L. A. Rastrigin, Extremum control by means of random scan, *Avtomat. i Telemekh.*, 1960, Volume 21, Issue 9, 1264–1271

1960

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

Л. А. РАСТРИГИН

(Москва)

Предлагается метод случайного поиска в применении к задачам экстремального регулирования многопараметрических объектов и описывается устройство, реализующее этот метод.

1. Постановка задачи

Задачи синтеза самонастраивающихся систем, которые в последнее время получают широкое распространение, в большинстве своем сводятся к оптимизации некоторой функции качества Q этих систем, т. е. к поиску условий, обеспечивающих наименьшее значение Q^* этой функции.

Пусть Q является функцией параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$Q = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{1}$$

причем Q^* — наименьшее значение функции из всех возможных:

$$Q^* = Q(x_1^*, \ldots, x_n^*) \leqslant Q(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(-\infty < x_i < \infty,\ i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Необходимо найти значения параметров x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, которые минимизируют функцию Q, т. е. удовлетворяют выражению (2).

Очевидно, что для решения поставленной задачи нужно иметь уверенность в существовании хотя бы одного минимума функции качества. Количество минимумов при этом не ограничивается. Ниже будет показано, что предлагаемая система поиска различает величины минимумов и стремится в статистическом смысле к достижению наименьшего из них.

В настоящее время существует несколько методов автоматической оптимизации, т. е. методов поиска оптимизирующего ряда параметров $x_1^*, \ldots, x_n^*$. Среди них следует упомянуть метод поочередного изменения параметров (метод Гаусса — Зейделя), метод градиента и метод наискорейшего спуска (метод Канторовича). Эти методы нашли применение и в настоящее время реализуются широким классом систем автоматической оптимизации (см., например, [1]).

Поиск, организованный в соответствии с указанными методами, имеет характер детерминированного поиска, т. е. поиска, при котором изменения параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$ строго предопределены видом функции Q и организацией выбранного метода поиска.

Однако детерминированный поиск не является единственно возможным. У. Р. Эшби [2] предложил идею случайного поиска, которая и была положена в основу настоящей работы.

2. Метод случайного поиска

Идею, высказанную Эшби, в терминах теории регулирования можно представить следующим образом.

Пусть регулируемая система способна пребывать в некотором множестве $P = \{\bar{p}\}$ состояний, конечном или бесконечном. При этом система считается настроенной, если она находится в одном из состояний подмножества $P^* \subset P$. К этому подмножеству предъявляется единственное требование об одинаковой мощности с множеством P.

Таким образом, задача о настройке объекта сводится к выбору метода и организации поиска одного из элементов $\bar{p}^*$ множества P^* среди всех возможных элементов $\bar{p}$ множества P. Эшби предложил искать $\bar{p}^*$ не по определенному правилу, как в случае детерминированного поиска, а путем случайных выборок, предоставив это «усилителю отбора» [3].

Усилитель отбора Эшби действует следующим образом (см. рис. 1). Регулируемой системе *РС* при помощи генератора случайностей *ГС*, который создает режим случайных выборок из источника всех возможных состояний *ИС*, т. е. из множества P, сообщается некоторое наугад выбранное состояние $\bar{p}$. При этом блок отбора *БО*, получая информацию о реакции регулируемой системы на предложенный *ГС* вариант, либо посылает при выборе $\bar{p} \neq \bar{p}^*$ команду *ГС* на выдачу очередной случайной выборки, либо при $\bar{p} = \bar{p}^*$ выключает *ГС* и тем самым фиксирует объект в этом состоянии.

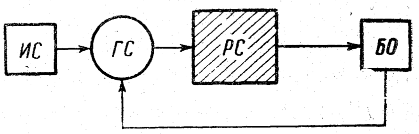

Рис. 1

Очевидно, что при работе по такому заданию усилитель отбора будет отсеивать состояния $\bar{p} \neq \bar{p}^*$, пока случайно не наткнется на искомое состояние, которое будет сохранять его непрерывно до тех пор, пока какие-либо внешние или внутренние факторы не переведут объект из этого состояния в другое $\bar{p} \neq \bar{p}^*$. После этого опять вступит в работу рассмотренный выше режим случайного поиска состояния $\bar{p}^*$. Именно по этой схеме работает известный гомеостат У. Р. Эшби [2, 3].

Следует отметить, что для рассмотренной схемы Эшби характерны три существенные особенности: наличие источника всех возможностей (множества элементов P), наличие устройства, создающего режим случайных выборок из генеральной совокупности P (генератора случайностей), и наличие устройства, реализующего критерий, по которому производится отбор искомого элемента в объекте (блока отбора). Важным является также наличие двух резко противоположных режимов работы: одного временного, переходящего — режима случайного поиска (при $\bar{p} \neq \bar{p}^*$), а другого искомого, стабильного — режима настройки (при $\bar{p} = \bar{p}^*$). Нетрудно заметить, что описанный способ является в сущности реализацией метода проб и ошибок, широко применяемого в практической деятельности.

3. Случайный поиск в применении к задачам оптимизации

Для применения описанного случайного поиска к поставленной задаче минимизации функции $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ необходимо под «состоянием» $\bar{p}$ «объекта» Q подразумевать не его координаты в пространстве параметров, а скорости его движения вдоль координат, т. е. $\bar{p} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$. Очевидно, что $\bar{p}$ является вектором скорости движения точки, изображающей состояние объекта в n-мерном пространстве параметров $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. При этом схема регулирования, изображенная на рис. 1, сохраняет силу. Сохраняются и указанные режимы работы схемы с той лишь разницей, что в режиме настройки $(\bar{p} = \bar{p}^*)$ при $n > 1$ объект может сразу не приходить в состояние Q^*, однако в этом случае он будет «приближаться» к искомому состоянию, т. е. функция качества Q к концу действия режима настройки будет меньше, чем в начале его.

Наиболее естественным критерием отбора случайно выбранных состояний может служить, например, значение производной

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial Q}{\partial x_n}\dot{x}_n. \tag{3}$$

Если все возможные состояния $p = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$, которыми располагает источник состояний *ИС*, относятся к множеству P, то к множеству P^* в этом случае следует отнести те состояния объекта, которые удовлетворяют неравенству

$$\frac{dQ}{dt} < 0, \tag{4}$$

т. е. условию уменьшения функции качества. Это неравенство и является критерием отбора. Нетрудно заметить, что вероятность выбора скорости $\bar{p}$, удовлетворяющей этому критерию, близка к $\frac{1}{2}$, так как «количество» $\bar{p}^* \in P^*$ немногим менее половины всех $\bar{p} \in P$, если гиперповерхности $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const}$ в n-мерном пространстве параметров достаточно гладкие.

Таким образом, алгоритм случайного поиска в данном случае состоит в том, что состояния $\bar{p}$, приводящие к $\frac{dQ}{dt} \geqslant 0$, являются временными, переходящими и немедленно сменяются другими, также случайно выбранными. Состояния же, приводящие к неравенству $\frac{dQ}{dt} < 0$, стабилизируются до тех пор, пока это неравенство не изменяет знак за счет изменения производной. Из (3) видно, что изменение производной в фиксированном состоянии, т. е. при $\bar{p} = \text{const}$, происходит за счет изменения частных производных $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ во время движения точки, изображающей объект, в пространстве параметров. Переход же от настраивавшего значения $\bar{p}$ к другому производится в момент, когда производная изменяет знак, т. е. при $\frac{dQ}{dt} = 0$. Легко заметить, что в результате работы по указанному алгоритму можно через некоторое конечное число циклов случайного выбора $\bar{p}$ привести величину Q к ее наименьшему значению Q^*.

Однако реализация такого алгоритма требует вычисления производной $\frac{dQ}{dt}$ в соответствии с критерием отбора (4), что в конечном счете снижает помехоустойчивость указанной системы регулирования, особенно при малых значениях модуля производной. Поэтому в данной работе был избран другой путь, не требующий вычисления производной, который, хотя и снижает несколько быстродействие настройки, но обладает простотой и надежностью.

Предлагается значение функции качества Q непрерывно сравнивать с некоторым уровнем η, который изменяется с постоянной скоростью $q < 0$. Пусть в начальный момент значения Q и η совпадают. Тогда $\eta(t) = Q_i + qt$, где Q_i — значение функции Q в начале i-го этапа, а t — время.

Обозначим через $Q(\bar{p}, t)$ значение функции качества в момент времени t при фиксированной скорости $\bar{p}$ изменения параметров системы. Если для выбранного в начале i-го этапа значения скорости $\bar{p}_i$ при достаточно малых $t > 0$ имеет место неравенство

$$Q(\bar{p}_i, t) - \eta(t) < 0, \tag{5}$$

то значение Q_{i+1} функции качества в тот момент времени $t = t_i$, когда значения $\eta(t)$ и $Q(\bar{p}_i, t)$ вновь сравниваются, оказывается меньшим, чем значение Q_i в начальный момент. В момент времени t_i производится переключение скорости с $\bar{p}_i$ на $\bar{p}_{i+1}$ и начинается новый этап процесса.

Следовательно, если после начала i-го этапа выполняется неравенство (5), то в начале следующего этапа значение функции качества оказывается меньшим.

Таким образом, неравенство (5) может служить критерием отбора. Тогда все $\bar{p}$, удовлетворяющие этому неравенству, следует отнести к подмножеству P^*. Значения же $\bar{p}$, не удовлетворяющие (5), немедленно отбрасываются.

Критерий (5) не требует вычисления производной, что значительно облегчает его реализацию, однако он несколько у́же критерия (4). Действительно, неравенство (5) для $t = 0$ можно записать в дифференциальной форме

$$\frac{dQ}{dt} < q. \tag{6}$$

Полученное неравенство определяет отбор скорсти p в начальный момент. Чем меньше величина q, тем меньше область значений $\bar{p}$, удовлетворяющих этому неравенству. Поэтому, сравнивая (4) и (6), убеждаемся, что, поскольку $q<0$, область значений скоростей, удовлетворяющих (5), всегда у́же области значений скоростей, удовлетворяющих (4).

На рис. 2 показано изменение Q для двух значений $\bar{p}_i$. Здесь же тонкими линиями нанесены уровни η для различных значений $q_1>q_2>q_3$. Хорошо видно, что при $q = q_3$ значение $\bar{p}_i^{(2)}$ не относится к P^*, в то время как $\bar{p}_i^{(1)} \in P^*$ на участке T_1. С увеличением q множество P^* расширяется. Так, при $q = q_1$ оба значения скорости $p_i^{(1,2)} \in P^*$.

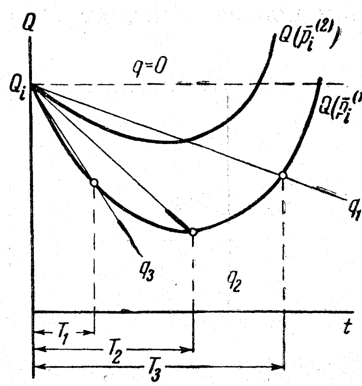

Рис. 2

Поэтому можно считать установленным, что

$$P^* = P^*(q). \tag{7}$$

При $q = 0$ неравенства (4) и (6) совпадают и отбор скоростей в начальный момент будет одинаковым для обоих критериев. Однако в момент переключения критерий (6) даст $Q_{i+1} = Q_i$, т. е. настройки не будет. При больших $q<0$ настройка будет слабой, так как из (5) следует, что разность $Q_i - Q_{i+1} = -qt$ мала, несмотря на то, что в процессе работы выбранная скорость приводила к значениям $Q < Q_{i+1}$ (см. случай $q = q_3$ для $\bar{p}_i^{(1)}$ на рис. 2).

Таким образом, увеличение q, с одной стороны, приводит к расширению подмножества P^*, с другой стороны, снижает эффективность настройки. Поэтому существует такое $q = q^*$, которое оптимизирует рассмотренную систему регулирования по быстродействию настройки.

Уровень η является, по сути дела, одной из форм организации памяти, когда «запоминается» не Q, а $\eta>0$. При этом «память» смещается во времени независимо от значения Q до момента $Q = \eta$. Наличие разности $\eta - Q$, знак которой определяет режимы работы устройства, значительно повышает его помехоустойчивость.

Отметим, что такая форма памяти применима и для детерминированного поиска, организованного по методу поочередного изменения параметров или по методу наискорейшего спуска. В этом случае нет необходимости определять минимум функции качества Q в выбранном направлении по критерию (4), а достаточно ввести описанную выше «память» при помощи сигнала сравнения. Такая модернизация, как показано выше, хотя и снижает быстродействие поиска, но значительно увеличивает помехоустойчивость системы регулирования.

На рис. 3 изображена блок-схема устройства, реализующего экстремальное регулирование описанным методом случайного поиска.

На схеме генераторы *ГС* обеспечивают режим случайных выборок из источника всех возможных состояний *ИС* и воздействуют на скорость изменения параметров регулируемой системы *РС*. При этом изменяющаяся величина Q непрерывно сравнивается с некоторым сигналом η, который вырабатывается генераторами сигнала сравнения *ГСС*. Результат сравнения $Q \gtreqless \eta$ определяет режимы работы схемы, которые задаются блоком управления *БУ*. Режимы работы указаны в таблице.

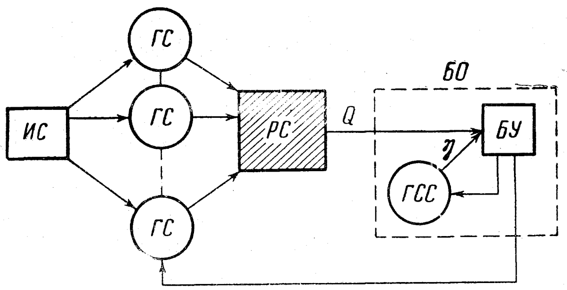

Рис. 3

В режиме подготовки *ГС* отключены и регулируемая система находится в невозмущенном состоянии, т. е. изображающая точка неподвижна и $Q = \text{const}$. Режим подготовки сменяется при $Q = \eta$ режимом поиска, в течение которого параметры системы изменяются с постоянной скоростью $\bar{p}$, направление и модуль которой определяются случайно *ГС*. Режим поиска в момент $Q = \eta$ сменяется режимом подготовки и т. д.

Таблица

Режимы	Критерий	Q	$\dot{\eta}$
Подготовка	$Q>\eta$	const	$c>0$
Поиск	$Q<\eta$	var	$q<0$

Нетрудно показать, что указанное устройство соответствует рассмотренному выше алгоритму случайного поиска с критерием отбора (5). Здесь параметр q имеет строгое физическое толкование — это скорость изменения сигнала сравнения η в режиме поиска. Очевидно, что при отсутствии гистерезиса в рассматриваемой системе регулирования работа возможна только при

$$\dot{Q}_{\text{мин}} < q. \tag{8}$$

В противном случае неравенство $Q<\eta$ никогда не выполнится.

4. Влияние гистерезиса

Показано, что описанное устройство работает в двух режимах: «поиск» и «подготовка», а момент перехода из одного режима в другой определяется фактом совпадения сигналов Q и η. Однако в реальных конструкциях в силу ряда причин (инерционность, гистерезис системы сравнения и т. д.) переключение режимов происходит при различных соотношениях η и Q. Так, момент перехода от режима подготовки к режиму поиска и наоборот определяется, соответственно, равенствами:

$$\eta = Q + \delta_1, \qquad \eta = Q - \delta_2,$$

где δ_1 и δ_2 — обычно достаточно малые положительные величины: $\delta_1 = \delta_1(c)$, $\delta_2 = \delta_2(q, \overline{p})$.

Нетрудно заметить, что при отключенных *ГС*, т. е. при $Q = \text{const}$, возникнет автоколебательный режим — пилообразные колебания сигнала η относительно Q, причем $\eta_{\text{макс}} - \eta_{\text{мин}} = \delta_1 + \delta_2$.

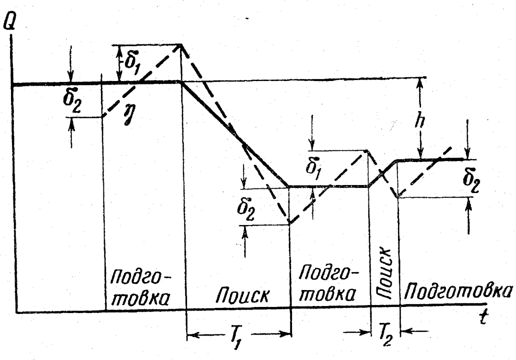

Рис. 4

Эти автоколебания, являющиеся следствием гистерезиса в реальной системе регулирования, вносят любопытные особенности в работу устройства.

Так, при наличии автоколебаний становится возможным регулирование при нарушении неравенства (8), т. е. при $|\overline{p}|_{\text{макс}} < |q|$. Это хорошо видно из графика на рис. 4, где показаны два цикла поиска при благоприятном (интервал T_1) и неблагоприятном (интервал T_2) вариантах изменения функции Q (сплошная линия). В результате действия обоих вариантов функция качества уменьшается на величину h вследствие того, что при настройке взаимная скорость изменения Q и η меньше, чем при расстройке. Это приводит к изменению длительности указанных режимов: $T_1 > T_2$.

Таким образом, в результате действия гистерезиса при большом $|q|$ сигнал η следит в автоколебательном режиме за величиной Q, при этом длительность благоприятных вариантов изменения Q ($\dot{Q} < 0$) несколько больше, чем неблагоприятных ($\dot{Q} > 0$), что приводит в конечном счете к систематическому уменьшению функции качества. Поэтому в некоторых случаях вполне возможно намеренное введение гистерезиса в систему регулирования.

Другой особенностью, вносимой гистерезисом, является возможность временной расстройки регулируемого объекта. Это происходит в результате того, что на «пробу» случайного варианта предлагаемого *ГС* необходимо некоторое время. Если вариант оказался неблагоприятным (рис. 4), то за время T_2 функция Q успеет несколько увеличиться. При выпадении подряд нескольких таких вариантов $\overline{p} \neq \overline{p}^*$, что возможно, хотя и маловероятно, объект несколько расстроится.

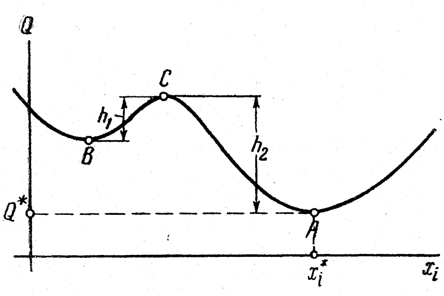

Рис. 5

Возможность такой расстройки делает описанную систему регулирования избирательной по отношению к различным минимумам функции Q, если таковые имеются. Действительно, попав на промежуточный минимум B (рис. 5), система продолжает двигаться в районе точки B до тех пор, пока в своем беспорядочном движении, вследствие возможности расстройки, не попадет в точку C. Отсюда система может либо вернуться обратно, либо, в силу минимизирующего действия описанного устройства, попасть в район точки A. В первом случае все повторится сначала до тех пор, пока изображающая точка не попадет в точку A — наименьший минимум Q. Естественно, что возможно и обратное движение из A в B, но в этом случае понадобятся значительно более редкие варианты расстройки и, следовательно, большее время для того, чтобы преодолеть барьер $h_2 > h_1$. Следовательно, вероятность перехода из A в B меньше, чем из B в A. Таким образом, система, будучи в состоянии находиться где угодно, значительно бо́льшую часть времени будет проводить в районе своего наименьшего значения Q^*, чем где-либо.

5. Экспериментальная проверка

Возможность оптимизации методом случайного поиска по предлагаемой схеме проверялась экспериментально в лабораторных условиях в применении к простым самонастраивающимся системам.

Была рассмотрена задача о самобалансировке двух независимых балочек-весов, образующих систему с двумя степенями свободы. Балочки удерживались в горизонтальном положении плоскими пружинами, напряжения которых определяли несбалансированность этих балочек x_1 и x_2. Под настройкой такого объекта имелось в виду отыскание условий равновесия балочек, при котором разбалансы балочек x_1 и x_2 были бы равными нулю одновременно: $x_1 = x_2 = 0$. Настройка этой системы производилась посредством подвижных грузов-тележек, приводимых в движение соответственно двумя электромоторами. Функция качества Q системы реализовалась в двух вариантах: $Q = |x_1| + |x_2|$, $Q = \max|x_i|$ $(i = 1, 2)$.

Задача, таким образом, сводилась к минимизации функции Q, которая достигала минимума $(Q^* = 0)$ только при настройке системы, т. е. в момент равновесия обеих балочек.

Генератор сигнала сравнения представлял собой делитель напряжения — реостат, приводимый в движение электромеханическим приводом. Блок отбора был в первом случае построен на трехобмоточном поляризованном реле РП-5, на две обмотки которого подавались $|x_1|$ и $|x_2|$, а на третью — сигнал сравнения η. Второй вариант был построен на базе двух двухобмоточных поляризованных реле. Генератор случайности представлял собой обычное пересчетное устройство ПС-64, на вход которого подавался шум с лампы; при отключении шума триггерные ячейки фиксировались в случайном положении, которое определяло направление движения грузов-тележек, балансировавших балочки.

Проведенные эксперименты показали:

1. Возможность настройки, т. е. минимизации функции Q, в обоих вариантах по указанному методу.

2. Независимость самого факта настройки от скорости q изменения сигнала η в широких пределах; для различных q изменялось лишь среднее время настройки.

3. Существование такого оптимального значения $q = q^*$, при котором среднее время настройки системы при прочих равных условиях было минимальным, т. е. существование q, оптимизирующего описанную систему настройки по быстродействию.

Другой эксперимент был поставлен для проверки возможности настройки методом случайного поиска при действии фактора систематической расстройки. Для этого была взята балочка с двумя тележками, одна из которых двигалась с постоянной скоростью, вводя режим расстройки, а другая была включена в описанную выше схему регулирования с целью настройки (балансировки) такой однопараметрической системы.

Функция качества реализовалась естественным образом

$$Q = |x|,$$

где x — несбалансированность балочки. Такое устройство является, по сути дела, простейшей статистической следящей системой, работающей на основе метода случайного поиска.

Эксперименты показали, что качество работы такой самонастраивающейся системы во многом определяется быстродействием процесса, а следовательно, выбором параметра q.

Заключение

Предлагаемая схема экстремального регулирования методом случайного поиска может быть успешно применена для автоматической оптимизации многопараметрических объектов при любой, даже разрывной, функции качества. Преимущества схемы особенно проявляются в случае регулирования по большому количеству независимых или зависимых параметров объекта. Для реализации схемы не требуются счетно-решающие устройства, необходимые для осуществления детерминированного поиска, что позволяет осуществлять оптимизацию объекта минимальными средствами. Повышенная помехоустойчивость, полученная за счет применения памяти в форме сигнала сравнения, может быть использована и в детерминированных системах экстремального регулирования.

Поступила в редакцию
18 апреля 1960 г.

Цитированная литература

1. Фельдбаум А. А. Автоматический оптимизатор. Автоматика и телемеханика, т. XIX, № 8, 1958.
2. Ashby W. Ross. Design for a Brain. New York. 1952.
3. Эшби У. Росс. Схема усилителя мыслительных способностей. В сб. «Автоматы», Изд-во иностр. литер., 1956.

EXTREMUM CONTROL BY MEANS OF RANDOM SCAN

L. A. RASTRIGIN

There is proposed a method of random scan applied to the problems of extremum control of multiparameter systems. The device realizing the method is described.