1. Relacja dyspersji dla drgań jednowymiarowego łańcucha identycznych atomów o masie $M$, z których każdy oddziałuje sprężyście z sąsiadami poprzez współczynnik sprężystości $K$ wygląda następująco:

$$M\omega^2 = 2K[1 - cos(ka)], \tag{1}$$

a przemieszczenie każdego atomu $n$ jest dane przez

$$u_n = Ae^{i(kna-\omega t)}. \tag{2}$$

Szkicując część rzeczywistą przemieszczenia $Re\ u_n$ pokazać, ze $k = 2\pi/\lambda$, gdzie $\lambda$ to długość fali. Wyznacz $k$, jeśli $M\omega^2 = K$. Naszkicuj taką falę dla $n = 1, 2, ...5$ w chwilach $t = 0, \pi/(2\omega), \pi/\omega$.

2. Pokazać, że relacja dyspersji dla jednowymiarowego łańcucha identycznych atomów, z których każdy jest sprzężony poprzez współczynnik $K_1$ z najbliższymi sąsiadami i $K_2$ z kolejnymi najbliższymi sąsiadmi, jest dana poprzez:

$$M\omega^2 = 2K_1[1 - cos(ka)] + 2K_2[1 - cos(2ka)]. \tag{3}$$

*Wskazówka: Jak w tym przypadku powinno być zmodyfikowane równanie (1) z wykładu? Po znalezieniu właściwej postaci należy skorzystać z takiego samego podstawienia i rozwiązać je.*

Pokazać, że:

(a) Powyższa relacja dyspersji redukuje się do relacji dla fal dźwiękowych, gdy długość fali $\lambda$ jest duża (*wskazówka: szereg Taylora dla* $cos(ka)$ *wokół* $ka = 0$). Jaka jest wtedy prędkość dźwięku?

(b) Prędkość grupowa $v_g = \partial\omega/\partial k$ znika w $k = \pm\pi/a$.

(c) Okres funkcji $\omega(k)$ wynosi $2\pi/a$.

Które z punktów (a-c) pozostają prawdziwe przy dodaniu sprzężeń do dalszych sąsiadów i dlaczego?