1. Dla funkcji $f(x, y, z) = x^2 - 4y + 4 + yz$ oblicz
   (a) $\nabla f(x, y, z)$,
   (b) $\nabla \times [\nabla f(x, y, z)]$.

2. Zakładając następującą postać funkcji wektorowej $\mathbf{A}(x, y, z)$

$$\mathbf{A}(x, y, z) = x^2 \hat{x} - 4xy\hat{y} + z\hat{z}$$

   oblicz:
   (a) $\nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z)$,
   (b) $\nabla \times \mathbf{A}(x, y, z)$,
   (c) $\nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{A}(x, y, z)]$.

3. Wykaż, że następujące równości są prawdziwe:
   (a) $\frac{d}{dx}(\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{B}(x)) = \mathbf{A}'(x) \cdot \mathbf{B}(x) + \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{B}'(x)$,
   (b) $\frac{d}{dx}(\mathbf{A}(x) \times \mathbf{B}(x)) = \mathbf{A}'(x) \times \mathbf{B}(x) + \mathbf{A}(x) \times \mathbf{B}'(x)$.

4. Pamiętając, iż we współrzędnych sferycznych gradient funkcji $f(\vec{r})$ ma następującą postać

$$\nabla f(\vec{r}) = \hat{r}\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin\theta}\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial \phi},$$

   oblicz $\nabla f(\vec{r})$ dla

$$f(\vec{r}) = \frac{\cos\theta \sin\phi}{r}.$$

5. Pamiętając, iż we współrzędnych sferycznych dywergencja funkcji wektorowej $\mathbf{A}(\vec{r})$

$$\mathbf{A}(\vec{r}) = A_r(\vec{r})\hat{r} + A_\theta(\vec{r})\hat{\theta} + A_\phi(\vec{r})\hat{\phi}$$

   ma następującą postać

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

   oblicz $\nabla \cdot \mathbf{A}(\vec{r})$ dla

$$\mathbf{A}(\vec{r}) = \frac{\cos\phi}{r}\hat{r} + \cos\theta\sin\phi\hat{\phi}.$$