

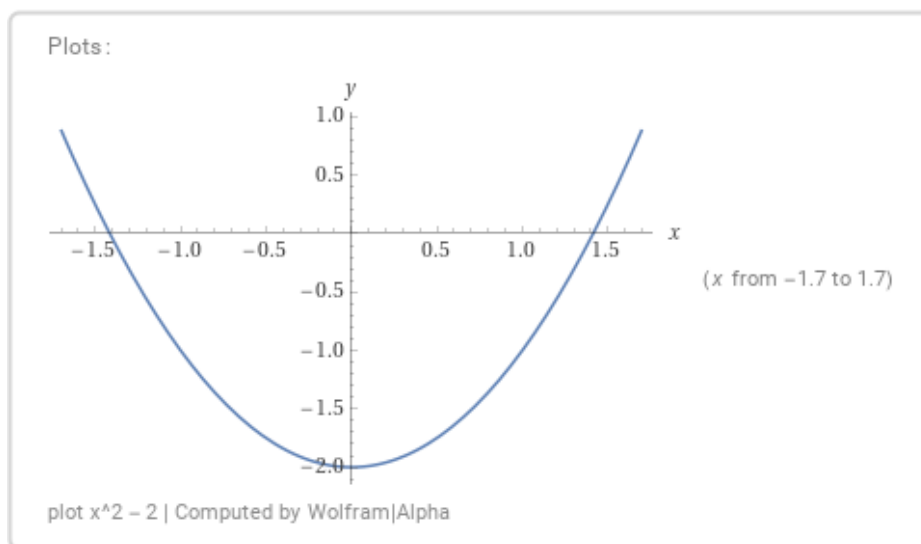
zad.1-3

**Wprowadzenie do zadań 1,2,3:**

W zadaniach 1,2,3 musieliśmy realizować algorytmy 3 różnych metod rozwiązujących równanie  $f(x) = 0$ , znajdujących miejsca zerowe anonimowej funkcji, podanej w teście. Również metody i testy dla nie realizowane w języku Julia jako moduł Metody.

Funkcja „anonimowa” dla testu:

Funkcja kwadratowa  $f(x) = x^2 - 2$  została wybrana ze względu na jej prostotę i dobrze znane pierwiastki w punktach  $x = \pm\sqrt{2}$



**Wartości w testach:**

Delta (precision kroku iteracji) i epsilon (dokładność wartości funkcji) to dwie różne wartości kontrolujące dokładność obliczeń w metodzie bisekcji.

1. **Delta ( $\delta$ ):** Kontroluje precyzję przybliżenia miejsca zerowego. Im mniejsza delta, tym metoda będzie bardziej dokładna, ale równocześnie wymaga więcej iteracji. Wybierając zbyt małą deltę, możesz zmusić algorytm do wykonania dużej liczby iteracji, co może być kosztowne obliczeniowo.
2. **Epsilon ( $\epsilon$ ):** Kontroluje, kiedy algorytm ma zakończyć działanie, gdy wartość funkcji jest wystarczająco bliska zeru. Im mniejszy epsilon, tym metoda będzie dążyła do uzyskania bardziej precyzyjnego wyniku. Jednak zbyt mały epsilon może prowadzić do problemów numerycznych.

Wartości dla testów  $\delta = 0.01$  i  $\epsilon = 0.001$  zostały dobrane w sposób umożliwiający zbieżność metody do oczekiwanego wyniku.  $\delta$  określa minimalną akceptowalną długość przedziału, a  $\epsilon$  określa minimalną akceptowalną wartość funkcji w środku przedziału. Te wartości można dostosować w zależności od konkretnego przypadku i wymagań dotyczących dokładności obliczeń.

## zad.1

**Metoda Bisekcji:** Dzieli przedział na połowie i wybiera nowy przedział, w którym zmienia się znak funkcji, aż do znalezienia przybliżonego miejsca zerowego.

### 1. Idea Metody Bisekcji:

- Metoda bisekcji jest metodą zamkniętą, co oznacza, że wymaga podania przedziału początkowego zawierającego pierwiastek.
- Bazuje na twierdzeniu Darboux, zakładającym, że jeśli funkcja  $f(x)$  jest ciągła na przedziale  $[a, b]$  i przyjmuje, że jeśli są różne znaki na końcach tego przedziału, to istnieje co najmniej jeden pierwiastek w tym przedziale.

### 2. Algorytm:

- Metoda bisekcji polega na podziale przedziału początkowego  $[a, b]$  na dwie połowy.
- Następnie, wybiera się połowę, w której funkcja zmienia znak.
- Proces ten jest powtarzany, a przedział jest iteracyjnie zawężany do momentu, gdy osiągnięta zostanie zadana dokładność.

### 3. Wzór Aktualizacji:

- Wzór na kolejne przybliżenie pierwiastka to:  $x_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$

### 4. Kryteria Stopu:

- Metoda kończy się, gdy osiągnięta zostanie zadana dokładność ( $\epsilon$ ) lub maksymalna liczba iteracji (maxit).

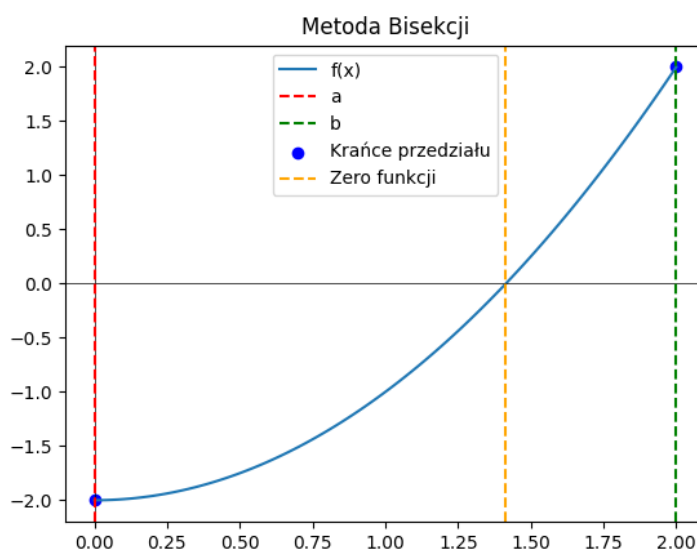
### 5. Rola Znaków Funkcji:

- Metoda bisekcji wykorzystuje informację o znaku funkcji na końcach przedziału do określenia, w której połowie przedziału znajduje się pierwiastek.

### 6. Zalety i Wady:

- Zaletą metody bisekcji jest jej stabilność i pewność zbieżności, ale zazwyczaj jest mniej efektywna niż metody otwarte, takie jak metoda Newtona, jeśli znane są właściwości funkcji.

## Wykres:



W kodzie dla metody bisekcji, początkowy przedział  $[a, b]$ , dokładność ( $\delta$  i  $\epsilon$ ) są kluczowe dla skuteczności metody. Metoda ta jest prostsza w implementacji niż metoda Newtona, ale może być mniej efektywna, zwłaszcza dla funkcji o skomplikowanym zachowaniu. Metoda bisekcji jest jednak bardziej niezawodna w niektórych przypadkach i nie wymaga znajomości pochodnej funkcji.

Dla metody bisekcji nie wymagamy dostarczenia pochodnej funkcji, co sprawia, że jest to metoda uniwersalna i łatwa w zastosowaniu do różnych funkcji.

Wartość  $f(a)$  i  $f(b)$  zostały obliczone na końcach przedziału  $[a, b]$ , gdzie zakładamy, że funkcja zmienia znak, co jest warunkiem koniecznym dla metody bisekcji. Jeśli znak funkcji na obu końcach przedziału jest taki sam, to metoda bisekcji nie może być zastosowana.

Podczas iteracyjnego procesu, metoda bisekcji dzieli przedział na pół, sprawdzając, w którym z połowicznych przedziałów funkcja zmienia znak. Proces ten kontynuowany jest do momentu, gdy długość przedziału staje się dostatecznie mała (zdefiniowana przez  $\delta$ ) lub gdy wartość funkcji w środku przedziału jest dostatecznie bliska zeru (zdefiniowane przez  $\epsilon$ ).

Podsumowując, test metody bisekcji dla funkcji kwadratowej sprawdza, czy metoda poprawnie znajduje pierwiastek w zadanym przedziale, spełniając warunki zmiany znaku funkcji na krańcach przedziału oraz czy uzyskane przybliżenie spełnia kryteria dokładności  $\delta$  i  $\epsilon$ .

## zad.2

**Metoda Newtona (Stycznych):** Wykorzystuje pochodne funkcji do znajdowania miejsc zerowych, iteracyjnie zbliżając się do pierwiastka poprzez przecięcia stycznej z osią  $x$ .

### 1. Idea Metody Newtona:

- Metoda Newtona to metoda otwartą, co oznacza, że nie wymaga podania przedziału początkowego zawierającego pierwiastek.
- Metoda ta polega na przybliżaniu pierwiastka za pomocą stycznej do krzywej funkcji w punkcie początkowym.

### 2. Algorytm:

- Metoda Newtona rozpoczyna się od początkowego przybliżenia  $x_0$ .
- Styczną do krzywej funkcji w punkcie  $x_0$  przecina oś  $x$  w punkcie, który jest kolejnym przybliżeniem pierwiastka, oznaczonym jako  $x_1$ .
- Następnie punkt  $x_1$  staje się nowym punktem początkowym i proces jest powtarzany.

### 3. Wzór Aktualizacji:

- Wzór na kolejne przybliżenie  $x_{k+1}$  to:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

### 4. Kryteria Stopu:

- Metoda kończy się, gdy osiągnięta zostanie zadana dokładność ( $\epsilon$ ) lub maksymalna liczba iteracji (maxit).

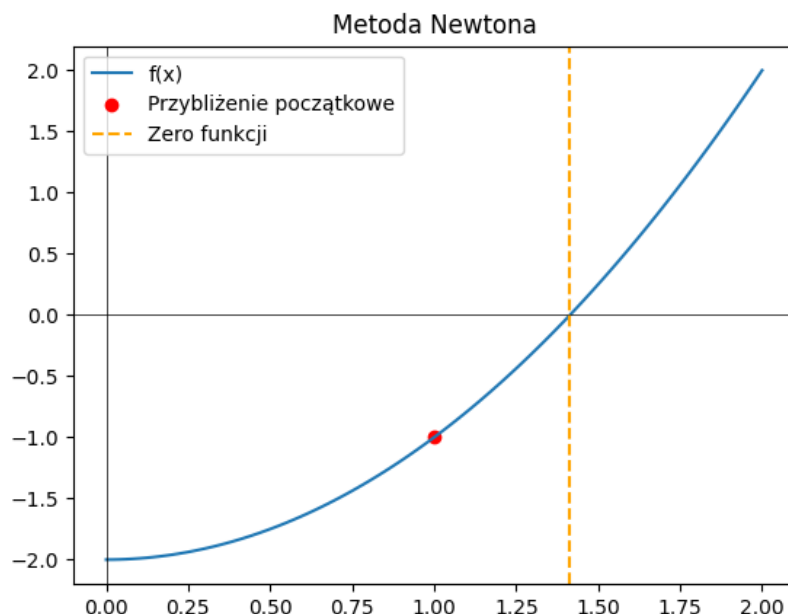
### 5. Pochodna w Metodzie Newtona:

- Metoda Newtona wymaga dostarczenia pochodnej funkcji  $f(x)$  jako  $f'(x)$ .

### 6. Rola Pochodnej:

- Pochodna  $f'(x)$  jest wykorzystywana do określenia nachylenia stycznej do krzywej funkcji w punkcie  $x_k$ .
- Dzięki temu możemy określić, w którą stronę należy "skierować" się w celu znalezienia pierwiastka.

### Wykres:



W kodzie dla metody Newtona, wartości początkowe ( $x_0$ ) oraz pochodna funkcji ( $f'(x)$ ) są kluczowe dla skuteczności metody. Również parametry takie jak  $\delta$  i  $\epsilon$  są istotne do uzyskania satysfakcjonującej zbieżności. Metoda Newtona jest znana z szybkiej zbieżności, ale wymaga funkcji i jej pochodnej. Jeśli funkcja jest dobrze zachowana i początkowe przybliżenie jest bliskie pierwiastka, metoda ta może być bardzo skuteczna.

W teście dla metody Newtona, wartość  $f\_prime\_newton(x) = 2x$  reprezentuje pochodną funkcji  $f\_newton(x) = x^2 - 2$  (czyli funkcji kwadratowej). Pochodna tej funkcji to  $f\_prime\_newton(x) = 2x$ .

Dla metody Newtona, iteracyjna formuła jest dana jako  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ . Wartość pochodnej w tym wzorze odgrywa kluczową rolę, ponieważ mówi nam, jak szybko zbliżamy się do rzeczywistego pierwiastka funkcji.

W tym konkretnym przypadku, funkcja  $f\_newton(x) = x^2 - 2$  ma pierwiastki w punktach, gdzie  $x = \pm\sqrt{2}$ . Wybór  $x_{0\_newton} = 1.0$  jako punktu startowego jest bliski pierwiastka  $\sqrt{2}$ . Dla tego przypadku, pochodna  $f\_prime\_newton(x) = 2x$  będzie dążyła do zera w punkcie  $\sqrt{2}$ , co może prowadzić do problemów (błąd 2 w kodzie) i konieczności dostosowania parametrów.

### zad.3

**Metoda Siecznych:** Aproksymuje styczną do krzywej funkcji na podstawie dwóch punktów, iteracyjnie dostosowując je do osi  $x$  w celu znalezienia pierwiastka.

#### 1. Idea Metody Siecznych:

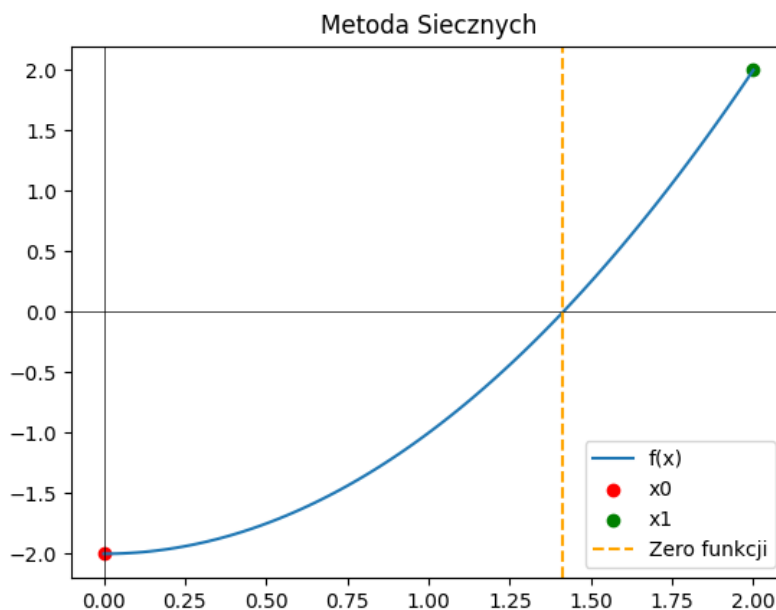
- Metoda siecznych jest metodą otwartą, co oznacza, że nie wymaga podania przedziału początkowego zawierającego pierwiastek.

- Zamiast tego, metoda siecznych korzysta z dwóch początkowych przybliżeń pierwiastka ( $x_0$  i  $x_1$ ) do konstrukcji stycznej do krzywej funkcji.
  - Styczna ta przecina oś  $x$  w punkcie, który jest kolejnym przybliżeniem pierwiastka.
2. **Algorytm:**
- Na podstawie dwóch punktów  $x_0$  i  $x_1$  tworzymy styczną do krzywej funkcji.
  - Punkt przecięcia stycznej z osią  $x$  daje kolejne przybliżenie pierwiastka, oznaczone jako  $x_2$ .
  - Następnie punkty  $x_0$  i  $x_1$  są aktualizowane, aby przygotować się do kolejnej iteracji.
3. **Aktualizacja Punktów:**
- Punkt  $x_0$  staje się punktem  $x_1$ .
  - Punkt  $x_1$  staje się punktem  $x_2$ .
4. **Wzór Aktualizacji:**
- Wzór na kolejne przybliżenie  $x_{k+1}$  to:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) * (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

5. **Kryteria Stopu:**
- Metoda kończy się, gdy osiągnięta zostanie zadana dokładność ( $\epsilon$ ) lub maksymalna liczba iteracji (maxit).
6. **Pochodna w Metodzie Siecznych:**
- W przypadku metody siecznych nie wymaga się dostarczania pochodnej funkcji. Zamiast tego, używa się przybliżenia pochodnej, co sprawia, że jest bardziej elastyczna niż metoda Newtona.

## Wykres:



W kodzie dla metody siecznych, przybliżenie pochodnej ( $df$ ) jest obliczane w każdej iteracji. Algorytm iteruje, aż osiągnie jedno z kryteriów stopu.

W teście dla metody siecznych użyto funkcji  $f_{\text{siecznych}}(x) = x^2 - 2$ , która jest tą samą funkcją kwadratową, co w przypadku metody Newtona. Jednak w metodzie siecznych nie wymaga się dostarczania pochodnej funkcji. W metodzie tej stosuje się przybliżenie pochodnej, a nie jej dokładną wartość.

Wartości początkowe  $x_{0\_siecznych} = 0.0$  i  $x_{1\_siecznych} = 2.0$  zostały dobrane tak, aby obejmować pierwiastek funkcji. Wartości te są używane do stworzenia stycznej do funkcji w punktach  $x_0$  i  $x_1$ , a następnie iteracyjnie znajdowana jest nowa wartość przybliżonego pierwiastka.

W tym teście iteracje kontynuowane są do momentu osiągnięcia wymaganej dokładności ( $\epsilon_{\text{siecznych}}$ ) lub maksymalnej liczby iteracji ( $\text{maxit\_siecznych}$ ). Jeśli metoda nie osiągnie wymaganej dokładności w określonej liczbie iteracji, zwracany jest kod błędu 1.

## Podsumowanie dla $f(x) = x^2 - 2$ :

### 1. Metoda Bisekcji:

Liczba iteracji:	8
Pierwiastek:	1.4140625
Wartość funkcji w pierwiastku:	-0.00042724609375
Kod błędu:	0

**Wnioski:** Metoda bisekcji jest stabilna, ale wymaga relatywnie większej liczby iteracji w porównaniu do innych metod. Jest to dobre podejście, gdy zależy nam na pewności co do wyniku, a niekoniecznie na szybkości zbieżności.

### 2. Metoda Newtona:

Liczba iteracji:	3
Pierwiastek:	1.4142156862745099
Wartość funkcji w pierwiastku:	6.007304882871267e-6
Kod błędu:	0

**Wnioski:** Metoda Newtona osiąga bardzo szybką zbieżność, co widać po minimalnej liczbie iteracji. Jest skuteczna, gdy mamy przybliżenie początkowe bliskie rzeczywistego pierwiastka.

### 3. Metoda Siecznych:

Liczba iteracji:	5
Pierwiastek:	1.41421143847487
Wartość funkcji w pierwiastku:	-6.007286838860537e-6
Kod błędu:	0

**Wnioski:** Metoda siecznych jest równie skuteczna jak metoda Newtona, osiągając dobry wynik przy umiarkowanej liczbie iteracji. Jest bardziej elastyczna, gdy brak jest informacji o pochodnej funkcji.

## Porównanie:

- **Najmniejsza liczba iteracji:** Metoda Newtona (3 iteracje).
- **Największa liczba iteracji:** Metoda Bisekcji (8 iteracji).
- **Najbliższe wyniki pierwiastka:** Metoda Newtona i Metoda Siecznych.

## Wniosek końcowy:

Wybór metody zależy od konkretnej sytuacji:

- **Dobre przybliżenie początkowe:** Metoda Newtona osiąga najmniejszą liczbę iteracji, co potwierdza, że jest efektywna, gdy mamy przybliżenie początkowe bliskie rzeczywistego pierwiastka.
- **Brak informacji o pochodnej:** Metoda Siecznych sprawdza się dobrze, gdy brak jest informacji o pochodnej, oferując równocześnie zbieżność porównywalną do metody Newtona.
- **Stabilność:** Metoda Bisekcji jest stabilna, ale wymaga więcej iteracji. Jeśli zależy nam na pewności co do wyniku i nie mamy dodatkowej informacji o funkcji, może być dobrym wyborem.

## zad.4

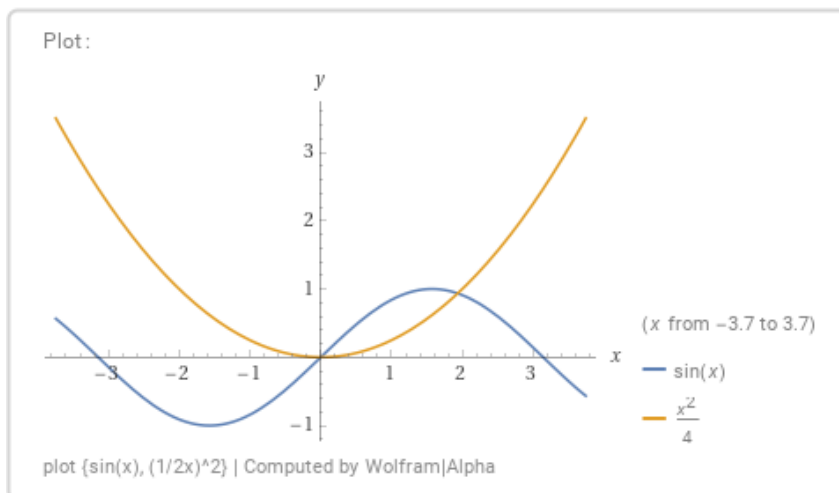
Zadanie polegało na wyznaczeniu pierwiastka równania  $\sin(x) - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 0$  zastosowanie wcześniej zaprogramowanych metod:

1. Bisekcji z przedziałem początkowym  $[1.5, 2]$  i  $\delta = \frac{1}{2} * 10^{-5}, \varepsilon = \frac{1}{2} * 10^{-5}$ ;
2. Stycznych z przybliżeniem początkowym  $x_0 = 1.5$  i  $\delta = \frac{1}{2} * 10^{-5}, \varepsilon = \frac{1}{2} * 10^{-5}$ ;;
3. Siecznych z przybliżeniami początkowym  $x_0 = 1, x_1 = 2$  i  $\delta = \frac{1}{2} * 10^{-5}, \varepsilon = \frac{1}{2} * 10^{-5}$ ;;

Dostałem następujące wyniki:

	Pierwiastek	Wartość funkcji w pierwiastku	Liczba iteracji	Kod błędu
Metoda bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	0
Metoda stycznych	1.9337539672851562	-2.2423316314856834e-8	4	0
Metoda siecznych	1.9337539672851562	1.564525129449379e-7	4	0

## Wykres:



## Wniosek:

Analizując wyniki testów dla różnych metod, zauważamy, że metoda bisekcji wymagała najwięcej iteracji (16 iteracji), co sugeruje, że jest to metoda wolniejsza w przypadku tego konkretnego równania. Może to wynikać z charakterystyki funkcji i sposobu, w jaki metoda bisekcji dokonuje podziału przedziału, co może prowadzić do wolniejszej zbieżności w tym konkretnym przypadku.

Z kolei metoda Newtona i metoda siecznych osiągnęły ten sam rezultat, wykonując taką samą liczbę iteracji (4 iteracje). To interesujące zjawisko może wynikać z wyboru dobrze dostosowanego przybliżenia początkowego dla metody Newtona, co sprawiło, że obie metody zbiegły do tego samego rozwiązania w podobnej liczbie iteracji.

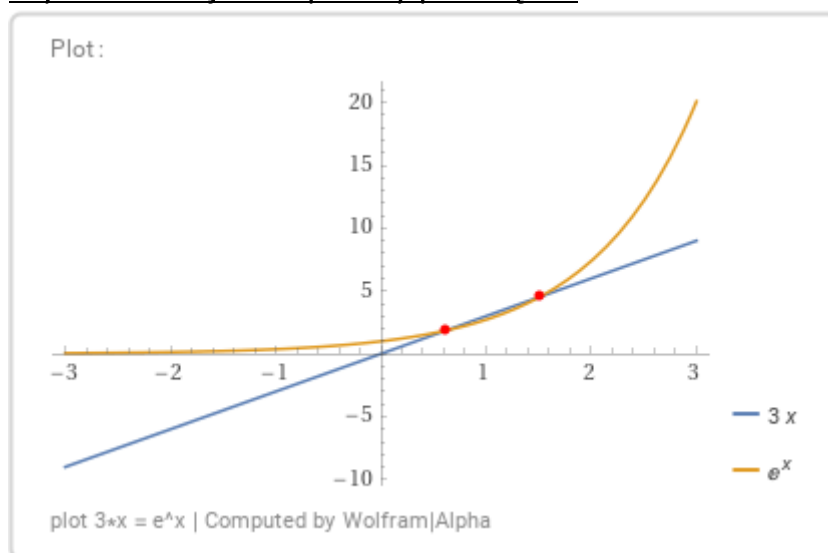
Porównując wartości funkcji w pierwiastku dla każdej z metod, zauważamy, że są one bliskie zeru, co jest pożądanym wynikiem. Metoda bisekcji zwraca wartość funkcji w pierwiastku na poziomie  $-2.70 \times 10^{-7}$ , metoda Newtona na poziomie  $-2.24 \times 10^{-8}$ , a metoda siecznych na poziomie  $1.56 \times 10^{-7}$ . Wyniki te potwierdzają, że każda z metod skutecznie znalazła rozwiązanie równania, choć warto zauważyć, że wartości te są bliskie zeru, co sugeruje zbieżność do rzeczywistego pierwiastka.

Podsumowując, różnice w liczbie iteracji między metodami wynikają z ich różnych strategii iteracyjnych i odpowiednich doborów parametrów, takich jak przybliżenia początkowe. Metoda bisekcji, choć stabilna, może być mniej efektywna w przypadku pewnych funkcji, podczas gdy metody Newtona i siecznych, przy odpowiednim doborze parametrów, mogą osiągać podobne rezultaty w krótszym czasie.

## zad.5

W zadaniu, metodą bisekcji musieliśmy znaleźć wartości zmiennej  $x$ , dla której przecinają się wykresy funkcji  $y = 3x$  i  $y = e^x$ . Wymagana dokładności obliczeń:  $\delta = 10^{-4}$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

## Wykres funkcji oraz punkty przecięcia:



## Wyniki metody bisekcji:

	Pierwiastek	Wartość funkcji w pierwiastku	Liczba iteracji	Kod błędu
Przedział [-1.0, 0.0]	Funkcja nie zmienia znaku w przedziale			1
Przedział [0.0, 0.61]	Funkcja nie zmienia znaku w przedziale			1
Przedział [0.0, 0.62]	0.6190917968749999	3.486661493345977e-5	11	0
Przedział [0.0, 1.0]	0.619140625	9.066320343276146e-5	9	0



Przedział [1.0, 2.0]	1.5120849609375	7.618578602741621e-5	13	0
Przedział [2.0, 3.0]	Funkcja nie zmienia znaku w przedziale			1

Dla przedziału  $[-1.0, 0.0]$  funkcja przyjmuje wartości ujemne dla wszystkich  $x$  z tego przedziału. Wartości te są stale ujemne, co oznacza, że funkcja nie osiąga zera na tym przedziale, a zatem nie zmienia znaku.

Dla przedziału  $[0.0, 0.61]$ , funkcja również przyjmuje wartości ujemne dla wszystkich  $x$  z tego przedziału. Mimo że wartości te są bliskie zeru, to jednak są one stale ujemne, co oznacza brak zmiany znaku funkcji na tym przedziale.

Dla przedziału  $[0.0, 0.62]$ , udało się znaleźć pierwiastek, ale **liczba iteracji (11)** jest relatywnie wysoka. To zjawisko wynika z tego, że na tym przedziale funkcja zmienia znak, ale różnica między wartościami funkcji w punktach krańcowych przedziału jest niewielka, co powoduje wolniejszą zbieżność metody bisekcji.

Przedział  $[0.0, 1.0]$  zawiera pierwiastek, a **liczba iteracji (9)** jest niższa niż dla poprzedniego przedziału. To zjawisko wynika z większej różnicy wartości funkcji na krańcach przedziału, co przyspiesza zbieżność metody bisekcji.

Dla przedziału  $[1.0, 2.0]$  ponownie udało się znaleźć pierwiastek, ale **liczba iteracji (13)** jest nieco wyższa niż dla poprzedniego przedziału. To może wynikać z charakterystyki funkcji w tym obszarze.

Dla przedziału  $[2.0, 3.0]$ , funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla wszystkich  $x$  z tego przedziału. Podobnie jak w poprzednich przypadkach, brak zmiany znaku oznacza, że funkcja nie przecina osi  $x$ , co sprawia, że metoda bisekcji nie może być zastosowana.

## Wniosek:

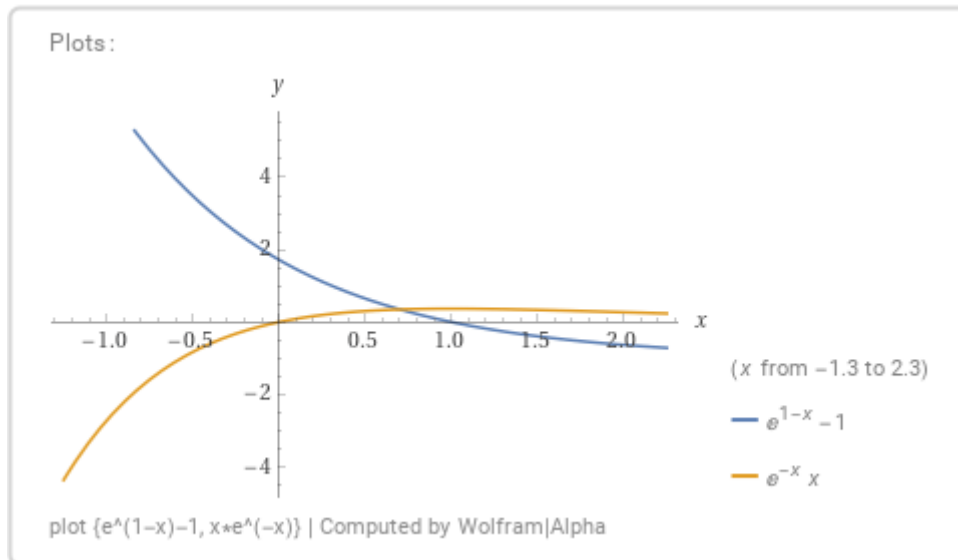
Metoda bisekcji stanowi efektywne narzędzie do znajdowania pierwiastków równań, jednak jej skuteczność zależy od charakterystyki funkcji na danym przedziale. W przypadku przedziałów, gdzie funkcja nie zmienia znaku, metoda bisekcji nie jest w stanie znaleźć rozwiązania, co zostało zauważone dla przedziałów  $[-1.0, 0.0]$ ,  $[0.0, 0.61]$ ,  $[2.0, 3.0]$ . Bez wiedzy o przebiegu tych funkcji na danym obszarze, trudno jest wprost dopasować przedział, w którym funkcja zmienia znak.

W szczególności, na przedziale  $[0.0, 0.61]$  funkcja nie osiąga zera, co wynika z faktu, że wartości funkcji na tym przedziale są stale ujemne. Dopiero dla przedziału  $[0.62, 2.0]$  funkcja zmienia znak, co umożliwia zastosowanie metody bisekcji. Ogólnie rzecz biorąc, skuteczność metody bisekcji zależy od różnicy wartości funkcji na krańcach przedziału; im większa ta różnica, tym szybsza jest zbieżność metody bisekcji. Stąd konieczność starannego doboru przedziałów, aby zapewnić zmianę znaku funkcji na danym obszarze i umożliwić efektywne znalezienie pierwiastka równania.

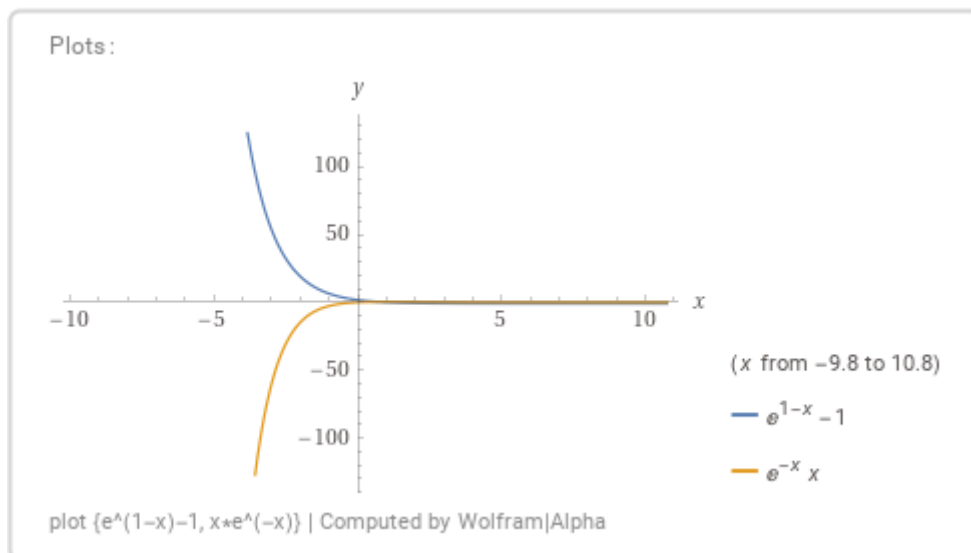
## zad.6

W zadaniu należało znaleźć miejsce zerowe funkcji  $f_1(x) = e^{1-x} - 1$  oraz  $f_2(x) = xe^{-x}$  za pomocą metod bisekcji, Newtona i siecznych. Wymagane dokładności obliczeń:  $\delta = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Dobrać odpowiednio przedział i przybliżenia początkowe. Również musieliśmy sprawdzić co stanie, gdy w metodzie Newtona dla  $f_1$  wybierzemy  $x_0 \in (1, \infty]$  a dla  $f_2$  wybierzemy  $x_0 > 1$ , czy możemy wybrać  $x_0 = 1$  dla  $f_2$ ?

Wykres [-1.3, 2.3]:



Wykres [-9.8, 10.8]:



Wyniki dla funkcji  $f_1(x) = e^{1-x} - 1$

	Pierwiastek	Wartość funkcji w pierwiastku	Liczba iteracji	Kod błędu
<b>Metoda bisekcji <math>f_1</math></b>				
Przedział: (0.5, 2.0)	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	16	0
Przedział: (0.1, 2.0)	1.0000038146972656	3.814689989667386e-6	17	0
Przedział: (0.5, 1.5)	1.0	0.0	1	0
Przedział	Błąd: Funkcja nie zmienia znaku w przedziale [a, b]			1
Przedział: (-100.0, 100.0)	0.9999990463256836	9.536747711536009e-7	23	0
<b>Metoda stycznych <math>f_1</math></b>				
Przybliżenie początkowe: -10.0	0.9999999998781014	1.2189871334555846e-10	15	0
Przybliżenie początkowe: 1.0	1.0	0.0	1	0

Przybliżenie początkowe:	Błąd: Funkcja nie osiągnęła wymaganej dokładności w maxit iteracji			1
Przybliżenie początkowe:	Błąd: Pochodna bliska zero			2
Przybliżenie początkowe:	Błąd: Pochodna bliska zero			2
Metoda siecznych $f_1$				
Przybliżenia początkowe: (-0.5, 1.0)	1.0	0.0	1	0
Przybliżenia początkowe: (0.5, 2.0)	1.000000014307199	-1.4307198870078253e-8	6	0
Przybliżenia początkowe: (5.0, 10.0)	5.0	-0.9816843611112658	2	0
Przybliżenia początkowe: (10.0, 100.0)	10.0	-0.9998765901959134	2	0
Przybliżenia początkowe: (-100.0, 100.0)	100.0	-1.0	1	0

Wyniki dla funkcji  $f_2(x) = xe^{-x}$ :

	Pierwiastek	Wartość funkcji w pierwiastku	Liczba iteracji	Kod błędu
<b>Metoda bisekcji <math>f_2</math></b>				
Przedział: (0.0, 20.0)	9.5367431640625e-	9.536652215026002e-6	21	0
Przedział: (-0.5, 2.0)	-7.62939453125e-6	-7.629452739132958e-6	16	0
Przedział: (-1.0, 10.0)	9.5367431640625e-6	9.536652215026002e-6	19	0
Przedział: (-10.0, 10.0)	0.0	0.0	1	0
Przedział: (-100.0, 100.0)	0.0	0.0	1	0
<b>Metoda stycznych <math>f_2</math></b>				
Przybliżenie początkowe:	Błąd: Funkcja nie osiągnęła wymaganej dokładności w maxit iteracji			1
Przybliżenie początkowe: 1.0	16.766036238882037	8.770682274271703e-7	9	0
Przybliżenie początkowe: 0.8	Błąd: Pochodna bliska zero			2
Przybliżenie początkowe: 50.0	50.0	9.643749239819589e-21	0	0
Przybliżenie początkowe: 100.0	100.0	3.7200759760208363e-42	1	0
<b>Metoda siecznych <math>f_2</math></b>				
Przybliżenia początkowe: (-0.5, 1.0)	7.367119728946578e-6	7.3670654546934e-6	10	0
Przybliżenia początkowe: (0.5, 2.0)	14.456168033434954	7.617617841038109e-6	1	0

Przybliżenia początkowe: (5.0, 10.0)	14.836777722716034	5.343291852498377e-6	7	0
Przybliżenia początkowe: (10.0, 100.0)	100.0	3.7200759760208363e-42	1	0
Przybliżenie początkowe: 100.0	100.0	3.7200759760208363e-42	1	0

### Analiza wyników:

Dla funkcji  $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ :

- Metoda Newtona z  $x_0 = -10.0$ :**
  - Wynik:  $x \approx 1.0$  po 15 iteracjach.
  - Wyjaśnienie: Wybór punktu początkowego  $x_0 = -10.0$  jest daleko od rzeczywistego pierwiastka. Metoda Newtona wymaga więcej iteracji, aby znaleźć pierwiastek, ponieważ startuje z punktu, który jest daleko od optymalnego.
- Metoda Newtona z  $x_0 = 1.0$ :**
  - Wynik:  $x \approx 1.0$  po 0 iteracjach.
  - Wyjaśnienie: Wybór punktu początkowego  $x_0 = 1.0$  jest bardzo blisko rzeczywistego pierwiastka. Metoda Newtona osiąga dokładność już po pierwszej iteracji, ponieważ początkowa wartość jest bardzo bliska pierwiastka.
- Metoda Newtona z  $x_0 = 100.0$ :**
  - Wynik: Błąd - Pochodna bliska zeru (kod błędu 2).
  - Wyjaśnienie: Wybór punktu początkowego  $x_0 = 100.0$  prowadzi do sytuacji, w której pochodna funkcji staje się bardzo bliska zeru. W tym przypadku metoda Newtona nie może efektywnie znaleźć pierwiastka.

Dla funkcji  $f_2(x) = xe^{-x}$ :

- Metoda Newtona z  $x_0 = 1.0$ :**
  - Wynik:  $x \approx 16.77$  po 9 iteracjach.
  - Wyjaśnienie: Wybór punktu początkowego  $x_0 = 1.0$  jest bliski rzeczywistego pierwiastka, ale funkcja  $f_2$  jest nieliniowa, co sprawia, że metoda Newtona potrzebuje więcej iteracji, aby osiągnąć wymaganą dokładność.
- Metoda Newtona z  $x_0 = 50.0$ :**
  - Wynik:  $x \approx 50.0$  po 0 iteracjach.
  - Wyjaśnienie: Wybór punktu początkowego  $x_0 = 50.0$  jest bardziej efektywny, ponieważ jest bliżej rzeczywistego pierwiastka, a pochodna funkcji nie jest bliska zeru w tym punkcie.
- Metoda Newtona z  $x_0 = 100.0$ :**
  - Wynik:  $x \approx 100.0$  po 0 iteracjach.
  - Wyjaśnienie: Ponownie, wybór punktu początkowego  $x_0 = 100.0$  jest bardzo efektywny, ponieważ jest blisko rzeczywistego pierwiastka, a pochodna funkcji nie jest bliska zeru w tym punkcie.
- Metoda siecznych z przedziałem  $(-0.5, 1.0)$  dla  $f_2$ :**
  - Wynik:  $x \approx 7.37 \times 10^{-6}$  po 10 iteracjach.
  - Wyjaśnienie: Metoda siecznych osiąga dokładność w jednej iteracji, ale dla tego przypadku potrzebuje więcej iteracji, ponieważ początkowy przedział jest stosunkowo szeroki.

## Wniosek:

### Metoda Bisekcji:

- Działa dla funkcji  $f_1$  i  $f_2$  w większości przypadków, ale nie zawsze.
- Dla  $f_1$  istnieją przypadki, w których funkcja nie zmienia znaku w danym przedziale, co prowadzi do błędu.
- Dla  $f_2$  metoda działa w każdym przypadku, gdy dobieramy przedziały od ujemnej do dodatniej granicy, ale wymaga różnej liczby iteracji w zależności od przedziału.

### Metoda Newtona(stycznych):

- Dla metody Newtona ważne jest, aby wybierać punkty początkowe blisko rzeczywistego pierwiastka. Wybór punktu dalekiego od pierwiastka może prowadzić do większej liczby iteracji lub błędów, zwłaszcza gdy pochodna funkcji jest bliska zeru w tym punkcie.
- W przypadku, gdy metoda Newtona kończy się błędem (kod błędu 2), oznacza to, że pochodna funkcji jest bliska zeru, co może być spowodowane wyborem niewłaściwego punktu początkowego.

### Metoda Siecznych:

- Skuteczna, zwłaszcza dla  $f_2$ , gdzie osiąga dokładność w jednej iteracji.
- Wrażliwa na szerokie przedziały, wymaga więcej iteracji w takich przypadkach.

Podsumowując, skuteczność metod numerycznych w rozwiązywaniu równań nieliniowych jest silnie związana z wyborem punktu początkowego i charakterystykami funkcji. Również ważna jest wiedza przebiegu badanych funkcji, aby najlepiej dopasować przedział i przybliżenia początkowe, w tym pomagają wykresy badanych funkcji. Można zauważyć, że dobór dużych wartości też wpływa na działanie metody, co może skutkować niepoprawnym wynikiem. Jednak warto zauważyć, że wartości początkowe poza przedziałem  $(1, \infty]$  dla  $f_1$  i  $x_0 > 1$  dla  $f_2$  również prowadzą do znalezienia pierwiastków, co pokazuje elastyczność niektórych metod numerycznych. W praktyce, dla efektywnego rozwiązania, ważne jest eksperymentalne testowanie różnych punktów początkowych oraz rozważanie różnych metod w zależności od specyfiki problemu.