

# Metody Probabilistyczne i Statystyka

## ZADANIE DOMOWE 1

Termin wysyłania (MS Teams): **05 listopada 2023 godz. 23:59**

### Zadanie 1. [5 pkt]

Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  będzie funkcją ciągłą na przedziale  $[a, b]$  przyjmującą wartości nieujemne, dla której chcemy wyznaczyć przybliżoną wartość całki  $\int_a^b f(x) dx$ . Rozważmy poniższą prostą probabilistyczną metodę aproksymacji takich całek.

1. Generujemy niezależnie i jednostajnie losowo  $n$  punktów z prostokąta  $[a, b] \times [0, M]$  dla ustalonego  $M \geq \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ .<sup>1</sup>
2. Zliczamy, ile spośród wylosowanych punktów leży „pod wykresem” funkcji  $f$  (punkt  $(x, y)$  leży „pod wykresem”  $f$ , jeśli  $y \leq f(x)$ ) – oznaczmy tę liczbę przez  $C$ .
3. Jako aproksymację całki przyjmujemy wartość  $\frac{C}{n}(b-a)M$ , gdzie  $(b-a)M$  to pole powierzchni rozważanego prostokąta.

**Uwaga.** Tego typu algorytmy zrandomizowane znane są jako metody Monte Carlo. Do tego zagadnienia wrócimy w drugiej części kursu. Wtedy też przekonamy się, dlaczego ta metoda „działa” i w jaki sposób można ją nieco ulepszyć.

- a) Przetestuj działanie przedstawionego algorytmu do obliczenia wartości poniższych całek.

- $\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx$
- $\int_0^\pi \sin(x) dx$
- $\int_0^1 4x(1-x)^3 dx$

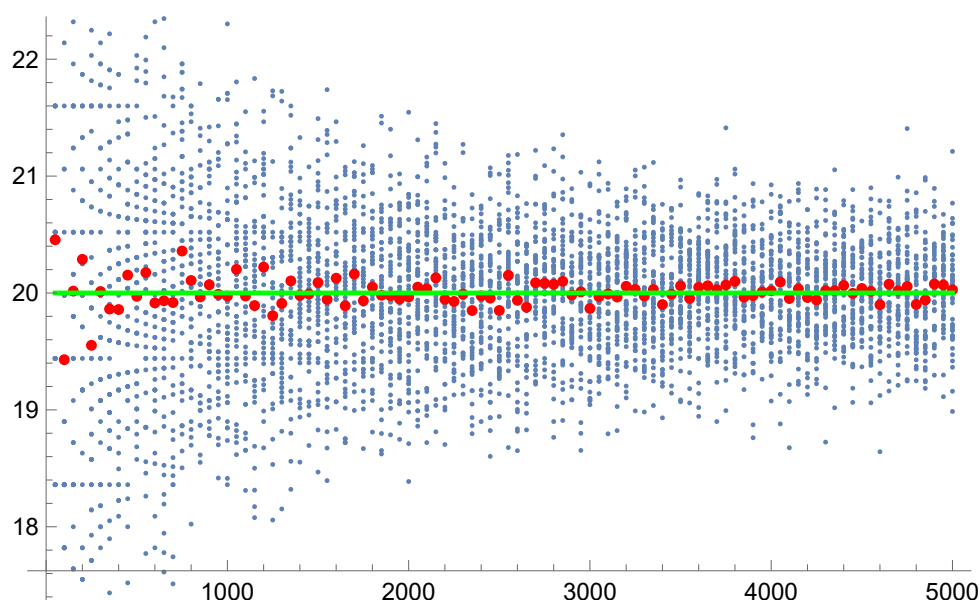
W tym celu zaimplementuj i przeprowadź eksperymenty polegające na wykonaniu dla każdego  $n \in \{50, 100, \dots, 5000\}$  po  $k = 50$  niezależnych powtórzeń algorytmu. Dla każdej z aproksymowanych całek przedstaw na wykresie<sup>2</sup> wyniki uzyskane w poszczególnych powtórzeniach ( $k$  punktów danych dla każdego  $n$ ), ich średnią dla każdego  $n$  oraz prostą  $y = I$ , gdzie  $I$  jest dokładną wartością całki. Dla każdej z całek wszystkie wyniki nanieś na wspólny wykres (przykładowy wykres przedstawia Rys. 1). Wyciągnij wnioski z przeprowadzonych eksperymentów.

- b) W podobny sposób wyznacz aproksymację liczby  $\pi$ .

Zadbaj o to, aby generator liczb pseudolosowych użyty w eksperymentach był „dobry” (tj. miał dobre własności statystyczne). Przykładowo, standardowa implementacja funkcji `rand()` w języku C nie jest dobrym generatorem. Możesz np. wykorzystać generator Mersenne Twister.

<sup>1</sup>Jeśli dysponujemy jedynie generatorem pseudolosowym `rand()` zwracającym liczby z rozkładu jednostajnego na przedziale  $[0, 1]$ , to aby uzyskać losową liczbę z przedziału  $[a, b]$ , wystarczy zwrócić  $a + (b-a) * \text{rand}()$ . Poprawność tej metody uzasadnimy na jednym z późniejszych wykładów.

<sup>2</sup>Do wygenerowania wykresów możesz użyć dowolnego narzędzia, np. *numpy*, *Matlab*, *Excel*, *Mathematica*, ...



Rysunek 1: Wyniki eksperymentów dla całki  $\int_1^3 x^3 dx$ . Dla każdego  $n \in \{50, 100, \dots, 5\,000\}$  wykonano po  $k = 50$  niezależnych powtórzeń algorytmu. Niebieskie punkty przedstawiają wyniki poszczególnych powtórzeń, czerwone punkty odpowiadają wartości średniej dla każdego  $n$ , a zielona prosta  $y = 20$  to prawdziwa wartość aproksymowanej całki.

---

Rozwiązanie zadania obejmujące

- implementację symulacji (kod źródłowy w wybranym języku programowania) oraz
- uzyskane wyniki i wyciągnięte na ich podstawie wnioski (pdf z wykresami wraz z krótkim opisem i wnioskami)

należy przesłać na platformę MS Teams. Nie należy dołączać żadnych zbędnych plików.