38 4	11 0	48 19	4 40	20 12	27 47	32 6	3 4	15 7	9 0	
	1 1	0 0	59 59	0 0	58 58	59 59	23 23	42 42	57 57	27 27	56 56	18 18	22 22	15 15	58 58	54 54	30 30	40 40	56 56	29 29	22 22	7 7	
0	1	58	1	58	1	58	1	58	1	58	1	2	24	6	40	58	1	2	49 1	13 51	4 11	4 42	
	3	59	59	59	59	56	49	23	56	53	53	39	8	38	38	47	2	24	44	3	0	0	
	(1)	*(1)*	*(2)*	*(2)*	*2*	*2*	*2*	*3*	*1*	*2*	*2*	*3*	*3*	*3*	*5*	*3*	*4*	*5*	*4*	*4*	*4*		

Taf. 17a

Achtundzwanzigste Berechnung

Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein

1 2 8 16 12 48-stel des Umfangs ist

Einmal Erhöhtes	Grad	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen
1	59	59	59	59	59	59	59	59	59	50

47
52
12
30
48
37
49
54
40

Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Grad	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen	Quattuordezimen	Quindezimen	Sexdezimen	Septendezimen	Oktodezimen		
3 3	59 59	59	59	59	59	59	59	59 59	59 56	23 0	11	28	50	3	14	31	19 0	38 1	43			
									3 3	23 19	11 59	28	50	3	14	31	19	37 59	1	40		
										3 3	11 7	59						38	41 59	20 44	56	49
											3 3	28 27	59						41	35 59	3 44	11 13
												0	50 47							35	18 59	58 56
													2 2	0							19 0	2 0
														3 3	12						19	
															2 2	28						
																3 3	16					
																	3 3	36				
																		2				
																		4	0			
																	4	0				
																4	0					
															4	0						
														4	0							
													3	59								59
												3	59								59	41
											3	59								59	40	47
										3	59							59	58	50		
									3	59	59	59	59	59	59	59	58	59				
																		54				
																37	49 48	53 11	6 4	6 4	6 4	
														30	48 47	36 12	23 49	12 49	12 49	12 49	12 50	
												52	12 11	29 48	30 18	17 18	17 18	17 18	17 18	17 18	17 18	
										50	47 46	51 13	8 4	20 4	20 4	20 4	20 4	20 4	20 4	20 4	20	
										49	10 49	57 49	57 49	57 49	57 49	57 49	57 49	57 49	57	39	44 10	
									1 1	41 41	35 35	44 44	25 25	1 1	37 37	15 15	39 39	47 47	9 9	52 52	2 2	
3	59							59	56	0							0	1 2	41 41	40 35	37 19	
	59								59	23	11	28	50	3	14	31	19	38	43	0	0	

[Nach] Abzug dieses Quadrats vom Quadrat des Durchmessers bleibt als Quadrat der Seite folgendes übrig:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	36	48	31	9	56	45	28	40	21	17		
										2	*3*	*2*	*4*	*4*	*4*	*5*	*5*	*3*	*2*	*3*	

Fünfter Abschnitt

Bestimmung einer einzigen Seite des Vielecks, dessen Seiten[zahl] im Kreise 1 2 8 16 12 48 beträgt

Das in der achtundzwanzigsten Berechnung ausgerechnete Quadrat war folgendes:

Taf. 17b

Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen	Quattuor-dezimen	
6	4	1	14	59	36	14	33	36	19	25	richtig

	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen	Quattuor-dezimen	Quindezimen	Sexdezimen	Septendezimen	Oktodezimen			
	36 36	48	31	9	56	45	28	40	21	17				
	0	48	16											
			15 12	8	1									
			3 2	1 49	55 52	31	16							
				12 11	3 55	14 54	12 26	30	1					
					7 7	19 16	46 49	10 29	20 59	9	36			
						2 2	56 49	40 52	21 34	7 59	24 48	51	16	
							6 6	47 40	46 25	7 22	35 29	8 33	44 51	
								7 7	20 16	45 49	5 29	34 59	53 31	
									3 3	55 50	35 32	35 47	22 30	
										5	2	47	52	
										12	8	2	30	
									12	8	2	29	59	
								12	8	2	29	59	12	
							12	8	2	29	59	12	14	
						12	8	2	29	58	36			
					12	8	2	28	59					
				12	8	2	14							
			12	8	1									
		12	4											
	6													
									1	54				
							3	3 18	36 2	1 24	16 0	19		
					3	1 36	24 0	2 56	12 0	0 33	36 8	4 24	26 19	
			1	5 24	54 3	2 56	24 0	0 36	14 3	7 16	42 32	35 27	24 21	
	0	0 24	6 0	0 4	56 0	0 14	59 13	8 46	24 35	13 24	46 8	19 24	48 8	
		24 24	7 7	34 34	57 57	51 51	5 5	51 51	9 9	55 55	10 10	34 34	26 26	
0	36	0	16	0	1	3	16	58	1	21 5	36 2	3 47	16 52	
0	36	48	31	9	56	45	28	40	21	17	0	0	0	
				(1)	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*	*2*	*2*		

Sechster Abschnitt

18a
1

Bestimmung der Umfänge des dem Kreise ein- und des ihm umbeschriebenen Vielecks, die einander ähnlich sind, und deren jedes 800 335 168 Seiten hat

Die im fünften Abschnitt erhaltene Wurzel, welche die Größe einer einzigen Seite ist, vervielfachen wir mit der Seitenzahl des erwähnten Vielecks, deren Erhöhtes 1 2 8[7]) 16 12 48 beträgt.

Tafel 18a oben

Multiplikand		6	4	1	14	59	36	14	33	36	19	25	
	Multiplikator	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen	Quattuordezimen	
Fünfmal Erhöhtes	1	6	4	1	14	59	36	14	33	36	19	25	
Viermal Erhöhtes	2		12	8	2	29	59	12	29	7	12	38	50
Dreimal Erhöhtes	8		0	48 0	0 32	8 1	7 52	52 4	1 48	52 4	4 24	48 2	3 32
Zweimal Erhöhtes	16			1	36 1	0 4	16 3	15 44	44 9	3 36	44 8	9 48	36 5
Einmal Erhöhtes	12				1	12 0	0 48	12 2	11 48	48 7	2 12	48 6	7 36
Zahl	48					4	48 3	0 12	48 11	47 12	12 28	11 48	12 26
Produkt		6	16	59	28	1	34	51	46	14	49	46	
		Einmal Erhöhtes	Teile	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	

Das ist der Umfang des dem Kreise einbeschriebenen Vielecks in den Teilen, in denen 3
der Durchmesser hundertzwanzig beträgt. Dieser [Umfang] ist kleiner als der Umfang des Kreises, und wie wir im zweiten Abschnitt bewiesen, ist das Verhältnis dieses Umfangs zum Überschuß der Summe der Seiten des ihm ähnlichen umbeschriebenen Vielecks über diesen Umfang gleich dem Verhältnis der nachfolgend angegebenen Hälfte der in der achtundzwanzigsten Berechnung erhaltenen Wurzel:

Tafel 18a,[8]) Zeile 9

Teile	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen	Quattuordezimen	Quindezimen	Sexdezimen	Septendezimen	Oktodezimen
59	59	59	59	59	59	59	59	59	55	23	56	6	15	24	18	54	57	20
zu folgendem Überschuß der Hälfte des Durchmessers über sie:									4	36	3	53	44	35	41	5	2	40

[7]) Hs undeutlich, als ob ⊳ statt ⌐ dasteht.

[8]) In der Hs ist diese Tafel derart neben die obere Tafel von S. 15 gestellt, daß die drei gegebenen Zahlen der Proportion annähernd so stehen: erste Zahl dritte Zahl
vierte Zahl

9 Dies sind vier in Verhältnisgleichung stehende Zahlen, deren zweite unbekannt ist. Die erste Stelle der ersten Zahl ist Einmal Erhöhtes, die erste der vierten ist eine None. Also gibt das Ergebnis der Vervielfachung beider Oktaven, und das Ergebnis der Teilung durch die dritte [Zahl] Nonen. Was nach ihnen (den Nonen) kommt, brauchen wir aber nicht; deshalb lassen wir die meisten Ziffern weg und sagen: das Verhältnis von 6 17 zu der Unbekannten ist gleich dem Verhältnis von sechzig zu 4 36 Dezimen. Wir vervielfachen also die erste [Zahl] mit der vierten erniedrigt. Es kommt heraus neunundzwanzig Nonen. Fügen wir [sie] zum Umfang jenes Vielecks hinzu, so kommt als Umfang des dem Kreis umbeschriebenen Vielecks folgendes heraus:

Tafel 18a, Zeile 13

Einmal Erhöhtes	Teile	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen
6	16	59	28	1	34	51	46	14	50	15

13 Das ist größer als der Umfang des Kreises, und der Betrag der Summe des Überschusses und des Mangels ist neunundzwanzig Nonen unter der Voraussetzung, daß der Durchmesser hundertzwanzig ist. Also ist er in den Teilen, in denen der Umfang dreihundertsechzig ist, sicher kleiner als neunundzwanzig Nonen. Nun bewiesen wir im dritten Abschnitt, daß die Größe einer einzigen Oktave des Umfangs eines Kreises, dessen Durchmesser sechshundert-
17 tausend Erddurchmesser beträgt, kleiner als vier Fünftel der Breite eines Haars von der Mähne des Arbeitspferdes ist, welche Breite ein Sechstel der Breite eines mittleren Gerstenkorns beträgt. Also ist etwas, das kleiner als neunundzwanzig Nonen desselben ist, kleiner als zwei Fünftel der Breite eines Haars. Also macht die Spanne zwischen den beiden angegebenen Umfängen, deren einer kleiner und deren anderer größer als der wahre Umfang des Kreises ist, nicht zwei Fünftel der Breite eines Haars aus. Fügen wir also die Hälfte der Spanne zwischen den beiden Vielecken zum kleineren und ziehen sie vom größeren ab,
20 oder besser, runden wir von ihr (der Spanne) das bei dem kleineren [Umfang] in die neunte Stelle Fallende auf, nämlich [um] 14 Nonen, und streichen wir das bei dem größeren [Umfang] in sie Fallende, nämlich 15 Nonen, ab, so kommt folgendes heraus:

Tafel 18a, unten

Größe des Umfangs, wenn der Durchmesser hundertzwanzig ist									
Einmal Erhöhtes	Teile	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven
6	16	59	28	1	34	51	46	14	50

22 Also macht die Spanne zwischen diesem und dem wahren Wert nicht ein Fünftel der Breite eines Haars von der Mähne des Arbeitspferdes aus, welche Breite ein Sechstel der
18b Breite eines mittleren Gerstenkorns ist, und dies ist das, was wir bewiesen haben wollten.

Ich habe sie (die Ziffern 6 16 ... 50) auf einen Halbvers gebracht, um einen Vers zu bilden:

wa yau naṭ kaḥ a lad nā mū fayadnu
muḥīṭun ḥaiṯu niṣful-quṭri sīnu

6 16 59 28 1 34 51 46 14 50
[ist der] Umfang, sofern die Hälfte des Durchmessers 60 ist.

Nehmen wir ferner die Hälfte des Durchmessers [gleich] eins an, so ist der Umfang das 2
Erniedrigte jener selben Zahl, d. h. das Erhöhte derselben wird Teile, die Teile werden Minuten sein, und so [weiter], bis zu den Oktaven, die Nonen sein werden, und in diesem Fall wird der Unterschied vom wahren [Wert] nicht eine einzige None ausmachen; er wird vielmehr weniger als eine viertel None betragen. Gleich sechzig nahmen wir in den vorher-

Tafel 18b

Tafel der Vielfachen des Verhältnisses des Umfangs zur Hälfte des Durchmessers unter der Annahme, daß diese eins ist

Spalte der Zahl	Einmal Erhöhtes	Vielfache der Hälfte des Durchmessers	deren Minuten	:: Sekunden	:: Tertien	:: Quarten	:: Quinten	:: Sexten	:: Septimen	:: Oktaven	:: Nonen
1	0	6	16	59	28	1	34	51	46	14	50
2		12	33	58	56	3	9	43	32	29	40
3		18	50	58	24	4	44	35	18	44	30
4		25	7	57	52	6	19	27	4	59	20
5		31	24	57	20	7	54	18	51	14	10
6		37	41	56	48	9	29	10	37	29	0
7		43	58	56	16	11	4	2	23	43	50
8		50	15	55	44	12	38	54	9	58	40
9	0	56	32	55	12	14	13	45	56	13	30
10	1	2	49	54	40	15	48	37	42	28	20
11		9	6	54	8	17	23	29	28	43	10
12		15	23	53	36	18	58	21	14	58	0
13		21	40	53	4	20	33	13	1	12	50
14		27	57	52	32	22	8	4	47	27	40
15		34	14	52	0	23	42	56	33	42	30
16		40	31	51	28	25	17	48	19	57	20
17		46	48	50	56	26	52	40	6	12	10
18		53	5	50	24	28	27	31	52	27	0
19	1	59	22	49	52	30	2	23	38	41	50
20	2	5	39	49	20	31	37	15	24	56	40
21		11	56	48	48	33	12	7	11	11	30
22		18	13	48	16	34	46	58	57	26	20
23		24	30	47	44	36	21	50	43	41	10
24		30	47	47	12	37	56	42	29	56	0
25		37	4	46	40	39	31	34	16	10	50
26		43	21	46	8	41	6	26	2	25	40
27		49	38	45	36	42	41	17	48	40	30
28	2	55	55	45	4	44	16	9	34	55	20
29	3	2	12	44	32	45	51	1	21	10	10
30	3	8	29	44	0	47	25	53	7	25	0
31	3	14	46	43	28	49	0	44	53	39	50
32		21	3	42	56	50	35	36	39	54	40
33		27	20	42	24	52	10	28	26	9	30
34		33	37	41	52	53	45	20	12	24	20
35		39	54	41	20	55	20	11	58	39	10
36		46	11	40	48	56	55	3	44	54	0
37		52	28	40	16	58	29	55	31	8	50
38	3	58	45	39	45	0	4	47	17	23	40
39	4	5	2	39	13	1	39	39	3	38	30
40		11	19	38	41	3	14	30	49	53	20
41		17	36	38	9	4	49	22	36	8	10
42		23	53	37	37	6	24	14	22	23	0
43		30	10	37	5	7	59	6	8	37	50
44		36	27	36	33	9	33	57	54	52	40
45		42	44	36	1	11	8	49	41	7	30
46		49	1	35	29	12	43	41	27	22	20
47	4	55	18	34	57	14	18	33	13	37	10
48	5	1	35	34	25	15	53	24	59	52	0
49		7	52	33	53	17	28	16	46	6	50
50		14	9	33	21	19	3	8	32	21	40
51		20	26	32	49	20	38	0	18	36	30
52		26	43	32	17	22	12	52	4	51	20
53		33	0	31	45	23	47	43	51	6	10
54		39	17	31	13	25	22	35	37	21	0
55		45	34	30	41	26	57	27	23	35	50
56		51	51	30	9	28	32	19	9	50	40
57	5	58	8	29	37	30	7	10	56	5	30
58	6	4	25	29	5	31	42	2	42	20	20
59		10	42	28	33	33	16	54	28	35	10
60	6	16	59	28	1	34	51	46	14	50	0

In Reihe 14: Hs 30 statt 32 — In Reihe 35: Hs 58 | 29 — In Reihe 41: Hs 19 statt 49 — In Reihe 46: Hs 19 statt 49 —

3*

gehenden Rechnungen die Hälfte des Durchmessers nur deshalb an, damit die Sehnen nicht von dem Üblichen und in den Tafelwerken Angewandten abweichen. Nähmen wir sie aber [gleich] eins an, so würden sich die Zeichen der Ziffern nicht ändern, sondern [nur] ihre Stellen[werte].

Wir haben seine (des Umfangs $\approx 2\pi$) Vielfache mit jeder der Sechzigerziffern in einer Tafel zusammengestellt, damit durch sie leicht der Umfang aus dem Durchmesser und umgekehrt ermittelt werden könne. Die Tafel ist folgende: (s. S. 19).

20a

Siebenter Abschnitt

Was die Vernachlässigung der überschießenden und mangelhaften Brüche bei der letzten Stelle der vorhergehenden Berechnungen ausmacht

Wisse, daß bei der letzten Stelle jener Berechnungen die Spanne (der Fehler) sich nicht auf eine volle Einheit jener Stelle beläuft, und auch bis zur letzten Stelle der letzten Berechnung nicht [soviel] ausmacht. Denn die letzte Stelle der ersten Berechnung war siebenundfünfzig, und sie war um zwanzig [Einheiten] der ihr folgenden Stelle, d. h. der neunzehnten Stelle, mangelhaft. Denn der Rest der Rechnung war 3 16 27, und wenn wir diesen durch den Unterschied der beiden Quadrate, der 3 27 50 45 war, teilen, so bekommen wir 56 40 heraus, und das setzen wir als Aufrundung des Bruches zu 57 an. Also ist das Quadrat der zweiten Berechnung um den gleichen Betrag mangelhaft, d. h. um zwanzig, aber an der achtzehnten Stelle. Ziehen wir das nun vom Rest der zweiten Berechnung, der 2 56 5 betrug, ab, so bleibt 2 55 45 übrig. Das teilen wir durch den Unterschied der beiden Quadrate, der 3 51 49 war. Dann bekommen wir 45 28 heraus. Wir teilten dort aber 2 56 5 durch den Unterschied der beiden Quadrate, und es kam 46 heraus, was um zweiunddreißig der neunzehnten Stelle mangelhaft ist. Nach diesem Verfahren erkennt man, daß die letzte Stelle der dritten Berechnung um sechs [Einheiten] der ihr folgenden Stelle mangelhaft ist, die der vierten um fünfzehn überschießend, die der fünften um achtundzwanzig mangelhaft, die der sechsten um fünfzehn mangelhaft, die der siebenten um zweiundzwanzig überschießend, die der achten um sechs mangelhaft, die der neunten um vierundzwanzig mangelhaft, die der zehnten um achtzehn überschießend, die der elften um vier mangelhaft, die der zwölften um zwölf überschießend, die der dreizehnten um fünf mangelhaft, die der vierzehnten um sechzehn mangelhaft, die der fünfzehnten um siebzehn mangelhaft, die der sechzehnten um neun überschießend, die der siebzehnten um sechzehn [überschießend], die der achtzehnten um acht überschießend, die der neunzehnten um drei mangelhaft, die der zwanzigsten um siebzehn mangelhaft, die der einundzwanzigsten um vierzehn mangelhaft, die der zweiundzwanzigsten um siebenundzwanzig überschießend, die der dreiundzwanzigsten um drei, die der vierundzwanzigsten um eine, die der fünfundzwanzigsten um achtzehn, die der sechsundzwanzigsten um fünfzehn, die der siebenundzwanzigsten um zehn, die der achtundzwanzigsten um sechsundzwanzig, alles [Einheiten] der neunzehnten Stelle der Wurzel und der achtzehnten des Quadrats der darauf folgenden Berechnung, die letzten sieben um die betreffenden Beträge überschießend. Also ist das Quadrat der achtundzwanzigsten Berechnung um zehn überschießend, aber in der achtzehnten Stelle. Also ist die letzte Stelle des Überschusses des Quadrats des Durchmessers über es, d. h. die Ziffer 17, die der siebzehnten Stelle angehört, um zehn [Einheiten] der achtzehnten Stelle mangelhaft.

Also ist die letzte Stelle der Wurzel daraus, die wir zu fünfundzwanzig ansetzten, um zweiundfünfzig der fünfzehnten Stelle mangelhaft, und die letzte Stelle des Ergebnisses der Vervielfachung, d. h. des Umfangs, die wir zu sechsundvierzig in der neunten Stelle ansetzten, um vierundfünfzig [Einheiten] der zehnten Stelle mangelhaft, und es ist am besten, daß wir die letzte Stelle der Seite zu vierundzwanzig und die letzte Stelle des einbeschriebenen Umfangs zu fünfundvierzig ansetzen. Jetzt ist die Aufrundung fünfzehn Nonen und der Abstrich vierzehn Nonen.

Ich habe das weitläufig ausgeführt, damit man wisse, daß die Vernachlässigung der überschießenden und mangelhaften Brüche an der letzten Stelle dieser Berechnungen nicht so viel ausmacht, daß es an eine einzige volle None in der Größe des Umfangs heranreicht. Wir haben diese Größen auch in einer Tafel zusammengestellt, damit den Abschreibern [möglichst] wenig Fehler unterlaufen. Die Tafel ist nebenstehend.

Tafel 20a unten

Tafel dessen, was an der letzten Stelle der Berechnungen vernachlässigt wird

Berechnungen	Was es ausmacht	Überschüsse und Mängel	
1	20	mangelh.	
2	32	mangelh.	
3	6	mangelh.	
4	15	übersch.	
5	28	mangelh.	
6	15	mangelh.	
7	22	übersch.	
8	6	mangelh.	
9	24	mangelh.	
10	18	übersch.	20a. 20
11	4	mangelh.	
12	12	übersch.	
13	5	mangelh.	
14	16	mangelh.	
15	17	mangelh.	
16	9	übersch.	
17	16	übersch.	
18	8	übersch.	
19	3	mangelh.	
20	17	mangelh.	
21	14	mangelh.	
22	27	übersch.	
23	3	übersch.	
24	1	übersch.	
25	18	übersch.	
26	15	übersch.	
27	10	übersch.	
28	26	übersch.	
Quadrat der Seite	10	mangelh.	
Seite	52	mangelh.	
Umfang	54	mangelh.	

Achter Abschnitt

Verwandlung des Betrages des Umfangs in die indischen Ziffern unter der Voraussetzung, daß die Hälfte des Durchmessers eins ist

Da der Umfang sechsmal die Hälfte des Durchmessers und ein Bruch ist, den wir bis zu den Nonen erreicht haben, setzen wir diesen Bruch mit einem Nenner an, der zehn fünfmal wiederholtes Tausend ($10 \cdot 1000^5$) ist, weil ein einziger Teil von ihm (10^{-16}) eine einzige None nicht um eine halbe Dezime übertrifft. ⟨Ebenfalls zur Erleichterung der Rechnung mit ihm⟩. Wir haben die Vielfachen hiervon mit jeder der neun Ziffern in einer Tafel zusammengestellt, um das Rechnen damit zu erleichtern. Die Tafel ist folgende: (s. S. 22). *20b*

20b, 3 Wisse, daß die an der letzten Stelle der Brüche stehende zwei in der Stelle der Minuten in bezug auf die sechs Ganzen steht, wenn man zugrunde legt, daß zehn Minuten ein Ganzes bilden. Wenn wir wollen, nennen wir diese Stelle ‚Zehntel'. Die rechts von ihr stehende acht [steht] in der Stelle der Sekunden, und wir nennen sie ‚Dezimalsekunden' (wörtlich ‚Zweites der Zehntel'). Die nach ihr [kommende] drei [steht] in der Stelle der Tertien, und wir nennen sie ‚Dezimaltertien', und so [fort] nach dem Muster der Sternrechnung. Deshalb fingen wir bei einem einfachen Ausgangspunkt (oder: Nenner) an, nämlich eins. Dieses Verfahren in der indischen Rechnung ist unsere eigene Erfindung, desgleichen seine Anordnung in der Tafel. Wir haben diese Ziffern von links nach rechts auf einen Halbvers gebracht, um einen Vers zu bilden:

Tafel 20 b

Tafel der Vielfachen des Verhältnisses des Umfangs zum Durchmesser

Ganze		[Zähler der] Brüche																
			viermal wiederholt[e Tausender]			dreimal wiederholt]e Tausender]			Tausender der Tausender			Tausender						
deren Zehner	Vielfache der Hälfte des Durchmessers	Einer der fünfmal [wiederholten] Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer	Zahlen
null	sechs	zwei	acht	drei	eins	acht	fünf	drei	null	sieben	eins	sieben	neun	fünf	acht	sechs	fünf	
0	6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	1	7	9	5	8	6	5	1
1	2	5	6	6	3	7	0	6	1	4	3	5	9	1	7	3	0	2
1	8	8	4	9	5	5	5	9	2	1	5	3	8	7	5	9	5	3
2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	1	8	3	4	6	0	4
3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2	5	5
3	7	6	9	9	1	1	1	8	4	3	0	7	7	5	1	9	0	6
4	3	9	8	2	2	9	7	1	5	0	2	5	7	1	0	5	5	7
5	0	2	6	5	4	8	2	4	5	7	4	3	6	6	9	2	0	8
5	6	5	4	8	6	6	7	7	6	4	6	1	6	2	7	8	5	9
6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	1	7	9	5	8*)	6	5	0	10

13 *wa baḥǧā ḥahǧi ṣaz a za ṭah ḥawahu*
muḥīṭun li-quṭrin huwa 'ṯnāni minhu

6 2 8 3 1 8 5 3 0 7 1 7 9 5 8 6 5
ist [der] Umfang zu einem Durchmesser, der zwei davon ist.

20 b, 14 Und auf Persisch:

15 *šaš wa du hašt wa sih yak hašt wa panǧ wa sih ṣifrā*
bahaft wa yakrā (haft) wa nuh panǧ wa hašt wa šaš panǧ ast

Sechs und zwei acht und drei eins acht und fünf und drei, eine Null mit sieben und eins [sieben] und neun fünf und acht und sechs fünf ist [es].

20 b, 15

Neunter Abschnitt

Art des Rechnens mit den beiden Tafeln

Ist die Größe der Hälfte des Durchmessers in Ellen oder Farsang oder einem anderen Maß bekannt, so setzen wir sie in Ǧummalziffern oder indischen [Ziffern] an, [je nachdem] welche von beiden [Zifferarten] wir wünschen, und vervielfachen sie mit dem Verhältnis des Umfangs (zum Durchmesser), indem wir in die Tafel eingehen und gegenüber der höchsten Stelle desselben anfangen. Das Gefundene schreiben wir irgendwo auf. Dann gehen wir mit der darauf folgenden Stelle in sie ein und schreiben das Gefundene um eine Stelle erniedrigt darunter, hierauf mit der darauf folgenden [Stelle] und schreiben das Gefundene um eine weitere Stelle erniedrigt darunter, bis es vollendet ist. Dann zählen wir das Ganze zusammen, wobei wir das weglassen, was die unter der letzten Stelle des zuerst genommenen [Teilprodukts] stehende [Stelle] überschreitet, oder vielmehr unter einer seiner letzten

*) Hs: 7

[Stellen], wenn keine Verfeinerung nötig oder der Kreis klein ist. Das, was herauskommt, ist die Größe des Umfangs in den Teilen, in denen die Hälfte des Durchmessers bekannt ist, wobei seine höchste Stelle um eine Stelle über die höchste Stelle der Hälfte des Durchmessers erhöht ist, ganz gleich, ob sie null oder eine Zahl ist, d. h. ist die höchste Stelle der Hälfte des Durchmessers viermal Erhöhtes, so ist die höchste Stelle des Ergebnisses fünfmal Erhöhtes; ist sie Quarten, so ist die höchste Stelle des Ergebnisses Tertien; ist jene Zehntausender, so ist diese Hunderttausender; ist jene Dezimaltertien, so ist diese Dezimalsekunden; und wie die Erniedrigung der Ğummalziffern von rechts nach links geht, so geht die Erniedrigung der indischen Ziffern von links nach rechts. 20

Beispiel: Wir wollen die Größe des Umfangs eines Kreises wissen, bei dem die Hälfte des Durchmessers sechshundertfünfzigtausendachthundertvierundvierzig und ein achtel Ellen oder Farsang beträgt. Wir stellen es dar: 24

Taf. 19a oben

in Ğummalziffern					
Ganze				Brüche	
Dreimal Erhöhtes	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Ellen oder Farsang	Minuten	Sekunden
3	0	47	24	7	30

		Die Rechnung mit Ğummalziffern											
Dreimal Erhöhtes	3	0	18	50	58	24	4	44	35	18	44	30	
Zweimal Erhöhtes	0		0	0								0	0
Einmal Erhöhtes	47			4	55	18	34	57	14	18	33	13	37
Ellen oder Farsang	24				2	30	47	47	12	37	56	42	30
Minuten	7					0	43	58[10])	56	16	11	4	2
Sekunden	30						3	8	29	44	0	47	26
Ergebnis, d. i. der Umfang		0	18	55	56	14	14	36	28	15	26	17	35
			Dreimal Erhöhtes	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Ellen oder Farsang	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen

In indischen Ziffern								
Ganze						Brüche		
Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Zehntel	Dezimalsekunden	Dezimaltertien
6	5	0	8	4	4	1	2	5

		Die Rechnung mit indischen Ziffern																	
Hunderttausender	6	3	7	6	9	9	1	1	1	8	4	3	0	7	7	5	1	9	0
Zehntausender	5		3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2
Tausender	0			0	0														0
Hunderter	8				5	0	2	6	5	4	8	2	4	5	7	4	3	6	7
Zehner	4					2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	1	8
Einer	4						2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	2
Zehntel	1							0	6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	2
Dezimalsekunden	2								1	2	5	6	6	3	7	0	6	1	4
Dezimaltertien	5									3	1	4	1	5	9	2	6	5	4
Ergebnis, d. i. der Umfang		4	0	8	9	3	7	4	2	4	3	4	6	4	1	5	4	1	9
		Millioner	Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Zehntel	Dezimalsekunden	Dezimaltertien	Dezimalquarten	[Dezimalquinten]	[Dezimalsexten]	[Dezimalseptimen]	[Dezimaloktaven]	[Dezimalnonen]	[Dezimaldezimen]	[Dezimalundezimen]
		Ganze							Brüche										

[10]) In Hs undeutlich.

Taf. 19a unten

Andere Art mit indischen Ziffern, bei der das Verfahren darin besteht, daß wir ganz rechts beginnen und von rechts nach links um je eine Stelle erhöhen, [wobei wir] jede [erhöhte Stelle] unter eine andere [setzen].

Dezimaltertien	**5**									3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2	5
Dezimalsekunden	**2**								1	2	5	6	6	3	7	0	6	1	4	3	5	9	1	7	3	0	
Zehntel	**1**							0	6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	1	7	9	5	8	6	5		
Einer	**4**						2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	1	8	3	4	6	0			
Zehner	**4**					2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	1	8	3	4	6	0				
Hunderter	**8**				5	0	2	6	5	4	8	2	4	5	7	4	3	6	6	9	2	0					
Tausender	**0**			0	0	0													0	0	0						
Zehntausender	**5**		3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2	5							
Hunderttausender	**6**	3	7	6	9	9	1	1	1	8	4	3	0	7	7	5	1	9	0								
Ergebnis, d. i. der Umfang		4	0	8	9	3	7	4	2	4	3	4	6	4	1	5	4	1	9	3	4	5	4	3	1	2	5
Namen der Stellen		Tausendtausender	Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Tausender 6 mal	Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer	[Hunderter]	[Zehner]	[Einer]	[Hunderter]	[Zehner]	[Einer]	[Hunderter]	[Zehner]	[Einer]	Hunderter	Zehner	Einer
										Tausender 5 [mal]			Tausender 4 [mal]			Tausender 3 [mal]			Tausender der Tausender			Tausender					
									Zehntel	Dezimalsekunden	[Dezimaltertien]	[Dezimalquarten]	[Dezimalquinten]	[Dezimalsexten]	[Dezimalseptimen]	[Dezimaloktaven]	[Dezimalnonen]	[Dezimaldezimen]	[Dezimalundezimen]	[Dezimalduodezimen]	[Dezimaltredezimen]	[Dezimalquattuordezimen]	[Dezimalquindezimen]	[Dezimalsexdezimen]	[Dezimalseptendezimen]	[Dezimaloktodezimen]	[Dezimalnondezimen]
		Ganze							Brüche																		

Wenn wir wollen, drücken wir diesen Bruch aus als: zwei sechsmal wiederholte Tausender ($2 \cdot 1000^6$), vierhundertvierunddreißig fünfmal wiederholte Tausender [usw.] bis zum Ende mit dem Nenner Zehner der sechsmal wiederholten Tausender ($10 \cdot 1000^6$). Und wenn wir wollen, drücken wir ihn aus als: zwei Zehntel, vier Dezimalsekunden, drei [Dezimaltertien, vier] Dezimalquarten und so [fort] bis zum Ende. Dies [erfordert] das Höchstmaß der Rechenzeit.

19b Am leichtesten ist es, wenn wir einige der letzten Stellen abstreichen, wobei das stehen bleibt, was eine Größe, die wir nicht vernachlässigt wünschen, nicht angreift. Ist z. B. die Maßeinheit der Farsang, und wollen wir im Ergebnis einen Finger nicht vernachlässigen, der drei viertel Tertien eines Farsang, d. i. angenähert eine drittel Dezimalquinte desselben ist, so ergibt sich das Gesuchte, wenn wir die Quarten oder die Dezimalsexten [noch] berücksichtigen und die auf sie folgenden [Stellen] weglassen. Ist der Kreis klein, ist z. B. die
4 Hälfte seines Durchmessers hundertsiebenundzwanzig [und eine halbe] Elle, so reicht es aus, wenn wir dabei folgendermaßen rechnen: (Vgl. Taf. 19b oben S. 25).

Also kommt achthunderteine und eine zehntel Elle heraus, und das ist die Größe des Umfangs.

In dem Falle, daß die Größe des Umfangs bekannt ist, und wir den Durchmesser bestimmen wollen, setzen wir sie (die Größe des Umfangs) hin und teilen sie durch das Verhältnis des Umfangs (zum Durchmesser), indem wir in der Tafel die größte Zahl suchen, die nach ihrer Ziffer[nfolge] (d. h. unabhängig vom Stellenwert) kleiner als sie ist. Ist sie gefunden, so [verfahren wir folgendermaßen]: Steht sie in einer Zeile, deren höchste Stelle Null ist, so setzen wir auch an die höchste [Stelle] des hingesetzten Umfangs eine Null, d. h. rechts von den Ǧummalziffern und links von den indischen [Ziffern], und schreiben das Gefundene so darunter, daß die beiden Nullen untereinander stehen, und ebenso die übrigen Ziffern der Reihe nach. Wir ziehen es davon ab, schreiben den Rest darunter und schreiben das, was am Rande der Tafel stand, nämlich in der Spalte der Zahl, gegenüber jener Zahl an einen Ort, den wir die Zeile des Ergebnisses nennen. Dies[e Ziffer] hat den Wert derjenigen Stelle, die auf die höchste Stelle des Umfangs folgt, auch wenn diese die Null ist, die wir davor setzten. Dann suchen wir die größte Zahl, die nach ihrer Ziffer[nfolge] kleiner als der Rest ist, ziehen sie von ihr ab und schreiben das, was sich gegenüber jener Zahl am Rande findet, hinter das, was zuerst in die Zeile des Ergebnisses gesetzt wurde, d. h. links von dem zuerst Hingeschriebenen, wenn es eine Ǧummalziffer ist, und rechts, wenn es eine indische [Ziffer] ist. Dies [gilt], wenn die Zahl der höchsten Stelle des Restes um eine Stelle niedriger ist als die höchste Stelle dessen, was darüber steht, sei es nun null oder eine Zahl. Falls ihre Erniedrigung mehr als eine Stelle beträgt, setzen wir hinter das in der Zeile des Ergebnisses Geschriebene eine Null oder Nullen, deren Anzahl um eins kleiner ist, als die Anzahl der Erniedrigungen der höchsten Stelle des Restes gegenüber dem beträgt, was über ihm steht, und setzen unter den Rest eine Reihe von Nullen oder so viele Reihen, wie die erwähnte Zahl der Nullen beträgt, derart, daß die höchste Stelle der ersten Reihe genau unter der höchsten Stelle des Restes steht, auch wenn diese eine Null ist, diejenige der zweiten [Nullenreihe] um eine Stelle niedriger als sie, die der dritten um zwei Stellen und so [fort], bis es vollendet ist, um zu verhindern, daß ein Fehler unterläuft und um das Festhalten zu erleichtern, nicht [etwa], weil es notwendig wäre. Den Rest schreiben wir noch einmal unter die Nullen, und zwar genau unter die ersten. Dann suchen wir auf die angegebene Weise die größte Zahl und ziehen sie nach der angegebenen Vorschrift vom Reste ab. So verfahren wir, soweit wir wollen, und das, was in der Zeile des Ergebnisses herauskommt, ist das Gesuchte. Wenn wir wollen, setzen wir die Ziffern der Zeile des Ergebnisses an den Rand des Rechenschemas gegenüber den (in den Hilfstafeln) aufgesuchten Zahlen.

Tafel 19 b oben

19 b

Ganze	1	0	6	2	8	3	2
	2		1	2	5	6	6
	7			4	3	9	8
Bruch	5				3	1	4
		0	8	0	1	1	0
		Ganze			Brüche		

Beispiel: Wollen wir den Durchmesser eines Kreises wissen, dessen Umfang in Ellen vom Betrage der Zahl ist, die wir (in dem Beispiel) vorher als Durchmesser annahmen, so rechnen wir mit ihr folgendermaßen:

Tafel 19 b unten rechts

	[Zeile des Ergebnisses]	Das Verfahren nach der Ǧummalrechnung						
Zweimal Erhöhtes	28	Umfang	3	0	47	24	7[11])	30
		Das, was wir aufsuchten	2	55	55	45	4	44
Einmal Erhöhtes	46	Rest		4	51	39	2	46
		Das, was wir aufsuchten		4	49	1	35	29
Ellen	25	Rest		[12])	2	37	27	17
		Das, was wir aufsuchten			2	37	4	47
Minuten	3	Rest				0	22	30
		Das, was wir aufsuchten				0	18	51
Sekunden	35	Rest					3	39
		Das, was wir aufsuchten						

[11]) Hs: 4. [12]) Hs hat hier 2 und daneben statt der 2 eine 37.

4

Tafel 19 b unten links

	Zeile des Ergebnisses	Mit indischen Ziffern										
Hunderttausender	1	Umfang	0	6	5	0	8	4	4	1	2	5
		Das, was wir aufsuchten	0	6	2	8	3	1	8	5	3	1
Zehntausender	0	Rest			2	2	5	2	5	5	9	4
		Das, was wir aufsuchten			0	0	0	0	0	0	0	0
Tausender	3	Rest			2	2	5	2	5	5	9	4
		Das, was wir aufsuchten			1	8	8	4	9	5	5	6
Hunderter	5	Rest				3	6	7	6	0	3	8
		Das, was wir aufsuchten				3	1	4	1	5	9	3
Zehner	8	Rest					5	3	4	4	4	5
		Das, was wir aufsuchten					5	0	2	6	5	5
Einer	5	Rest						3	1	7	9	0
		Das, was wir aufsuchten						3	1	4	1	6
Zehntel	0	Rest								3	7	4
		Das, was wir aufsuchten								0	0	0
Dezimalsekunden	6	Rest								3	7	4
		Das, was wir aufsuchten								3		

21a

Zehnter Abschnitt

Bestimmung des Unterschiedes zwischen dem, was bei den Leuten verbreitet und gebräuchlich ist, und dem, was wir erhalten haben

Wisse, daß die Vertreter dieses Zweiges der Wissenschaft den Umfang als drei einsiebentel des Durchmessers ansetzten, also sechs zweisiebentel der Hälfte des Durchmessers. Stellen wir das in Ǧummalziffern dar und bilden den Unterschied zwischen ihm und dem, was wir herausbekamen, so ergibt sich folgendes:

Tafel 21 a oben 3

Verhältnis des Umfangs zur Hälfte des Durchmessers nach der verbreiteten Rechnung	6	17	8	34	17	8	34	17	8	34
nach unserem Ergebnis	6	16	59	28	1	34	51	46	14	50
Unterschied zwischen beiden	0	0	9	6	15	33	42	30	53	44

Man erkennt daraus, daß für einen Kreis, bei dem die Hälfte des Durchmessers dreitausendsechshundert Ellen [groß] ist, der Unterschied annähernd neun einzehntel Ellen beträgt.

Der Verfasser der kaiserlichen Gabe gibt an, die Hälfte des Durchmessers der Krümmung der Fixstern[sphär]e betrage siebzigtausendunddreiundsiebzig und einen halben Erddurchmesser, und bestimmt hieraus den Umfang unter der Annahme, daß er drei einsiebentel desselben (d. h. des Durchmessers) betrage, zu vierhundertvierzigtausendvierhundertzweiundsechzig Erddurchmessern. Rechnen wir es nun folgendermaßen mit dem [Wert] aus, den wir herausbekommen haben, so ist der Unterschied zwischen beiden hundert[sieben]-

Tafel 21a Mitte

Das mit den drei Zahlenziffern und der Bruchziffer	7 7 3	4 3 9 8 2 2 4 3 9 1 8	9 7 8 2 8 5
Genommene	5	3	1 4
Ergebnis		4 4 0 2 8 4	7 8
Was in der „Gabe" steht		4 4 0 4 6 2	
Unterschied zwischen beiden		1 7 7	.

undsiebzig Erddurchmesser und ein Bruch, der kleiner als ein Viertel ist. Also ist er für einen einzigen Grad der Krümmung der Fixstern[sphär]e annähernd gleich einem halben Erddurchmesser, und Gott weiß es am besten. Hieraus erkennt man, daß der Umfang dem Richtigen näher und leichter herauskommt, wenn man die Hälfte des Durchmessers mit 10
sechs [Ganzen] und siebzehn Minuten vervielfacht, als wenn man den Durchmesser mit drei einsiebentel vervielfacht.

Schluß 21a, 11

Nachweis der Fehler von Abul-Wafā' und Abur-Raiḥān (al-Bīrunī)

Wir führen nun den ersten Lehrsatz des ersten Buchs des Almagest an.

Es sei *abg* ein Halbkreis auf dem Durchmesser *adg* und [um] den Mittelpunkt *d* [und] *bd* senkrecht auf dem Durchmesser. Wir hälften *gd* in *h*, ziehen *bh*, machen *hz* gleich *bh* und ziehen *bz*.

Dann ist *dz* die Seite des Zehnecks und *bz* die Seite des Fünfecks (Vgl. Fig. 3). 13

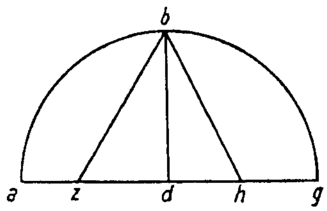

Fig. 3

Da *gd* in *h* gehälftet und in ihr[er Verlängerung] *dz* hinzugefügt ist, so ist die Fläche *gz* mal *dz* zusammen mit dem Quadrat von *dh* gleich dem Quadrat von *hz* nach dem sechsten Lehrsatz des zweiten [Buchs] der Elemente, also gleich dem Quadrat von *hb*, oder den Quadraten (d. h. der Summe der Quadrate) von *hd* und *db*. Zieht man das (beiden Seiten der Gleichung) gemeinsame Quadrat von *hd* ab, so bleibt übrig: Die Fläche *gz* mal *dz* ist gleich dem Quadrat von *db*, d. i. dem Quadrat von *gd*. Also ist die Linie *gz* im Punkte *d* nach dem mittleren und äußeren Verhältnis (d. h. nach dem goldenen Schnitt) geteilt, weil das Produkt aus der ganzen Linie und dem kleineren Teil gleich dem Quadrat des längeren Teils ist. Das hat zur Folge, daß das Verhältnis von *dz* zu *gd* gleich dem Verhältnis von *gd* zu *gz* ist, nach dem siebzehnten Lehrsatz des sechsten [Buchs] der Elemente. Hierbei ist die längere *gd* die Sehne des Sechstels des Kreises nach dem fünfzehnten Lehrsatz des vierten [Buchs] der Elemente. Also ist *dz* die Sehne des Zehntels des Kreises, wie es der zwölfte Lehrsatz des dreizehnten [Buchs] der Elemente deutlich macht, und *bz*, deren Quadrat gleich der Summe der Quadrate der beiden ist, ist die Sehne des Fünftels des Kreises nach dem dreizehnten Lehrsatz des dreizehnten [Buchs] der Elemente.

20 Ich nun behaupte: gz ist gleich der Sehne der Ergänzung der Seite des Fünfecks, d. h. gleich der Sehne von drei Zehnteln des Umfangs.

Denn du weißt schon aus dem Vorhergehenden, daß die Summe der Quadrate der Sehne eines Bogens und der Sehne seiner Ergänzung gleich dem Quadrat des Durchmessers ist. Nun ist die Summe der beiden Quadrate von bz und gz gleich dem Quadrat des Durchmessers. Das Quadrat des Durchmessers ist nämlich gleich viermal dem Quadrat der Hälfte des Durchmessers, und das Quadrat von gz ist gleich der Summe aus dem Quadrat von gd, der Hälfte des Durchmessers, dem Quadrat von dz und dem Doppelten der Fläche gd mal dz, und das Quadrat von bz ist gleich der Summe der beiden Quadrate von bd, der Hälfte des Durchmessers, und dz; also ist die Summe der beiden Quadrate von gz und bz gleich der Summe aus dem Doppelten des Quadrats der Hälfte des Durchmessers, dem Doppelten des Quadrats von dz und dem Doppelten der Fläche gd mal dz. Nun weißt du schon aus dem Vorhergehenden, daß das Quadrat der Hälfte des Durchmessers gleich der Fläche gz mal dz ist, also gleich der Summe aus der Fläche gd mal dz und dem Quadrat von dz. Also ist die Summe aus dem Doppelten der Fläche gd mal dz und dem Doppelten des Quadrats
21 b von dz gleich dem Doppelten des Quadrats der Hälfte des Durchmessers. Also ist die Summe der beiden Quadrate von bz und gz gleich viermal dem Quadrat der Hälfte des Durch-
1 messers, also gleich dem Quadrat des Durchmessers. Ist also bz die ⟨Sehne der⟩ Seite des Fünfecks, so ist gz die Sehne von drei Zehnteln (des Kreisumfangs), und das ist das Gewünschte.

2 Nun bewies Ptolemäus im dritten Lehrsatz des ersten Buchs des Almagest, daß der Unterschied zwischen der Fläche aus der Sehne eines von zwei Bögen mit der Sehne der Ergänzung des anderen und der Fläche aus der Sehne der Ergänzung jenes Bogens mit der Sehne des anderen gleich der Fläche aus dem Durchmesser mit der Sehne des Unterschieds zwischen beiden Bögen ist. Ferner bewies er im vierten Lehrsatz desselben [Buchs], daß die Summe der Fläche aus der Sehne eines von zwei Bögen mit der Sehne des anderen
5 und der Fläche aus der Sehne [der Ergänzung] ihrer Summe mit dem Durchmesser gleich der Fläche aus der Sehne der Ergänzung eines der beiden Bögen mit der Sehne der Ergänzung des anderen ist. Also ist die Summe des Quadrats der Sehne eines Bogens und der Fläche aus der Sehne [der Ergänzung] seines Doppelten mit dem Durchmesser gleich dem Quadrat der Sehne der Ergänzung jenes Bogens.

6 Wenn diese Regeln klar sind, gehen wir dazu über, die Sehne von anderthalb Teilen zu bestimmen, ferner das zu prüfen, was nach Abul-Wafā's Meinung die Sehne von einem halben Teil ist, seinen Fehler bei der Rechnung aufzuzeigen, die Sehne von einem halben Teil anzugeben und ihre Richtigkeit zu prüfen. Die Rechnung ist folgende:

Tafel 21b

Erklärung der Rechnung	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Teile	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven
Fünfmal das Quadrat des Viertels des Durchmessers, d. h. die Summe aus dem Quadrat der Hälfte des Durchmessers und einem Viertel davon	1	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Die Wurzel daraus, d. i. die Summe aus der Zehneckseite und einem Viertel des Durchmessers, d. i. hz	0	1	7	4	55	20	29	39	6	54	20
Ziehen wir davon ein Viertel des Durchmessers ab, so bleibt die Zehneckseite übrig, d. i. dz	0	0	37	4	55	20	29	39	6	54	20
Die Summe aus ihrem Quadrat und dem Quadrat der Hälfte des Durchmessers, d. i. das Quadrat der Fünfeckseite	1	22	55	4	39	30	20	53	5	40	0
Die Fünfeckseite, d. i. bz	0	1	10	32	3	13	44	21	54	54	55
Also ist die Linie *gz*, d. i. die Sehne von drei Zehnteln, nämlich die Sehne der Ergänzung von einem Fünftel des Kreises zur Hälfte desselben	0	1	37	4	55	20	29	39	6	54	20
Die Sehne von einem Drittel des Kreises, d. h. der Ergänzung von einem Sechstel, die im vierten Abschnitt vorkam	0	1	43	55	22	58	27	57	56	0	44
Die Fläche aus der Sehne des Sechstels mit der Sehne der Ergänzung des Fünftels . .	1	37	4	55	20	29	39	6	54	20	0
Die Fläche aus der Sehne des Fünftels mit der Sehne der Ergänzung des Sechstels . .	2	2	10	7	56	1	47	58	39	33	50
Der Unterschied zwischen beiden		25	5	12	35	32	8	51	45	13	50
Teilen wir ihn durch den Durchmesser, so kommt die Sehne des Drittels des Zehntels des Kreises, d. h. die Sehne von zwölf Teilen heraus	0	0	12	32	36	17	46	4	25	52	37
Ihr Quadrat	0	2	37	20	14	11	20	19	37	39	52
Ziehen wir es vom Quadrat des Durchmessers ab, so bleibt das Quadrat der Sehne von 168 Teilen übrig	3	57	22	39	45	48	39	40	22	20	8
Die Wurzel daraus	0	1	59	20	33	27	31	40	36	15	34
Fügen wir dann zu dieser Wurzel den Betrag des Durchmessers, erhöhen[13]) es um eine Stelle und ziehen die Wurzel daraus, so ergibt sich die Sehne von 174[14]) [Teilen] . . .		1	59	50	7	57	32	27	1	7	40
Fügen wir den Durchmesser zu dieser Wurzel, erhöhen[15]) es um eine Stelle und ziehen die Wurzel daraus, so ergibt sich die Sehne [von 177]		1	59	57	31	57	51	48	7	9	7
Ebenso erhalten wir die Sehne von 178° 30′.		1	59	59	22	59	22	14	35	8	41
Ziehen wir ihr Quadrat, d. h. das Erhöhte der Summe aus dem Durchmesser und der vorhergehenden Sehne von 177 vom Quadrat des Durchmessers ab, so bleibt das Quadrat der Sehne von anderthalb Teilen übrig	0	0	2	28	2	8	11	52	50	53	
Die Wurzel daraus, d. i. die Sehne von anderthalb Teilen	0	0	1	34	14	42	19	1	57	12	

Zur Unterscheidung von den aus der Rechnung erhaltenen Nullen haben wir in die von Ziffern freien Zellen Nullen in Rot eingetragen

[13]) Hs: quadrieren. [14]) Hs: 177. [15]) Hs: quadrieren.

Taf. 22a

Erklärung der Rechnung	Erste Berechnung. Nachprüfung des [Wertes], den Abul-Wafā' für die Sehne eines halben Teils ansah										Zweite Berechnung. Nachprüfung des [Wertes], den wir als [Sehne] eines halben Teils angaben										
	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Teile	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Teile	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven
Ist die Sehne eines Bogens	0	0	0	31	24	55	54	55			0	0	0	31	24	56	58	35	58	41	47
so ist ihr Quadrat	0	0	0	16	26	56	8	20	52	31	0	0	0	16	26	57	15	2	9	46	
Ziehen wir es vom Quadrat des Durchmessers ab, so bleibt als Quadrat der Sehne seiner Ergänzung übrig	3	59	59	43	33	3	51	39	7	29	3	59	59	43	33	2	44	57	50	14	
Sehne seiner Ergänzung	0	1	59	59	55	53	15	53	41	11	0	1	59	59	55	53	15	37	0	47	26
Ziehen wir das Quadrat der Sehne dieses Bogens vom Quadrat der Sehne seiner Ergänzung ab, so bleibt die Fläche aus dem Durchmesser mit der Sehne der Ergänzung des Doppelten dieses Bogens übrig	3	59	59	27	6	7	43	18	14	58	3	59	59	27	6	5	29	55	40	28	
Teilen wir sie durch den Durchmesser, so kommt die Sehne der Ergänzung des Doppelten jenes Bogens heraus	0	1	59	59	43	33	3	51	39	7	0	1	59	59	43	33	2	44	57	50	14
Ihr Quadrat	3	59	58	54	12	19	57	10	29	59	3	59	58	54	12	15	30	25	59	27	
Ziehen wir es vom Quadrat des Durchmessers ab, so bleibt das Quadrat der Sehne des Doppelten jenes Bogens übrig	0	0	1	5	47	40	2	49	30	1	0	0	1	5	47	44	29	34	0	33	
Ziehen wir daraus die Wurzel, so ergibt sich die Sehne des Doppelten jenes Bogens	0	0	1	2	49	49	40	38	42	4	0	0	1	2	49	51	48	0	25	27	14
Fläche aus der Sehne jenes Bogens mit der Sehne seines Doppelten	0	0	0	32	53	51	9	3	13	51	0	0	0	32	53	53	22	25	38	44	35
Fläche aus der Sehne der Ergänzung des einen von beiden mit der [Sehne der] Ergänzung des anderen	3	59	59	18	52	40	38	19	7	39	3	59	59	18	52	37	51	35	56	7	31
Unterschied	3	59	58	45	58	49	29	15	53	48	3	59	58	45	58	44	29	10	17	22	56
Teilen wir ihn durch den Durchmesser, so kommt die Sehne der Ergänzung des Dreifachen jenes Bogens heraus	0	1	59	59	22	59	24	44	37	57	0	1	59	59	22	59	22	14	35	8	41
Ihr Quadrat	3	59	57	31	58	1	48	15	17	18	3	59	57	31	57	51	48	7	9	7	
Ziehen wir es vom Quadrat des Durchmessers ab, so bleibt das Quadrat der Sehne des Dreifachen jenes Bogens übrig	0	0	2	28	1	58	11	44	42	42	0	0	2	28	2	8	11	52	50	53	
Also ist die Sehne des Dreifachen jenes Bogens	0	0	1	34	14	39	7	59	49	35	0	0	1	34	14	42	19	1	57	12	

Nachdem wir aus der Sehne, die Abul-Wafā' für die Sehne eines halben Teils ansah, die Sehne des Dreifachen ihres Bogens erhalten haben, welche 1 34 14 39 7 59 beträgt, wie aus dem Schluß der Tafel der ersten Berechnung [hervorgeht], und diese um drei Tertien, elf Quarten und einen Bruch kleiner als die Sehne von anderthalb Teilen ist, die wir in der vorhergehenden Tafel zu 1 34 14 42 19 1 herausbekamen, so erkennt man, daß sie (Abul-Wafā's angebliche Sehne von $\frac{1}{2}°$) annähernd um den dritten Teil des angegebenen Unterschieds kleiner als die Sehne eines halben Teils ist, daß also der Umfang, den er daraus erhielt, nicht richtig ist. Das aber, was am Schluß der Tafel der zweiten Berechnung herauskommt, stimmt mit der wirklichen Sehne von anderthalb Teilen überein, [woraus] man erkennt, daß der von uns als Sehne eines halben Teils angegebene [Wert], der an der Spitze der Tafel der zweiten Berechnung steht, richtig ist. *22a*

Was nun die Nachprüfung der Sehne von zwei Teilen betrifft,

Tafel 22a unten links

so ist das in die 8. Reihe der zweiten Berechnung Gesetzte das Quadrat der Sehne der Ergänzung von einem Teile und beträgt	3	59	58	54	12	15	30	25	59	27	
Ziehen wir nun den Durchmesser von dem um eine Stelle Erniedrigten dieser [Zahl] ab, so bleibt die Sehne der Ergänzung von zwei Teilen übrig	0	1	59	58	54	12	15	30	25	59	27
Also ist ihr Quadrat	3	59	55	36	50	14	10	48	21	7	51
Ziehen wir das nun vom Quadrat des Durchmessers ab, so bleibt das Quadrat der Sehne von zwei Teilen übrig	0	0	4	23	9	45	49	11	38	52	9
Also ist die Wurzel daraus, d. i. die Sehne von zwei Teilen, aufs Richtigste	0	0	2	5	39	26	22	29	28	32	25

Da Abur-Raiḥān (al-Bīrūnī) sie bei der Bestimmung des Umfangs des Vielecks zu 2 5 39 43 36 ansetzte, erkennt man, daß er sich darin irrte, indem dies um siebzehn Tertien und vierzehn Quarten größer als das Richtige ist, obwohl er den Sinus von einem Teil, der die Hälfte der Sehne von zwei Teilen ist, richtig in die Tafel setzte.

Dies ist das Letzte von dem, was wir auseinandersetzen wollten, und Lob sei Gott, dem Herrn der Weltbewohner.

Es endet die Schrift mit Hilfe Gottes, des Freigebigen.

II.

ERLÄUTERUNGEN

Bemerkungen über die Handschrift, den Text und die Übersetzung

Die der Übersetzung zugrunde liegende Hs befindet sich im Armeemuseum zu Istanbul (Nr. 756). Ich benutzte eine Wiedergabe der in der Öffentlichen Wissenschaftlichen Bibliothek [ehemals Preußischen Staatsbibliothek] zu Berlin befindlichen, 1933 erworbenen Photographie (*Mss. simul. or. 60*) der Hs. Diese ist in einem hübschen, sehr gleichmäßigen und gut lesbaren Nasẖī geschrieben, das nach dem Urteil von Herrn Bibliotheksrat WEISWEILER in Berlin dem zehnten oder vielleicht eher dem elften Jahrhundert der Hiğra, d. i. dem 16. oder 17. Jahrhundert unserer Zeitrechnung angehört. Die Größe des Schriftspiegels im Original ist mir nicht bekannt; auf meinen Kopien ist der Spiegel etwa 11 cm breit und 17 bis 19 cm hoch. Eine Seite, deren Text nicht durch Zahlentafeln unterbrochen ist, hat 24 bis 28 Schriftzeilen.

Eine Numerierung der Blätter in der Hs kann ich auf den Lichtbildern nicht entdecken. Anscheinend wurden die Blätter erst bei der Herstellung der Lichtbilder durch Auflegen gedruckter Nummern mit 1 bis 22 numeriert. Auf der Vorderseite jedes Blattes wurde die Blattnummer an den oberen, auf der Rückseite an den unteren Rand gesetzt. Dementsprechend bezeichne ich die Seiten mit *1b* bis *22a*. Der Inhalt erweist, daß die mit 19 und 20 numerierten Blätter vertauscht sind. Blatt 20 enthält nämlich die Abschnitte 7, 8 und den Anfang von Abschnitt 9, Blatt 19 den Schluß von Abschnitt 9, nämlich die zu den Darlegungen dieses Abschnitts gehörigen Beispiele. Die Umstellung scheint schon der Handschrift eigen zu sein, denn auf S. *20b* steht unten als Anschlußwort für das folgende Blatt الفصل, und mit diesem Worte fängt die Seite *21a* an, nicht aber die Seite *19a*, die in Wahrheit folgen müßte. Die Seiten *18b*, *19a*, *20a* haben keine Anschlußwörter; *19b* hat ebenso wie *19a* الفصل, was sowohl zu dem Anfang von *20a* paßt, wie zu demjenigen von *21a*, der bei richtiger Anordnung folgen muß. Ich behalte die vermutlich der Blätterfolge der Hs entsprechende falsche Numerierung bei und so kommt es, daß die am Rande der Übersetzung angegebenen Seitenbezeichnungen in der Anordnung *18b*, *20a*, *20b*, *19a*, *19b*, *21a* aufeinander folgen.

Bei einzelnen, in dem Lichtbild schwach herausgekommenen Wörtern und Zahlen vermute ich, daß sie in der Hs rot geschrieben sind. So scheinen in der Überschrift der Rechnung auf Taf. 18a die Wörter für Quarten, Quinten, Sexten usw. abwechselnd rot und schwarz, in den Tafeln auf 19b die Anschriften „Umfang", „Rest" *schwarz* und die Anschriften „Das, was wir aufsuchten" *rot* geschrieben zu sein. Diese Farbenunterschiede bei Wörtern gebe ich in der Übersetzung nicht wieder. Als Multiplikatoren in den Tafeln 18a oben, 18b, 19a, 19b, 20b anscheinend rot geschriebene Ziffern mache ich durch Fettdruck kenntlich. Auch ziehe ich den Strich, der sie von den übrigen Ziffern trennt, fett aus. (In der Tafel 21a Mitte erscheint dieser Trennungsstrich rot.) Ebenso verfahre ich der Gleichmäßigkeit halber bei den Multiplikatoren der Tafel 20b, obwohl diese in der Hs anscheinend schwarz geschrieben sind.

Die Strichlängen in den Tafeln gebe ich nach der Hs wieder; nur in einigen wenigen Fällen verbessere oder ergänze ich Striche stillschweigend im Sinne des sonst in der Hs Beobachteten.

Die wegen der Linksläufigkeit der arabischen Schrift in der Urschrift von rechts nach links geschriebenen Sechzigerzahlen übersetze ich durch rechtsläufig geschriebene. Wo aber K. im Text den Operationen mit Sechzigerzahlen diejenigen mit den von ihm ebenso wie von uns rechtsläufig geschriebenen Zehnerzahlen vergleichend gegenüberstellt, mußte ich die Wörter „links" und „rechts" so stehen lassen, wie sie auf die arabische Schreibung der Sechzigerzahlen zutrifft.

Auch in den Tafeln kehrte ich die linksläufige Folge der Spalten in die rechtsläufige um. Weil aber, wie ich soeben schon bemerkte, im Arabischen die mit den sogenannten indischen Ziffern geschriebenen Zehnerzahlen wie bei uns von links nach rechts im Stellenwert fallen, so stimmen natürlich in der Tafel 20b die den Stellen der Vielfachen von 2π zukommenden Spalten der Übersetzung in der Rechtsläufigkeit mit der Urschrift überein. Man kann nun schwanken, ob man die mit „Zahlen" überschriebene Spalte der Multiplikatoren wie im Urtext neben die niedrigste Stelle der Vielfachen setzen soll. Denn das heißt für den Leser des Arabischen: sie sind *vor* die Vielfachen gesetzt, für uns aber: *hinter* sie. In der genannten Tafel habe ich die Multiplikatoren so gesetzt, wie sie im Urtext stehen, d. h. an den rechten Rand der Tafel; in den späteren, entsprechenden Fällen (19a, 19b) schrieb ich sie vor die höchste Stelle der Vielfachen.

In den Figuren, deren Bezeichnung durch Fig. 1, Fig. 2, Fig. 3 von mir hinzugefügt ist, brauchte ich rechts und links nicht zu vertauschen, da im Text bemerkenswerterweise im Gegensatz zu dem sonst in arabischen mathematischen Texten Üblichen der erste Buchstabe Alif an die *linke* Ecke der Figur gesetzt ist. So stimmt die von K. aus dem Almagest I, 10 (I, S. 32 HEIBERG) entnommene Fig. 3 auch hinsichtlich rechts und links mit dem griechischen Original überein, während z. B. in aṭ-Ṭūsīs Übersetzung der Elemente nach dem römischen Druck von 1594 in typischen Fällen, z. B. beim pythagoreischen Lehrsatz, die Figur gegenüber dem griechischen Urtext an einer rechts und links vertauschenden Achse gespiegelt erscheint.

Eine Eigentümlichkeit des Verfassers ist es, zuweilen einen Satz des laufenden Textes in einer Rechentafel weiter- und zu Ende zu führen, so daß die Rechentafel sich an ein bestimmtes Wort des laufenden Textes anschließt. In der Hs steht die Tafel nicht immer genau an der betreffenden Stelle.

In die Felder von Über- und Unterschriften der Rechentafeln nicht eingetragene Wörter habe ich ergänzt. Vielleicht war allerdings zuweilen die Ausfüllung nicht beabsichtigt, so Tafel 19a, wo in der Hs bei den Unterschriften der Tafel nur die Stellenwerte der ersten und letzten Stellen eingetragen sind.

Zahlen schrieb ich in Worten oder in Ziffern, je nachdem wie sie in der Hs geschrieben sind. Die Ǧummalziffern (Buchstabenziffern) der Sechzigerzahlen gab ich durch Ziffern der Antiquaschrift wieder, die „indischen" Ziffern dagegen, mit denen die Zahlen im Zehnergefüge geschrieben sind, durch kursive Ziffern. Die am unteren Rand der 29 Berechnungstafeln, z. B. derjenigen der Tafeln 3b—17b stehenden „indischen" Ziffern sind in der Hs in sinnloser Weise so gedrängt geschrieben, daß der Eindruck mehrstelliger Zahlen entsteht. Nachdem ich diese Ziffern als Merkzahlen der Sechzigerübertragungen erkannt hatte, schrieb ich sie unter die Stellen, unter die sie gehören.

Sowohl die Ǧummalziffern wie die indischen Ziffern sind erfreulich deutlich geschrieben und weitaus in den meisten Fällen richtig. Nur wenige Ziffern, die nach dem Zusammenhang sicher falsch sind und wahrscheinlich dem Abschreiber oder seinen Vorgängern zur Last fallen, verbessere ich in der Übersetzung, natürlich unter Angabe des Befundes in der Hs.

Den in der Hs, abgesehen von den Abschnittsüberschriften und Tafeln, ununterbrochen weiterlaufenden Text suche ich in der Übersetzung durch Absätze übersichtlicher zu gestalten.

Ich war bemüht, getreu und genau zu übersetzen. Da, wo ich mir kleine Freiheiten gestatte, indem ich etwa ein Possessivsuffix unübersetzt lasse oder eine Einzahl durch eine Mehrzahl übersetze oder umgekehrt, oder eine passive Wendung durch eine aktive, geschieht es, um der deutschen Sprache keine Gewalt anzutun.

Der Gleichmäßigkeit zuliebe geschmiedete Bezeichnungen von Sexagesimalstellen wie „Tredezime", „Oktodezime" wolle man hinnehmen, obwohl sie nicht nach den lateinischen Ordnungszahlen gebildet sind.

In der Tafel 18a (oben) übersetze ich das Wort *al-maḍrūb* einmal mit Multiplikand, das andere Mal mit Multiplikator. Ich vermute, daß hinter dem mit Multiplikator übersetzten Wort ein *fīhi* ausgefallen ist. Der S. 27 (9. Z. v. u.) zugrunde liegende arabische Ausdruck für den goldenen Schnitt entspricht dem von Euklid gebrauchten. Auch an der Stelle S. 28, 1. Z. liegt die wörtliche Übersetzung einer bekannten griechischen Redeweise vor: *qawiya* mit *ʿalā* = *ἴσον δύνασθαι* mit dem Dativ. Wörtlicher könnte man hier übersetzen: „und die den beiden in der Potenz gleiche *bz* ist die Sehne . . ."

Statt der wörtlichen Übersetzung ‚Vieleck im Kreis', ‚Vieleck auf dem Kreis' gebrauchte ich die uns geläufigen Ausdrücke ‚einbeschriebenes' und ‚umbeschriebenes Vieleck'. Mit ‚Ergänzung' eines Bogens ist seine Ergänzung zu 180° gemeint, also das, was man auch ‚Supplement' nennt. ‚Wurzel' bedeutet nur ‚Quadratwurzel'. Für Wurzeln höheren Grades hatte man andere Ausdrücke. (Vgl. Nachtrag).

Mängel rein sprachlicher Art, die dem Text oder nur der zugrunde gelegten Hs anhaften, sowie offenbare Schreibfehler verbessere ich stillschweigend und erwähne sie weder in der Übersetzung noch bei der Erläuterung, wenn sie den mathematischen Inhalt nicht berühren. Wer die Hs nachprüft, wird wohl in allen diesen Fällen von selbst sehen, wie ich den Text gelesen oder verbessert habe.

Auffallend sind — diese Schlußbemerkung richtet sich an den sprachkundigen Leser — im Text der Hs gewisse in ihrer Art wiederkehrende Verstöße gegen die arabische Sprache, darunter besonders das Fehlen des Artikels an Stellen, wo die Grammatik ihn fordert, oder sein Gebrauch an Stellen, wo er fehlen muß. Solche Fehler, wie auch einige Fehler in der Wortschreibung, liegen für einen Verfasser oder Abschreiber nahe, dessen Muttersprache das Persische ist. Ich vermerke ohne Anspruch auf Vollständigkeit folgende Stellen:

2a7 بشكل الثلثين statt بالشكل الثلثين

2b2 بالشكل العروس statt بشكل العروس

18a10 خارج قسمت statt خارج القسمة

18a18—19 محيط الحقيقى للدائرة statt المحيط الحقيقى للدائرة

19a letzte Zeile غايت statt غاية

19b6 اعلى مراتب statt اعلى المراتب

19b19 لاعداد المطلوبة statt للاعداد المطلوبة

20a14 للمربع العمل statt لمربع العمل

20a21 هذا المقادير statt هذه المقادير

21a3 بحساب المشهور statt بالحساب المشهور

22a1—2 اخر الجدول العمل الاول statt اخر جدول العمل الاول

Da auch an der Stelle *18b 1* in dem Vers das undeterminierte محيط auffällt, so erhebt sich die Frage, ob solche Verstöße gegen die arabische Sprache auch schon in dem authentischen Text des Verfassers vorkamen.

Die vorkommenden Längenmaße und astronomischen Entfernungen

In anschaulicher Weise bemüht sich K., dem Leser die bei den verschiedenen Näherungswerten von π verbleibenden Fehlerintervalle an Beispielen großer Kreise im Weltenraum lebendig vorstellbar zu machen. Die hierbei in der Einleitung und an späteren Stellen der Schrift vorkommenden Längenmaße gebraucht er, wie aus der Tafelrechnung von S. 6 hervorgeht, in folgender gegenseitiger Größenbeziehung:

1 Farsang = 12000 Ellen
1 Elle = 24 Finger
1 Finger = 6 Breiten eines mittleren Gerstenkorns
1 Breite eines mittleren Gerstenkorns = 6 Dicken eines Mähnenhaars des Pferdes. Außerdem ist in der Einleitung als Beispiel für irgendein Längenmaß die Rute genannt.

Wie besonders die Quellenstudien von H. SAUVAIRE[16]) zeigen, werden die obigen Größenbeziehungen auch sonst im Schrifttum verschiedener Zeiten oft angegeben. Der Farsang ist als ursprünglich altpersisches Wegemaß (‚die Parasange') den Lesern von Herodot und Xenophon bekannt. Auf die mannigfaltigen, im Lauf des Mittelalters in den verschiedenen Ländern des Islam eingeführten Ellen kann hier nicht eingegangen werden. Es sind mir keine Angaben darüber bekannt, welche Elle in Samarqand zur Zeit K.s gebräuchlich war. Die bei der Gradmessung unter al-Ma'mūn (813—833) verwandte sogenannte ‚schwarze Elle'[17]) zu 24 Fingern scheint man von den Persern übernommen zu haben; sie hatte wie die neubabylonische Elle eine Länge zwischen 49 und 50 cm. Die Beziehungen 1 Elle = 24 Finger, 1 Finger = 6 Breiten eines Gerstenkorns bestanden schon bei den entsprechenden sumerisch-babylonischen Maßen. Die islamischen Schriftsteller geben gewöhnlich an, daß die Gerstenkörner mit dem „Bauch" des einen an den „Rücken" des anderen zu legen sind. Für die 6 auf ein Gerstenkorn entfallenden Haarbreiten wird nach SAUVAIREs Übersetzungen meistens ein Schwanzhaar des Maultiers (un crin de la queue d'un mulet) zugrunde gelegt.

Auch die Rute oder das Rohr kommt schon als babylonisches Längenmaß vor. Für das Rohr wird in islamischer Zeit ebenso wie für das babylonische Rohr eine Länge von 6 Ellen angegeben. Auch Angaben wie $6^2/_3$ Ellen, $7^1/_7$ Ellen, $7^1/_2$ Ellen, $7^2/_3$ Ellen, 8 Ellen findet man in arabischen Texten je nach der zugrunde gelegten Elle[18]).

---

[16]) H. SAUVAIRE, Matériaux pour servir a l'histoire de la numismatique et de la métrologie musulmanes. 4. partie: Mesures de longueur et de superficie. Journal asiatique (8) 8 (1886), S. 479—536. — S. auch J. A. DECOURDEMANCHE, Traité pratique des poids et mesures des peuples anciens et des Arabes, Paris 1909; A. SEGRÈ, Metrologia e circolazione monetaria degli antichi, Bologna 1928; FRITZ SCHMIDT, Geschichte der geodätischen Instrumente und Verfahren im Altertum und Mittelalter. Veröff. d. Pfälz. Ges. z. Förd. d. Wiss. **24**, Neustadt a. d. H. 1935. — Weiteres Schrifttum findet man in einigen der folgenden Artikel der Enzyklopaedie des Islām angegeben: *Dhirā'* (I, S. 1000), *Farsakh* (II, S. 73), *Ḥabba* (II, S. 196), *Isba'* (II, S. 564), *Kafīz* (II, S. 666, *Ḳarasṭūn* (II, S. 810).

[17]) Über eine Erklärung dieses Namens, die im Gegensatz zu der herkömmlichen, von den arabischen Schriftstellern gegebenen steht, vgl. D. R. WRIGHT in seiner Ausgabe von al-Bīrūnīs *Tafhīm*: The Book of Instruction in the Elements of the Art of Astrology by . . . al-Bīrūnī, London 1934, S. 119—120.

[18]) Neben dem von K. gebrauchten Wort *qaṣaba* kommt für das Rohr noch eine andere Bezeichnung vor, die von SAUVAIRE als *bāb*, von DIETERICI und VAN VLOTEN als *nāb* gelesen wird. Die letztere Lesung scheint die richtige zu sein. Vgl. FR. DIETERICI, Die Abhandlungen der Ichwân es-Safâ in Auswahl, Leipzig 1886, S. ٢٩٩, Z. 3 v. u.; Liber Mafâtîh al-'Olûm ed. G. VAN VLOTEN, Leiden 1895, S. ٩٩, Z. 8. VAN VLOTEN verweist auf VULLERS unter ناو und ناب.

Die von den Astronomen des Kalifen al-Ma'mūn ausgeführte Gradmessung[19]) ergab für einen Meridiangrad die Länge von $56^2/_3$ Meilen, die Meile zu 4000 schwarzen Ellen gerechnet. Das ergibt für den Umfang eines Großkreises der kugelförmig gedachten Erde 20400 Meilen oder, da 3 Meilen einen Farsang bilden, 6800 Farsang. A. NALLINO kommt in seiner Untersuchung der arabischen Gradmessung[20]) zu dem Ergebnis, daß die arabische Meile 1973,2 m betrug, was einer Elle von 493,3 mm entspricht. Nach einer anderen, schon von Sanad b.'Alī (9. Jahrh.) angewandten Methode, nämlich durch Messung des Erniedrigungswinkels, unter dem der Horizont des Meeres oder einer großen Ebene vom Gipfel eines Berges bekannter Höhe aus erscheint, kam al-Bīrūnī (973—1048) zu einem ähnlichen Wert wie die Astronomen al-Ma'mūns[21]). Im Tafhīm[17]) (S. 118) gibt al-Bīrūnī den Erddurchmesser zu $2163^1/_3$ Farsang an, was in naher Übereinstimmung mit der Umfangsgröße 6800 Farsang steht, denn $2163^1/_3 \cdot \pi \approx 6796$.

K. nimmt nach S. 3 den Erddurchmesser annähernd gleich $5 \cdot 497$ Farsang $= 2485$ Farsang an und gebraucht an der Stelle S. 6 (Spalte 3 der Tafel) für den „Umfang der Erde" den runden Wert 8000 Farsang. $2485 \cdot \pi$ ergibt rund 7807.

Für den Durchmesser des Tierkreises (*falak al-burūǧ*)[22]) gibt al-Bīrūnī im Tafhīm[17]) (S. 118) $44964005\frac{25}{33}$ Farsang an. Die nächste Entfernung der Fixterne ist nach derselben Schrift (S. 116) $20\,774\frac{39}{60}$ Erdhalbmesser und nach S. 117: $22\,974\,394\frac{1}{11}$ Farsang, ein Wert, der sich von dem auf den Halbmesser des Tierkreises entfallenden relativ wenig unterscheidet. Als nächste Entfernung der Fixsterne wird al-Bīrūnī seinen Wert für die größte Entfernung des Saturn angesetzt haben, denn er sagt (Tafhīm S. 116): „Bei den Astronomen wird zugrunde gelegt, daß die größte Entfernung jedes Sterns gleich der kleinsten Entfernung des darüber befindlichen Sterns ist."

Da K. (S. 3) erklärt, die dem Archimedischen Kreisumfange anhaftende Unsicherheitsspanne von $\frac{1\ \text{Durchmesser}}{497}$ betrage für den Gürtel des Tierkreises (*minṭaqat falak al-burūǧ*) weit mehr als 10^5 Farsang, so setzt er für diesen Kreis einen Durchmesser von weit mehr als 49 700 000 Farsang voraus, also einen größeren Betrag als al-Bīrūnī.

Der nach S. 26 von aš-Šīrāzī († 1311), dem Verfasser der Kaiserlichen Gabe, für den Halbmesser der Fixsternsphäre angegebene Wert von $70\,073\,^1/_2$ Erddurchmessern übertrifft den von al-Bīrūnī für die nächste Entfernung der Fixsterne angenommenen Wert von etwa 10 387 Erddurchmessern um ein Mehrfaches. Das Studium von al-Bīrūnīs Mas'ūdī'schem Kanon und von aš-Šīrāzīs Kaiserlicher Gabe wird vielleicht aufklären, wie die Verfasser zu ihren Zahlen kamen.

Messung von Bögen und Sehnen. Bogenfunktionen

Wie Ptolemäus benutzen die islamischen Mathematiker als Einheit der Messung von Kreisbögen den 360-ten Teil des Umfangs, den sie als ‚Grad' bezeichnen und sexagesimal in Minuten, Sekunden usw. unterteilen. Ebenfalls nach dem Vorbild der hellenistischen

[19]) Zu den von H. SUTER (Die Mathematiker und Astronomen der Araber usw., Leipzig 1900, S.209) gemachten Quellenangaben über diese Gradmessung vergleiche man noch al-Bīrūnīs Mitteilungen im *Tafhīm*[17]) S. 118—119, Nr. 208, im *Taḥdīd* (Hs Istanbul, Fātiḥ 3386 = Berlin MS simul. or. 36, S. 231—239) und im 7. Kapitel des 5. Buchs seines Mas'ūdī'schen Kanons.

[20]) A. NALLINO, Il valore metrico del grado di meridiano secondo i geografi arabi. Cosmos di GUIDO CORA 11 (1892-93, fasc. I-IV). — Vgl. A. NALLINO, Al-Battānī I, Mailand 1903, S. 164-165.

[21]) Al-Bīrūnī, Schrift über das Astrolab, Hs Berlin Pet. 672 (AHLWARDT 5, S. 228), 43a—43b; *Taḥdīd*[19]) S. 239 bis 245; *Tafhīm*[17]) S. 119; Mas'ūdī'scher Kanon, Buch 5, Kap. 7. — Vgl. E. WIEDEMANN, Bestimmung des Erdumfangs von al Bêrûnî. Archiv f. d. Gesch. d. Naturw. u. d. Techn. 1 (1908), S. 66—69.

[22]) Über den Tierkreis vgl. den Artikel *Minṭaka* in der Enzykl. d. Islām III, S. 577—581.

Trigonometrie dient der islamischen als Maß der Sehnen der 120-te Teil des Durchmessers. Diese Einheit wird als ‚Teil' bezeichnet. Zum Unterschied vom ‚Grad', für den ebenfalls die Bezeichnung ‚Teil' vorkommt, werde $\frac{1}{120}$ des Durchmessers als ‚Durchmesserteil' bezeichnet. Der Durchmesserteil ist etwas kleiner als der Grad, es ist nämlich 1 Durchmesserteil $= \frac{3}{\pi}$ Grad. Umgekehrt hat der Kreisumfang $360 \cdot \frac{\pi}{3} \approx 360 \cdot 1\frac{1}{21} = 377 = 377\frac{1}{7}$ Durchmesserteile. Wir werden sehen, daß K. gelegentlich von dieser Messungsweise von Bögen durch Durchmesserteile Gebrauch macht; sie entspricht der Winkelmessung durch das ‚Bogenmaß' der modernen Mathematik, und ein Durchmesserteil ist $\frac{1}{60}$ der Einheit des modernen Bogenmaßes. Auch der Durchmesserteil wird sexagesimal in Minuten usw. untergeteilt. Wenn wir mit K. schlechtweg von Minuten, Sekunden usw. sprechen, meinen wir diese sexagesimalen Unterteile des Durchmesserteils. Zur Unterscheidung von ihnen bezeichnen wir die sexagesimalen Unterteile des Grad als ‚Gradminuten' usw. Teilen wir den Halbmesser $r = 1$ sexagesimal, so sprechen wir, um Verwechslungen zu vermeiden, nicht von n Minuten usw., sondern sagen nur $n \cdot 60^{-1}$ usw.

Den in Durchmesserteilen gemessenen Sinus eines Bogens a bezeichnen wir mit $\operatorname{Sin} a$, die in Durchmesserteilen gemessene Sehne eines Bogens a mit $\operatorname{Chord} a$. Gehört in einem Kreise vom Durchmesser $d = 2r$ zum Bogen a der Zentriwinkel α, so ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sin} a &= r \sin \alpha = 60 \sin \alpha \text{ Durchmesserteile} \\
\operatorname{Cos} a &= r \cos \alpha = 60 \cos \alpha \text{ Durchmesserteile} \\
\operatorname{Chord} a &= 2 \operatorname{Sin} \frac{a}{2} = 2r \sin \frac{\alpha}{2} = 120 \sin \frac{\alpha}{2} \text{ Durchmesserteile} \\
\operatorname{Chord} (180^\circ - a) &= 2 \operatorname{Cos} \frac{a}{2} = 2r \cos \frac{\alpha}{2} = 120 \cos \frac{\alpha}{2} \text{ Durchmesserteile}
\end{aligned}$$

In den Erläuterungen werden wir die Rechnungen wiederholt dadurch vereinfachen, daß wir zu $r = 1$ und den modernen Funktionen sin, cos übergehen. K. kannte die Vorteile der schon von Abul-Wafā' al-Būzağānī (940—998) eingeführten Erleichterung $r = 1$, legte aber seinen Sehnenrechnungen den Halbmesser $r = 60$ zugrunde, weil die trigonometrischen und astronomischen Tafelwerke seiner Zeit dies taten.

Zur Einleitung

Die Lobpreisung bezieht Gottes Allwissenheit auf Mathematisches und insbesondere auf die Irrationalzahl π. Im ‚Schlüssel des Rechnens', (Buch 4 Kap. 4 Abschn. 2) sagt K. nach der Erörterung mehr oder weniger genauer Näherungswerte des Verhältnisses des Umfangs zum Durchmesser: „Aber in Wahrheit kennt es nur Gott der Gepriesene und Erhabene." Darin liegt wohl eine Hindeutung auf die Irrationalität von π. (Vgl. Nachtrag).

In dem Segenswunsch auf den Propheten ist dieser als „der Umfang der Durchmesser der rechten Leitung und des Rechts" (*muḥīṭ aqṭār al-hidāya wal-'adāla*) bezeichnet. Die Übersetzung wird dem Doppelsinn der arabischen Worte nicht gerecht, die man auch so übertragen kann: „der die Gegenden (Himmelsstriche) der rechten Leitung und des Rechts Umfassende". Wie das Wort *muḥīṭ* = der oder das ‚Umfassende', der ‚Umfang' (auch der ‚Ozean', der die Länder umgibt) hier auf den Propheten angewandt wird, so finden wir es oft auf Gott bezogen. Bei den „Treuen Freunden" heißt es: „Wie die Eins das alle Zahlen Umfassende ist, so ist Gott der Umfassende aller Dinge" (DIETERICI[18]) S. ٢٧٩ Z. 8—7 v. u.).

In diesem Zusammenhang seien noch einige Beispiele für das Hineinspielen von Mathematischem in Theologisches und für mathematisch-theologische Wortspiele beigebracht. Ich ergänze damit die Hinweise, die ich zur Erläuterung des ersten Satzes des ‚Schlüssels' gab, welcher lautet: „Lob sei Gott, der da einzig ist (*tawaḥḥada*) in der Hervorbringung der Einheiten, der da alleinig ist (*tafarrada*[23]) in der Zusammensetzung der Arten!" Wiederholt finden wir in den Briefen der „Treuen Freunde" den Schöpfer und die geschaffenen Dinge zu den Zahlen in Beziehung gesetzt, wie es die oben angeführte Stelle zeigt[24]).

Nach dem mathematisch-astronomischen Teil des Katalogs arabischer Handschriften in Bankipur[25]) teile ich einiges aus den Anfängen später Schriften über Rechnen und Geometrie mit:

S. 15—16 ist unter Nr. 2420 ein Werk „Hauptpunkte des Rechnens" von Muḥammad Bāqir b. Zain al-ʿĀbidīn al-Yazdī (Anfang des 17. Jahrh.) genannt, das beginnt: „Lob sei Gott ob der vervielfältigten Vervielfachungen (*ḍurūb*, ‚Multiplikationen') seiner Wohltaten, die er uns erwies, ..." Hinter dem Namen des Verfassers steht: möge Gott ihn (am jüngsten Tage) eine leichte Rechnung ablegen lassen!" (Vgl. Koran, Ausg. Flügel, 84, 8).

S. 18 Nr. 2423. Ein Kommentar zum Rechenbuch von Bahā'addīn beginnt „Preis sei Gott, dem großen Einen und dem ewigen Einzigen" („der großen Eins und der ewigen Ungeraden")!

S. 21 Nr. 2426. Ein „Aufstieg der Geister zur Wissenschaft des Rechnens" aus dem 17. Jahrh. fängt an: „Lob sei Gott, dessen Wissenschaft (Akk.) keine Zahl umfaßt" (*yuḥīṭ*).

S. 30 Nr. 2435. Ein später Kommentar zum ersten Buch des Euklidkommentars von aṭ-Ṭūsī beginnt: „O Du, dessen Wohltaten einen Umfang haben, der Erde und Himmel umfaßt, und dessen einfaches Wesen zum Mittelpunkt von Lob und Preis geworden ist, ..."

S. 31 Nr. 2437. Eine späte Schrift über die Winkel. Der in gereimter Prosa abgefaßte Beginn preist Gott unter anderem als den „Enthüller der verborgenen Dinge in den Winkeln".

In einem kurzen geschichtlichen Rückblick kennzeichnet K. die Genauigkeit früherer Kreisberechnungen. Ist u_n der Umfang des einem Kreise vom Durchmesser d einbeschriebenen und U_n derjenige des umbeschriebenen n-Ecks, so schließt Archimedes[26]) den Umfang u des Kreises in folgendes Intervall ein:

$$\Delta u_n = U_n - u_n = \left(\frac{10}{70} - \frac{10}{71}\right) d = \frac{d}{497}\,.$$

Bei einer Kreismessung, die K. dem Abul-Wafā' zuschreibt, beträgt diese Spanne

$$\Delta u_n = (12\cdot 60^{-2} + 55\cdot 60^{-3} + 12\cdot 60^{-4})\,\frac{d}{120} \approx \frac{3d}{100000}\,.$$

Unter der Voraussetzung $r = \frac{d}{2} = 1$ findet al-Bīrūnī

$$u_n \approx 6.16\ 59\ 10\ 48\ 0, \qquad U_n \approx 6.17\ 1\ 58\ 19\ 6\,.$$

Also ist $U_n - u_n \approx 2\frac{4}{5}\cdot 60^{-2}$ und für beliebiges d

$$\Delta u_n \approx \frac{7d}{18000}\,.$$

[23]) *ʿadad fard* = ungerade Zahl.

[24]) S. z. B. DIETERICI[18]) S. ۲۷۹, S. ۴۳۷ u. folgende, besonders S. ۴۴۲. -- Vgl. FR. DIETERICI, Die Propädeutik der Araber, Berlin 1865, S. 4—6.

[25]) Catalogue of the Arabic and Persian Manuscripts in the Oriental Public Library at Bankipore 22, Calcutta 1937.

[26]) Die von K. nicht erwähnte älteste islamische Darstellung einer Kreismessung, diejenige der Söhne des Mūsā b. Šākir, stimmt dem mathematischen Inhalt nach mit der des Archimedes überein. Vgl. Liber trium fratrum ed. M. CURTZE. Acta nova LEOPOLD. 49,₂ (1887), S. 125—130.

Sollte K. die Kreisberechnung des Ibn al-Haiṯam ($\approx$ 965—1039) kennengelernt haben, wie sie uns in der Berliner Hs[27], überliefert ist, so wundert es uns nicht, daß er sie nicht der Erwähnung wert findet; denn für die Berechnung des Zahlenwertes von π bedeutet sie keinen Fortschritt.

K. selbst will nun den Umfang u des Kreises vom Durchmesser d so genau berechnen, daß der Fehler von u wird:

$$f(u) < \frac{1 \text{ Haarbreite}}{6 \cdot 10^5 \text{ Erddurchmesser}} \cdot d\,.$$

Was K. von der Kreisberechnung des Archimedes berichtet, ist im letzten der drei Lehrsätze der auf uns gekommenen ‚Kreismessung' des großen Geometers enthalten (Arch. op. ed. Heiberg I², S. 236—242). Aber die Bemerkung (S. 3, 3. Abs.), Archimedes habe im ersten Lehrsatz des ersten Buches „seiner Schrift" bewiesen, daß der Umfang eines umbeschriebenen Vielecks größer als der des Kreises ist, paßt nicht auf die uns erhaltene Fassung der Kreismessung des Archimedes. Da diese Fassung bekanntlich nicht diejenige sein kann, die Archimedes selbst seiner Schrift gab, so könnte jemand vermuten, daß dem K. die Übersetzung eines anderen, aus mehr als einem Buch bestehenden und ursprünglicheren Textes der Kreismessung des Syrakusaners vorlag. Näher liegt aber die Annahme, daß mit „seiner Schrift" diejenige über Kugel und Zylinder gemeint ist; denn im ersten Lehrsatz des ersten Buches dieser Schrift (I², S. 10) beweist Archimedes, daß ein dem Kreis umbeschriebenes Vieleck größer als der Kreisumfang ist. Die Unklarheit bei K. könnte durch eine Auslassung in der von uns benutzten Hs verursacht sein. Auch muß man beachten, daß die kurze ‚Kreismessung' in den arabischen Handschriften auf die Schrift ‚Über Kugel und Zylinder' wie ein Anhang folgt.

Der 987 n. Chr. von Ibn an-Nadīm abgefaßte Fihrist nennt an der Spitze seiner Aufzählung von Werken des Archimedes: „Zwei Bücher über die Kugel und den Zylinder; *ein* Buch über die *Quadratur* (*tarbī'*) des Kreises". Ibn al-Qifṭī (1172—1248 n. Chr.) gibt ebenfalls diese beiden Titel an, außerdem aber vorher eine Schrift über „die Messung (*misāḥa*) des Kreises"; dieser Titel ist die genaue Übersetzung des Archimedischen Titels *κύκλου μέτρησις*.

Späteren islamischen Mathematikern waren die Schrift über Kugel und Zylinder und die Kreismessung als Glieder der Sammlung der ‚Mittleren Bücher' (*al-mutawassiṭāt*) geläufig, einer Zusammenstellung von Schriften, die im Lehrgang der mathematischen Wissenschaften zwischen den Elementen von Euklid und dem Almagest standen[28]). Die meisten dieser Schriften waren Übersetzungen griechischer Werke. Schon Ibn al-Qifṭī spricht von den „Mittleren Schriften". Aṭ-Ṭūsī (1201—1274), der viele arabische Übersetzungen klassischer mathematischer und astronomischer Werke überarbeitete, gab auch die mittleren Bücher heraus, und diese Sammlung von aṭ-Ṭūsī, die uns in zahlreichen Handschriften erhalten ist[29]), könnte unserem K. vorgelegen haben. Die sich in ihr an die Schrift über Kugel und Zylinder anschließende Redaktion der ‚Kreismessung' ist hier mit „Quadratur (*taksīr*) des Kreises" betitelt. Es sind bisher keine Unterlagen dafür bekannt, ob die von den Biographen und Lexikographen angeführten Titel ‚Quadratur des Kreises' und ‚Messung des Kreises' voneinander verschiedene Werke bezeichnen.

---

[27]) Vgl. H. SUTER, Die Kreisberechnung des Ibn al-Haiṯam. Zeitschr. f. Math. u. Phys. **44** (1899), Hist.-lit. Abt. S. 33—47.

[28]) Vgl. *Ḥ. Ḫalīfa* **5**, S. 17, Nr. 11358; M. STEINSCHNEIDER, Die Mittleren Bücher der Araber und ihre Bearbeiter. Zeitschr. f. Math. u. Phys. **10** (1865), S. 456—498; E. WIEDEMANN, Beitr. z. Gesch. d. Naturw. **78** = Sitzungsber. d. Phys.-med. Soz. z. Erlangen **58—59** (1926—27), S. 231—233.

[29]) Über die Istanbuler Handschriften vgl. M. KRAUSE, Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker. Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math., Astr. u. Phys. **B 3** (1936), S. 437—532, S. 499—504.

K. sagt nichts darüber, daß, wie wir aus Heron (Metrika I, S. 66, SCHÖNE) wissen, Archimedes noch einen genaueren Wert von π abgeleitet haben soll. Auch den von Ptolemäus (Almagest VI, 7 S. 513 HEIBERG) angegebenen Wert von π erwähnt er ebensowenig wie die den Archimedischen Wert in der Genauigkeit übertreffenden, durch Apollonius und durch Philon von Gadara vollzogenen Bestimmungen, von denen uns Eutokios berichtet (Archimedis op. ed. HEIBERG III, S. 258—260).

Die Kreisberechnung, die K. dem Abul-Wafā' zuschreibt, ist in dessen uns erhaltenen Werken bisher nicht nachgewiesen worden. Wohl aber finden wir sie mit genau denselben Zahlen in einem kurzen Handschriftentext, den FR. WOEPCKE 1860 im dritten Artikel seiner Untersuchungen über die Geschichte der mathematischen Wissenschaften bei den Orientalen mitgeteilt, ins Französische übersetzt und kritisch erläutert hat[30]). Nach seinen Angaben enthielt die schöne Hs, über deren späteres Schicksal mir nichts bekannt ist[31]), eine Sammlung der „Mittleren Bücher". In der Hs angegebene Daten über die Beendigung der Redaktion von einigen der hier gesammelten Schriften nennen die Jahre 651 und 653 der Hiǧra. Dies sind ungefähr die Jahre 1253 und 1255 unserer Zeitrechnung, und gerade in diesen Jahren wurden, wie man aus dem Katalog von KRAUSE[29]) ersieht, mehrere Ausgaben aṭ-Ṭūsīs abgefaßt. Die Hs selbst gehört der zweiten Hälfte des Jahres 1322 n. Chr. an. Wie gewöhnlich folgt auch hier auf die Schrift über Kugel und Zylinder von Archimedes seine Schrift über die Kreismessung. Ihr Titel ‚Buch über die Quadratur (*taksīr*) des Kreises' weist ebenso wie die Zeit der Abfassung auf aṭ-Ṭūsī. Nach WOEPCKEs Andeutungen enthält sie die drei Lehrsätze der uns griechisch überlieferten Kreismessung des Archimedes.

An den dritten dieser Lehrsätze schließt sich nun in der Hs die von WOEPCKE behandelte Einlage eines anscheinend nicht genannten Verfassers, also doch wohl des Herausgebers der Schriften, an, die ich jetzt nach WOEPCKEs Wiedergabe des arabischen Textes übersetze:

„Die Astronomen haben ein anderes Verfahren. Sie bestimmen nämlich nach den Prinzipien, die in der Schrift Almagest und anderen ihrer mit Beweisen versehenen Schriften bewiesen sind, die Sehne eines kleinen Bogens, der ein (aufgehender) Teil des Kreisumfangs ist, und machen sie zu einer Seite einer dem Kreise einbeschriebenen Figur. Hierbei ist ihr Verhältnis zu dem vom Mittelpunkt des Kreises auf sie fallenden Lot gleich dem Verhältnis der Seite der dem Kreise umbeschriebenen und ihr (der einbeschriebenen) ähnlichen Figur zum Halbmesser. So erhalten sie also auch diese Seite und bestimmen demgemäß zwei Größen, deren eine der [Kreis]umfang übertrifft, während er unter der anderen bleibt, so daß der Umfang mit größter Annäherung erhalten wird. Beispiel: Der Kreis sei ab, sein Mittelpunkt sei g, und sein [Stück] ab sei ein Siebenhundertzwanzigstel des Umfangs. Wir ziehen die Sehne ab. Dann ist nach der von Abul-Wafā' al-Būzaǧānī auf Grund der angegebenen Prinzipien angestellten Berechnung ihre Größe in genauester Annäherung 0 31 24 55 54 55 Quinten; dies ist nämlich die Sehne eines halben Grades, wenn der Durchmesser zu hundertzwanzig Teilen angesetzt wird. Machen wir sie zur Seite einer dem Kreise einbeschriebenen Figur von siebenhundertzwanzig Seiten, so ist demgemäß der Umfang dieser Figur 376 59 10 59 Tertien. Hälften wir nun die Sehne von einem halben Grad, so ist die Größe von ad: 0 15 42 27 57 27 Quinten. Das Quadrat hiervon ist 0 4 6 44 2 4 57 25 18 30 9 Dezimen. Das Quadrat des Halbmessers, d. i. der Linie ag, ist 3600 Teile. Ziehen wir hiervon das Quadrat von ad ab, so bleibt als Quadrat von dg übrig: 3599 55 53 15[32]) 57 55 2 34 41 29 51. Die Wurzel daraus, nämlich die Linie dg,

[30]) Journ. asiatique (5) 15 (1860), S. 281—320.

[31]) STEINSCHNEIDER erwähnt sie nicht bei der Aufzählung von Handschriften der Mittleren Bücher in seiner 1865 erschienenen Abhandlung[28]).

[32]) Nach WOEPCKE hat die Hs statt 15 fälschlich 55.

beträgt 59 59 57 56 37 56 51 Sexten. Vervielfachen wir *ad* mit dem Halbmesser *gḥ* und teilen es (das Produkt) durch *dg*, so kommt als Größe von *hḥ* heraus: 0 15 42 28 29 45 Quinten. Verdoppeln wir das, so ergibt sich 0 31 24 56 59 31 Quinten, und das ist die Größe von *hz*, der Seite der dem Kreise umbeschriebenen Figur von siebenhundertzwanzig Seiten, die der ersten ähnlich ist. Dementsprechend ist der Umfang der Figur 376 59 23 54 12 Quarten[33]). Setzen wir also den Durchmesser gleich hundertzwanzig, so ist der Umfang 376 Teile und ein Bruch, der größer als 59 10 59 0 Quarten und kleiner als 59 23 54 12 Quarten ist. Verwandeln wir dies in die Größe, die Archimedes angab, so übertrifft der Umfang das Dreifache des Durchmessers um etwas, das größer als zehn Siebzigstel und 38 41 21 Tertien, kleiner als zehn Siebzigstel und 37 47 37 Tertien und annähernd gleich zehn Siebzigstel und 38 14 29 Tertien ist."

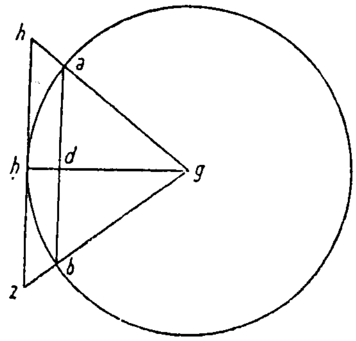

Fig. 4

Man wird nachforschen können, ob sich auch in anderen der zahlreich auf uns gekommenen Handschriften der Mittleren Bücher dieser oder ein ähnlicher Text an die Archimedische Kreismessung anschließt.

Ersichtlich schreibt der Verfasser diese Kreisberechnung nicht dem Abul-Wafā' zu, sondern bringt sie als Beispiel für ein den Astronomen eigenes Verfahren, das als Seite eines einbeschriebenen Vielecks eine solche kleine Sehne benutzt, wie sie die Astronomen bei der Berechnung ihrer Sehnen- oder Sinustafeln ausrechnen. Abul-Wafā' ist nur als derjenige genannt, der nach den trigonometrischen Methoden des Almagest und anderer einschlägiger Schriften Chord $\frac{1}{2}°$ zu 0 31 24 55 54 55 Quinten berechnet habe, und diesen Wert benutzt der Verfasser als Ausgangswert, nämlich als Seite des 720-Ecks, das ihm als *Beispiel* für das zu erläuternde Verfahren der Astronomen dienen soll. Nun ist in Wahrheit

$$\text{Chord } \tfrac{1}{2}° = 2 \text{ Sin } 15' \approx 0\ 31\ 24\ 56\ 58\ 36 \text{ Quinten.}$$

K. hat den Wert in Zeile 2 der Tafel 22a noch viel genauer angegeben. Abul-Wafā' hätte also einen gehörigen Fehler begangen. Aber WOEPCKE hat aus der Pariser Hs des Almagest von Abul-Wafā' nachgewiesen, daß dieser große Mathematiker und Astronom den angegebenen Wert von 0 31 24 55 54 55 Quinten nicht für Chord $\frac{1}{2}°$, sondern für Sin $\frac{1}{2}°$ fand, und da in Wahrheit Sin $\frac{1}{2}° \approx 0\ 31\ 24\ 55\ 54\ 0$ Quinten ist, — für das Doppelte dieses Betrages findet man in Zeile 10 der soeben genannten Tafel von K. einen noch viel genaueren Wert —, so beträgt der Fehler von Abul-Wafā' nur etwa 55 Quinten. Nach der Art, wie Abul-Wafā' an der von WOEPCKE untersuchten Stelle seines Almagest (*10b12—11b12* der Pariser Hs) Sin $\frac{1}{2}°$ berechnet, konnte er diesen Wert auch unmöglich in den Quinten genau erhalten. Denn er findet ihn mit der beschränkten Genauigkeit, die dadurch bedingt ist, daß er ihn in zwei feste Grenzen einschließt. Diese Grenzen sind die Größen zweier Sehnen, die sich durch bloße Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen und Quadratwurzelausziehungen aus gegebenen Zahlen berechnen lassen. Das Verfahren hierfür ist von

[33]) Nach WOEPCKE hat die Hs fälschlich 376 16 59 23 54 12 Quinten.

der Art desjenigen, nach welchem Ptolemäus im Almagest (I, 10) Chord 1° näherungsweise berechnet. Dieser Astronom beweist, daß

$$\frac{2}{3}\,\mathrm{Chord}\,\frac{3^\circ}{2} < \mathrm{Chord}\,1^\circ < \frac{4}{3}\,\mathrm{Chord}\,\frac{3^\circ}{4}$$

ist und kann die Schranken $\frac{2}{3}$ Chord $\frac{3^\circ}{2}$ und $\frac{4}{3}$ Chord $\frac{3^\circ}{4}$ durch rationale Operationen und Quadratwurzelausziehungen berechnen. Entsprechend beweist Abul-Wafā' in seinem Verfahren, das übrigens CANTOR und VON BRAUNMÜHL im Anschluß an WOEPCKE darstellen[34]), die Ungleichungen

$$\mathrm{Sin}\,\frac{15^\circ}{32} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{Sin}\,\frac{18^\circ}{32} - \mathrm{Sin}\,\frac{15^\circ}{32}\right) < \mathrm{Sin}\,\frac{1^\circ}{2} < \mathrm{Sin}\,\frac{15^\circ}{32} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{Sin}\,\frac{15^\circ}{32} - \mathrm{Sin}\,\frac{12^\circ}{32}\right),$$

und nimmt als Näherungswert von Sin $\frac{1^\circ}{2}$ das arithmetische Mittel der beiden durch elementare Operationen und Quadratwurzelausziehungen auffindbaren Schranken an, zwischen die er den gesuchten Wert eingeschlossen hat.

WOEPCKE berechnete den hierbei begangenen unvermeidlichen Fehler

$$\mathrm{Sin}\,\frac{16^\circ}{32} - \left[\mathrm{Sin}\,\frac{15^\circ}{32} + \frac{1}{6}\left(\mathrm{Sin}\,\frac{18^\circ}{32} - \mathrm{Sin}\,\frac{12^\circ}{32}\right)\right].$$

Er beträgt rund —47 Quinten. Daß Abul-Wafā's tatsächlicher Fehler noch um rund —8 Quinten größer ausfiel, liegt daran, daß seine Ausgangswerte für Sin $\frac{18^\circ}{32}$, Sin $\frac{15^\circ}{32}$, Sin $\frac{12^\circ}{32}$ in den Quinten fehlerhaft waren.

Daß aber Abul-Wafā' selbst den schwerwiegenden Fehler begangen hätte, Sehne und Sinus von einem halben Grad, die um mehr als eine Tertie voneinander abweichen, bis zu den Quinten einander gleichzusetzen, wird man bezweifeln müssen, wenn keine festeren Unterlagen hierfür gefunden werden als die uns vorliegenden Angaben von K. Eher muß man annehmen, die von WOEPCKE aufgefundene Textstelle aus dem 13. Jahrhundert oder eine ihr nahestehende wurde dahin mißverstanden, daß Abul-Wafā' selbst die Kreisberechnung mit dem falschen Ausgangswert Chord $\frac{1^\circ}{2} \approx 0\ 31\ 24\ 55\ 54\ 55$ Quinten angestellt habe. K. könnte einem solchen Mißverständnis zum Opfer gefallen sein. Man muß wohl annehmen, daß K. den Almagest und insbesondere die Tafeln von Abul-Wafā' nicht einsehen konnte; denn sonst wäre er der Sache ebenso auf den Grund gegangen, wie er es bei der Unstimmigkeit bei al-Bīrūnī tat. Hätte Abul-Wafā' selbst auf seinen Wert von Sin $\frac{1^\circ}{2}$ eine Kreisberechnung aufgebaut, so wäre es das Natürliche gewesen, ein einbeschriebenes 360-Eck mit der Seite Chord $1^\circ = 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1^\circ}{2}$ zu bilden.

Kennzeichnend für die geschilderte Methode der Astronomen, die wir als die trigonometrische bezeichnen wollen, ist, daß sie den Wert einer kleinen Sehne wie diejenigen von 2° oder 1° oder $\frac{1^\circ}{2}$, die die Astronomen für ihre trigonometrischen Tafeln ausgerechnet haben, sozusagen als Fertigfabrikat übernimmt und für ihre Zwecke ausnutzt, so daß die Seitenzahl des zu bildenden Vielecks z. B. $\frac{1}{2}\cdot 360$ oder $1\cdot 360$ oder $2\cdot 360$ beträgt. Was die Abweichungen dieser Art der Kreisberechnung, unter die auch das noch zu besprechende Verfahren al-Bīrūnīs fällt, von der Archimedischen Kreismessung betrifft, so hebt WOEPCKE hervor, daß, während die Methode des Archimedes durch fortwährende Verdoppelung der Seitenzahl mit rationalen Operationen und Quadratwurzelausziehungen bis zu beliebiger Genauigkeit weiter getrieben werden kann[35]), sich nach der trigonometrischen Methode des von ihm

[34]) M. CANTOR, Vorl. ü. Gesch. d. Math. I³ (1907), S. 746—747; A. VON BRAUNMÜHL, Vorl. ü. Gesch. d. Trig I. (1900), S. 56—57. — Man vergleiche auch Mīram Čelebī in seinem Kommentar zu den Tafeln des Uluġ Beg: A. SÉDILLOT, Prolégomènes des tables astr. d'Oloug-Beg, Paris 1853, S. 75—77. Hierzu A. SÉDILLOT, Journal asiatique (5) 2 (1855), FR. WOEPCKE, Journ. d. math. pures et appl. 19 (1854), S. 154—159.

[35]) Dies betonen schon die Banū Mūsā[26]) nachdrücklich.

ans Licht gezogenen Textes die Zahl π nur mit der begrenzten Genauigkeit bestimmen läßt die dadurch bedingt ist, daß die Ausgangssehne oder der Ausgangssinus der Berechnung nur in ein Intervall mit festen Enden eingeschlossen wurde. Als Fortschritt der Methode gegenüber der Archimedischen hebt WOEPCKE hervor, daß sein Text aus der Seite des einbeschriebenen Vielecks diejenige des umbeschriebenen durch eine einfache Rechnung findet — sie ist nichts anderes als der Übergang von $2r \sin \frac{360°}{n}$ zu $2r \operatorname{tg} \frac{360°}{n}$ —, während Archimedes unabhängig voneinander die Seiten des einbeschriebenen und des umbeschriebenen Vielecks berechne. Dieser Unterschied hängt damit zusammen, daß die trigonometrische Methode mit Gleichungen und sexagesimal entwickelten Zahlen arbeitet, wobei durch Abbrechen der Sexagesimalentwicklung mit oder ohne Erhöhung aus den Gleichungen leicht Ungleichungen gewonnen werden. Archimedes dagegen, der die Proportion für den Übergang vom einbeschriebenen zum umbeschriebenen Vieleck kaum übersehen haben wird stellt schrittweise Ungleichungen mit gemeinen Brüchen auf und hat seine ganze Berechnung darauf abgestellt, beim 96-Eck stehenzubleiben, um, was Eutokios hervorhebt, eine im praktischen Leben nützliche Annäherung zu geben.

Die trigonometrische Methode der Kreisberechnung lag für jeden nahe, der die Sehnenberechnungen des Almagest studierte. Ptolemäus selbst gibt π an der oben schon angeführten Stelle (Almagest VI, 7, S. 513 HEIB.) als Verhältnis der Sexagesimalzahl 3 8 30 zu 1 an. Von dieser Zahl, zu der man übrigens gelangt, wenn man den Ptolemäischen Wert Chord 1° = 1 2 50 mit 180 vervielfacht, sagt er, sie liege mit großer Annäherung in der Mitte zwischen den beiden Archimedischen Grenzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$. Eutokios, der die Vervielfachungen und Teilungen von Myriaden bei den π-Berechnern schwer verständlich findet, sagt (Archimedes III², S. 258—60 HEIB.), wenn jemand überhaupt die Kreisberechnung zum Kleineren, d. h. zu genaueren Werten von π treiben wolle, so müsse er es entsprechend den Ausführungen im Almagest durch Teile und Minuten und Kreissehnen ausführen.

Diese Aufforderung zur sexagesimal-trigonometrischen Kreismessung, der möglicherweise schon hellenistische Rechner nachgekommen waren, sehen wir in dem von WOEPCKE veröffentlichten Text befolgt. Ich bin auf die trigonometrische Kreisberechnung auch deshalb näher eingegangen, weil, wie wir sehen werden, K. ihre Vorteile mit denen der Archimedischen Kreismessung bei seinem eigenen Verfahren vereint.

Mit größerer Berechtigung als an Abul-Wafā' übt K. an al-Bīrūnī Kritik hinsichtlich der für die Seiten des ein- und des umbeschriebenen 180-Ecks benutzten Zahlenwerte. Die Kreisberechnung, die Abur-Raiḥān al-Bīrūnī im fünften Kapitel des dritten Buches seines Mas'ūdī'schen Kanons ausführt, ist, wie wir schon vorwegnahmen, ebenfalls eine trigonometrische, und sie ist der Art nach der von WOEPCKE veröffentlichten so ähnlich, daß sie dieser als Vorbild gedient haben könnte. Auch hier Sexagesimalzahlen, eine der Trigonometrie entlehnte Sehne und der Übergang zur Seite des umbeschriebenen Vielecks durch eine Rechnung, die trigonometrisch als Übergang vom doppelten Sinus eines Winkels zu seinem doppelten Tangens zu deuten ist. Es ist schade, daß al-Bīrūnī hier den falschen Ausgangswert Chord 2° = 0 2 5 39 43 36 benutzt, während er nicht nur, worauf K. hinweist, in seiner Sinustafel, die am Ende des sechsten Kapitels des genannten Buches steht, den richtigen Wert sin 1° = 1 2 49 43 bringt (hier liegt $r = 1$ zugrunde), sondern schon im vierten Kapitel den ebenfalls besseren Wert Chord 2° = 0 2 5 39 25 58 gefunden hat[36]). Den viel genaueren Wert Chord 2° = 0 2 5 39 26 22 29 . . . gibt K. (Taf. 22a, S. 31) an.

[36]) Die von K. angegebenen Zahlen stimmen mit denen der Stambuler Hs Velieddin 2277 des Mas'ūdī'schen Kanons überein. Auch SCHOY, der nach der Oxforder Hs übersetzte, hat bei diesen Zahlen keine für die von K. ausgeübte Kritik wesentliche Abweichung in seinem Werke: CARL SCHOY, Die trigonometrischen Lehren des . . al-Bīrūnī, Hannov. 1927.

Wichtiger als die zahlenmäßige Richtigkeit erscheinen uns die Wege, auf denen al-Bīrūnī Chord 2° oder Sin 1° und Chord 1° oder Sin $\frac{1^\circ}{2}$ zu finden lehrt. Ausführlich können wir hier nicht auf sie eingehen, heben aber hervor, daß sie im Gegensatz zu den festen Intervallen, in die Ptolemäus und Abul-Wafā' Chord 1° oder Sin $\frac{1^\circ}{2}$ einschließen, auf Rechnungen hinauslaufen, die den gewünschten Tafelwert beliebig genau liefern können. Abgesehen von rationalen Operationen und Quadratwurzelausziehungen führt al-Bīrūnī die Aufgabe nämlich entweder auf eine algebraisch formulierte kubische Gleichung zurück, deren sehr genaue Lösung er als Sexagesimalzahl unter der Bemerkung mitteilt, daß sie durch *istiqrā'*, d. h. ein (sicher systematisch gemeintes) Probieren gefunden werde, oder er reduziert das Problem auf eine geometrisch formulierte biquadratische Gleichung, für die er eine durch sukzessive Annäherungen zu vollziehende Lösung skizziert, oder endlich läßt er die Lösung hinauslaufen auf die beliebig genaue Annäherung an den Wert von Chord 40° durch die Folge der Sehnen der Bögen $a_1 = 30° + 10° 30'$, $a_2 = 30° + \frac{a_0}{4}$, $a_3 = 30° + \frac{a_1}{4}, \ldots$, also $a_n = 40° + \frac{2°}{4n}$. Diese Sehnen kann er durch rationale Operationen und Quadratwurzelausziehungen berechnen.

Zum ersten Abschnitt

Mit dem ersten Abschnitt beginnt K. die Darstellung seiner eigenen Kreismessung. Wie alle Kreisberechner des Altertums und des Mittelalters, die genauere Werte von π erzielten, folgt auch unser persischer Astronom insofern den Spuren des Archimedes, als er sich dem Kreis durch *regelmäßige* Vielecke annähert. Der Einfluß dieses Riesen in der Mathematik war eben übermächtig. An sich besaß schon die griechische Mathematik das Rüstzeug, um auch auf einem anderen Wege den Kreisumfang aus dem Durchmesser mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen, und sogar auf einem Wege, der π als Grenzwert einer Folge von *rationalen* Zahlen gewinnen läßt, während das Archimedische Verfahren auf Ketten ineinander geschachtelter Quadratwurzeln führt. Man hätte sich nur entschließen müssen, dem Kreise statt der *gleich*seitigen *ungleich*seitige Vielecke ein- und umzubeschreiben. Der heutige Mathematiker erkennt die Möglichkeit eines solchen Verfahrens sofort, wenn er sich vergegenwärtigt, daß der Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ durch eine überall dichte Menge von Punkten mit rationalen Koordinaten wie z. B. $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{4}{5}$ oder $x = \frac{5}{13}$, $y = \frac{12}{13}$ geht. Mit Hilfe solcher systematisch ausgewählter Punkte als Ecken oder als Berührungspunkte kann man Folgen von ungleichseitigen ein- und umbeschriebenen Vielecken mit rationalem Inhalt bilden, der bei wachsender Seitenzahl den Kreisinhalt beliebig genau darstellt[37]). Da die griechische Mathematik die genannte Eigenschaft des Einheitskreises in der Form kannte, daß sie die allgemeine Erzeugungsformel der pythagoreischen Dreiecke, d. h. der rechtwinkligen Dreiecke mit rationalen Seitenverhältnissen besaß, so läßt sich diese wurzellose Kreisberechnung mit den Hilfsmitteln der antiken Geometrie und Rechenkunst durchführen.

K. arbeitet also wie Archimedes mit *regelmäßigen* Vielecken, und wenn wir von jetzt ab wie er einfach von Vielecken sprechen, so sind sie stillschweigend als gleichseitig-gleichwinklige gedacht.

---

[37]) Eine elementare Durchführung einer solchen Kreismessung versuche ich in der Arbeit: Kreisberechnung ohne Wurzeln. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwiss. 37 (1931), S. 219—225.

Im ersten und zweiten Abschnitt, außerdem in der aus dem Almagest entnommenen Stelle des Schlußabschnitts beruft sich der Verfasser bei Beweisführungen in der üblichen Weise auf Sätze der Elemente. Nur den pythagoreischen Lehrsatz führt K. nicht nach Buch und Satznummer bei Euklid an, sondern nennt ihn (S. 6, Z. 3) ‚Lehrsatz der Braut'. Diese Bezeichnung kommt auch in anderen arabischen Texten vor, so bei Bahā'addīn (Cantor[34]) I[3], S. 786).

Die im Text angegebenen Nummern der Lehrsätze weichen nur in folgenden Fällen von den Nummern der HEIBERGschen Ausgabe des griechischen Textes ab: Der an zwei Stellen S. 4, 5. Z. v. u. und S. 6, 3. Z. als III 30 angeführte Satz ist bei HEIBERG III 31; die S. 27, 3. und 1. Z. v. u.) als XIII 12 und 13 bezeichneten Sätze sind bei HEIBERG XIII 9 und 10. Der 1594 in der Medizäischen Druckerei in Rom erschienene Druck von aṭ-Ṭūsīs Ausgabe der Elemente stimmt im ersten der genannten Fälle mit K.s Numerierung, in den beiden letzten mit derjenigen von HEIBERG überein. Der von K. (S. 27, 6. Z. v. u.) und HEIBERG mit VI 17 bezeichnete Satz ist in der genannten Ṭūsī-Ausgabe VI 16.

Aus $a : b = c : d$ folgert K. (S. 5, 1. Z.) $ad = bc$ nach VII 19. Diesen Satz 19 des siebenten Buches spricht Euklid aber nur für ganze Zahlen aus, während K. ihn auf geometrische Linien anwendet.

Der erste Abschnitt bringt einen Hilfssatz, der in einfachster Weise den Übergang von einem Vieleck zu demjenigen mit der doppelten Seitenzahl vermittelt. An Fig. 1, in der h der Kreismittelpunkt und der Bogen bd gleich dem Bogen dg ist, beweist K.

$$ad^2 = \frac{ab}{2}(ab + ag)\ .$$

Wir bezeichnen den Durchmesser ab mit $d = 2r$, den Bogen bg mit b_i, seine (in der Figur nicht gezeichnete) Sehne bg mit s_i und die Sehne ag mit c_i. Da die letztere Sehne die Sehne des Bogens $180° - b_i$ ist, der den Bogen b_i zu einem Halbkreise ergänzt, nennen wir sie kurz die ‚Ergänzungssehne' des Bogens b_i und auch die Ergänzungssehne der Sehne s_i. Ergänzungssehne soll also heißen: Sehne der Ergänzung zu 180°, ebenso wie Kosinus heißt: Sinus der Ergänzung zu 90°. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist

$$\text{(I)} \qquad c_i^2 = d^2 - s_i^2\ .$$

Bezeichnet man den aus $bg = b_i$ durch Hälftung hervorgegangenen Bogen $bd = \frac{1}{2} b_i$ mit b_{i+1}, seine Sehne bd mit s_{i+1} und die zugehörige Ergänzungssehne ad mit c_{i+1}, so wird der Inhalt des Hilfssatzes durch die Formel

$$\text{(II)} \qquad c_{i+1} = \sqrt{\frac{d}{2}(d + c_i)}$$

ausgedrückt. Sie zeigt, wie aus der Ergänzungssehne c_i des Bogens b_i diejenige c_{i+1} des Bogens $b_{i+1} = \frac{b_i}{2}$ berechnet wird.

Bezeichnet man den Bogen b_i einfach mit b, so kann man die Formeln (I) und (II) mit den Symbolen der Sehnenrechnung folgendermaßen schreiben:

$$\text{(I')} \qquad \text{Chord}^2\,(180° - b) = d^2 - \text{Chord}^2\, b$$

$$\text{(II')} \qquad \text{Chord}^2\left(180° - \frac{b}{2}\right) = \frac{d}{2}\,(d + \text{Chord}\,(180° - b))\ .$$

Nach der von K. gegebenen Formulierung läge es freilich näher, von dem Bogen $ag = a$ auszugehen und den bewiesenen Satz durch die Formel

$$\text{(II'*)} \qquad \text{Chord}^2\left(a + \frac{180° - a}{2}\right) = \frac{d}{2}\,(d + \text{Chord}\ a)$$

auszudrücken, die durch die Einsetzung $a = 180° - b$ in (II') übergeht. Für die Anwendung, die K. selbst im folgenden Abschnitt dem Satz gibt, erscheint mir die Form (II′) etwas zweckmäßiger als (II′*).

Diese Formel (II′) ist das Gegenstück zu der Formel, in die man ein Verfahren zusammenfassen kann, nach welchem Ptolemäus im Almagest aus der Sehne eines Bogens b die Sehne der Hälfte dieses Bogens ermittelt. Nachdem er nämlich vorher (I, S. 35—36 HEIBERG) nach dem pythagoreischen Lehrsatz die Ergänzungssehne Chord (180° — b) entsprechend der obigen Formel (I) oder (I′) berechnet hat, findet er (S. 39—40) die Beziehung, die mit unseren Bezeichnungen lautet:

(III) $$s_{i+1} = \sqrt{\frac{d}{2}(d - c_i)}$$

oder

(III′) $$\text{Chord}^2 \frac{b}{2} = \frac{d}{2}(d - \text{Chord}\,(180^\circ - b))\,.$$

Bezeichnet man den Zentriwinkel des Bogens b mit $2\,\varphi$, so gehen, wenn man $\frac{d}{2} = r = 1$ setzt und (vgl. oben S. 40) die Funktionen sin und cos einführt, die Formeln (I′), (II′) und (III′) über in (I″) $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$,

(II″) $$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}\,,\qquad \text{(III″)}\quad \sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}\,.$$

Die Formel (II′*) führt auf die von LAMBERT[38]) hervorgehobene Formel

(II″*) $$\sin\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sin\psi}{2}}\,.$$

Daß K. wie Ptolemäus nach *homogenen* Formeln rechnet und wie dieser den Durchmesser d zu 120 Teilen ansetzt, macht sein praktisches Rechnen etwas schwerfällig. So bedeutet beim Rechnen mit Sechzigerzahlen die in (II) geforderte Vervielfachung mit $\frac{d}{2}$ die ‚Erhöhung', des Stellenwertes um eine Sechzigerstelle. Für $d = 2$ würden die Formeln (I′), (II′), (II′*), (III′) ebenso bequem werden, wie es für uns die Formeln (I″), (II″), (II″*), (III″) sind. Viel lästiger als für den Sexagesimalrechner war die Annahme $r = 60$ allerdings für einen Rechner, der wie al-Bīrūnī in seinem Taḥdīd[19]) alle aus den Tafeln entnommenen Sechzigerzahlen zunächst in Einheiten der niedrigsten Stelle umwandelte, um mit diesen dekadisch zu rechnen. Wegen dieser Nachteile hatte al-Bīrūnī nach dem Vorgang von Abul-Wafā' seiner Sinustafel im Mas'ūdī'schen Kanon den Halbmesser $r = 1$ zugrunde gelegt, „damit wir die mühselige Angabe der Vervielfachung mit ihm (dem Sinus totus r=60) und der Teilung durch ihn aus unseren Rechnungen herausfallen lassen usw.[39]). Leider hatte sich in der Folgezeit diese Vereinfachung in den trigonometrischen und astronomischen Tafelwerken nicht durchgesetzt. Nur aus Rücksicht auf die Gepflogenheit dieser Tafelwerke legt K. in den gewaltigen Sehnen- und Umfangsberechnungen des vierten bis siebenten Abschnitts den Halbmesser $r = 60$ zugrunde und macht die Rechnung dadurch etwas umständlicher als sie für $r = 1$ geworden wäre. Er bemerkt das selbst (S. 19, Z. 11 ff.). Für die Anwendungen seiner π-Berechnung, d. h. für die sexagesimale wie für die dezimale Berechnung des Umfangs aus dem Halbmesser und des Halbmessers aus dem Umfang nimmt er dagegen am Ende des 6. Abschnitts und in den Abschnitten 8 bis 10 den Halbmesser $r = 1$ an.

[38]) Vgl. J. TROPFKE, Gesch. d. Elementar-Math. 5² (1923), S. 60.

[39]) Hs Velieddin 2277[36]), S. 84a. Vgl. SCHOY[35]) C. 34 unten.

Zum zweiten Abschnitt

Die Überschrift spricht von der Bestimmung des Umfangs „irgendeines" dem Kreise einbeschriebenen Vielecks (*ayy mudalla' yakūn*). In Wahrheit berechnet K. (Fig. 2) aus der Ergänzungssehne $c_0 = ag$ der Seite s_0 eines einbeschriebenen m-Ecks die Ergänzungssehne $c_\nu = a\d{h}$ der Seite $s_\nu = b\d{h}$ eines einbeschriebenen Vielecks mit

$$n = 2^\nu \cdot m$$

Seiten (c_ν ist zugleich der Durchmesser des Inkreises des n-Ecks), dann die Seite $s_\nu = b\d{h}$ und den Umfang $u_n = ns_\nu$ des einbeschriebenen n-Ecks und schließlich den Umfang $U_n = nt_\nu$ des umbeschriebenen n-Ecks.

Er nimmt $m = 3$ an, geht also von der Ergänzungssehne

$$c_0 = \frac{d}{2} = 60 \tag{1}$$

der Seite $s_0 = \frac{d}{2}\sqrt{3}$ des einbeschriebenen Dreiecks aus. (Im Schlußabschnitt wendet er (Taf. 21 b, 13. Reihe) dasselbe Verfahren auf $m = 30$, also $s_0 = \text{Chord } 12$, $c_0 = \text{Chord } 168°$ an.) An die Stelle der Seite des m-Ecks könnte irgendeine Sehne treten, deren Bogen in einem rationalen Verhältnis zum Kreisumfang steht, so daß die Vielecke im allgemeinen erst nach mehreren Umläufen geschlossen wären; aber von diesem allgemeineren Fall macht K. keinen Gebrauch.

Aus $c_0 = ag$ berechnet er nach dem Hilfssatz des ersten Abschnitts $c_1 = ad$, aus $c_1 = ad$ findet er nach demselben Satz $c_2 = az$, usw. Er erhält also durch ν-malige Anwendung der Formel (II) von S. 48 nacheinander

$$c_1 = \sqrt{\frac{d}{2}(d + c_0)}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{d}{2}(d + c_1)}, \quad \ldots, \quad c_\nu = \sqrt{\frac{d}{2}(d + c_{\nu-1})}\,. \tag{2}$$

Nachdem er die Berechnung bis $a\d{h} = c_\nu$ fortgesetzt hat, liefert ihm der pythagoreische Lehrsatz, d. h. die Formel (I) von S. 48, die n-Ecks-Seite $b\d{h} = s_\nu$ als Ergänzungssehne der Sehne $a\d{h} = c_\nu$:

$$s_\nu = \sqrt{d^2 - c_\nu^2} \quad \left[= \sqrt{d^2 - \frac{d}{2}(d + c_{\nu-1})} = \sqrt{\frac{d}{2}(d - c_{\nu-1})}\right]. \tag{3}$$

Die in eckige Klammern gesetzten Ausdrücke zeigen K.s tatsächliche spätere Rechnungsweise an, die auf die Formel (III) von S. 49 hinausläuft.

Dann ist der Umfang des einbeschriebenen Vielecks

$$u_n = n \cdot s_\nu = 3 \cdot 2^\nu \cdot s_\nu\,. \tag{4}$$

Dreiecksähnlichkeiten ermöglichen es nun, die Seite $kl = t_\nu$ des umbeschriebenen Vielecks durch $b\d{h} = s_\nu$, $a\d{h} = c_\nu$ und $ab = d$ auszudrücken und den Überschuß $\Delta u_n = U_n - u_n$ des Umfangs U_n des umbeschriebenen über den Umfang u_n des einbeschriebenen Vielecks aus dem letzteren zu berechnen. Es ergibt sich nämlich nacheinander:

$$\begin{aligned} s_\nu : t_\nu &= c_\nu : d \\ s_\nu : (t_\nu - s_\nu) &= c_\nu : (d - c_\nu) \\ u_n : (U_n - u_n) &= c_\nu : (d - c_\nu)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Gleichungen (1) bis (5) bilden das ganze, überaus einfache Formelsystem, nach welchem K. die Umfänge der ein- und umbeschriebenen Vielecke beliebig hoher Seitenzahl berechnet.

Setzt man für $d = 2r = 2$ in die i-te der Rekursionsformeln (2) c_{i-1} aus der vorhergehenden, dann c_{i-2} aus der ihr vorhergehenden ein usw. und verfährt entsprechend bei der Gleichung (3), so erhält man für c_i und s_i folgende geschlossene Ausdrücke, deren jeder i ineinander geschachtelte Quadratwurzeln hat:

$$c_i = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + c_0}}} \tag{2a}$$

$$s_i = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + c_0}}} = \sqrt{2 - c_{i-1}} \tag{3a}$$

Die theoretische Einfachheit dieser Kreisberechnung beruht darauf, daß nur die Folge der Ergänzungssehnen $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_\nu$ der Seiten der Vielecke mit $2\,m$, $4\,m$, $8\,m$, $\ldots$, $2^\nu m$ Ecken berechnet wird und erst zu der letzten c_ν dieser Ergänzungssehnen die Sehne selbst, d. h. die Seite s_ν des Vielecks mit $n = 2^\nu m$ Ecken.

Um diesen von K. eingeschlagenen Weg zu beleuchten, ziehen wir zum Vergleich die Berechnung der einbeschriebenen Vielecke in der Kreismessung des Archimedes heran, der diejenige unseres Autors zwar in den theoretischen Grundlagen überaus nahe steht, von der sie sich aber in der rechentechnischen Ausführung weit entfernt. Archimedes bildet wie K., der dem Syrakusaner dieses Verfahren ja letzten Endes verdankt, von $m = 3$ ausgehend, die Folge der $2^i \cdot m$-Ecke, bleibt aber schon bei $n = 2^5 \cdot 3 = 96$ stehen. Wie geht Archimedes vom $2^i \cdot 3$-Eck zum $2^{i+1} \cdot 3$-Eck über?

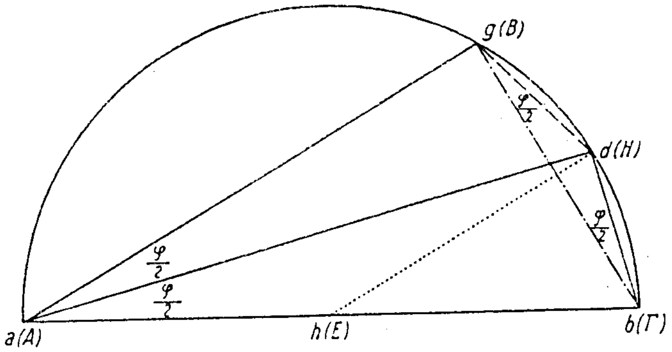

Fig. 5

In Fig. 5 ist aus der Figur des Archimedes (I, S. 241 HEIBERG) und K.s Fig. 1 das für den Vergleich Notwendige vereint. Ausgezogene Linien sind beiden Figuren gemeinsam, die strichpunktierte hat Archimedes, die punktierte K. allein. Die Buchstaben des Archimedes sind denjenigen von K. in Klammern beigefügt. Wir ziehen noch gd und bezeichnen den Winkel bag mit φ. Dann ist jeder der Winkel bad, dag, dbg und dgb gleich $\frac{\varphi}{2}$.

Archimedes geht vom rechtwinkligen Dreieck abg, das die Seite gb des Vielecks mit $n = 2^i \cdot m$ Ecken zur Kathete hat, zum rechtwinkligen Dreieck abd, das die $2\,n$-Eck-Seite bd zur Kathete hat, über, indem er die Seitenverhältnisse $ad : db$ $\left[= \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right]$ und $ab : bd$ $\left[= \operatorname{cosec} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}}\right]$ des zweiten Dreiecks aus den entsprechenden, schon bekannten Seitenverhältnissen $ag : gb$ $[= \operatorname{ctg} \varphi]$ und $ab : bg$ $\left[= \operatorname{cosec} \varphi = \frac{1}{\sin \varphi}\right]$ des ersten Dreiecks berechnet. *Er berechnet also die Verhältnisse zweier Seitenpaare des Dreiecks abd aus den Verhältnissen der beiden entsprechenden Seitenpaare des vorhergehenden Dreiecks abg.* K. dagegen berechnet nur ad aus ag und dem Durchmesser, oder, wie wir sagen können, um den Gegensatz zu Archimedes besser hervortreten zu lassen, *er berechnet nur das eine Seitenverhältnis $ad : ab$ $\left[= \cos \frac{\varphi}{2}\right]$ des Dreiecks abd aus dem einzigen, als bekannt vorausgesetzten entsprechenden Seitenverhältnis $ag : ab$ $[= \cos \varphi]$ des vorhergehenden Dreiecks abg.*

7*

Die Formel für diese Berechnung von K. erhält man übrigens rasch, wenn man zu der von Archimedes aufgestellten Proportion

$$AH : H\Gamma = (A\Gamma + AB) : B\Gamma,$$

also

$$ad : db = (ab + ag) : bg$$

die aus der Ähnlichkeit der Dreiecke gbd und ahd hervorgehende Proportion

$$ad : ah = bg : ab$$

hinzunimmt. Aus diesen beiden Proportionen folgt nämlich der von K. im ersten Abschnitt abgeleitete Satz

$$ad^2 = ah\,(ab + ag),$$

d. h. die Formel (II) von S. 48.

Trigonometrisch gesprochen geht Archimedes von $\operatorname{ctg}\varphi$ und $\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}$ zu denselben Funktionen des halben Winkels über nach dem Formelpaar

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{cosec}\varphi, \quad \operatorname{cosec}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2} + 1},$$

während K. den Übergang mit der einzigen Formel

$$\text{(II'')} \qquad \cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\varphi}{2}}$$

vollzieht. Archimedes hat etwas mehr Rechenarbeit, da er bei jedem Übergang quadrieren, addieren und radizieren muß, während K. nur addieren, hälften und radizieren muß.

Der Vergleich mit der Archimedischen Kreismessung zeigt, wie einfach das Verfahren K.s ist. Diesem sehen wir am klarsten auf den Grund, wenn wir es auf die geschlossene trigonometrische Form bringen. Die Seite s_i ist die Sehne des 2^i-ten Teils des ursprünglichen Bogens b_0; c_0 ist die Ergänzungssehne von s_0 und c_i diejenige von s_i. Deshalb lassen sich, wenn wir $r = 1$ voraussetzen und für diesen Fall das Symbol Chord durch chord ersetzen, die Formeln (2a) und (3a) von S. 51 schreiben:

$$\text{(2a')} \qquad c_i = \operatorname{chord}\left(180^\circ - \frac{b_0}{2^i}\right) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \operatorname{chord}\,(180^\circ - b_0)}}}$$

$$\text{(3a')} \qquad s_i = \operatorname{chord}\frac{b_0}{2^i} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \operatorname{chord}\,(180^\circ - b_0)}}}$$

Jeder der beiden rechts stehenden Ausdrücke hat i Wurzelzeichen. Für $i = 1$ geht (2a') in (II') von S. 48 und (3a') in (III') von S. 49 über, wenn man in diesen beiden Formeln den Durchmesser d gleich 2 setzt und für b_0 einfach b schreibt.

Geht man in (2a') und (3a') zu den Funktionen cos und sin über, indem man den Umfangswinkel des Bogens b_0 mit φ bezeichnet, so erhält man die Formeln

$$\left.\begin{aligned} &\text{(2a'')} \qquad c_i = 2\cos\frac{\varphi}{2^i} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + 2\cos\varphi}}} \\ &\text{(3a'')} \qquad s_i = 2\sin\frac{\varphi}{2^i} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + 2\cos\varphi}}} \end{aligned}\right\} \text{(i Quadratwurzeln).}$$

Die Formeln (II'') und (III'') von S. 49 stellen die Sonderfälle $i = 1$ dieser Formeln dar.

Trigonometrisch bedeutet also das Verfahren von K. letzten Endes die Berechnung von s_i nach der Formel (3a'), die die Sehne des Bogens $\frac{b_0}{2^i}$ aus der Ergänzungssehne des Bogens b_0, oder der Formel (3a''), die den Sinus des Winkels $\frac{\varphi}{2^i}$ aus dem Kosinus des Winkels φ zu berechnen lehrt. Diese Formeln aber wurden abgeleitet mit Hilfe der von K. im ersten Abschnitt in geometrischem Gewande bewiesenen Halbbogenformel (II') von S. 48, d. i. der

Halbwinkelformel (II'') von S. 49. Nach dieser Formel geht Chord $\left(180° - \frac{b}{2}\right)$ in sehr einfacher Weise aus Chord $(180° - b)$ hervor (oder $\cos\frac{\varphi}{2}$ aus $\cos\varphi$), während es für die Berechnung von Chord $\frac{b}{2}$ aus Chord b (oder von $\sin\frac{\varphi}{2}$ aus $\sin\varphi$) keine ebenso einfache Formel gibt. Die Ptolemäische Halbbogenformel (III') von S. 49 liefert nur mit dem fortwährenden Umweg über den pythagoreischen Lehrsatz die Formeln (2a') und (3a'). Nach dem Archimedischen Verfahren läßt sich die Seite s_i des Viel-Ecks überhaupt nicht durch einen geschlossenen Ausdruck wiedergeben, es sei denn, daß man aus den beiden Archimedischen Übergangsformeln die des K. ableitet.

Daß K. die Formel (II') besitzt und ausnutzt, erscheint mir der Hervorhebung wert, so naheliegend uns ihre Ableitung aus (III') erscheinen mag. Eine derartige Verwendung der Vorzüge, die diese Formel gegenüber der Ptolemäischen Halbbogenformel (III') hat, ist mir weder bei Ptolemäus noch anderswo in der griechischen Trigonometrie bekannt, und auch bei den islamischen Mathematikern scheint die Anwendung dieser fruchtbaren Formel oder der ihr entsprechenden Kosinusformel (II'') bisher nicht nachgewiesen zu sein. Auch ob die Inder sie bei ihren Berechnungen der Funktionen des halben Winkels und des Kreisumfangs verwendeten, bedarf wohl noch näherer Untersuchung[40].

Bemerkenswert ist in dieser Hinsicht das Verhalten von al-Bīrūnī. Im zweiten Kapitel des dritten, der Trigonometrie gewidmeten und oben (S. 46) schon erwähnten Buches seines Mas'ūdī'schen Kanons gibt er Vorschriften, nach denen aus einer gegebenen Sehne Chord a die Sehnen Chord $\frac{a}{2}$, Chord $\frac{a}{4}$, Chord $\frac{a}{8}$, ... berechnet werden sollen. Die eine der beiden für Chord $\frac{a}{2}$ gegebenen Vorschriften entspricht der Ptolemäischen Formel (II') von S. 48. Aber für Chord $\frac{a}{4}$, Chord $\frac{a}{8}$ usw. werden die Vorschriften verwickelt. Bringt man z. B. die für Chord $\frac{a}{4}$ gegebene Vorschrift auf eine Formel mit Sinus- und Kosinusfunktionen, so erhält man

$$\text{(B)} \qquad \sin\frac{\varphi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sin\frac{\varphi}{2}\,(1-\cos\varphi)}{\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\varphi}}\,.$$

Bei K. dagegen hat man nach (3a'') von S. 52:

$$\text{(K)} \qquad \sin\frac{\varphi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\varphi}}\,.$$

SCHOY[36]) sagt (S. 12), es sei natürlich leicht, von al-Bīrūnīs Formeln für Chord $\frac{a}{2i}$ „auf die Sinusgrößen überzugehen“ und gibt anschließend aus HAMMERs Trigonometrie unsere Formeln (2a'') und (3a'') wieder. Das ist irreführend, denn mit diesen Formeln haben diejenigen al-Bīrūnīs nichts zu schaffen. Der von SCHOY angedeutete Übergang führt z. B. für Chord $\frac{a}{4}$ auf die verwickelte Formel (B), von der al-Bīrūnī keine Brücke zur Formel (K) geschlagen hat. Al-Bīrūnī besitzt eben nicht K.s Formel (II) oder (II''), die der Schlüssel zu den Formeln (2a'') und (3a'') für die fortgesetzte Winkelhälftung ist.

Bei VIETA[41]) dagegen fällt wie bei K. das Schwergewicht auf die Folge der Ergänzungssehnen c_i, die er in Erweiterung eines Begriffs aus dem zehnten Buch der Elemente als die ‚Apotomen' der Vielecksseite s_i bezeichnet. Für diese Apotomen hat er die Formel (2a)

---

[40]) Über diese Formel vgl. TROPFKE[38]) 5², S. 60.

[41]) FR. VIETA, Opera mathematica ed. VAN SCHOOTEN, Leiden 1646, S. 398—400.

von S. 51. VIETA gelangt, von $s_0 = c_0 = \sqrt{2}$ ausgehend, zu seiner Darstellung von $\frac{2}{\pi}$ durch das unendliche Produkt $\frac{c_0}{2}\cdot\frac{c_1}{2}\cdot\frac{c_2}{2}\cdot\ \ldots$.

Daß später LUDOLF VAN CEULEN[42]) mit den Formeln (2a) und (3a) von S. 51 arbeitet, ist nicht überraschend. Aber er benutzt ungeschickterweise immer noch die Formeln (III) und (I) zur Herleitung von (2a).

Zum dritten Abschnitt

Der dritte Abschnitt zerfällt in vier Teile:

1. Der Verfasser formt die im ersten Abschnitt gestellte Genauigkeitsforderung um. (S. 6/7, 1. u. 2. Abs.)
2. Er berechnet eine obere Grenze für die der Genauigkeitsforderung genügende Seite s_ν des einbeschriebenen Vielecks mit $n = 2^\nu \cdot 3$ Seiten. (S. 7, unterer Abs.)
3. Er bestimmt den zu s_ν gehörigen Exponenten ν in der Seitenzahl $n = 2^\nu \cdot 3$. (S. 8, Z. 11 ff.)
4. Er untersucht, bis zur wievielten Sexagesimalstelle die vorkommenden Zahlen zu berechnen sind, damit die Rechenschärfe hinreicht. (S. 8, Schluß-Abs. v. 3. Abschn.)

Zu 1.

Indem K. zunächst die Genauigkeitsforderung des ersten Abschnitts (vgl. S. 42)

$$f(u) < \frac{1\ \text{Haarbreite}}{6\cdot 10^5\ \text{Erddurchmesser}}\cdot d$$

auf die Form

$$f(u) < \frac{1\ \text{Haarbreite}}{6\cdot 10^5\ \text{Erdumfänge}}\cdot u$$

bringt, kommt er dem Begriff des relativen Fehlers $r = \frac{f(u)}{u}$ näher, ohne diesen Begriff zu definieren.

In der Tafelrechnung von S. 6 will er nun beweisen, daß seine Genauigkeitsforderung erfüllt ist, wenn der Fehler des Umfangs weniger als eine Gradoktave, d. h. eine Oktave von einem Grad des Umfangs beträgt. Er behauptet nämlich

$$\varrho = \frac{1\ \text{Gradoktave}}{360\ \text{Grad}}\left[= 10\cdot 60^{-10}\right] < \frac{1\ \text{Haarbreite}}{6\cdot 10^5\ \text{Erdumfänge}}\,.$$

Es ist

$$(10\cdot 60^{-10})\cdot(6\cdot 10^5\ \text{Erdumfänge}) < \underbrace{\overbrace{\underbrace{\overbrace{60^{-9}\cdot 10^5\cdot 8000}^{\text{Farsang}}\cdot 12000}_{\text{Ellen}}\cdot 24}^{\text{Finger}}\cdot 36}_{\text{Haarbreiten}} = \frac{200}{3^5}\ \text{Haarbreiten} \approx 0.823\ \text{Haarbreiten.}$$

Das ist etwas mehr als $\frac{4}{5}$ Haarbreiten, nicht weniger, wie K. herausbekommt, nachdem er in Zeile 7 stark nach unten abgerundet hat.

Die Genauigkeitsforderung ist also erfüllt, wenn man den relativen Fehler des Umfangs oder des Näherungswertes von 2π

$$r = \frac{f(u)}{u} < \varrho = \frac{1\ \text{Gradoktave}}{360\ \text{Grad}} = \frac{60^{-8}}{360} = 10\cdot 60^{-10}$$

macht. Es bleibe dahingestellt, ob K. von einer solchen zahlenmäßigen Formulierung seiner

[42]) LUDOLF VAN CEULEN, Van den Cirkel, Delft 1596 (nicht eingesehen); LUDOLFI A CEULEN de circulo et adscriptis liber ed. WILLEBRORD Snellius 1619.

Genauigkeitsforderung ausging, oder der im ersten Abschnitt gegebenen populären Fassung. Diese könnte er nachträglich konstruiert haben.

Erst recht ist die Genauigkeitsforderung erfüllt, wenn als obere Fehlergrenze nicht eine Gradoktave, sondern eine Oktave eines Durchmesserteils gesetzt wird; denn wenn man den Umfang in Durchmesserteilen mißt, so tritt in der letzten Ungleichung an die Stelle des Nenners 360 der Nenner

$$360 \cdot \frac{\pi}{3} \approx 360\left(1 + \frac{1}{21}\right) = 377 + \varepsilon\,, \quad \varepsilon < 1\,.$$

Statt des Wortes für 377 (S. 7, Z. 1) steht in der Hs das Wort für 366, dem ich keinen Sinn geben kann. An sich wäre an dieser Stelle auch die Lesung „376 und ein Bruch" sinnvoll, aber K. müßte dann einen viel genaueren Näherungswert als $3\frac{1}{7}$ für π zugrunde gelegt haben, was an dieser Stelle nicht zu erwarten ist und für die Abschätzung unnötig wäre. Auch kurz nach dieser Stelle (S. 7, letzte Z.) legt er $\pi \approx 3\frac{1}{7}$ zugrunde. Daß ein Abschreiber statt des von mir als richtig angenommenen Wortes für 77 das Wort für 66 liest, ist allerdings ungewöhnlich; eher hätten die Lesungen 79 oder 97 oder 99 unterlaufen können.

Einfacher können wir die Ersetzung der Gradoktave durch die Oktave eines Durchmesserteils dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir

$$r < \varrho = 10 \cdot 60^{-10}$$

ersetzen durch

$$r < \sigma = 10 \cdot 60^{-10} \cdot \frac{3}{\pi}\,.$$

Zu 2.

Diese Aufgabe läßt sich folgendermaßen lösen:

Der relative Fehler des Näherungswertes von 2π ist

$$r = \frac{f(u)}{u} < \frac{U_n - u_n}{u_n} = \frac{\Delta u_n}{u_n} = \frac{d - c_\nu}{c_\nu}\,, \text{ nach (5) von S. 50.}$$

Also ist die Forderung $r < \sigma$ erfüllt, wenn man s_ν aus

$$\frac{d - c_\nu}{c_\nu} = \sigma\,, \qquad s_\nu^2 = d^2 - c_\nu^2, \text{ nach (3) von S. 50,}$$

bestimmt. Es ergibt sich

$$s_\nu^2 = d^2 \cdot \frac{\sigma^2 + 2\sigma}{(\sigma + 1)^2} > d^2\,(2\sigma - 3\sigma^2)\,.$$

Erst recht ist die Genauigkeitsforderung erfüllt, wenn man schrittweise s_ν so weiter verkleinert, wie es die beiden folgenden Gleichungen angeben:

$$s_\nu^2 \leqq d^2\,(2\sigma - 3\sigma^2) = d^2\left[20 \cdot 60^{-10} \cdot \frac{3}{\pi} - 300 \cdot 60^{-20} \cdot \left(\frac{3}{\pi}\right)^2\right],$$

$$s_\nu \leqq d \cdot 4 \cdot 60^{-5} = 120 \cdot 4 \cdot 60^{-5} = 8 \cdot 60^{-4}. \text{ Durchmesserteile.}$$

Die Genauigkeit reicht also hin, wenn man s_ν gleich oder kleiner als 8 Quarten eines Durchmesserteils macht. K. erhielt statt dessen (S. 8, Z. 10) das hinreichende Ergebnis: gleich oder kleiner als 7 solcher Quarten. Er findet es folgendermaßen:

Ist in Fig. 2 $b\d{h}$ die gesuchte, hinreichend kleine Vieleckseite, so fordert er, da $1 - \frac{1}{21} < \frac{3}{\pi}$ ist,

$$r < \frac{\Delta u_n}{u_n} = \frac{kl - b\d{h}}{b\d{h}} = \frac{i\d{t}}{\d{h}i} < 10 \cdot 60^{-10} \cdot \left(1 - \frac{1}{21}\right) < \sigma\,.$$

Da nun für eine sehr kleine Vielecksseite mit sehr großer Annäherung

$$\d{h}i = \d{h}\d{t} - i\d{t} = \frac{d}{2} - i\d{t} \approx 60 \text{ Durchmesserteilen ist, so ergibt sich}$$

$$i\d{t} < \approx 10 \cdot 60^{-9} \cdot \frac{20}{21} \text{ Durchmesserteilen,}$$

und K. überblickt ohne weiteres, daß die Forderung sicher durch

$$i\underset{.}{t} < 8 \cdot 60^{-9} \text{ Durchmesserteile} = 8 \text{ Nonen}$$

erfüllt ist. Die genaue Ausrechnung ergibt

$$i\underset{.}{t} < \frac{200 \cdot 60}{21 \cdot 60^{10} + 200} \text{ Durchmesserteile} < 8 \text{ Nonen.}$$

Die im Text gemachten Forderungen

$$\frac{i\underset{.}{t}}{hi} < \frac{\frac{1}{6}\text{ Gradoktave}}{1}\left(1 - \frac{1}{21}\right) \text{ und } \frac{i\underset{.}{t}}{hi} < 8 \text{ Nonen}$$

sind dahin zu berichtigen, daß $i\underset{.}{t}$ statt $\frac{i\underset{.}{t}}{hi}$ zu setzen ist.

Weiter gilt

$2\, i\underset{.}{t} = ab - a\underset{.}{h} = d - c_\nu < 16 \cdot 60^{-9}$ Durchmesserteile,

$s_\nu^2 = d^2 - c_\nu^2 = (d + c_\nu)(d - c_\nu)$.

Da nun $d - c_\nu = 2\, i\underset{.}{t}$ und für sehr kleines s_ν mit sehr großer Annäherung $d + c_\nu$ durch $2\, d = 4 \cdot 60$ Durchmesserteile ersetzt werden kann, so ergibt sich $s_\nu^2 < \approx 4 \cdot 60 \cdot 16 \cdot 60^{-9} = 64 \cdot 60^{-8}$ Durchmesserteile, und K. überblickt ohne weiteres, daß die Forderung sicher durch

$$s_\nu < 7 \cdot 60^{-4} \text{ Durchmesserteile} = 7 \text{ Quarten}$$

erfüllbar ist. Die wirkliche Ausrechnung ergibt $s_\nu^2 = 8 \cdot 60\, i\underset{.}{t} - 4\, i\underset{.}{t}^2$, und für $it < 8 \cdot 60^{-9}$ Durchmesserteile ist $s_\nu \leqq 7 \cdot 60^{-4}$ Durchmesserteile hinreichend klein.

Zu 3.

Der zu s_ν gehörige Bogen hat, in Grad gemessen, die Größe

$$b_\nu = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{3 \cdot 2^\nu}.$$

In Durchmesserteilen gemessen beträgt er $b_\nu \cdot \frac{\pi}{3}$, und es ist

$$s_\nu < b_\nu \cdot \frac{\pi}{3} < b_\nu \left(1 + \frac{1}{21}\right).$$

Die Forderung $s_\nu < 7$ Quarten wird also erfüllt durch

$$b_\nu \left(1 + \frac{1}{21}\right) = \frac{360}{3 \cdot 2^\nu}\left(1 + \frac{1}{21}\right) < 7 \text{ Quarten.}$$

K. löst diese Exponentialungleichung in der Tafel 3a durch Versuchen, indem er die Seitenzahl $n = 3 \cdot 2^i$ und den Bogen $\frac{120^\circ}{2^i}$ nacheinander für $i = 0, 1, 2, \ldots$ ausrechnet. Die Ergebnisse sind sexagesimal geschrieben. Für $i = \nu = 28$ unterschreitet das $\frac{22}{21}$-fache des Bogens erstmalig die Schranke 7 Quarten. Als zugehörige Seitenzahl $n = 3 \cdot 2^{28}$ ergibt sich die Sechzigerzahl 1 2 8 16 12 48. Im Zehnergefüge ist das 800 335168. K. muß also dem Kreise ein Vieleck von 800 335168 Seiten ein- und umbeschreiben, um den Kreisumfang mit der gewünschten Genauigkeit zu finden.

Zu 4.

Der Fehler des Umfangs $f(u) < 60^{-8}$ Durchmesserteile beruht darauf, daß u nur in ein Intervall $\Delta u_n = U_n - u_n$ eingeschlossen werden kann. Zu diesem Fehler, den wir den Intervallfehler nennen wollen, tritt derjenige hinzu, der dadurch hervorgerufen wird, daß die Sexagesimalzahlen U_n und u_n und die Zahlen, aus denen sie hervorgehen, nur bis zu einer gewissen Sexagesimalstelle berechnet werden. Derartige Fehler mögen als Abkürzungsfehler bezeichnet werden.

In K.s Überlegungen über die Größe und den Einfluß der Abkürzungsfehler vermissen wir die ausdrückliche Feststellung, daß die Abkürzungsfehler zu dem Intervallfehler hinzukommen, und daß der durch Überlagerung dieser beiden Fehlergattungen entstehende Gesamtfehler für die Genauigkeit des Ergebnisses maßgebend ist. Um u, also π, auf eine bestimmte Anzahl von Stellen richtig anzugeben, müßte, da nichts darüber ausgemacht ist, wie nahe u etwa an u_n oder U_n herankommt, erreicht werden, daß dieser Gesamtfehler kleiner als die Hälfte einer Einheit der letzten angegebenen Sexagesimalstelle wird.

Im vorliegenden Abschnitt fehlt auch eine Äußerung darüber, daß bei der Berechnung jedes einzelnen der Werte $c_1, c_2, \ldots, c_{28}, s_{28}, u_n\ \Delta u_n, U_n$ ein Abkürzungsfehler begangen wird, und daß es zwar sehr unwahrscheinlich, aber nicht von vornherein unmöglich ist, daß diese Abkürzungsfehler alle oder überwiegend dasselbe Vorzeichen haben und sich verstärken. An diese Möglichkeit hat K. aber gedacht, und er hat deshalb im siebenten Abschnitt nachträglich die tatsächlichen Abkürzungsfehler nacheinander berechnet.

Zunächst (S. 8, Z. 25) spricht der Verfasser so, als genüge es, wenn der Abkürzungsfehler des Umfangs ebenso wie dessen Intervallfehler kleiner als eine Oktave eines Durchmesserteils bleibt. Er glaubt diese Genauigkeit dadurch zu erreichen, daß er den Abkürzungsfehler von s_{28} kleiner als eine Tredezime macht. Würde er aber hierbei etwa u_n nach unten und $\Delta u_n = U_n - u_n$ nach oben abzukürzen haben, so ist, zumal die Seitenzahl n etwas größer als 60^5 ist, nicht von vornherein sicher, ob der Wert der abgekürzten Größe Δu_n unter einer Oktave bleibt. Von dem später vorgenommenen Übergang zum Mittelwert $u = \frac{U_n + u_n}{2}$ ist im vorliegenden Abschnitt noch nichts gesagt.

Tatsächlich berechnet K. denn auch, wie man aus Taf. 17b ersieht, s_{28} bis auf die Quattuordezimen und verschärft diese Berechnung im siebenten Abschnitt durch eine Verfeinerung der vorhergehenden Rechnungen, die einer Berechnung aller c_i auf eine Stelle mehr gleichkommt. Damit drückt er den Abkürzungsfehler auf ein gesünderes Verhältnis zu dem durch das Stehenbleiben bei $\nu = 28$ verursachten Intervallfehler herab.

Weiter erhebt sich für ihn die Frage: Wenn s_{28} mit einem Höchstfehler von 1 Tredezime berechnet werden soll, wie genau müssen dann die Größen berechnet werden, aus denen s_{28} gefunden wurde? Rückwärts gehend sucht K. deshalb nach der für s_{28}^2, $c_{28}^2 = d^2 - s_{28}^2$, $c_{27}, \ldots, c_2, c_1$ erforderlichen oder hinreichenden Genauigkeit. Verstehen wir ihn recht, so kommt er durch nicht einwandfreie Überlegungen zu dem Ergebnis, daß z. B. bei s_{28}^2 und c_{28}^2 der Fehler den Betrag von 7 Septendezimen nicht überschreiten dürfe. Er hätte für s_{28}^2 als obere Fehlergrenze etwa 14 Septendezimen ansetzen sollen; denn für hinreichend kleines δ ist $(s_{28} + \delta)^2 \approx s_{28}^2 + 2\,\delta \cdot s_{28}$.

Die Überlegungen führen K. (Ende des 3. Abschn.) zu dem Entschluß, alle c_i bis auf die Oktodezimen genau zu berechnen. Hier vermissen wir eine Äußerung darüber, ob er diese für jedes c_i geforderte gleiche Genauigkeit zur Erreichung der für s_{28} geforderten Genauigkeit für *notwendig* hält. Da er im siebenten Abschnitt sogar die Abkürzungsfehler dieser Größen nacheinander näherungsweise ausrechnet, also die Undevizesen berücksichtigt, so hat er entweder tatsächlich die Ausrechnung aller c_i bis zu den Oktodezimen oder Undevizesen für notwendig gehalten, oder er betrachtete diese Genauigkeit als hinreichend, ohne sich darüber Rechenschaft zu geben, ob sie notwendig. Sie ist nicht für alle c_i notwendig und K. hätte sich erhebliche Rechenarbeit sparen können, wenn er das erkannt hätte.

Es hätte nämlich genügt, die ersten der Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ mit geringerer Genauigkeit zu berechnen und erst mit wachsendem Index i von c_i die Genauigkeit zu steigern. Dies soll jetzt gezeigt werden.

Unter der Voraussetzung $r=1$ geschehen die Berechnungen nach den Formeln

(1) $$c_1=\sqrt{3},\quad c_i^2=2+c_{i-1},\qquad i=2,3,\ldots,28,$$

(2) $$s_{28}^2=2-c_{27},$$

(3) $$u_n=n\cdot s_{28},\quad n=3\cdot 2^{28}=60^5+2\cdot 60^4+8\cdot 60^3+16\cdot 60^2+12\cdot 60+48.$$

Es sei

F_i der absolute Betrag des Gesamtfehlers von c_i, $i=1,2,\ldots,28$,
$F(s_{28})$ „ „ „ „ „ „ s_{28},
$F(u_n)$ „ „ „ „ „ „ u_n,

Ferner sei

f_i der absolute Betrag des Abrundungsfehlers von c_i, $i=1,\ldots,28$,
$f(s_{28})$ „ „ „ „ „ „ s_{28},
$f(u_n)$ „ „ „ „ „ „ u_n.

Unter dem Abrundungsfehler $f(g)$ einer Größe g wird hierbei der Fehler verstanden, der durch ihre Abrundung auf eine bestimmte Anzahl von Sexagesimalstellen begangen wird. Der Gesamtfehler $F(g)$ von g berücksichtigt auch die Abrundungsfehler $f(a)$, $f(b)$, ... der Größen a, b, ..., aus denen g berechnet wird. Aus (1), (2) und (3) folgt

(4) $$F_1=f_1,\quad F_i<\frac{F_{i-1}}{2c_i}+f_i,\quad i=2,3,\ldots,28,$$

(5) $$F(s_{28})<\frac{F_{27}}{2s_{28}}+f(s_{28}),$$

(6) $$F(u_n)\leqq nF(s_{28})+f(u_n).$$

Durch wiederholtes Einsetzen erhält man aus (4)

(7) $$F_{27}<\frac{f_1}{2^{26}c_2c_3\ldots c_{27}}+\frac{f_2}{2^{25}c_3c_4\ldots c_{27}}+\cdots+\frac{f_{26}}{2c_{27}}+f_{27}.$$

Setzt man (5) in (6) ein, so ergibt sich

(8) $$F(u_n)<\frac{nF_{27}}{2s_{28}}+nf(s_{28})+f(u_n).$$

Wir machen

(9) $$\begin{cases} f_1<2^{26}c_2c_3\ldots c_{27}\cdot\varepsilon\\ f_2<2^{25}c_3c_4\ldots c_{27}\cdot\varepsilon\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_{26}<2c_{27}\cdot\varepsilon\\ f_{27}<\varepsilon.\end{cases}$$

Dann folgt aus (7) und (9)

(10) $$F_{27}<27\,\varepsilon.$$

Setzt man dies in (8) ein und ersetzt man in (8) ferner

$$n \text{ durch } \frac{21}{20}\cdot 60^5>n$$

$$\text{und } 2s_{28} \text{ durch } \frac{12\cdot 20}{21}\cdot 60^{-5}<2\cdot\frac{6}{n}<2s_{28},$$

so erhält man

(11) $$F(u_n)<\frac{5}{2}\cdot 60^{10}\cdot\varepsilon+\frac{21}{20}\cdot 60^5 f(s_{28})+f(u_n).$$

Dadurch, daß wir in (11) die Größen ε, $f(s_{28})$ und $f(u_n)$ hinreichend klein machen, d. h. dadurch, daß wir c_i, s_{28} und u_n auf hinreichend viele Sexagesimalstellen ausrechnen, können wir nun den Fehler $F(u_n)$ kleiner als eine vorgeschriebene Größe machen. Wir verlangen

(12) $$F(u_n)<60^{-10}.$$

Hierdurch erreichen wir, daß bei einer Ausrechnung von u_n auf 10 Sexagesimalbruchstellen höchstens die letzte Stelle um eine Einheit falsch wird. Diese Stellenzahl entspricht der von K. im sechsten Abschnitt ausgerechneten Stellenzahl von u_n, wobei zu beachten ist, daß er $r=60$ voraussetzt, während wir $r=1$ annahmen.

Wir erfüllen (12), indem wir die rechte Seite von (11) kleiner als 60^{-10} machen. Dies erreichen wir, indem wir verlangen

(13) $\varepsilon = 11 \cdot 60^{-21}$, (14) $f(s_{28}) < \frac{1}{2} \cdot 60^{-16}$, (15) $f(u_n) < \frac{1}{2} \cdot 60^{-10}$.

Nun ist

$$c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < c_{27} < c_{28} < 2,$$
$$c_2 = 2 \cos 15° > 1{,}93, \qquad c_3 = 2 \cos 7°{,}5 > 1{,}98$$
$$22\, c_3 > 30, \qquad (2\, c_3)^3 > 60.$$

Wir erfüllen also die Ungleichungen (9), wenn wir so genau rechnen, daß

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l}
f_1 < \frac{1}{2} \cdot 60^{-12} < \frac{2\, c_2 \cdot 22\, c_3}{60} [(2\, c_3)^3]^8 \cdot 60^{-20} < 2^{26} \cdot c_2\, c_3 \ldots c_{27} \cdot \varepsilon \\
f_2 < \frac{1}{2} \cdot 60^{-12} < \frac{22\, c_3}{60} [(2\, c_3)^3]^8 \cdot 60^{-20} < 2^{25} \cdot c_3\, c_4 \ldots c_{27} \cdot \varepsilon \\
f_3 < \frac{1}{2} \cdot 60^{-13} < \frac{(2\, c_3)^2 \cdot 22\, c_3}{60} [(2\, c_3)^3]^7 \cdot 60^{-20} < 2^{24} \cdot c_4\, c_5 \ldots c_{27} \cdot \varepsilon \\
f_4 < \frac{1}{2} \cdot 60^{-13} < \frac{2\, c_3 \cdot 22\, c_3}{60} [(2\, c_3)^3]^7 \cdot 60^{-20} < 2^{23} \cdot c_5\, c_6 \ldots c_{27} \cdot \varepsilon \\
f_5 < \frac{1}{2} \cdot 60^{-13} < \frac{22\, c_3}{60} [(2\, c_3)^3]^7 \cdot 60^{-20} < 2^{22} \cdot c_6\, c_7 \ldots c_{27} \cdot \varepsilon \\
f_6 < \frac{1}{2} \cdot 60^{-14} < \frac{(2\, c_3)^2 \cdot 22\, c_3}{60} [(2\, c_3)^3]^6 \cdot 60^{-20} < 2^{21} \cdot c_7\, c_8 \ldots c_{27} \cdot \varepsilon \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_{24} < \frac{1}{2} \cdot 60^{-20} < \frac{(2\, c_3)^2 \cdot 22\, c_3}{60} \cdot 60^{-20} < 2^3 \cdot c_{25}\, c_{26}\, c_{27} \cdot \varepsilon \\
f_{25} < \frac{1}{2} \cdot 60^{-20} < \frac{2\, c_3 \cdot 22\, c_3}{60} \cdot 60^{-20} < 2^2 \cdot c_{26}\, c_{27} \cdot \varepsilon \\
f_{26} < \frac{1}{2} \cdot 60^{-20} < \frac{22\, c_3}{60} \cdot 60^{-20} < 2\, c_{27} \cdot \varepsilon \\
f_{27} < \frac{1}{2} \cdot 60^{-21} < \varepsilon\,.
\end{array}\right.$$

Damit ist bewiesen: Um u_n auf eine Einheit an der zehnten Sexagesimalbruchstelle genau zu berechnen (Ungleichung 12), genügt es, zu berechnen:

c_1 und c_2	auf	12	Stellen nach dem Komma,	
c_3, c_4 ,, c_5	,,	13	,, ,, ,, ,, ,	
c_6, c_7 ,, c_8	,,	14	,, ,, ,, ,, ,	
....				
c_{24}, c_{25} ,, c_{26}	,,	20	,, ,, ,, ,, ,	
c_{27}	,,	21	,, ,, ,, ,, ,	
s_{28}	,,	16	,, ,, ,, ,, ,	(Ungleichung 14).

K., der $r = 60$ setzt, hätte hiernach, statt alle c_i bis auf die Undevizesen zu berechnen, c_1 und c_2 bis auf die Undezimen, c_3, c_4, c_5 bis auf die Duodezimen, usw., c_{27} bis auf die Vizesen und s_{28} bis auf die Quindezimen berechnen sollen.

Diesen Abschätzungen wurde die überaus unwahrscheinliche ungünstigste Annahme zugrunde gelegt, daß sich alle Abkürzungsfehler verstärken. In Wirklichkeit besteht die sehr große Wahrscheinlichkeit, daß sie sich großenteils gegenseitig aufheben.

Zum vierten und fünften Abschnitt

Nun beginnt die Rechenarbeit. Im vierten Abschnitt sind nacheinander nach (2) von S. 50 die 28 Größen c_1 bis c_{28} berechnet; unsere Übersetzung gibt die Berechnungen von c_1 (Taf. 3b), c_2 (Taf. 4a), c_{15} (Taf. 10b) und c_{28} (Taf. 17a) wieder und teilt die Überschriften und Ergebnisse aller Berechnungen mit. Im fünften Abschnitt (Taf. 17b) schließt sich die Berechnung von s_{28} nach (3) von S. 50 an.

Der großen theoretischen Einfachheit des Verfahrens steht praktisch der Nachteil gegenüber, daß die c_i auf mehr Stellen zu berechnen sind, als nachher für s_{28} und u_n gewünscht werden, weil die Größen c_i mit wachsendem i dem Werte 2 zustreben und deshalb bei der Berechnung von s_{28} aus c_{27} infolge der Abziehung $2-c_{27}$ der relative Fehler einen Sprung nach oben macht. Es ist wie bei der Berechnung des Sinus eines sehr kleinen Winkels aus seinem Kosinus, und dies ist nicht nur ein Vergleich, sondern der Kern der Sache, denn c_{28} ist nach (2a″) von S. 52 das Doppelte des Kosinus eines sehr kleinen Winkels, und s_{28} ist nach (3a″) das Doppelte des Sinus desselben Winkels. Aber die Natur der Formeln für die c^i bewirkt zugleich Erscheinungen, die jenem Nachteil ein Gegengewicht halten und die Rechenarbeit erheblich herabsetzen. Hierauf werden wir zurückkommen.

Jede der 28 Berechnungstafeln des vierten und ebenso die Berechnungstafel des fünften Abschnitts enthält eine Quadratwurzelausziehung. Die erste Tafel (Taf. 3b) z. B., die wir zunächst betrachten wollen, bringt die Berechnung der Quadratwurzel aus der Sechzigerzahl $3\ 0\ 0 = 3 \cdot 60^2$, wenn man mit K. $r = 60$, oder aus 3, wenn man $r = 1$ zugrunde legt, was nur eine Verschiebung der Stellenwerte, im Radikanden um 2 und im Ergebnis um eine Sechzigerstelle bedeutet. In der äußeren Anordnung ist die Quadratwurzelausziehung nach dem Muster angelegt, das K. im ‚Schlüssel' als das von ihm selbst erdachte und bevorzugte bezeichnet. Neu ist hier nur gegenüber dem „Schlüssel", daß wir es mit abgekürzter Rechnung zu tun haben, d. h., daß von einer bestimmten Stelle ab alle folgenden unterdrückt sind. Wie im Schlüssel sind die Stellen des Ergebnisses, die wir, als Zahlen nach ihrem Stellenwert gerechnet, mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bezeichnen wollen, in der Reihenfolge ihrer Auffindung über Stellen des Radikanden geschrieben worden, und zwar Einmal Erhöhtes über Zweimal Erhöhtes, Grad über Grad, Minuten über Sekunden usw. Die im unteren Teil des Schemas gebildeten Zahlen $a_1,\ 2a_1 + a_2,\ 2a_1 + 2a_2 + a_3 \ldots$ seien ‚die unteren Zahlen' genannt. Aus ihnen werden oben die von dem jeweiligen Rest abzuziehenden Produkte $a_1^2,\ (2a_1 + a_2)a_2,\ (2a_1 + 2a_2 + a_3)a_3,\ \ldots$ berechnet, die wir ‚die Vielfachen' nennen wollen. Zur Raumersparnis hat K. ein Stück der Rechnung nach oben und ein Stück der Folge der unteren Zahlen nach unten verschoben.

Der letzte Rest 3 16 27 der Wurzelausziehung tritt nach Bestimmung der 58 Septendezimen des Ergebnisses auf. Die folgende, letzte Stelle der Wurzel, 57, ergibt sich als aufgerundetes Ergebnis der Teilung 3 16 27 : 3 27 50.

Die Richtigkeit der Wurzelausziehung prüft K. auf zweifache Weise nach, durch die Neunundfünfzigerproben und dadurch, daß er das Quadrat des Ergebnisses ausrechnet und mit dem Radikanden vergleicht. Zum Zwecke der Neunundfünfzigerprobe steht in der mit ‚Waage' überschriebenen Spalte der kleinste nicht negative Rest, der übrig bleibt, wenn man die Quersumme der auf gleicher Höhe stehenden Sechzigerzahl durch 59 teilt. Z. B. steht (Taf. 3b, Reihe 15) auf der Höhe der unteren Zahl 3 27 50 44 58 die Waage 5, da $3+27+50+44+58 = 5 \bmod 59$ ist. Entsprechend steht (Taf. 3b, Reihe 5 u.) auf der Höhe der Vielfachen $58 \times 3\ 27\ 50\ 44\ 58 = 3\ 20\ 55\ 3\ 28\ 4$ die Waage 54, da $3+20+55+3+28+4 = 54 \bmod 59$ ist. Die Neunundfünfzigerprobe verlangt nun, daß $58 \times 5 = 54 \bmod 59$ ist, und das trifft zu.

Im unteren Teil der Berechnungstafel (Taf. 3b) quadriert K. sein bis zu den Septendezimen genommenes Ergebnis der Wurzelausziehung 1 43 55 22 58 27 57 56 0 44 25 31 42 1 56 22 42 48 58 und fügt zu der erhaltenen Quadratzahl den in der Wurzelausziehung bei Erreichung der Septendezimen verbliebenen Rest von 3 16 27 Oktodezimen (Reihe 10). Er erhält bis zu den Oktodezimen genau den Radikanden 3 0 0 Einer.

Die Quadrierung der n-stelligen Sechzigerzahl $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ geschieht nach der Formel

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$
$$= 2[(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})\,a_n + (a_1 + a_2 + \cdots a_{n-2})\,a_{n-1} + \cdots + (a_1 + a_2)\,a_3 + a_1 a_2]$$
$$+ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 .$$

K. vervielfacht deshalb jede Stelle mit jeder *anderen* Stelle der Zahl, zählt die Vielfachen zusammen (Reihe 11 ob.) und nimmt die Summe noch einmal (Reihe 11 u.). Hierzu fügt er (Reihe 12 ob.) die Summe der Quadrate der einzelnen Stellen. Die Vielfachen jeder Stelle mit jeder anderen Stelle sind nach einem der im ‚Schlüssel' mitgeteilten Vervielfachungsschemata gestaffelt niedergeschrieben. Wenn man z. B. die Ziffer 27 mit allen vorhergehenden Ziffern 1, 43, 55, 22, 58 vervielfacht, so erhält man die in der folgenden Wiedergabe mit vollen Linien umrahmten und gestaffelt von links oben nach rechts unten niedergeschriebenen zweistelligen Produkte.

				0	27				
			0	58	19	21			
		0	22	41	34	24	45		
	0	55	15	46	53	10	9	54	
0	43	39	25	20	10	21	16	26	6

Vervielfacht man die der 27 vorhergehende Ziffer 58 mit allen ihr vorhergehenden, so ergibt sich die Folge der gestrichelt umrahmten Teilprodukte usw.

Reihe 12 ob. enthält die Summe der Quadrate der einzelnen Stellen. Schreibt man diese Quadrate $1^2 = 1$, $43^2 = 30\ 49$, $55^2 = 50\ 25$, ... erforderlichenfalls zweistellig (z. B. 3^2 in der Form 0 9), so sind sie alle lückenlos nebeneinander zu setzen.

Die am unteren Rand der ersten und der folgenden Berechnungstafeln stehenden indischen Ziffern geben die bei der Zusammenzählung der Teilprodukte auf die nächst höhere Sechzigerstelle zu übertragenden Einheiten an.

Wir sehen nun zu, wie K. bei der abgekürzten Quadratwurzelausziehung und bei der abgekürzten Vervielfachung die letzten Stellen hinsichtlich etwaiger Erhöhung behandelt hat. Er weiß sehr wohl, daß, wenn er eine Zahl bei einer gewissen Stelle abbricht, und die folgenden, vernachlässigten Stellen mehr als die Hälfte der letzten hingeschriebenen Stelle ausmachen, diese letzte hingeschriebene Stelle zu erhöhen ist. Das sehen wir z. B. später in den abgekürzten Vervielfachungen von Taf. 19a befolgt, wo sowohl in der sexagesimalen wie in der dezimalen Ausführungsweise die als Teilprodukte auftretenden, aus Tafeln entnommenen Vielfachen von 2π konsequent nach der angegebenen Vorschrift abgekürzt werden.

Nicht so schematisch verfährt K. bei der Wurzelausziehung und der Probequadrierung. Sonst hätte er nicht im Ergebnis aller 29 Probequadrierungen in der letzten Stelle (den Oktodezimen bei der ersten, den Undevizesen bei den 27 folgenden Berechnungen und den Vizesen bei der Berechnung von s_{28}, auf Taf. 17b) genau Null erhalten können.

Bei der ersten Berechnung wollen wir etwas genauer betrachten, wie er hinsichtlich der Abkürzung verfährt. In den unteren Zahlen schreibt er noch die Undevizesen nieder, ohne aber diese Stelle zu erhöhen, wenn der folgende, weggelassene Teil der Zahl größer als 30 Einheiten der nächsten Stelle war. Sein Verhalten bei der Bildung und Abziehung der Vielfachen zeigen die auf der folgenden Seite angegebenen Zahlenspalten. Die erste gibt die Oktodezimen so wieder, wie sie in der Handschrift stehen. Verbessert man die offenbaren Schreibfehler (Reihe 7 ob.) 59 in 51 und (Reihe 8 ob.) 41 in 17, so entsteht die zweite Spalte unserer Zusammenstellung, in der alle Abziehungen bis auf eine richtig sind.

$\overline{35}$	$\overline{35}$			$\overline{35}$
54	54	53	54	54
$\overline{41}$	$\overline{41}$			$\overline{41}$
2	2	1	2	2
$\overline{39}$	$\overline{39}$			$\overline{39}$
52	52	52	52	52
$\overline{47}$	$\overline{47}$			$\overline{47}$
8	8	8	9	9
$\overline{39}$	$\overline{39}$			$\overline{38}$
30	30	30	30	30
$\overline{9}$	$\overline{9}$			$\overline{8}$
59	51	50	51	51
$\overline{41}$	$\overline{17}$			$\overline{17}$
46	46	44	45	46
$\overline{31}$	$\overline{31}$			$\overline{31}$
4	4	3	4	4
$\overline{27}$	$\overline{27}$			$\overline{27}$

Hätte K. nun die Vielfachen aus den von ihm ohne Erhöhung der Undevizesen abgekürzten unteren Zahlen gebildet und dabei auch die Oktodezimen der Vielfachen gegebenenfalls nicht erhöht, so hätten die Vielfachen die in der dritten Spalte angegebenen Ziffern erhalten. Sie widersprechen dem Befund. Erhöht man aber nötigenfalls die Oktodezimen, so erhalten die Vielfachen die in der vierten Spalte angegebenen Oktodezimen, und rechnet man noch genauer, indem man noch eine weitere Stelle der unteren Zahlen berücksichtigt, so erhält die Rechnung das in unserer fünften Spalte dargestellte Gesicht. Man bekommt dann in Übereinstimmung mit der Hs beim letzten Rest 27 Oktodezimen, und das ist, wie die Probe durch Quadrierung zeigt, die beste Abrundung des wahren Restes. Es bleibe dahingestellt, wie in der Hs die kleinen Unstimmigkeiten in den Oktodezimen zustande kamen. Trotz dieser Unstimmigkeiten scheint mir ersichtlich, daß K. bei der Vervielfachung nicht nur nötigenfalls erhöht, sondern auch die genaueren Werte der unteren Zahlen berücksichtigt. Vermutlich hat er, nachdem die Probe durch Quadrieren den richtigen Wert der Oktodezimen des Restes ergab, nämlich 27, die Oktodezimen der Wurzelausziehungsrechnung ein wenig ausgeglichen, um hier beim Rest ebenfalls 27 Oktodezimen zu erhalten. Auch bei den Vielfachen in der Berechnung von s_{28} (Taf. 17 b) zieht K. in den Reihen 8 u. und 9 u. die unteren Zahlen genauer in Rechnung, als er sie in den Reihen 14 ob. und 14 u. angibt.

Im Unterschied zur ersten Berechnung schreibt K. in der zweiten (Taf. 4 a) bei der Wurzelausziehung von den unteren Zahlen, ihren Vielfachen und den Resten eine Stelle mehr hin, meistens ohne eine durch den Wert der darauf folgenden Stelle erforderte Erhöhung vorzunehmen. Bei der Probe durch Quadrierung hat er in drei Fällen (Reihen 3 ob., 7 ob., 9 ob.) an der 19-ten Bruchstelle die von der zwanzigsten erforderlich gemachte Erhöhung vorgenommen, in einem Falle (Reihe 7 u.) nicht. Hierdurch, und dadurch, daß er (Reihe 11 u.) die letzte Reststelle mit 44 statt mit der in Reihe 10 [ob. Taf.] erhaltenen 43 ansetzt, erzielt er für das Auge eine Übereinstimmung der Zahlen der Reihen 1 [ob. Taf.] und Reihe 12 [Quadrate] bis zur 20-sten Sechzigerbruchstelle.

Von der siebenten Berechnung ab hat der Verfasser, wie es aus der 15-ten und der 28-sten zu ersehen ist, auch bei den Vielfachen und Differenzen der Wurzelausziehungsrechnung teilweise die zwanzigste Bruchstelle niedergeschrieben und verrechnet. Da, wo er dies bei der 15-ten Berechnung tut (Taf. 10 b), ist die folgende Stelle ebensowenig wie bei den unteren Zahlen berücksichtigt. Dies geht für die Vielfachen schon daraus hervor, daß er die Neunundfünfzigerprobe auf die abgekürzten Zahlen anwendet.

In der 28-sten Berechnung (Taf. 17a) sehen wir auch in den unteren Zahlen rechts die durch die Weglassung der höheren Stellen bedingten Erhöhungen vorgenommen, wodurch sich für die unteren Zahlen die Vervielfachung vereinfacht. In Reihe 4 u. hat die 20-ste Bruchstelle fälschlich 13 statt 2. Dieses Versehen rührt wohl daher, daß die auf 2 folgende Stelle 13 lauten würde. Das ist ein Anzeichen dafür, daß K. hier auch die 21-ste Bruchstelle ausgerechnet hatte. In Reihe 5 u. scheint ein ähnliches Versehen vorzuliegen. Bei genauer Rechnung müßte hier die 20-ste Bruchstelle 59 und erst die 21-ste 56 lauten, und K. hätte richtiger schon in Reihe 14 u. geschrieben: 4 0 . . . . Beide Versehen beeinflussen nicht die 19-te Bruchstelle, also auch nicht die weitere Rechnung.

Wie wir schon anfangs bemerkten, hat K. bei allen Probequadrierungen in den beiden letzten Stellen des Quadrats für das Auge Nullen hergestellt. Wenn er, um dies zu erreichen, bei den Teilprodukten ausgleichend Erhöhungen manchmal vornimmt und manchmal unterläßt, so erfüllt doch, wie die Nachprüfung im einzelnen zeigt, bei den c_i jede Probequadrierung ihren Zweck insofern, als sie die Richtigkeit jeder einzelnen Quadratwurzelausziehung bis zu den Septendezimen und die Richtigkeit des bei Erreichung der Septendezimen angegebenen Restes nachweist. Den Begriff ‚Richtigkeit' meine ich in dem Sinne, daß der Fehler kleiner als die Hälfte einer Einheit der letzten angegebenen Stelle ist.

Die Natur der Formeln für c_i bringt zweierlei Erleichterungen der Rechenarbeit mit sich. Die erste besteht darin, daß wir, um eine vorgeschriebene Genauigkeit von s_{28} zu erreichen, c_i um so weniger genau zu berechnen brauchen, je kleiner i ist. So zeigten wir (S. 58—59), daß es z. B. genügt, für $r = 1$ die Größen c_1, c_2 auf 12 Sexagesimalbruchstellen zu berechnen, wenn der Fehler von u_n weniger als 60^{-10} betragen soll. Diesen Vorteil hat K. nicht ausgenutzt, wohl aber den anderen, der im Gegensatz zum ersten Vorteil erst bei wachsendem i erscheint und immer größer wird. Dieser Vorteil ergibt sich ganz von selbst daraus, daß die c_i mit wachsendem i dem Werte 2 zustreben. Die Radikanden $2 + c_i$ der einzelnen Wurzelausziehungen haben infolgedessen hinter den 3 Einern mit wachsendem i bei dezimaler Schreibung immer mehr Ziffern 9, bei sexagesimaler immer mehr Ziffern 59. So ist, wie wir aus der 15-ten Berechnung (Taf. 10b) ersehen, $2 + c_{14} = 3\,|59\,59\,|59\,59\,|56\,49\,|23\,56\,|\ldots\ldots$ Die Folge ist, daß K. mit einem Schlage als erstes Teilergebnis der Wurzelausziehung die ersten 5 Stellen 1 59 59 59 59 angeben kann. Er hätte sogar eine Stelle mehr hinschreiben können. Dieser Vorteil, mehrere Anfangsstellen auf einmal erledigen zu können, den K. von der siebenten Berechnung an ausnutzt, wird für uns durchsichtiger, wenn wir in den Sechzigerzahlen negative Ziffern zulassen und im vorliegenden Fall den Radikanden schreiben: $2 + c_{14} = 4\,|0\,0\,|0\,0\,|-4\,49\,|23\,56\,|$. Für derartige Zahlen bleibt das von K. angewandte Radizierungsverfahren gültig; wir erhalten als höchste Stelle der Quadratwurzel die Ziffer $\sqrt{4} = 2$, und weiter mit einem Schlage die Stellen 0 0 0 0 —1; dann käme als nächste Stelle 12, und der Beginn der Rechnung sähe so aus (Taf. 10b):

oben	2	0	0	0	0	—1	12						
Reihe 1 ob.	4	0	0	0	0	—4	49	23	56	53	53	39	8
„ 1 u.	4	0	0	0	0	—4	0	0	0	0	1		
							49	23	56	53	52		
							48	0	0	0	0	—22	24
							1	23	56	53	53	0	44
Reihe 17 ob.							4	0	0	0	0	—2	12
„ 17 u.						4	0	0	0	0	—1		

Bei der 28-sten Berechnung (Taf. 17a) konnte K. auf diese Weise auf einmal die ersten 10 Stellen des Ergebnisses $c_{28} = 1\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ \ldots$ angeben. Weitere Stellen hätte er übrigens leicht mit Hilfe der altbekannten Näherungsformel $\sqrt{a^2 - \delta} = a - \frac{\delta}{2a}$ ausrechnen können. Auf diese Weise hätte er bei der 28-sten Berechnung auf Grund der Näherungsgleichung

$$c_{28} = \sqrt{4 - (2 - c_{27})} \approx 2 - \frac{2 - c_{27}}{4}$$

die ersten 19 Stellen seines 20-stelligen Ergebnisses richtig erhalten und nur die letzte, 20-ste Stelle wäre um eine Einheit zu groß ausgefallen. Denn es ist

$$2 + c_{27} = 4 + 0 \cdot 0^9 - 37\ 11\ \ldots$$

$$c_{28} = \sqrt{2 + c_{27}} = 2\left(1 + \frac{0.\ 0^9 - 37\ 11\ldots}{8} - \frac{(0.\ 0^9 - 37\ 11\ldots)^2}{128} + - \ldots\right),$$

und das quadratische Glied dieser Entwicklung bewirkt, daß von der Stelle $45 \cdot 60^{-20}$ die Zahl $\approx 21 \cdot 60^{-20}$ abzuziehen ist, so daß bei der Abkürzung die vorhergehende Ziffer 40 bleibt. K. konnte zwar die Abschätzung der Gültigkeit der Näherungsformel nicht in dieser Form ausführen, doch hätte die Quadrierung des Näherungswertes ihn auf die kleine Korrektur desselben bringen können. Seine Rechnungsweise kommt übrigens schließlich auf dasselbe hinaus wie die Näherungsformel, denn wegen der Abkürzung ist sein Radizierungsverfahren im späteren Verlauf ganz zu einem Verfahren der Teilung durch 4 geworden.

Die Schreibweise des Radizierungsverfahrens vereinfacht der Verfasser dadurch, daß er von den auftretenden Folgen von Ziffern 59 nur die erste und die letzte 59 hinschreibt.

Natürlich wirkt sich die Eigenart der Zahlen c_i auch bei den Probequadrierungen mit wachsendem i mehr und mehr aus. Auch hier könnte man einfacher rechnen, wenn man in der Sechzigerentwicklung negative Koeffizienten zuließe. Bei K. wiederholen sich infolge wiederholten Auftretens des Multiplikators 59 staffelförmig angeordnete Paare untereinanderstehender Ziffern. Von der neunten Berechnung ab nutzt er diese Gleichförmigkeit aus, indem er die Ziffern jedes solchen Paars von der zweiten Staffel ab schon bei der Niederschrift zusammenzählt. So schreibt er bei der 15-ten Berechnung [Taf. 10 b (Quadrat)]

statt der Zahlen $\begin{array}{|r|r|r|r|r|} 11 & & & & \\ 2 & 11 & & & \\ & 2 & 11 & & \\ & & 2 & 11 & \\ & & & 2 & 11 \\ & & & & 2 \end{array}$ die Zahlen $\begin{array}{|r|r|r|r|r|} 11 & & & & \\ 2 & & & & \\ & 13 & & & \\ & & 13 & & \\ & & & 13 & \\ & & & & 13 \end{array}$

Überschreitet die Summe eines solchen Paars die Zahl 59, so wird der nächst höheren Stelle eine Einheit zugeschlagen, so daß sich eine links benachbarte Paarsumme um 1 erhöht. Infolge dieser Zusammenfügung von Zahlenpaaren sieht man in der 15-ten Berechnung Folgen gleicher Zahlen wie 56, 13, 27 in durch Lücken voneinander getrennten gestaffelten Reihen auftreten. Von der 19-ten Berechnung ab schreibt K. diese Folgen gleicher Zahlen nicht mehr nach unten gestaffelt, sondern schiebt sie je zu einer Zeile in die Lücken hinauf. Dadurch spart er Raum. Natürlich kann er in Zeile 51 der 28-sten Berechnung gleich das 19-stellige Quadrat der ersten 10 Stellen der Zeile 5 aus Zeile 8 abschreiben, falls es dort richtig berechnet war; von der 22-sten Berechnung ab verfährt er so.

Zum sechsten Abschnitt

Nachdem für $d = 120$ im vierten Abschnitt

$$c_{28} = 1\ 59.\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 50\ 47\ 52\ 12\ 30\ 48\ 37\ 49\ 54\ 40$$

und im fünften Abschnitt

$$s_{28} = 0.\ 0\ 0\ 0\ 6\ 4\ 1\ 14\ 59\ 36\ 14\ 33\ 36\ 19\ 25$$

gefunden wurden, ergibt sich

$$u_n = 3\cdot 2^{28}\cdot s_{28} = 6\ 16.\ 59\ 28\ 1\ 34\ 51\ 46\ 14\ 49\ 46, \text{ nach (4) von S. 50,}$$
$$u_n\colon\ (U_n - u_n) = c_{28}\colon\ (d - c_{28}) = \frac{c_{28}}{2}\colon\left(\frac{d}{2} - \frac{c_{28}}{2}\right), \text{ nach (5) von S. 50.}$$

Hieraus erhält K. bei zulässig starker Abkürzung der Rechnung

$$\Delta u_n = U_n - u_n \approx 29 \text{ Nonen.}$$

Die Spanne, die nach dem dritten Abschnitt kleiner als eine Oktave werden sollte, ist also kleiner als 29 Nonen ausgefallen. Aus

$$u_n = 6\ 16.\ 59\ 28\ 1\ 34\ 51\ 46\ 14\ 49\ 46$$
$$U_n = u_n + \Delta u_n = 6\ 16.\ 59\ 28\ 1\ 34\ 51\ 46\ 14\ 50\ 15$$

setzt K. als Näherungswert des Kreisumfangs

$$u \approx \frac{U_n + u_n}{n} = 6\ 16.\ 59\ 28\ 1\ 34\ 51\ 46\ 14\ 50$$

fest.

Der auf den Halbmesser 1 bezogene Wert von u, d. h. die Zahl 2π ist hiermit zu

$$6.\ 16\ 59\ 28\ 1\ 34\ 51\ 46\ 14\ 50 \pm 0\cdot 0^9\ 15$$

berechnet.

Das Ergebnis ist richtig. Aus dem seit LUDOLF VAN CEULEN bekannten genaueren Wert von π erhält man für 2π eine Sexagesimalzahl, die statt der bei K. an letzter Stelle stehenden 50 die Ziffern 49 55 12 . . . hat. In Wahrheit ist also K.s Fehler von 2π nicht nur, wie er angeben konnte, kleiner als $\frac{1}{4}\cdot 60^{-9}$, sondern kleiner als $\frac{2}{25}\cdot 60^{-9}$.

K. wußte nicht, daß es viel genauer gewesen wäre,

$$u \approx \frac{U_n + 2u_n}{3}$$

anzusetzen. Bezeichnet man nämlich mit 2ξ den im Bogenmaß gemessenen sehr kleinen Zentriwinkel von s_{28}, so ist

$$\frac{U_n - u}{u - u_n} = \frac{2t_{28} - 2\xi}{2 - 2s_{28}} = \frac{\operatorname{tg}\xi - \xi}{\xi - \sin\xi} \approx \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x - x}{x - \sin x} = 2\,,$$

und hieraus ergibt sich für u der oben angegebene Ausdruck.

Derartige Näherungsgleichungen, besser noch die ihnen entsprechenden Ungleichungen, die aber den Kreisberechnern vor SNELL und HUYGENS verborgen waren, hätten bei hinreichend scharfer Rechnung schon mit einem Vieleck von bedeutend weniger Seiten, als K. es anwandte, die von ihm geforderte Genauigkeit ermöglicht.

In dem arabischen Merkvers, den unser Perser (S. 19, Z. 3ff.) auf seinen sexagesimalen Näherungswert von 2π gedichtet hat, sind die in Ǧummalbuchstaben geschriebenen Sexagesimalziffern von 2π, also die Ziffern *w* = 6, *yw* = 16, *nṭ* = 59 usw. in ähnlicher Weise vokalisiert, wie beim alten arabischen Alphabet, dem Abǧad, die Folge der Buchstaben *a*, *b*, *ǧ*, *d*, *h*, *w*, *z* usw. durch die Folge der barbarischen Merkworte *abǧad hawwaz* usw. wiedergegeben wird. Die 60 am Ende des Merkverses ist durch den Namen des Ǧummalbuchstabens für diese Zahl, *sīn*, ausgedrückt. Am Ende des achten Abschnitts hat K. (S. 22) auch für die Ziffern der *dezimalen* Entwicklung von 2π einen arabischen Merkvers gedichtet. In diesem Vers, der wie derjenige für die Sechzigerentwicklung in dem verbreiteten Versmaß *Wāfir* abgefaßt ist, sind die Ziffern ebenfalls zu vokalisierten Gruppen der entsprechenden Ǧummalbuchstaben *w* = 6, *b* = 2, *h* = 8, *ǧ* = 3 usw. zusammengefaßt. Dagegen gebraucht der unmittelbar darauf folgende *persische* Merkvers für die dezimale Form von 2π die persischen Zahlwörter für 6, 2, 8 usw., die dem Versmaß zuliebe durch Flickwörtchen miteinander verbunden sind.

Zum siebenten Abschnitt

K. hat jede seiner Größen $c_1, c_2, \ldots, c_{28}, s_{28}^2, s_{28}, u_{28}$ aus der vorhergehenden insofern richtig berechnet, als der Fehler jeder einzelnen Berechnung für sich weniger als die Hälfte der zuletzt angegebenen Sechzigerstelle beträgt. Er sagt sich aber ganz richtig, daß z. B. c_3 mit einem größeren Fehler als dem genannten behaftet sein kann, weil schon die Größe c_2, aus der c_3 berechnet wurde, fehlerhaft war, und daß sich ungünstigenfalls diese Fehler verstärken könnten. Deshalb geht er die Berechnungen der genannten Größen der Reihe nach noch einmal durch, um die letzten angegebenen Stellen daraufhin nachzuprüfen, ob sie ‚mangelhaft' oder ‚überschießend' sind, und um wieviel. Wenn er z. B. findet, daß das Ergebnis der ersten Berechnung (Taf. 3 b) $c_1 = 1\ 43\ 55 \ldots\ldots 48\ 58\ 57$ an der letzten Stelle ‚mangelhaft' ist, so meint er damit, daß die letzte Stelle eine, wie wir wohl sagen, ‚schwache' 57 ist. Er findet nämlich, daß c_1 bei genauerer Rechnung mit 56 40 statt mit 57 endigen müßte. Der ‚Mangel' der mit 57 endigenden Zahl beträgt hiernach 20 Einheiten der auf die 57 folgenden, neunzehnten Sexagesimalbruchstelle. Wenn er hingegen z. B. unter Berücksichtigung der ‚Mängel' von c_1, c_2 und c_3 findet, daß die Größe c_4 ‚überschießend' ist, und zwar um 15 Einheiten der auf die als letzte angegebene folgenden Stelle, so heißt das, die Zahl $c_4 = 1\ 59\ 44 \ldots . 32\ 16$ ist genauer durch $1\ 59\ 44 \ldots . 32\ 16\ 15$ anzugeben. *Diese Verfeinerung bedeutet also, daß er jede dieser Größen auf eine Stelle mehr als früher berechnet.* Das war bei den Quadratwurzelausziehungen leicht auszuführen. Z. B. hatte er bei der ersten Berechnung (Taf. 3 b) die letzte Stelle 57 der Wurzel dadurch gefunden, daß er auf Grund einer bei islamischen Rechnern schon um das Jahr 1000 unserer Zeitrechnung nachweisbaren linearen Interpolation nach der Formel

$$\sqrt{T^2 + r} \approx T + \frac{r}{(T+1)^2 - T^2} = \mathrm{T} + \frac{r}{2T+1}$$

den letzten Rest $r = 3\ 16\ 27$ durch die Zahl $2\,T + 1$ teilte, die hier wegen der Abkürzung einfach durch die in Reihe 14 (rechts ob.) stehende letzte untere Zahl 3 27 50 45 ersetzt werden darf. Das damals auf 57 aufgerundete Ergebnis dieser Teilung setzt er jetzt genauer mit 56 40 an und erkennt so, daß in c_1 die letzte damals angegebene Ziffer 57 um 20 der folgenden Stelle ‚mangelhaft' war.

In dieser Weise verfeinert K. die ganze früher angestellte Rechnung und kommt zu dem Schlußergebnis, daß der Umfang u_n des einbeschriebenen Vielecks an der letzten Stelle um 54 Einheiten der nächsten Stelle zu groß herausgekommen war. Es sei deshalb, sagt er, bei u_n (Taf. 18 a ob. und S. 65) die letzte 46 in 45 zu verbessern. Dadurch wird aber der für u (Taf. 18 a unten) gefundene Wert in der letzten angegebenen Stelle 50 nicht geändert.

Diese Verfeinerungsrechnungen sind nicht alle richtig. Bei der ersten Berechnung erhält K., wie schon bemerkt, $3\ 16\ 27 : 3\ 27\ 50\ 45 \approx 56\ 40$. Ich erhalte 56 43, so daß ich als Verbesserung von c_1 den Wert -17 Einheiten der nächsten Stelle angebe, nicht wie K. -20.

Aber es wäre müßig, das alles nachzurechnen. Denn unsere Untersuchung zum dritten Abschnitt hat erwiesen, daß die von K. vorgenommene Berechnung der c_i bis zu den Undevizesen unnötig für alle c_i außer den drei letzten ist, und daß z. B. für c_1, c_2 und c_3 schon die Berechnung bis zu den Undezimen ausgereicht hätte. Daraus daß, wie wir sahen, K.s Näherungswert von 2π auch noch in der letzten von ihm angegebenen Stelle richtig ist, folgt, daß er bei den Verfeinerungsrechnungen dieses Abschnitts wahrscheinlich keine das Ergebnis beeinflussenden Fehler begangen hat, es müßten sich denn zwei oder mehr Fehler gegenseitig vernichtet haben.

Zum achten bis zehnten Abschnitt

Um die Berechnung von Kreisumfängen aus dem Halbmesser und umgekehrt zu erleichtern, hat K. im sechsten Abschnitt eine Hilfstafel dargeboten, die die Vielfachen von 2π mit den Sexagesimalziffern 1 bis 60 enthält. Wie wir früher (S. 49) erwähnten, geht er schon an jener Stelle entgegen dem in der Trigonometrie seiner Zeit bestehenden Brauch dazu über, $r = 1$ statt $r = 60$ anzunehmen, was für die sexagesimale Rechnung nur eine Verschiebung der Stellenwerte nach sich zieht. (Die Überschrift der Tafel 18b sollte entweder heißen: „Tafel der Vielfachen des Umfangs des Kreises, für den die Hälfte des Durchmessers eins ist“ oder „Tafel der Vielfachen des Verhältnisses des Umfangs zur Hälfte des Durchmessers“!)

Eine für seine Zeit schöpferische Tat ist es, daß der Mann aus Kāšān nun den Umfang des Kreises vom Halbmesser 1, also die Zahl 2π, auch als Dezimalzahl angibt, und daß er zeigt, wie man mit Hilfe dieser Dezimalzahl Umfänge aus Halbmessern und Halbmesser aus Umfängen gewinnt, wenn die gegebenen und die gesuchten Größen durch Dezimalzahlen ausgedrückt werden. Er zeigt an Beispielen, wie man die hierzu erforderlichen Vervielfachungen von Dezimalzahlen mit Dezimalzahlen und Teilungen von Dezimalzahlen durch Dezimalzahlen — auch in abgekürzter Rechnung — ausführen kann. Diese Rechnungen, die er den entsprechenden Rechnungen mit Sexagesimalzahlen gegenüberstellt, und bei denen er die in Taf. 20b dargebotene Tafel der Vielfachen der Dezimalzahl 2π mit den Ziffern 1—60 zu Hilfe nimmt, sind die ältesten bisher bekannten Beispiele praktisch durchgeführter Dezimalbruchrechnung. Auf Einzelheiten in der Ausführung dieser und der später im ‚Schlüssel‘ ausgeführten Dezimalbruchrechnungen bin ich an anderer Stelle eingegangen, ebenso auf die von K. im Schlüssel mitgeteilte Methode der Verwandlung von Sechzigerzahlen und -brüchen in dekadische Zahlen und Dezimalbrüche und umgekehrt.

K. kann die Dezimalzahl 2π bis zur 16-ten Stelle nach der 3 richtig angeben, „weil ein einziger Teil von ihm (dem Bruche 10^{-16}) eine einzige None nicht um eine halbe Dezime übertrifft“ (S. 21, Z. 15 v. u. ff.), d. h. weil $10^{-16} - 60^{-9} < \frac{1}{2} \cdot 60^{-10}$ ist. Der seinem Näherungswert von 2π anhaftende Fehler, den er kleiner als $\frac{1}{4} \cdot 60^{-9}$ weiß, kann also mit hinreichender Genauigkeit als $< \frac{1}{4} \cdot 10^{-16}$ bezeichnet werden. In Wahrheit ist dieser Fehler, wie wir sahen, sogar kleiner als $\frac{2}{25} \cdot 60^{-9}$, also auch kleiner als $\frac{2}{25} \cdot 10^{-16}$. Hätte K. eine Dezimalstelle von 2π mehr berechnet, so hätte er am Schluß statt 5 erhalten: 48, und das sind die richtigen Schlußziffern der auf 17 Bruchstellen berechneten Zahl 2π.

Die vom Verfasser gegebenen Beispiele für die Berechnung von $u = 2\pi r$ aus r und von r aus $u = 2\pi r$ zeigen, daß er trotz seiner sehr genauen Bestimmung von 2π bei praktischen Rechnungen kein Fanatiker übertriebener Genauigkeit ist, sondern die Genauigkeit der Lösung der Natur der Aufgabe angepaßt sehen will. Wenn er im zehnten Abschnitt den Fehler des verbreiteten Näherungswertes $\pi \approx 3\frac{1}{7}$ aufdeckt, so weist das hierzu gegebene Beispiel darauf hin, daß er für Rechnungen mit großen Zahlen, wie die astronomischen Rechnungen, den Gebrauch des groben Näherungswertes beanstandet. Lieber hätten wir hier freilich gesehen, wenn K. die Genauigkeit der Rechnung von der relativen Genauigkeit der Ausgangsgröße, nämlich des Halbmessers der Fixsternsphäre, abhängig gemacht hätte. In der Berechnungstafel 19a (unten rechts) hätte er hervorheben sollen, daß die letzten 8 Stellen des Ergebnisses dieser nicht abgekürzten Vervielfachung wertlos sind; mit einem genaueren Wert von 2π wären sie anders ausgefallen.

Im ‚Schlüssel' kommt K. der praktischen Mathematik weiter entgegen. An die Stel der Tafeln der Vielfachen von 2π sind im Schlüssel sexagesimale und dezimale Tafeln d Vielfachen von π und $\frac{\pi}{4}$ getreten, offenbar weil in der Praxis der Berechnungen des Umfan und des Flächeninhalts der Durchmesser als gegebene oder gesuchte Größe näher als d Halbmesser liegt. In den dezimalen dieser Hilfstafeln legt der Verfasser für π den We 3.141593 zugrunde, in den sexagesimalen den Wert 3. 8 29 44, der trotz seiner Kürze se genau ist; die nächste Sechzigerstelle wäre eine aufgerundete 1. Dieser sexagesimale We ist, wie K. hervorhebt, viel genauer als der Archimedische Wert; er ist eine Verfeineru des von Ptolemäus angegebenen sexagesimalen Wertes 3. 8 30 (vgl. oben S. 46, Z. 18).

Zum Schlußabschnitt

Der Schluß bringt den Nachweis der in der Einleitung gemachten Angabe, daß der de Abul-Wafā' zugeschriebene Wert von Chord 30′ und der von al-Bīrūnī benutzte Wert v Chord 2° falsch sind. K. zeigt, daß der angebliche Wert von Chord 30′ auf einen falsch Wert für Chord 1° 30′ führt, ein von ihm selbst angegebener aber auf den richtigen, u leitet ferner den wahren Wert von Chord 2° ab.

Sein theoretisches Rüstzeug für die Sehnenberechnungen holt er aus dem zehnten Kapi des ersten Buches des Almagest; daneben benutzt er seinen eigenen, im ersten Abschn bewiesenen Hilfssatz.

Die aus dem Almagest benutzten Sätze bezeichnet er als den ersten, dritten und viert Lehrsatz (*šakl*) des ersten Buches. In der auf uns gekommenen griechischen Fassung d Almagest finden wir keine numerierten Lehrsätze. Tatsächlich ist der als I, 1 bezeichne Satz, der die Berechnung der Zehnecksseite und der Fünfecksseite enthält, der erste Lehrsa des genannten Kapitels (HEIBERG I 32, 10 bis 34, 4). Die Ableitung gibt K. (S. 27, Schlu samt der Figur in ziemlich genauer arabischer Übersetzung aus dem Almagest wieder[43] In dem Übersetzungstext werden Sätze aus Euklids Elementen nach der Nummer d Buches und des Satzes angeführt, was in unserer griechischen Almagestausgabe nicht d Fall ist.

Die von K. als I, 3 und I, 4 bezeichneten Sätze aus dem Almagest betreffen folgen beiden Fälle des Additionstheorems der Sehnenfunktion:

d Chord $(a - b)$ = Chord a Chord $(180° - b)$ — Chord $(180° - a)$ Chord b

d Chord $(180° - (a + b))$ = Chord $(180° - a)$ Chord $(180° - b)$ — Chord a Chord b

und entsprechen also den Formeln

$$\sin(\varphi - \psi) = \sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi,$$
$$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi.$$

Die erste der beiden Sehnenformeln kann nach ihrem Vorkommen in unserem griechisch Almagest (HEIBERG I 37, 19 bis 38, 17) mit einigem Recht als der dritte Lehrsatz bezeich werden. An sie schließt sich aber die zweite Formel nicht unmittelbar als nächster Lehrs an; sie ist vielmehr erst in einer Ableitung (HEIBERG I 41, 4 bis 42, 6) enthalten, die a die von uns früher (S. 48/49) erwähnte Berechnung der Sehne der Hälfte eines Bogens v gegebener Sehne (HEIBERG I 39, 3 bis 40, 15) folgt.

[43]) Man beachte, wie diese Übersetzung (S. 27 Z. 12) in enger Anlehnung an das Griechische sagt: „den Q draten", während K. sich in seiner eigenen Darstellung (S. 28, 2. Abs.) wiederholt deutlicher durch die Worte: „ Summe der Quadrate" ausdrückt.

Bemerkenswert ist, daß K. die zweite der beiden Formeln des Additionstheorems der Sehnenfunktion nur für den Sonderfall $b = a$ benutzt. Er bekommt so die Doppelbogenformel

(D) d Chord $(180^\circ - 2\,a) =$ Chord$^2\,(180^\circ - a) -$ Chord$^2\,a$.

Sie entspricht der Formel

$$\cos 2\,\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi.$$

Aus der Doppelbogenformel (D) lassen sich durch Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes in Gestalt der Formel (I′) die Halbbogenformeln (II′) von S. 48 und (III′) von S. 49 ableiten. Aber weder schlug K. im ersten Abschnitt diesen Weg für seinen Hilfssatz ein, dessen Inhalt die Formel (II′) ist, noch Ptolemäus im Almagest für seine Formel (III′). K. wendet seine Formel (D) nur einmal (Taf. 22a) an, um zur Ergänzungssehne des doppelten Bogens überzugehen.

Steht in Fig. 3 db senkrecht auf dem Durchmesser $ag = d = 2\,r$ des Halbkreises abg und ist $dh = hg$ und $hb = hz$, so lassen sich die von K. aus dem Almagest entnommenen Berechnungen der Zehnecksseite s_{10} und der Fünfecksseite s_5 in folgende Gleichungen kleiden:

(1) $gz\cdot dz + dh^2 = hz^2$ nach Euklid, Elemente, II, 6

(2) $hz^2 = hb^2 = hd^2 + db^2$ (El. I, 47)

(3) $gz\cdot dz = db^2$

(4) $db = dg = r$

(5) $gz\cdot dz = gd^2$

$dz : gd = gd : gz$ nach El. VI, 17

(7) $gd = s_6$ nach El. IV, 15

(8) $dz = s_{10}$ nach El. XIII, 12 (= El. XIII, 9 Heiberg)

(9) $bz = \sqrt{s_6^2 + s_{10}^2} = s_5$ nach El. XIII, 13 (= El. XIII, 10 Heiberg).

Soweit Ptolemäus. Nun behauptet K.:

gz ist die Sehne $\frac{s_3}{10}$ von $\frac{3}{10}$ des Kreisumfangs, d. h. die Ergänzungssehne Chord 108° der Fünfecksseite $s_5 =$ Chord 72°.

Er beweist es so:

(10) $gz^2 = gd^2 + dz^2 + 2\,gd\cdot dz$ (El. II, 4)

(11) $bz^2 = bd^2 + dz^2$ (El. I, 47)

(4) $gd = bd = r$

(12) $gz^2 = bz^2 = 2\,r^2 + 2\,dz^2 + 2\,gd\cdot dz$

(5) $r^2 = gz\cdot dz$

(13) $r^2 = gd\;dz + dz^2$ (El. II, 3)

(14) $2\,gd\cdot dz + 2\,dz^2 = 2\,r^2$

(15) $bz^2 + gz^2 = 4\,r^2 = d^2$ nach (12) und (14)

(16) $bz^2 = s_5^2$ nach (9)

(17) $gz = \sqrt{d^2 - s_5^2} = \frac{s_3}{10}$, w. z. b. w.

Nachstehend folgt der Inhalt der Tafelrechnungen der Taf. 21b und 22a. Der am Ende jeder Zeile beigefügte Ausdruck gibt zur Erleichterung der Nachprüfung den betreffenden Wert in modernen Funktionen für den Halbmesser 1.

Reihe	Taf. 21 b	
2	$hz^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 = 5\cdot\left(\frac{d}{4}\right)^2$ nach (2) von S. 69	[$\frac{5}{4}$
3	$hz = \frac{d}{4}\sqrt{5}$	[$\frac{1}{2}\sqrt{5}$
4	$dz = s_{10} = hz - dh = hz - \frac{d}{4} = \text{Chord } 36^\circ$	[2 sin 18°
5	$s_{10}^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = s_5^2 = \text{Chord}^2\ 72$ nach (9) von S. 69	[2 — 2 sin 18°
6	$bz = s_5 = \text{Chord } 72^\circ$	[2 sin 36°
7	$gz = \frac{s^3}{10} = \frac{d}{2} + s_{10} = \text{Chord } 108^\circ$ nach (17)	[2 cos 36° = 1 + 2 sin 18°
8	$s_3 = \frac{d}{2}\sqrt{3} = \text{Chord } 120^\circ$	[2 cos 30° = $\sqrt{3}$
9	Chord 60°·Chord (180° — 72°)	[4 cos 36° sin 30° = 2 cos 36°
10	Chord 72°·Chord·(180° — 60°)	[4 sin 36° cos 30° = 2 (sin 66° + sin 6°)
11	Chord 72°·Chord (180° — 60°) — Chord (180° — 72°)·Chord 60°	[= d Chord 12°]
12	$s_{30} = \text{Chord } 12^\circ$	[2 sin 6°
13	$\text{Chord}^2\ 12^\circ$	[2 — 2 cos 12°
14	$d^2 - \text{Chord}^2\ 12^\circ = \text{Chord}^2\ 168^\circ$	[2 + 2 cos 12°
15	Chord 168°	[2 cos 6°
16	$\sqrt{(d + \text{Chord } 168^\circ)\,\frac{d}{2}} = \text{Chord } 174^\circ$	[2 cos 3°
17	$\sqrt{(d + \text{Chord } 174^\circ)\,\frac{d}{2}} = \text{Chord } 177^\circ$	[2 cos 1° 30′
18	$\sqrt{(d + \text{Chord } 177^\circ)\,\frac{d}{2}} = \text{Chord } 178^\circ\,30'$	[2 cos 45′
19	$d^2 - \text{Chord}^2\ 168^\circ\,30' = d^2 - \frac{d}{2}(d + \text{Chord } 177^\circ) = \text{Chord}^2\ 1^\circ\,30'$	[2 — 2 cos 1° 30′
20	Chord 1° 30′	[2 sin 45′

Reihe	ob. Taf. 22 a	
2	Chord x	[2 sin 15′
3	$\text{Chord}^2\ x =$	[2 — 2 cos 30′
4	$d^2 - \text{Chord}^2\ x = \text{Chord}^2\ (180^\circ - x)$	[2 + 2 cos 30′
5	Chord {180° — x)	[2 cos 15′
6	$\text{Chord}^2\ (180^\circ - x) - \text{Chord}^2\ x = d\ \text{Chord } (180^\circ - 2x)$ nach (D) von S. 69	[4 cos 30′
7	Chord (180° — 2 x)	[2 cos 30′
8	$\text{Chord}^2\ 180^\circ - 2x)$	[2 + 2 cos 1°
9	$d^2 - \text{Chord}^2\ (180^\circ - 2x) = \text{Chord}^2\ 2x$	[2 — 2 cos 1°
10	Chord 2 x	[2 sin 30′
11	Chord x·Chord 2 x	[4 sin 15′·sin 30′ = 2 cos 15′ — 2 cos 45′
12	Chord (180° — x)·Chord (180° — 2 x)	[4 cos 15′·cos 30′ = 2 cos 15′ + 2 cos 45′
13	Chord (180° — x)·Chord (180° — 2 x) — Chord x·Chord 2 x	[= d·Chord (180° — 3 x)
14	Chord (180° — 3 x)	[2 cos 45′
15	$\text{Chord}^2\ (180^\circ - 3x)$	[2 + 2 cos 1° 30′
16	$d^2 - \text{Chord}^2\ (180^\circ - 3x) = \text{Chord}^2\ 3x$	[2 — 2 cos 1° 30′
17	Chord 3 x	[2 sin 45′

Reihe	unt. Taf. 22a	
1	$\text{Chord}^2\,(180^\circ - 1^\circ)$	$[2 + 2\cos 1^\circ$
2	$\dfrac{\text{Chord}^2\,(180^\circ - 1^\circ)}{\frac{1}{2}d} - d = \text{Chord}\,(180^\circ - 2^\circ)$	$[2\cos 1^\circ$
3	$\text{Chord}^2\,(180^\circ - 2^\circ)$	$[2 + 2\cos 2^\circ$
4	$d^2 - \text{Chord}^2\,(180^\circ - 2^\circ) = \text{Chord}^2\,2^\circ$	$[2 - 2\cos 2^\circ$
5	$\text{Chord}\,2^\circ$	$[2\sin 1^\circ$

Mit Hilfe der Tafeln von J. PETERS[44]) habe ich fast alle Zahlen der Tafelrechnungen sowie der „zweiten Berechnung" der Taf. 21b und 22a nachgeprüft. In der Mehrzahl der Fälle fand ich die von K. mitgeteilten Zahlen in allen angegebenen Stellen mit PETERS übereinstimmend. Insbesondere gilt dies für die Ausgangswerte und die Schlußergebnisse der Rechnungen von Taf. 21b und 22a. Daß aus dem in allen angegebenen Stellen richtigen Wert von Chord 12° der Wert von Chord² 12° (Taf. 21b) nicht in ebensoviel Bruchstellen wie Chord 12° richtig herauskommen konnte, war zu erwarten. Der Fehler — die letzte Stelle muß 43 statt 52 lauten — liegt, wie eine leichte Überschlagsrechnung zeigt, innerhalb der zu erwartenden Fehlerspanne. Er merzt sich bald darauf infolge der Quadratwurzelausziehungen von selbst aus. Auch in der dritten Tafelrechnung ergibt die Quadrierung einen Fehler (7 51 statt 5 55) innerhalb der Fehlergrenzen, die dadurch bestimmt sind, daß der Fehler in Reihe 2 bis zu einer halben Einheit der letzten angegebenen Stelle betragen kann. Auch die Zahlen der Reihen 4 und 5 liegen innerhalb der hierdurch verursachten Fehlergrenzen, und so kommt es, daß in Reihe 5 Chord 2° an letzter Stelle 25 statt der richtigen Ziffer 53 erhalten hat. In der zweiten Berechnung der oberen Taf. 22a erhalte ich Reihe 10 in der letzten Stelle 22 statt 14.

K.s Bemerkung am Fuße der Taf. 21b über die Eintragung rot geschriebener Nullen in leere, nicht berechnete Stellen zeigt wieder, mit welchem Verständnis er rechnet. In der Handschrift erkenne ich in dieser Tafel keine rot geschriebenen Nullen. Die leidigen Erhöhungen und Erniedrigungen des Stellenwertes, verursacht durch die Wahl des Halbmessers 60, machen in diesen wie in den früheren Berechnungstafeln die Fehlerbetrachtung für K. etwas umständlich.

Hätte der Verfasser, nachdem er durch die Tafelrechnung in Taf. 21b Chord 1° 30′ gefunden hatte, hieraus auf direktem Wege Chord 30′ finden wollen, so wäre eine kubische Gleichung zu lösen gewesen. Statt dessen stellt er den Wert, von dem er behauptet, daß er gleich Chord 30′ ist, in der zweiten Berechnung in Tab. 22a (oben) an die Spitze, um hieraus die Sehne des dreifachen Winkels zu berechnen, die sich dann als mit der in Tab. 21b berechneten Sehne von 1° 30′ übereinstimmend erweist. Wie fand er den richtigen Wert von Chord 30′? Ein systematisches Probieren hätte zum Ziele führen können. K. hat aber eine gewandte Näherungsmethode angegeben, um die Sehne des Drittels eines Bogens von bekannter Sehne als Wurzel der maßgebenden kubischen Gleichung mit beliebiger Genauigkeit in sexagesimaler Form zu berechnen. Der Lehrbrief, in welchem er dieses Verfahren mitteilt, scheint nach dem Lehrbrief über die Kreisberechnung erschienen zu sein; wenigstens nennt K. in der Vorrede des ‚Schlüssel' gleich nach dem Lehrbrief über den Kreisumfang seinen „Lehrbrief betreffend die Bestimmung der Sehne und des Sinus für den

[44]) J. PETERS, Einundzwanzigstellige Werte der Funktionen Sinus und Cosinus. Abh. d. Pr. Ak. d. Wiss. 1911, Phys.-math. Classe.

dritten Teil eines Bogens von gegebener Sehne oder gegebenem Sinus". Aus einem wahrscheinlich von Qāḍīzāde ar-Rūmī verfaßten Kommentar[45]) dieses Lehrbriefs ersehen wir, daß K. die Formel ableitete, die für $r = 1$ lautet:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

und daß er die sich hieraus für die Berechnung von $\sin\alpha$ aus $\sin 3\alpha$ ergebende kubische Gleichung nach dem Iterationsverfahren löste, das uns auch Mīram Čelebī in seinem Kommentar zu den Tafeln des Uluġ Beg[34]) (S. 77—83) erhalten hat.

Vielleicht besaß oder erfand K. diese Methode schon, als er die Muḥīṭīya schrieb. Dann könnte er es als zweckmäßig erachtet haben, ihre Veröffentlichung einem besonderen Lehrbrief vorzubehalten.

---

[45]) *Fihrist al-kutub al-ʿarabīya* (Katalog der arabischen Schriften) 5, Kairo 1308 d. H. (= 1890—91 n. Chr.), S. 210.

NACHTRAG

Zu S. 37: Zwischen Zeile 22 (hinter „Ausdrücke") und Zeile 23 ist einzufügen:

„Zur Bezeichnung der höheren Stellen ganzer Sexagesimalzahlen: al-marfūʿ marratain, „die zweimal Erhöhte", al-marfūʿ ṯalāṯ marrāt, „die dreimal Erhöhte", usw. gebraucht K. auch die Ausdrücke al-maṯānī, al-maṯāliṯ usw., deren Auftreten ich bisher frühestens bei aṭ-Ṭūsī beobachtete. Unser Text hat (3a, 13 und 3a, 17) al-maḫāmis, „die fünfmal Erhöhte".

Zu S. 40: „Zur Einleitung"; hinter dem 1. Absatz ist fortzufahren:

In seinen „Schlüsseln der Wissenschaften" (mafātīḥ al-ʿulūm) sagt Abū ʿAbdallāh Muḥammad b. Aḥmad b. Yūsuf al-Ḫwārizmī (Ende des X. Jahrh.):

„Die irrationale Quadratwurzel, bei der es keinen Weg gibt, ihren wahren Wert zahlenmäßig zu erkennen, wie $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{3}$ oder $\sqrt{10}$, wird näherungsweise ausgezogen, ohne daß ihr wahrer Wert erreicht wird. Wie man berichtet, lautet eine der Gottespreisungen der indischen Brahmanen: Gepriesen sei der, der die irrationalen Wurzeln kennt."

II.

ERLÄUTERUNGEN

III.

ARABISCHER TEXT:

AR-RISĀLA AL-MUḤĪṬĪYA

DES

ĞAMŠĪD B. MASʿŪD AL-KĀŠĪ

الرسالة المحيطية

لجمشيد بن مسعود الكاشى

Blatt 1b

1 الحمد لله العالم بنسبة القطر الى المحيط العارف بمقدار كل المركب والبسيط خالق الارض
والسموات جاعل النور فى الظلمات والصلوة والسلام على محمّد المصطفى مركز دائرة الرسالة ومحيط
3 اقطار الهداية والعدالة وعلى اله الطيبين واصحابه الطاهرين آما بعد فيقول احوج خلق الله تعالى
الى غفرانه جمشيد بن مسعود بن محمود الطبيب الكاشانى الملقب بغيات احسن الله احواله
4 ان ارشميدس اثبت ان المحيط ازيد من ثلثة امثال القطر باقل من سبع قطرها واكثر
من عشرة اجزاء من احد وسبعين جزءا من القطر فالتفاوت بين هذين يكون جزءا واحدا
5 من اربعمائة وسبعة وتسعين جزءا ففى دائرة يكون قطرها اربعمائة وسبعة وتسعين ذراعاً او قصبا او
فرسخاً يكون مقدار محيطها مجهولاً ومشكوكا فيما بين ذراع واحد او قصبة او فرسخ ويكون فى
اعظم دائرة تقع فى كرة الارض مجهولا فى خمسة فراسخ لانّ قطرها خمسة امثال ذلك المقدار بالفراسخ
تقريبا وفى منطقة فلك البروج مجهولًا فى اكثر من مائة الف فرسخ بكثر وهذه المقادير فاحشة فى المحيطات
فكيف يكون فى المساحة وذلك لانّه استخرج محيط ذى ستة وتسعين ضلعا فى الدائرة وهو اقل من
محيط تلك الدائرة لانّ كل ضلع منه اصغر من القوس التى هو وترها فجميع الاضلاع اصغر من المحيط
10 الذى عليه ومحيط مضلّع آخر على الدائرة شبيه[1]) بالاوّل واثبت انّه اكثر من محيط تلك الدائرة
بالشكل الاول من المقالة الاولى من كتابه والتفاوت بينهما ما ذكر
12 وامّا ابو الوفاء البوزجانى فانه حصل وتر نصف جزء[2]) من اجزاء ثلثمائة وستين من المحيط
بالاجزاء التى بها يكون القطر قك بحساب تقريبى وضربه فى سبعمائة وعشرين حصل محيط المضلع
الذى فى الدائرة واستخرج محيط المضلع الذّى عليها المشابه له وقال اذا كان القطر مائة وعشرين يكون
15 المحيط ٣٧٦ وكسر اكثر من نط ى نط ثوالث واقل من نط كح ند ىب روابع والتفاوت بين
المقدارين ىب نه ىب روابع وهو فى اعظم دائرة تقع[3]) فى الارض يكون قريبا بالف ذراع ومع ذلك انه غلط
فى مقدار وتر نصف الجزء لانه اخذه ة لاكد نه ند نه وما هو بصحيح والصحيح ة لاكد نو نح لو وسنورد تبيينه
وامّا ابو ريحان البيرونى فانّه حصل وتر جزئين من ثلثمائة وستين من المحيط وحصل محيط ذى مّائة
17 وثمانين ضلعا فى الدائرة و نو نط ى مح ة ومحيط شبيهه عليها و نر ا نح نط و واخذ نصف
مجموعهما محيط الدائرة وحوله الى الرقوم الهندية[4]) عن مخرج كسر الارقام على ان القطر واحد وذلك
يعتد فى مثل اعظم دائرة تقع[5]) فى الارض قريبا بفرسخ ومع ذلك غلط فى وتر الجزئين لانه حسبه
20 ب ه لط مح لو وينبغى ان يكون ب ه لط كو كب وقد وضع جيب جزء واحد الذى هو نصف
وتر الجزئين فى جدول الجيب فى قانونه المسعودى ا ب مط مح وهو صحيح وغلط فى ضعفه ولما كانت
22 هذه الاعمال مخيلة اردنا ان نستخرج محيط الدائرة بالاجزاء التى يكون بها القطر معلوما بحيث

---

1) Hs: شبيها   2) Hs: جزا   3) Hs: يقع   4) Hs: الرقوم الهندى   5) Hs: يقع

Blatt 1b يتيقن لنا ان التفاوت بينه وبين ما هو الحق لا يعتد بشعرة واحدة التى هى سدس عرض شعيرة معتدلة فى مثل دائرة يكون قطرها ستمائة الف مثل لقطر الارض فلا يعتد فيما كان

Blatt 2a اصغر منها بشى فحررت هذه الرّسالة مشتملة على استخراجه وسميتها المحيطية واوردتها فى عشرة فصول وخاتمة مستعينا بالله العزيز والوهاب وهو الهادى الى طريق الصّواب

الفصل الاول فى معرفة وتر قوس هى مجموع القوس المعلومة الوتر ونصف تمامها الى نصف الدور اقول ان سطح مجموع القطر ووتر كل قوس كانت اقل من نصف المحيط فى نصف القطر يساوى مربّع وتر قوس كانت مساوية لمجموع القوس الاوّل ونصف تمامها الى نصف الدور.

ولبيانه نرسم على خط اب نصف دائرة احب على مركز ه ونصل وتر اح كيف اتفق وننصف بح تمامها الى نصف الدور على نقطة د ونصل اد والدعوى ان سطح نصف القطر فى مجموع اب اح يساوى مربع اد[6] برهانه نصل بد فيكون زاوية ادب قائمة بالشكل[7] الثلثين من ثالثة الاصول ثم نخرج عن نقطة د عمود در على خط اب فيحدث مثلثا دبر دار متشابهين لمثلث ادب بالشكل الثامن من سادسة الاصول فيكون نسبة اب القطر الى اد كنسبة اد الى ار فبالشكل التاسع عشر من سابعة الاصول يكون مسطح اب القطر فى ار يساوى مربع اد ثم نخرج من نقطة ه عمود هح على اح فيكون نقطة ح منتصف اح بالشكل الثالث من ثالثة الاصول ونصل هد ولانّ زاوية باح المحيطية بقدر نصف قوس حب وهو مقدار زاوية بهد فالزاويتان متساويتان فيكون مثلثا احه هرد متساويين لقيام زاويتى ح ر وتساوى زاويتى ه ا وضلعى اه هد فيكون ضلع هر مساويا لضلع اح الذى هو نصف اح وكان مسطح ار اعنى مجموع نصف القطر وهر بل نصف اح فى القطر مساويا لمربع اد ولان سطح احد الخطين فى نصف الاخر يساوى سطح نصف الاول فى جميع الآخر يكون مسطح مجموع القطر وضعف هر اعنى مجموع القطر واح فى نصف القطر يساوى مربّع اد وذلك ما اردناه فاذا كان اح معلوما بالاجزاء التى يكون بها نصف القطر ستين ونزيد عليه القطر ونجعل المجموع مرفوعا بمرتبة يكون الحاصل مربع اد

الفصل الثانى فى معرفة محيط اى مضلع يكون فى الدائرة ومحيط المضلع الذى عليها المشابه له نرسم على قطر اب نصف دائرة احب على مركز ه ونفرض اح سدس المحيط فيكون وتر اح مساويا لأنّه نصف القطر بالشكل الخامس عشر من رابعة الاصول ثم ننصف حب تمام اح الى نصف الدور على د وبد على ر ورب على ح وهكذا الى حيث شئنا[8] فعلى ما ذكرنا فى الفصل المتقدم يصير من اح اد معلوما ومنه يصير ار معلوما ويصير منه اح معلوما وهكذا الى حيث اردنا

فاذا حصل لنا اح مثلا ونريد معرفة

Blatt 2b وتر بح ننقص مربع اح عن مربع القطر يبقى مربع وتر بح لانّ زاوية احب قائمة بالشكل الثلثين من ثالثة الاصول فيكون مربّع اب مساويا لمربعى اح حب بشكل[9] العروس ثم ننصّف قوس بح على ط ونصل هط فينصف الوتر على ى ونجعل طل مماسا للدائرة على نقطة ط بان نخرج من نقطة ط على طه فى الجهتين عمودى طك طل ونصل هح ونخرج الى ل وكذا هب الى ك فيكون كل موازيا لبح وكما ان بح ضلع من المضلع الذى فى الدائرة يكون كل ضلعا من المضلع الذى عليها مشابها له فيكون

[6] Nach اد folgen die durchstrichenen Worte برهانه نصل بد فيكون زاوية د [7] Hs: بشكل [8] Hs: شينا
[9] Hs: بالشكل

مثلثا هكط هلط متساويين ومشابهين لمثلثى هبى هحى المتساويين فيكون نسبة هى الى هط نصف القطر كنسبة بى الى طك ونسبة بح الى كل كذلك فيكون نسبة هى الى ىط فضل التالى على المقدم كنسبة وتر بح الى فضل كل على بح وكذا يكون النسبة بين جميع اضلاع المضلع الذى فى الدائرة واحد اضلاعه بح وبين جميع فضلات اضلاع المضلع الذى عليها واحد اضلاعه كل على الاضلاع الاولى ويكون هى نصف اح لان مثلثى احب هىب متشابهين[10] لقيام زاويتى ح ى وتساوى زاويتى آ المحيطية التى يوترها قوس بح وه المركزية التى يوترها نصف قوس بح الذى هو بط وهب نصف اب فيكون هى نصفا لاح فاذا صار هى معلوما وبح معلوما والنسب المذكورة معلومة يصير المضلع الذى فى الدائرة والذى عليها معلومين وذلك ما اردناه Blatt 2b

الفصل الثالث فى انا نقسم المحيط بكم ضلع. ونستقصى فى العمل الى اية مرتبة ليحصل لنا المحيط بحيث لا يعتد بشعرة فى مثل الدائرة المذكورة اعلم ان الدائرة التى يكون قطرها ستمائة الف مثل لقطر الارض يكون محيطها ايضا ستمائة الف مثل لمحيطها فيكون

Tafel der Zeilen 14–18

الفا وستمائة وستة وستين مثلا وثلثى مثل لمحيط الارض	درجة واحدة منه
سبعة وعشرين مثلا له وثلثة ارباع تقريبا	ودقيقة منه
ثلثة الاف وسبعمائة واربع فراسخ تقريبا على ان محيط الارض ثمانية الاف فرسخ	وثانية منه
اثنين وستين فرسخا تقريبا	وثالثة منه
فرسخاً وثلث عشر تقريبا	ورابعة منه
مائتين وستة اذرع تقريبا	وخامسة منه
ثلثة اذرع وثلث تقريبا	وسادسة منه
اصبعا وثلث اصبع ونحو ثمانية واربعين شعرة	وسابعة منه
اربعة اخماس غلظ شعرة من عرف البرذون[11] بل اقل منها	وثامنة منه

[10] Hs: متشابهين [11] Hs: البردون

Blatt 2b 13 وهذا اذا كان المحيط ثلثمائة وستين امّا اذا كان ثلثمائة وستة وستين وكسرا يكون ثامنة منه اقل من اربعة اخماس غلط[12]) شعرة بكثر فاذا استخرجنا محيطى مضلعين بحيث لا يبلغ التفاوت بين المحيطين بثامنة واحدة فلا يبلغ التفاوت بينهما بشعرة واحدة البتة ولا بين كل واحدة منهما وبين المحيط الحقيقى للدائرة تحقيقا

19 ولما عرفت ان نسبة المضلع الداخل الى فضل المضلع

20 الخارج عليه كنسبة بعد مركز الدائرة عن منتصف الضلع الى تمامه الى نصف القطر اعنى بعد منتصف الضلع عن منتصف القوس التى يكون الضلع وترها وهو سهمها[13]) وان نسبة نصف القطر الى المحيط اقل من السدس باقل من ثلث سبعه فينبغى ان نفرض فى الدائرة مضلعا كثير الاضلاع بحيث يكون نسبة سهم قوس كل ضلع الى تمام السهم الى نصف القطر اقل من نسبة سدس ثامنة الى الواحد بثلث سبعه او اكثر اعنى ثمان تواسع او اقل منه فيكون وتر تمام قوس كل ضلع منه ناقصا عن القطر باقل من ستة عشر[14]) تاسعة لان الوتر المذكور يساوى ضعف البعد المذكور فيكون فضل مربّع القطر على مربعه اقل من اربعة امثاله مرفوعا بمرتبة تقريبا اعنى اقل من سابعة واحدة

25 واربع ثوامن فلا يجاوز جذره اعنى وتر كل ضلع منه عن سبع روابع فاذا نصفنا ثلث المحيط ثمانية وعشرين

Blatt 3a 1 مرة يحصل قوس ي خمس روابع وسبع واربعون خامسة وكسر بالاجزاء التى يكون بها المحيط ثلثمائة وستين جزء[15]) كما هو ظاهر عن هذا الجدول

[12]) Hs: غلط   [13]) Hs: سمها   [14]) Hs: ست عشر   [15]) Hs: جزاء

Tafel von Blatt 3a

تصعيف عدد الاضلاع مرة بعد اخرى مبتدءا من المثلث							تنصيف ثلث المحيط مرة بعد اخرى													
العدد	خمس مرات ع	اربع مرات ع	ثلث مرات ع	مرتين ع	مرة ع	اضلاع	اجزاء	دقائق	ثواني	ثوالث	روابع	خوامس	سوادس	سوابع	ثوامن	تواسع	عواشر	حوادي عشر	ثواني عشر	ثوالث عشر
ō ا						ح و	قك س													
ب ح						س كد	ل يه													
د ه					ا	مح لو	ر ح	ل مه												
و ر					ح و	س كد	ا ō	نب نو	ل يه											
ح ط					س كه	مح لو		كح يد	ر ح	ل مه										
ي يا				ا	نا س	س كد		ر ح	ا ل	نب نو	ل يه									
س يح				ح و	كد مط	مح لو		ا ō	مه نب	كح مد	ر ح	ل مه								
يد يه				يح كر	لط يح	س كد			كو يح	كب يا	ا ō	نب نو	ل يه							
يو ير			ا	ند مط	لو يح	مح لو			و ح	له ير	ل مه	كح يد	ر ح	ل مه	،					
يح يط			ح ر	لح يو	كر ند	س كد			ا ō	لح مط	نب كو	لر يح	ا ل	نب نو	ل يه					
ك كا			يد كط	لح ر	مح لر	مح لو				كد س	مح كا	ط لد	يه لر	كح مد	ر ح	ل مه				
كب كح		ا	نح نو	يه ل	يه ل	س كد				و ح	ي ه	مر كح	يح لط	نب كو	ا ō	نب نو	ل يه			
كد كه		ح ر	يح مو	ا ب	ō ا	مح لو				ا ō	لب مو	ما ك	مط ند	مح نا	ō ل	كح يد	ر ح	ل مه		
كو كر		يه لا	لب د	د ج	ح و	س كد					كح يا	ي له	كر يح	كه مب	مه نب	ر لح	ا ل	نب نو	ل يه	
كح	ا	ب	ج	يو	نب	مح					ه	مر	لو	نا	كو	يو	مه	كح	ر	ل

Blatt 3a 5 ولا محالة يكون وترها اقل من سبع روابع لان وتر كل قوس على ان المحيط ثلثمائة وستون والقطر
مائة وعشرون لا يزيد على القوس بمثل ثلث سبعها فاذا جعلنا فى الدائرة مضلعا يكون نلك احد
10 اضلاعه فيكون عدد اضلاعه ثمانمائة الف الف وثلثمائة وخمسة وثلثين الفا ومائة وثمانية وستين ومرفوعه
لان ا ب ح نو ىب مح ولما كان اول مراتب هذا العدد مخامسا فينبغى ان نستخرج
مقدار الضلع الواحد بحيث لا يعتد اعمال الكسور بواحدة من المرتبة الثالثة عشرة لانا اذا ضربناه
15 فى نلك العدد لا يعتد[16]) فى المحيط بثامنة واحدة لان ضرب المخامس فى الثالثة عشرة يحصل الثامنة
ولان كان اول مراتب مقدار ضلع واحد اقل من سبع روابع وآخره الى الثالثة عشرة وضرب اقل من
18 سبع روابع فى الثالثة عشرة يكون اقل من سبعة من المرتبة السابعة عشرة فينبغى ان[17]) لا يبلغ
التفاوت فى مربعه بذلك المقدار وكذا فى تمامه وكذا فى منحطه بمرتبة وهكذا الى اوّل العمل فاذا
20 استخرجنا الاوتار كما ذكرنا فى الفصلين المتقدمين حتى يحصل محيط مضلع يكون عدد اضلاعه
ا ب ح نو ىب مح واستقصيناه فى العمل الى المرتبة الثامنة عشرة يحصل المطلوب

الفصل الرابع فى الاعمال زدنا القطر وهو ب ك على ضلع المسدس وهو ك ا باغ ح ك رفعناه بمرتبة صار
23 ح ك ك اخذنا جذره وزدنا عليه ب ك ورفعنا المجموع بمرتبة واخذنا جذره وهكذا عملنا ثمانية وعشرين[18])
عملا وما جاوزنا عن عمل بثانية الا بعد استيناف العمل مرتين ثلثة مع احتياط ميزان العمل
24 وضرب الجذر الحاصل فى نفسه واستينافه مرتين ثلثة وزيادة باقى العمل على الحاصل الثانى [فيكون][19])
25 المجموع مساويا للعدد ان صح العمل امتحانا وتيقنا لصحته لئلا[20]) وقع سهو وبشرى فيما بعده ولما
كانت الارقام كثيرة لم نستعمل الارقام التى لا يحتاج الى استعمالها وطريق استخراج الجذر وتحصيل المربّع
27 عن الجذر بهذا الوجه مما استنبطناه وذلك اسهل طريق فى هذا الباب واوردنا جداول الاعمال فى هذا
28 الفصل ليكون دستورا للمحاسبين ومنهاجاً لمن اراد الوقوف على صحته وجداول الاعمال هذه

[16]) Hs: تعتد [17]) Hs: لان [18]) Hs: عشرون [19]) Hinzufügung des Übersetzers [20]) Hs: ليلا وقع سهوا

Anmerkungen zu Tafel Blatt 3 b (S. 81):

[1]) Hs: ما [2]) Hs: نط [3]) Am rechten Ende der Zeilenlücke zwischen den beiden oberen Rechenproben standen die Ǧummalziffern كـ, darunter لـ, die offenbar aus Versehen stehen geblieben sind; denn sie gehören zu den beiden obersten Reihen der zweiten Probe, wo sie auch richtig stehen. [4]) Hs: ل [5]) Links von نج hatte Hs noch falsch zweimal لا.

Anmerkungen zu Tafel Blatt 4 a (S. 82):

[1]) Hs: نط [2]) Hs: نط [3]) Die Stellen für كـ, ه und نو sind in Hs leer. [4]) Hs: كـ [5]) In Hs nicht klar zu erkennen.

Berichtigung: In der unteren Reihe neben صح muß in der 3. Spalte gelesen werden ىه statt ىه.

Tafel
Blatt 3 b

الحادية عشر
الثانية عشر
الثالثة عشر
الرابعة عشر
الخامسة عشر
السادسة عشر
السابعة عشر
الثامنة عشر
صح

العمل الاول ويحصل منه وتر ثلث المحيط وهو وتر تمام السدس و

العاشرة	التاسعة كه		الثامنة مد		السابعة ه		السادسة نو		الخامسة نز		الرابعة كز		الثالثة نح		الثانية كب		دقيقة نه		درجة مح		مرفوع ١	
مب ١	الثامنة عشر	السابعة عشر	السادسة عشر	الخامسة عشر	الرابعة عشر	الثالثة عشر	الثانية عشر	الحادية عشر	العاشرة	التاسعة	الثامنة	السابعة	السادسة	الخامسة	الرابعة	الثالثة	الثانية	الدقيقة	الدرجة	المرفوع	المرفوع المرتبين	المنزلة
نو كب																			ه	ه	ح ١	
مب مح	له ند	ط مه	ر نب	م نا	لد نح	مح كد	نط مد	مط مح	مح كح	مط مر	١								مط	نو	ب ١	
نح	ما ب	كح كه	بد و	نه ط	م نا	لح ط	نه لب	لو كط	كه كه	ب ب							كه	م	ما ط	ح ح		
نر	لط نب	نح نه	ر نه	مو نو	مط مه	ح ن	مح كر	ح							د	كح لا	له ب	نط نو	١			
	م ح	ب س	س ح	مط مح	ح كب	مح نط	نه مح	ح ح						د	كح	نو ح	لا نه	كب كن	ح ح			ند
	لط ل	ن نب	ح ن	نو لو	م س	مح نو	١				ط	كد	نو مر	لا ن	نب لا	لو مح	١					ما
	ط نا	مح طح	س لب	لط كط	كح كه	ب ب			ط	س	نا د	له لط	نه مح	ما كر	كن سر	ح ح						و
	سر مو	مح لو	م بو	مط مو	ب		نو	نو	نا نا	مر ح	مو مح	نو كب	١ نط	بد مح	ح ح							كد
	لا د كر	با نه نو	كد كه نو	ح ح لب	ح	نح	مد ه	مح مه	لط ما	لط مح	مح كه	مح لب	ب ب	ه								لو
	كه	ن	مد لو	كر مر	نا نو	١ مح	مح مح	مح ح	نر ط	كه لو	كح كو	١ ١										يح
	له	ط	ر	م	لد	مح	نط	مط	مح	مط	١											ع
	كه	كح	١	نب	نه	نه	نو	مه	ن	كر	ح											مح
			مد	ه	نب	نه	نه	نو	مه	ن	كر	ح										مح
					ه	نب	نه	نه	نو	مه	ن	كر	ح									
مه	ن	كر	ح				نو	ند	نه	نو	مه	ن	كر	ح								نا
نو	مه	ن	كر	ح					نر	ند	نو	مه	ن	كر	ح							نو
نه	نو	مه	ن	كر	ح						كر	نو	مه	ن	كر	ح						لا
نط	نه	نو	مه	ن	كر	ح							لح	مك	ن	كر	ح					ه
نب	نه	نه	نو	مه	ن	كر	ح							كس	ن	كر	ح					مح
كح	نب	نه	نه	نو	مه	ن	كر	ح									كر	نه كو	ح			كه
	١	لب	نه	نه	نو	مه	ن	كر	ح										مح	ب		
ن	كح	١	نب	نه	نه	نو	مه	ن	كر	ح											١	
		لد	نو مح ما	ه ع	ه																	
نو	ى كا	مح ه	كد مد	لد و	مب ل	ه كب	ه															
نو كد	لو مو	نر كد	ل نه	لح ى	مو كن	نه ح	نو م	ه ١	ه													
كا ند	لو مح	م نو	ب كا	ح لب	كن كن	نا نه	مح ه	ه و	مب ل	ه لا	ه											
مر ند	ند كن	ط س	ح كه	ند مح	كب ه	ه كد	ل نه	مح كه	مح كح	كب نه	كه مر	ه مد	ه									
ك نو	بس نب	مح نر	كر ه	ه ند	لو مح	م مح	كب كط	نا ى	نه ط	كب ك	لب م	لا ه	ه ه	ه نو	ه							
ه ه	نو ه	ه س	ند لط	لط كر	نر كط	مح نه	ى با	كد لب	ح مس	نو ه	ه ه	ه ك	ح نا	نام	نر مر	ه كر	ه					
١ لح	ه ل	ه ه	نو ه	كح كن	مه مح	كح مح	مح ما	نط ه	ه ه	ه ح	لب ند	كه ند	نه كن	نب مه	كا كد	طا لب	نح ما	ه كس	ه			
نر نه	مد س	كب كن	ه لح	ه ه	د ه	ما ه	ه ه	ه س	بس مح	كه لط	و كه	نه و	ند كو	ط لو	ى كا	مح ى	مو كن	نه كه	نه لط	ه مح	ه	
	لد لد	نو نو	ن ن	مح مح	نط نط	نط نط	نا نا	ح ح	نه نه	ب ب	نه نه	مح مح	نر نر	لا لا	نر نر	كه كه	مر مر	د د	له له	مد مد		
	كه كر	ى نو	نو ح	لب	ه	ه	نو	نب	ط	ند	ط	س	د	نو	د	ح	كه	ن	مط	ل	١	
	ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه	ح	

ثم تحصيل مربعه
امثاله

٦ ٧ ٧ ٦ ٦ ٤ ٣ ٤ ٤ ٣ ٣ ٢ ٤ ٢ ٢ ٢

Tafel Blatt 4a

العمل الثاني ويحصل منه وتر تمام نصف سدس المحيط

المرفوع منه ا	نه	ند	لط	نر	كه	ب	ما	ر	نو	لح التاسعة		

ح ا	مح	نه	كب	لح	كر	نر	نو	ه	مد	كه	لا	ب	ا	نو	كب	مب	مح	لح	نر

[illegible]

ح مح نه كب لح كر نر نو ه مد كه لا ومب ا نوكب مب مح لح نر ه ه

٣ ٢ ٢ ٣ ٢ ۴ ٤ ٤ ٣ ۴ ۴ ٨ ۴ ٦ ٧ ٤ ٦ ٧

Blatt 18a
1 الفصل السادس فى استخراج محيط المضلع الذى فى الدائرة والذى عليها المتشابهان اللذان يكون عدد اضلاع كل واحد منهما ٨٠٥٣٣٥١٩٨٠٠٠٨

2 ضربنا الجذر الحاصل فى الفصل الخامس الذى هو مقدار ضلع واحد فى عدد اضلاع المضلع المذكور
3 الذى مرفوعه كان ا ب ج نو س مح[21] وهو محيط المضلع الذى فى الدائرة بالاجزاء التى يكون بها القطر مائة وعشرين وهو اصغر من محيط الدائرة وعلى ما بيّنا فى الفصل الثانى يكون نسبة هذا المحيط الى فصل مجموع اضلاع المضلع الذى عليها ويشابه له على هذا المحيط كنسبة نصف الجذر الحاصل فى العمل الثامن والعشرين الذى يكون هذا

Tafel Blatt 18a rechts

	كه	نط	لو	لح	ند	لو	نط	ند	ا	د	و		المضروب
	الرابعة عشر	الثالثة عشر	الثانية عشر	الحادية عشر	العاشرة	التاسعة	الثامنة	السابعة	السادسة	الخامسة	الرابعة	المضروب	
	كه	نط	لو	لح	ند	لو	نط	ند	ا	د	و	ا	ع خمس مرات
ن	لح	س	ر	كط	س	نط	كط	ب	ج	س		ب	ع اربع مرات
ح لب	مح ب	د كد	نب د	ا مح	نب د	ر نب	ج ا	ه لب	مح ه	ه		ج	ع ثلث مرات
لو ه	ط مح	مد ج	ح لو	مد ط	ده مد	نو ح	ه د	لو ا	ا			نو	المرفوع مرتين
ر لو	مح و	ب س	مح ر	نا مح	س ب	ه مح	س ه	ا				س	المرفوع مرة
س كو	نا مح	س كح	مر س	مح نا	ه س	مح ح	د					مح	العدد
	مو	مط	ند	مو	نا	لد	ا	كح	نط	نو	و		حاصل الضرب
	التواسع	الثوامن	السوابع	السوادس	الخوامس	الروابع	الثوالث	الثوانى	الدقائق	الاجزاء	المرفوع مرة		

Tafel 18a, 9ff.

الثامنة عشر	السابعة عشر	السادسة عشر	الخامسة عشر	الرابعة عشر	الثالثة عشر	الثانية عشر	الحادية عشر	العاشرة	التاسعة	الثامنة	السابعة	السادسة	الخامسة	الرابعة	الثالثة	الثانية	الدقيقة	الاجزاء
ك	نز	ند	نح	كد	نه	و	نو	كك	نه	نط	نط	نط	نط	نط	نط	نط	نط	نط
م	ب	ه	ما	له	مد	لح	ح	لو	د	الى فصل نصف القطر عليه الذى هو هذا								

21) Hs: حـ نو

11*

Blatt 18a
فهذا اربعة اعداد متناسبة التالى[22]) منها مجهول واوّل مراتب العدد[23]) الاول المرفوع مرة واوّل 9
الرابع التاسعة فيكون حاصل ضربهما ثوامنا وخارج القسمة[24]) على الثالث تواسعا ولا تحتاج 10
الى ما[25]) بعدها فلذلك تركنا اكثر الارقام ونقول ان نسبة و يو الى المجهول كنسبة ستين الى نلو
عشرة فضربنا الاوّل فى الرابع منحط حصلت تسعة وعشرون تاسعة فاذا زدناه[26]) على محيط ذلك
المصلع يحصل محيط المصلع الذى على الدائرة هذا

Tafel 13ff.

مرفوع مرة	اجزاء	دقائق	ثوانى	ثوالث	روابع	خوامس	سوادس	سوابع	ثوامن	تواسع
و	يو	نط	كح	ا	لد	نا	مو	يد	ن	ند

وهو زائد على محيط الدائرة
ومقدار الزيادة والنقصان معا تسعة وعشرون تاسعة[27]) على ان القطر مائة وعشرون فبالاجزاء التى بها 15
المحيط ثلثمائة وستون يكون اقل من تسعة وعشرين[28]) تاسعة البتة وقد بينا فى الفصل الثالث ان
مقدار ثامنة واحدة من محيط دائرة يكون قطرها ستمائة الف مثل لقطر الارض يكون اقل من اربعة
اخماس عرض شعرة[29]) من عرف البرذون الذى هو سدس عرض شعيرة معتدلة فيكون اقل من تسعة 17
وعشرين تاسعة منه اقل من خمسى عرض شعرة فلا يعتد التفاوت بين المحيطين المذكورين الذى يكون
احدهما اقل من المحيط[30]) الحقيقى للدائرة والآخر اكثر منه بخمسى عرض شعرة فاذا زدنا نصف التفاوت
بين المصلعين على الاقل ونقصناه من الاكثر بل نجبر[31]) منه ما فى المرتبة التاسعة للاقل اعنى ند 20
تاسعة ونحذف ما فيها من الاكثر اعنى ند تاسعة ليحصل هذا

Blatt 18a
Tafel 20ff.

مقدار المحيط على ان القطر مائة وعشرون …									
مرفوع مرة	اجزاء	دقائق	ثوانى	ثوالث	روابع	خوامس	سوادس	سوابع	ثوامن
و	يو	نط	كح	ا	لد	نا	مو	يد	ن

فلا يعتد[32]) التفاوت بين هذه وبين ما هو الحق خمس عرض شعرة من عرف البرذون الذى هو
سدس عرض شعيرة معتدلة

Blatt 18b
وذلك ما اردنا ان نبين[33]) واوردتها فى مصراع لينتظم بيت 1

و يو نطْ كَحِ اَ لَد نَا مُو يَدن
محيط حيث[34]) نصف القطر سين

ثم اذا فرضنا نصف القطر واحدا يكون المحيط منحطا[35]) ذلك العدد بعينه اعنى يكون المرفوع
منه اجزاء والاجزاء دقائق وهكذا حتى يكون التوامن تواسعا ولا يعتد التفاوت عن الحقيقى حينئذ[36])

22) Hs: التالى 23) Hs: عدد 24) Hs: قسمت 25) Fehlt im Text 26) Hs: زدنا 27) Hs: تاشعة
28) Hs: وعشرون 29) Hs: شعيرة 30) Hs: محيط 31) Hs: تحبر 32) Hs: تعتد 33) Hs: تبين
34) Hs: جيب 35) Hs: منحطا 36) Hs: حسد

بتاسعة واحدة بل يكون اقل من ربع تاسعة وانما فرضنا فى الاعمال السابقة نصف القطر ستين لئلا يختلف الاوتار على ما هو مشهور ومستعمل فى الزيجات فلو فرضناه واحدا لما اختلفت صور الارقام بل اختلفت مراتبها وقد وضعنا مضروبه فى كل واحد من الرقوم الستينية فى الجدول ليسهل منه استخراج المحيط من القطر وبالعكس والجدول هذا*)

. . . .

Blatt 20a
1

الفصل السابع فى ما يعتد عن اهمال الكسور الزائدة والناقصة[37] فى آخر مراتب الاعمال السابقة اعلم انّ فى آخر مراتب تلك الاعمال لا يبلغ التفاوت بواحدة تامة من تلك المرتبة ولا يعتد الى آخر مراتب العمل[38] الاخير ايضا لان آخر مراتب العمل الاول كان سبعة وخمسين وهو ناقص بعشرين من المرتبة التى تليه[39] اعنى من المرتبة التاسعة عشرة لان باقى الحساب كان ح نو كز فاذا قسمناه على ما بين المربعين الذى كان ح كز ن مه تخرج نو م واخذناه نز جبر الكسر فيكون مربّع العمل الثانى ناقصا بمثله اعنى بعشرين لكن من المرتبة الثامنة عشرة فاذا نقصناه عن باقى العمل الثانى الذى هو ب نو ه بقى ب نه مه وقسمناه على ما بين المربعين الذى كان ح نا مط تخرج مه كح وقد قسمنا هناك ب نو ه على ما بين المربعين وخرج مو وهو ناقص باثنين وثلثين من المرتبة التاسعة عشرة وعلى هذا القياس علم ان آخر مراتب العمل الثالث ناقص بستة من المرتبة التى تليه[40] وللرابع زايد بخمسة عشر وللخامس ناقص بثمانية وعشرين وللسادس ناقص بخمسة عشر وللسابع زايد باثنين[41] وعشرين وللثامن ناقص بستة وللتاسع ناقص باربعة وعشرين وللعاشر زايد بثمانية عشر وللحادى عشر ناقص باربعة وللثانى عشر زايد باثنتى عشرة[42] وللثالث عشر ناقص بخمسة وللرابع عشر ناقص بستة عشر وللخامس عشر ناقص بسبعة عشر وللسادس عشر زايد بتسعة وللسابع عشر بستة عشر وللثامن عشر زايد بثمانية وللتاسع عشر ناقص بثلثة وللعشرين ناقص بسبعة عشر وللحادى والعشرين ناقص باربعة عشر وللثانى والعشرين زايد بسبعة وعشرين وللثالث والعشرين بثلثة وللرابع والعشرين بواحدة وللخامس والعشرين بثمانية عشر وللسادس والعشرين بخمسة عشر وللسابع والعشرين بعشرة وللثامن والعشرين بستة[43] وعشرين كلها من المرتبة التاسعة عشرة للجذر والثامنة عشرة[44] لمربع[45] العمل الذى يليه وهذه السبعة الزايدات بتلك المقادير

فيكون مربع عمل الثامن والعشرين زايدا بعشرة لكن من المرتبة الثامنة عشرة فيكون آخر مراتب فضل مربع القطر عليه اعنى رقم نز وهو من المرتبة السابعة عشرة ناقصا بعشرة من المرتبة الثامنة عشرة فيكون آخر مراتب جذره الذى اخذناه خمسة وعشرين ناقصا باثنين وخمسين من المرتبة الخامسة عشرة وآخر مراتب حاصل الضرب اعنى المحيط الذى اخذناه ستة واربعين من المرتبة التاسعة ناقصا باربعة وخمسين من المرتبة العاشرة والاولى ان ناخذ آخر مراتب الضلع اربعة وعشرين وآخر مراتب المحيط فى الدائرة خمسة واربعين وحينئذ يكون الجبر خمس عشرة تاسعة والحذف اربع عشرة وقد اطنبت الكلام فيه ليعلم ان اهمال الكسور الزائدة والناقصة[46] فى آخر مراتب هذه الاعمال لا يعتد الى

*) Die jetzt im Original folgende Vielfachen-Tafel ist als unwesentlich fortgelassen worden. Vgl. ihre Übersetzung S. 19 [37]) Hs: الباقية [38]) Hs: عمل [39]) Hs: يليه [40]) Hs: يليه [41]) Hs: باثنتين [42]) H: باسى عشره [43]) Hs: وبستة [44]) Hs: عشر [45]) Hs: للمربع [46]) Hs: والباقية

تاسعة واحدة تامة فى مقدار المحيط وقد وضعنا هذه المقادير[47] فى الجدول ايضا نيقل وقوع غلط الناقلين والجدول هذا

Tafel Blatt 20a

مراتب الاعمال	زوايد وذواقص	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	مايعتد	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible] ٧	[illegible]	[illegible] ٧	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	الاعمال	[illegible]	٧	٥	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	مربع الضلع [illegible]	[illegible]

الفصل الثامن فى تحويل مقدار المحيط الى الرقوم الهندية على ان نصف القطر واحد ولما كان المحيط ستة امثال نصف القطر

Blatt 20b 1

وكسر بلغنده الى التسعة فاخذنا ذلك الكسر من مخرج هو عشرة آلاف مكررة خمس مرات لان جزءا واحدا منه لا يزيد على تاسعة واحدة بنصف عشرة ⟨ولسهولة العمل به ايضا⟩ ووضعنا مضروبه فى كل واحدة من الرقوم التسعة فى الجدول ليسهل العمل به والجدول هذا

Tafel 20b, 4ff.

جدول تضاعيف نسبة المحيط القطر

الاعداد	الكسور																الصحاح	
				الوف			الوف الوف			مكررة ثلث مرات			مكررة اربع مرات					
	احاد	عشرات	مئات	احاد	عشرات	مئات	احاد	عشرات	مئات	احاد	عشرات	مئات	احاد	عشرات	مئات	احاد الالوف خمس مرات	امثال نصف القطر	عشراتها
	خمس	ستة	ثمان	خمس	تسع	سبعة	واحد	سبعة	صفر	ثلثة	خمسة	ثمان	واحد	ثلث	ثمان	اثنان	ستة	صفر
١	٥	٦	٨	٥	٩	٧	١	٧	٠	٣	٥	٨	١	٣	٨	٢	٦	٠
٢	٠	٣	٧	١	٩	٥	٣	٤	١	٦	٠	٧	٣	٦	٦	٥	٢	١
٣	٥	٩	٥	٧	٨	٣	٥	١	٢	٩	٥	٥	٥	٩	٤	٨	٨	١
٤	٠	٦	٤	٣	٨	١	٧	٨	٢	٢	١	٤	٧	٢	٣	١	٥	٢
٥	٥	٢	٣	٦	٧	٩	٨	٥	٣	٥	٦	٢	٩	٥	١	٤	١	٣
٦	٠	٩	١	٥	٧	٧	٠	٣	٤	٨	١	١	١	٩	٩	٦	٧	٣
٧	٥	٥	٠	١	٧	٥	٢	٠	٥	١	٧	٩	٢	٢	٨	٩	٣	٤
٨	٠	٢	٩	٦	٦	٣	٤	٧	٥	٤	٢	٨	٤	٥	٦	٢	٠	٥
٩	٥	٨	٧	٢	٦	١	٦	٤	٦	٧	٧	٦	٦	٨	٤	٥	٦	٥
١٠	٠	٥	٦	٧	٥	٩	٧	١	٧	٠	٣	٥	٨	١	٣	٨	٢	٦

[47]) Hs: هذا المقادير

Zur Tafel 20b, 4ff.: Weibliche und männliche Formen stehen in der Hs durcheinander

واعلم ان الاثنين اللذين فى آخر مراتب الكسور هما بمنزلة الدقائق للستة الصحاح على ان عشر دقائق يكون واحدا صحيحا وان شئنا نسمى هذه المرتبة بالاعشار والثمانية التى عن يمينها بمنزلة الثوانى ونسميها بثانى الاعشار والثلثة بعدها بمنزلة الثوالث ونسميها بثالث الاعشار وعلى هذا بقياس حساب النجوم ولهذا اخذنا من مخرج مفرد وهو واحد وهذا الطريق فى الحساب الهندى مما استنبطناه وكذا وضعه فى الجدول وقد اوردنا هذه الارقام اخذاً من اليسار الى اليمين فى مصراع لينتظم بيت Blatt 20b 3

وبَحاجًا حهج صز ا زَ ضد حوه محيط لقطر هو اثنان منه وبالفارسية

شش ودو هشت وسه يك هشت وپنج وسه صفرى بهفت وبكرا[48]) ونه پنج وهشت وشش پنج است

الفصل التاسع فى كيفية العمل بالجدولين فان كان مقدار نصف القطر معلوماً امّا بالذراع او الفرسخ او غيرهما من المقياسات فنضعه بارقام الجمل او الهندية[49]) ايهما شئنا ونضربه فى نسبة المحيط بان ندخل فى الجدول وناخذ بازاء اعلى المراتب منه

فما وجد نكتبه على موضع ثم ندخل بالمرتبة التى يليه فيه ونكتب ما وجد تحته منحطا بمرتبة ثم بما يليه ونكتب ما وجد تحته منحطا بمرتبة اخرى الى ان يتم ثم نجمع الجميع ونترك ما جاوز عن ازاء آخر مراتب المأخوذ أولاً بل بعضا من اواخره اذا لم يحتج الى التدقيق او كانت الدائرة صغيرة[50]) فما حصل هو مقدار المحيط بالاجزاء التى بها نصف القطر معلوما ويكون اعلى مراتبه مرفوعا عن اعلى مراتب نصف القطر بمرتبة واحدة سوا كان صفراً او عددا اعنى ان كان اعلى مراتب نصف القطر مرفوعاً اربع مرات يكون اعلى مراتب الحاصل مرفوعاً خمس مرّات وان كان روابعاً فيكون اعلى مراتب الحاصل ثوالث وان كان عشرات الالوف فيكون مئات الالوف وان كان ثالث الاعشار فيكون ثانى الاعشار وكما ان انحطاط رقوم الجمل من اليمين الى اليسار فيكون انحطاط الرقوم الهندية من اليسار الى اليمين مثاله اردنا ان نعرف مقدار محيط دائرة يكون نصف[51]) قطرها ستمائة وخمسين الفا وثمانمائة واربعة واربعين ذراعاً او فرسخا وثمن ذراع او فرسخ وضعناه

19a oben

		العمل برقوم الجمل											
مرفوع ثلث مرات	ح	ة	ىح	ن	نح	كد	د	ىد	له	ىح	مد	ل	
مرفوع مرتين	ة		ة	ة								ة	ة
مرفوع مرة	مر			د	نه	ىح	لد	نر	ىد	ىح	لح	ىح	نر
الذراع او الفرسخ	كد				ب	ل	مر	مر	ىب	لر	نو	مب	ل
دقائق	ر					ة	مح	ىح*)	نو	ىو	يا	د	ب
ثوانى	ل						ح	ج	كط	مد	ة	مر	كو
الحاصل وهو المحيط		ة	ىح	نه	نو	ىد	ىد	لو	ىح*)	ىه	كو	ىر	له
			مرفوع ثلث مرات	مرفوع مرتين	مرفوع مرة	ذراع او فرسخ	دقائق	ثوانى	ثوالث	روابع	خوامس	سوادس	سوابع

[48]) Nach وبكرا fehlt das Wort für 7 [49]) Hs: الهندى [50]) Hs: صغره [51]) نصف fehlt im Text.

*) Hs unklar; richtig ist ىح

Tafel 19 a
Mitte

العمل بالرقوم الهندية

الصحاح	الوف الالوف	٤									٣
	مئات الالوف	٠								٣	٧
	عشرات الالوف	٨							٠	١	٦
	الالوف	٩							٠	٤	٩
	المئات	٣					٢			١	٩
	العشرات					٢					١
	الاحاد	٤			٠			٦		٩	١
الكسور	الاعشار	٢			٦	١	٣	٥		٢	١
	ثانى الاعشار	٤	٣	٢	٢			٤		٦	
	ثالث الاعشار	٣	١	٥	٨	٢	٧	٨		٥	٤
	رابع الاعشار	٤	٤	٦	٣	٧	٤	٢		٣	٣
		٦		٦		٤	١	٤		٥	
		٤	٥	٣	٨	١	٢	٥		٨	٧
		١		٧	٥	٢	٢	٧		٩	٧
		٥	٢	٠	٣	٢	٨	٤		٧	٥
		٤	٦	٦	٠	٨	٧	٣		٩	
		١	٥	١	٧	٧	١			٣	٩
		٩	٤	٤	٢	٢	٨	٧	٠		٠
		الاصل وهو المحيط	٥	٢	١	٤	٤	٨	٠	٥	٦
			ثالث الاعشار	ثانى الاعشار	الاعشار	الاحاد	العشرات	المئات	الالوف	عشرات الالوف	مئات الالوف

نوع آخر بالرقوم الهندية ايضا والعمل فيه ان نبدا بالايمن ونرفع مرتبة مرتبة من اليمين الى اليسار كل واحدة تحت اخرى *)

. . . .

*) Diese 2. Art der Rechnung mit indischen Ziffern ist hier fortgelassen. Vgl. Übersetzung nebst Tafel 19 a (unten) auf S. 24 oben

برقوم الجمل					
الكسور		الصحاح			
ثوانى	دقائق	الذراع او الفرسخ	مرفوع مرة	مرفوع مرتين	مرفوع ثلث مرات
ل	ر	كد	مر	ة	ح

Blatt 19a 2. Zeile v.u.

فان اردنا عبرنا عن هذا الكسر بانه الفين مكررين ست مرات واربعمائة واربعة وثلثين الفا مكررا خمس مرات الى آخره من مخرج عشرات الوف مكررة[52]) ست مرات وان اردنا عبرنا عنه بانه عشران واربعة من ثانى الاعشار وثلثة من رابعها وهكذا الى آخره وهذا غاية[53]) وقت العمل

Blatt 19b 1

والاسهل ان يحذف بعض المراتب من اواخرها ويبقى ما لم يقدح فى مقدار نريد ان لا يهمل مثلا ان كان المقياس فرسخا ونريد ان لا نهمل اصبعا فى الحاصل والاصبع ثلثة ارباع ثالثة من فرسخ وقريب ثلث خامس الاعشار منه فاذا حسبنا الروابع او سادس الاعشار واسقطنا ما بعدها يحصل المطلوب وان كان الدائرة صغيرة مثلا كان نصف قطرها مائة وسبعة وعشرين ذراعًا ونصف ذراع[54]) يكتفى ان نعمل فيه هكذا

٠	٦	٢	٨	٣	٢	١	الصحيح
	١	٢	٥	٦	٦	٢	
		٤	٣	٩	٨	٧	
			٣	١	٤	٥	الكسر
٠	٨	٠	١	١	٠		
الصحاح				الكسور			

فحصل ثمانمائة ذراع وذراع واحد وعشر ذراع وهو مقدار المحيط وامّا ان كان مقدار المحيط معلوما واردنا معرفة القطر فنضعه ونقسمه على نسبة المحيط بان نطلب فى الجدول اكثر عدد يكون اقل منه بصورته فاذا وجد فان كان فى سطر يكون اعلى المراتب[55]) صفرًا فنضع صفرًا فى اعلى المحيط الموضوع ايضا اعنى يمين رقوم الجمل ويسار الهندية ونكتب ما وجد تحته بحيث يكون الصفران متحاذيين وكذا سائر الارقام على الولاء وننقصه منه ونكتب الباقى تحته ونكتب ما كان فى حاشية الجدول اعنى فى سطر العدد بازاء ذلك العدد فى موضع ونسميه سطر الخارج ويكون ذلك من مرتبة هى تالى اعلى مراتب المحيط ولو كان الصفر الذى الحقناه به ثم نطلب اكثر عدد يكون اقل من الباقى بصورته وننقصه منه ونكتب ما وجد فى الحاشية بازاء ذلك العدد تالى ما وضع اولا فى سطر الخارج اعنى يسار ما كتب اولا ان كان من رقوم الجمل ويمينه ان كان الهندية هذا اذا كان عدد اعلى مراتب الباقى منحطا عن اعلى مراتب ما فوقه صفرا كان او عددا بمرتبة واحدة واما ان كان انحطاطه اكثر من مرتبة

52) Hs: مكره 53) Hs: غايت 54) In Hs fehlt: ونصف ذراع 55) Hs: مراتب.

Am rechten Rand der zweiten Tafel ist statt الصحيح das sonst angewandte الصحاح zu lesen.

12

19b
Tafel
unten rechts

العمل بحساب الجمل							
ل مد	ر[1] ں	كد مد	مر نه	ح نه	ح ب	المحيط ما طلبناه	[illegible] كح
مو كط	ب له	لط ا	نا مط	ں ں		الباقى ما طلبناه	[illegible] مو
نر مر	كر ں	لر لر	ب[2] ب	[3]		الباقى ما طلبناه	[illegible] كه
ل نا	كب نح	ح ح				الباقى ما طلبناه	[illegible] ح
لط	ح					الباقى ما طلبناه	[illegible] له

Tafel
unten links

بالرقوم الهندية											[illegible]
٠ ٠	٦ ٦	٥ ٢	٠ ٨	٨ ٣	٤ ١	٤ ٨	١ ٥	٢ ٣	٥ ١	المحيط ما طلبناه	[illegible] ١
		٢ ٠	٢ ٠	٥ ٠	٢ ٠	٥ ٠	٥ ٠	٩ ٠	٤ ٠	الباقى ما طلبناه	[illegible] ٠
		٢ ١	٢ ٨	٥ ٨	٢ ٤	٥ ٩	٥ ٥	٩ ٥	٤ ٦	الباقى ما طلبناه	[illegible] ٣
			٣ ٣	٦ ١	٧ ٤	٦ ١	٠ ٥	٣ ٩	٨ ٣	الباقى ما طلبناه	[illegible] ٥
				٥ ٥	٣ ٠	٤ ٢	٤ ٦	٤ ٥	٥ ٥[4]	الباقى ما طلبناه	[illegible] ٨
					٣ ٣	١ ١	٧ ٤	٩ ١	٠ ٦	الباقى ما طلبناه	[illegible] ٥
							٣ ٠	٧ ٠	٤ ٠	الباقى ما طلبناه	[illegible] ٠
							٣ ٣	٧	٤	الباقى ما طلبناه	[illegible] ٦

[1] Hs: ں [2] Hs: لر [3] Hs: ب [4] Hs: ٩

Blatt 19 b

واحدة فنضع فى تالى ما كتب فى سطر الخارج صفرا او اصفارا عددها اقل بواحدة من عدد الحطاط اعلى مراتب الباقى عما فوقه ونضع تحت الباقى صفًا من الاصفار او صفوفا بعدد الاصفار المذكورة بحيث يكون اعلى مراتب الصف الاوّل محاذيا لاعلى[56] مراتب الباقى ولو كان صفرا وللثانى منحطا منه بمرتبة وللثالث بمرتبتين هكذا الى ان يتم الدفع وقوع الغلط وسهولة الضبط لا للوجوب ونكتب الباقى تحت الاصفار مرة اخرى محاذيا للاول ثم نطلب اكثر عدد بالصفة المذكورة وننقصه من الباقى على القياس المذكور وهكذا نعمل الى حيث شئنا فما حصل فى سطر الخارج فهو المطلوب وان شئنا نضع ارقام سطر الخارج على حاشية دستور العمل محاذيا الاعداد[57] المطلوبة مثاله اردنا ان نعرف قطر دائرة يكون ذرعان محيطها بقدر العدد[58] الذى فرضناه من قبل قطرا فعملنا به هكذا*)

. . . .

Blatt 21 a

الفصل العاشر فى معرفة التفاوت بين ما هو المشهور والمستعمل عند القوم وبين ما حصلناه اعلم ان اصحاب هذا الفن اخذوا المحيط ثلثة امثال القطر وسبع مثله فيكون ستة امثال نصف القطر وسبعى مثله فاذا وضعناه برقوم الجمل واخذنا التفاوت بينه وبين ما حصل لنا حصل هذا

نسبة المحيط الى نصف القطر بالحساب[59] المشهور	و	يز	ح	لد	يز	ح	لد	يز	ح	لد
بما حصل لنا	و	يو	نط	كح	ا	لد	نا	مو	يد	ن
التفاوت بينهما	ة	ة	ط	و	يه	لح	مب	ل	يح	مد

فعلم منه ان التفاوت فى دائرة يكون نصف قطرها ثلثة آلاف وستمائة ذراع يكون تسعة اذرع وعشر ذراع تقريبا وقد اورد صاحب التحفة الشاهية ان نصف قطر محدّب الثوابت سبعون الفًا وثلثة وسبعون مثلا لقطر الارض ونصف مثله واستخرج المحيط منه على انه ثلثة امثال وسبع مثله

Tafel 8 ff.

المأخوذ بالارقام الثلثة	٧	٩٧	٤٣٩٨٢٢
العددية	٧	٨٢	٤٣٩,
	٣	٨٥	١٨
ورقم الكسر	٥	١٤	٣
→ الحاصل		٧٨	٤٤٠٢٨٤
ما كان فى التحفة			٤٤٠٤٩٢
التفاوت بينهما			١٧٧

وهو اربعمائة واربعون الفا واربعمائة واثنان وستون مثلا لقطر الارض فاذا حسبناه بما حصل لنا هكذا فيكون التفاوت بينهما مائة وسبعين مثلا لقطر الارض وكسرا اقل من الرّبع فيكون فى درجة واحدة من محدّب الثوابت مثل نصف قطر الارض تقريبا والله اعلم ومن هذا علم اذا ضرب نصف القطر

[56]) Hs: على [57]) Hs: لاعداد [58]) Hs: العد [59]) Hs: بحساب

*) Es folgen die beiden Tafeln 19 b [S. 90] → Die Tafel hat irrtümlicherweise den Strich vor ٣١٤٥

12*

Blatt 21a 10 في ستة وسبع عشرة دقائق يحصل المحيط اقرب الى الصواب من ضرب القطر في ثلثة وسبع واسهل منه

11 الخاتمة في اثبات غلط ابي الوفاء وابي الريحان فقد اوردنا الشكل الاول من المقالة الاولى من المجسطي وليكن[60] ابج نصف دائرة على قطر ادج ومركز د وبد عمودا على القطر وننصف جد

13 على ه ونصل به ونجعل هز مساويا لبه ونصل بز فيكون دز ضلع المعشر وبز ضلع المخمس لان جد نصف على ه وزيد فيه دز فسطح جز في دز مع مربع ده يساوي مربع هز بالشكل السادس من ثانية

15 الاصول فيساوي مربع هب بل يساوي مربعي هد دب ويلقى مربع هد المشترك يبقى سطح جز في زد مساويا لمربع دب اعني مربع جد فخط جز مقسوم بنسبة ذات الوسط والطرفين على نقطة د لان ضرب الخط كله في قسمه الاصغر[61] يساوي مربع قسمه الاطول[62] وذلك يستلزم ان نسبة دز الى جد كنسبة جد الى جز بالشكل السابع عشر من سادسة الاصول وجد الاطول وتر سدس الدائرة بالشكل الخامس عشر من رابعة الاصول فدز يكون وتر عشر الدائرة باستبانة الشكل الثاني عشر من الثالثة عشرة من الاصول وبز القوى عليهما وتر خمس الدائرة بالشكل الثالث عشر من المقالة الثالثة عشر

20 من الاصول وانا اقول ان جز يساوي وتر تمام ضلع المخمس اعني وتر ثلثة اعشار المحيط لان قد عرفت مما سبق ان مجموع مربعي وتر القوس ووتر تمامها يساوي مربع القطر وقد يساوي مجموع مربعي بز جز مربع القطر وذلك لان مربع القطر يساوي اربعة امثال مربع نصف القطر ومربع جز يساوي مجموع مربع جد نصف القطر ومربع دز وضعف سطح جد في دز ومربع بز يساوي مجموع مربعي بد نصف القطر ودز فيكون مجموع مربعي جز بز يساوي مجموع ضعف مربع

25 نصف القطر وضعف مربع دز وضعف سطح جد في دز وقد عرفت مما سبق ان مربع نصف القطر يساوي سطح جز في دز فيساوي مجموع سطح جد في دز ومربع دز فيكون مجموع ضعف سطح

Blatt 21b 1 جد في دز وضعف مربع دز مساويا لضعف مربع نصف القطر فمجموع مربعي بز جز يساوي اربعة امثال مربع نصف القطر فيساوي مربع القطر فاذا كان بز ضلع[63] المخمس يكون جز وتر ثلثة

2 الاعشار وهو المطلوب وقد بين بطلميوس في الشكل الثالث من المقالة الاولى من المجسطي ان الفضل بين سطح وتر احد القوسين في وتر تمام الآخر وبين سطح وتر تمام ذلك القوس في وتر الآخر يساوي سطح القطر في وتر الفضل بين القوسين وايضا بين في الشكل الرابع منها ان مجموع سطح وتر احد القوسين في وتر الآخر وسطح وتر تمام[64] مجموعهما في القطر يساوي سطح وتر تمام احد القوسين في

5 وتر تمام الآخر فيكون مجموع مربع وتر قوس وسطح وتر تمام[65] ضعفها في القطر يساوي مربع وتر تمام تلك القوس فاذا تبين هذه القوانين نشرع في استخراج وتر جزء ونصف وامتحان ما يحسبه ابو

6 الوفاء انه وتر نصف جزء واظهار غلطه في الحساب وايراد وتر نصف جزء وامتحان صحته والحساب هذا

---

60) Hs: لكن 61) Hs: قسمة الاصغر 62) Hs: قسمة الاطول 63) Hs: وتر ضلع 64) Fehlt in Hs
65) Fehlt in Hs

Tafel 21 b

شرح العمل	مرفوع مرتين	مرفوع مرة	اجزاء	دقائق	ثوانى	ثوالث	روابع	خوامس	سوادس	سوابع	ثوامن
خمسة امثال لمربع ربع القطر اعنى مجموع مربع نصف القطر وربعه	ا	له	ō	ō	ō	ō	ō	ō	ō	ō	ō
جذره وهو مجموع ضلع المعشر وربع القطر اعنى ةر	ō	ا	ر	د	نه	كو	كط	لط	و	ند	كو
نقصنا عنه ربع القطر بقى ضلع المعشر اعنى تر	ō	ō	لر	د	نه	كو	كط	لط	و	ند	كو
مجموع مربعه مع مربع نصف القطر وهو مربع ضلع المخمس	ا	كب	نه	د	لط	ل	كو	نح	ه	م	ō
ضلع المخمس اعنى تار	ō	ا	ى	لب	ح	نح	مد	كا	ند	ند	نه
فخط حر وهو وتر ثلثة الاعشار اعنى وتر تمام خمس الدائرة الى نصفها	ō	ا	لر	د	نه	كو	كط	لط	و	ند	كو
وتر ثلث الدائرة اعنى تمام السدس الذى سبق فى الفصل الرابع	ō	ا	مح	نه	كب	نج	كر	نر	نو	ō	مد
مسطح وتر السدس فى وتر تمام الخمس	ا	لر	د	نه	كو	كط	لط	و	ند	كو	ō
مسطح وتر الخمس فى وتر تمام السدس	ب	ب	ى	ر	نو	ا	مر	نج	لط	لح	ن
التفاضل بينهما	ō	كه	ه	لب	له	لب	ح	نا	مه	نح	ن
قسمناه على القطر خرج وتر ثلث عشر الدائرة اعنى وتر اثنى عشر جزءا	ō	ō	لب	لب	لو	بر	مو	د	كه	نب	لر
مربعه	ō	ب	لر	كو	بد	يا	كو	نط	لر	لط	نب
نقصناه عن مربع القطر يبقى مربع وتر قسح جزءا	ح	نر	كب	لط	مه	مح	لط	م	كب	كو	ح
جذره	ō	ا	نط	كو	لح	كر	لا	م	لو	نه	لد
ثم زدنا على ذلك الجذر مقدار القطر ونرفعه[1] بمرتبة واخذنا جذره حصل وتر قعد[2]		ا	نط	ن	ر	نر	لب	كر	ا	ر	م
زدنا القطر على هذا الجذر ونرفعه[3] بمرتبة واخذنا جذره حصل وتر		ا	نط	نر	لا	نر	نا	مح	ر	ط	ر
وبمثله حصلنا وتر قعح ل		ا	نط	نط	كب	نط	كب	بد	له	ح	ما
نقصنا مربعه اعنى المرفوع لمجموع القطر ووتر قعر الذى سبق عن مربع القطر يبقى مربع وتر جزء ونصف	ō	ō	ب	كح	ب	ح	يا	نب	ن	نح	
جذره وهو وتر جزء ونصف	ō	ō	ا	لد	بد	مب	نط	ا	نر	نب	

وقد وضعنا فى البيوت الخالية عن الرقم اصفارًا بالحمرة تميزًا[4] عن الاصفار الحاصلة عن العمل

[1] Hs: ونربعه [2] Hs: قعر [3] Hs: ونربعه [4] Hs: يميزًا

شرح العمل	العمل الاول فى امتحان ما حسبه ابو الوفاء انه وتر لنصف جزء										العمل الثانى فى امتحان ما ذكرنا انه نصف جزء										
	مرتين ٣	مرة ٣	اجزاء	دقائق	ثوانى	ثوالث	روابع	خوامس	سوادس	سوابع	مرتين ٣	مرة ٣	اجزاء	دقائق	ثوانى	ثوالث	روابع	خوامس	سوادس	سوابع	ثوامن
اذا كان وتر قوس	ō	ō	ō	لا	كد	نه	ند	نه			ō	ō	ō	لا	كد	نو	نح	له	نح	ما	ىر
يكون مربعه	ō	ō	ō	ىو	كو	نو	ح	كه	نب	لا	ō	ō	ō	ىو	كو	نر	ىه	ب	ط	مو	
نقصناه عن مربع القطر يبقى مربع وتر تمامها	ح	نط	نط	مح	لح	ح	نا	لط	ر	كط	ح	نط	نط	مح	لح	ب	مد	نر	ن	ىد	
وتر تمامها	ō	ا	نط	نط	نه	ىح	ىه	ىح	ما	ىا	ō	ا	نط	نط	نه	ىح	ىه	لر	ō	مر	كو
نقصنا مربع وتر تلك القوس عن مربع وتر تمامها بقى مسطح القطر فى وتر تمام ضعف تلك القوس	ح	نط	نط	كر	و	ر	مح	ىح	ىد	نح	ح	نط	نط	كر	و	ه	كط	نه	م	كح	
قسمناه على القطر خرج وتر تمام ضعف تلك القوس	ō	ا	نط	نط	مح	لح	ح	نا	لط	ر	ō	ا	نط	نط[1]	مح	لح	ب	مد	نر	ن	ىد
مربعه	ح	نط	نح	ند	ب	ىط	نر	ى	كط	نط	ح	نط	نح	ند	ب	ىه	ل	كه	نط	كر	
نقصناه عن مربع القطر يبقى مربع وتر ضعف تلك القوس	ō	ō	ا	ه	مر	م	ب	مط	ل	ا	ō[2]	ō[2]	ا	ه	مر[3]	مد	كط	لد	ō	لح	
اخذنا جذره حصل وتر ضعف تلك القوس	ō	ō	ا	ب	مط	مط	م	لح	مب	د	ō[2]	ō[2]	ا	ب	مط	نا	مح	ō	كه	كر	ىه
مسطح وتر تلك القوس فى وتر ضعفها	ō	ō	ō	لب	ىح	نا	ط	ح	ىح	نا	ō[2]	ō[2]	ō	لب	ىح	ىح	كب	كه	لح	مد	له
مسطح وتر تمام احدهما فى تمام الاخر	ح	نط	نط	ىح	نب	م	لح	ىط	ر	لط	ح	نط	نط	ىح	نب	لر	نا	له	نو	ر	لا
التفاضل	ح	نط	نح	مه	نح	مط	كط	ىه	ىح	مح	ح	نط	نح	مه	نح	مد	كط	ى	ىر	كب	نو
قسمناه على القطر خرج وتر تمام ثلثة امثال تلك القوس	ō	ا	نط	نط	كب	نط	كد	مد	لر	نر	ō	ا	نط	نط	كب	نط	كب	ىد	له	ح	ما
مربعه	ح	نط	نر	لا	نح	ا	مح	ىه	ىر	ىح	ح	نط	نر	لا	نر	نا	مح	ر	ط	ر	
نقصناه عن مربع القطر بقى مربع وتر ثلثة امثال تلك القوس	ō	ō	ب	كح	ا	نح	ما	مد	مب	مب	ō[2]	ō[2]	ب	كح	ب	ح	ىا	نب	ن	ىح	
فيكون وتر ثلثة امثال تلك القوس	ō	ō	ا	لد	ىد	نط	ر	نط	مط	له	ō[2]	ō[2]	ا	لد	ىد	مب	ىط	ا	نر	ىب	

[1] Hs: ىط [2] Hs: ا [3] Hs: مح

Blatt 22a 1 nach der oberen Tafel

ولمـا حصلنـا عن الوتر الذى حسبه ابو الوفاء انه وتر نصف جزء وتر ثلثة امثـال قوسه وكان ا لد ند لط ر نط كما فى آخر جدول[66]) العمل الاول وهو اقل من وتر جزء ونصف الذى استخرجناه فى الجدول المقدم وكان ا لد ند مب نط ا بثلث ثوالث واحدى عشرة رابعة وكسر علم انه اقل من وتر نصف جزء بثلث التفاوت المذكور تقريبا فالمحيط الذى حصله منه ليس بصحيح وما حصل فى آخر جدول العمل الثانى موافق لوتر جزء ونصف بعينه علم ان ما ذكرنا انه وتر نصف جزء صحيح وهو موضوع فى اول جدول العمل الثانى واما امتحـان وتر الجزئين

Tafel 22a unten

فيكون الموضوع فى السطر السابع من العمل الثانى هو مربع وتر تمام جزء واحد وهو	ح	نط	نح	ند	ب	نه	ل	كه	نط	كر	
فاذا نقصنا القطر عن منحطه بمرتبة يبقى وتر تمام الجزئين	ة	ا	نط	نح	ند	ب	نه	ل	كه	نط	كر
فـيكـون مـربـعـه	ح	نط	نه	لو	ن	ند	ى	مح	كا	ر	نا
فاذا نقصناه عن مربع القطر يبقى مربع وتر الجزئين	ة	ة	د	كح	ط	مه	مط	ىا	لح	نب	ط
فيكون جذره وهو وتر الجزئين على الاصح	ة	ة	ب	ه	لط	كو	كب	كط	كح	لب	كه

ولما حسبه ابو الريحان فى استخراج محيط المضلع ب ه لط مح لو[67]) علم انّه غلط فيه وذلك زائد على ما ينبغى بسبع عشرة ثالثة واربع عشرة رابعة مع انه وضع جيب جزء واحد الّذى هو نصف وتر الجزئين فى الجدول صحيحاً وهذا آخر ما اردنا ايراده والحمد لله رب العـالمين

تم الكتاب بعون اللّه الوهاب

[66]) Hs: الجدول [67]) Statt ب hat Text ب