

1. Oblicz $\nabla f(x, y, z)$ dla następujących funkcji:

(a) $f(x, y, z) = 2xz + z^3 + \cos[x] \sin[y]$,

(b) $f(x, y, z) = 2xyz + \cos[xyz]$.

2. Naszkicuj funkcję wektorową $\vec{A}(x, y, z)$ na płaszczyźnie xy oraz oblicz $\nabla \cdot \vec{A}(x, y, z)$ i $\nabla \times \vec{A}(x, y, z)$ dla:

(a) $\vec{A}(x, y, z) = -y\hat{x} + x\hat{y}$,

(b) $\vec{A}(x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y}$.

3. Siła Coulomba pomiędzy dwoma ładunkami elektrycznymi q_1 and q_2 oddalonymi od siebie o r wyraża się wzorem

$$F_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2},$$

gdzie $\epsilon_0 = 8.55 \cdot 10^{-12} \text{Fm}^{-1}$ jest przenikalnością elektryczną próżni, natomiast siła oddziaływania grawitacyjnego pomiędzy dwoma masami m_1 i m_2 oddalonymi od siebie o r jest równa

$$F_G = \frac{Gm_1 m_2}{r^2},$$

gdzie stała grawitacji $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}$. Znajdź odległość pomiędzy dwoma ładunkami $q_1 = q_2 = 1\text{C}$, dla których siła wzajemnego oddziaływania odpowiada sile oddziaływania grawitacyjnego pomiędzy Słońcem o masie $m_S = 1.989 \cdot 10^{30} \text{kg}$ i Ziemią o masie $m_S = 5.972 \cdot 10^{24} \text{kg}$ (średnia odległość Ziemia-Słońce wynosi $d = 149.6 \cdot 10^6 \text{m}$).

4. Siła Coulomba wywierana na ładunek q_1 znajdujący się w położeniu \vec{r}_1 w wyniku istnienia ładunku q_2 w położeniu \vec{r}_2 wynosi

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3},$$

gdzie $\epsilon_0 = 8.55 \cdot 10^{-12} \text{Fm}^{-1}$ jest przenikalnością elektryczną próżni.

(a) Załóżmy, że dwa ładunki elektryczne oddalone są od siebie o 2cm w linii prostej. Znajdź wartość siły wywieranej na każdy z tych ładunków i narysuj wektory tych sił w zależności od tego, czy ładunki q_1 i q_2 są ujemne, czy dodatnie.

(b) Znajdź siłę działającą na ładunek q_1 dla przypadków przedstawionych na poniższych rysunkach:

