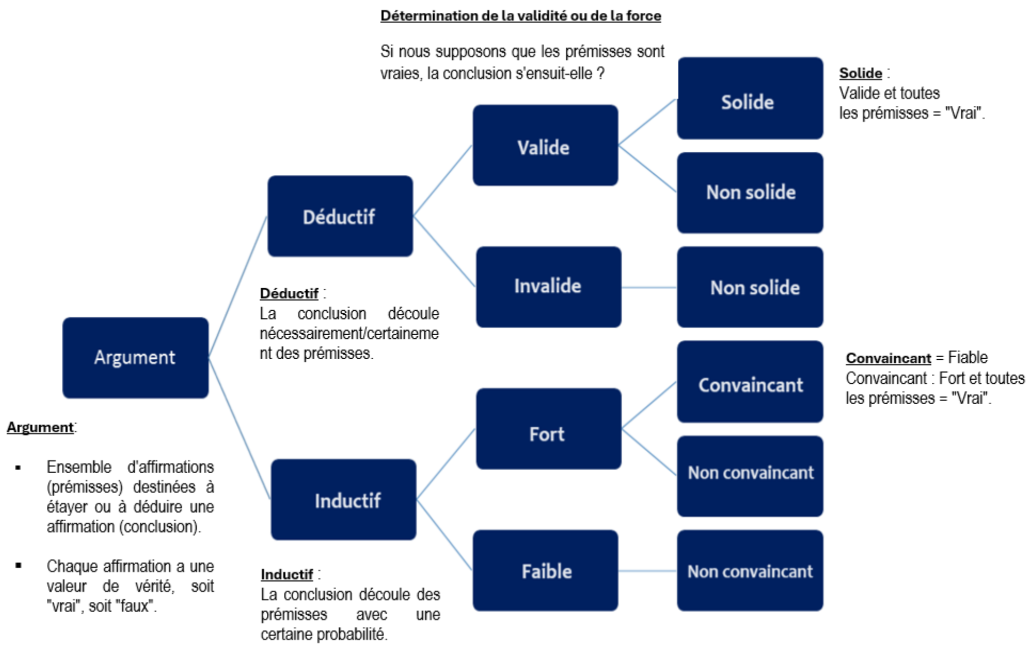
Logique propositionnelle : Représentation

Dr. NSENGE MPIA HERITIER, Ph.D

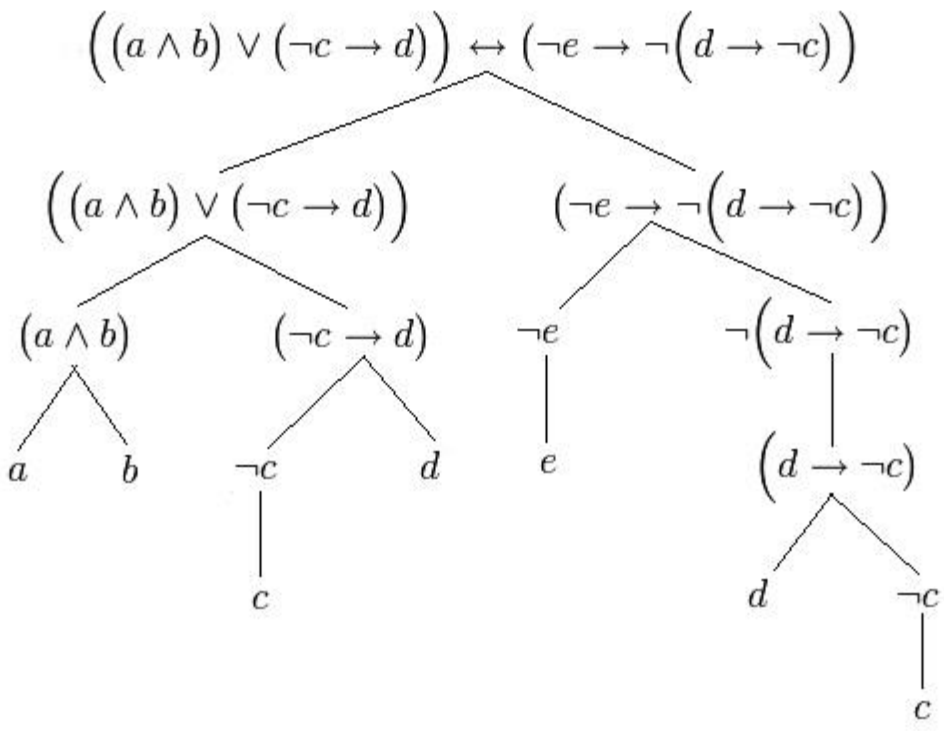
Précédemment

- Concepts de l'IA :
  - Représentation des connaissances
    - Représentation formelle et langage naturel
    - Syntaxe et correspondance avec la sémantique
    - Qu'est-ce qui rend une représentation des connaissances efficace ?
  - Les bases de la logique
    - Arguments
      - Valides
      - Solides
    - Logique syllogistique
      - Syllogisme
      - Test star de validité
  - Vue d'ensemble du raisonnement
    - Déductif, inductif, abductif



Plan de leçon

- Qu'est-ce que la logique propositionnelle ?
- Le langage propositionnel
- Vérité propositionnelle
- Équivalence
- Calcul logique



Pourquoi la logique propositionnelle ?

- Ces bases permettent d'acquérir les compétences nécessaires pour travailler, manipuler et raisonner avec des connaissances et des tâches plus complexes.

- Les compétences "calculatoires" nécessaires au raisonnement

Révision de la logique syllogistique

- Logique syllogistique
  - système de raisonnement utilisé par les Grecs anciens
- Examen des principes fondamentaux du transfert logique : Par exemple, si A=B et B=C, alors A=C
- La logique propositionnelle s'appuie sur la logique syllogistique.

Qu'est-ce que la logique propositionnelle?

Proposition

Une déclaration qui est soit vraie, soit fausse, mais pas les deux à la fois.

- Aussi connue comme: Formule
- Proposition atomique (c'est-à-dire des "faits" dont la vérité ou la fausseté ne dépend pas d'autres propositions)
- Exemples de propositions :
  - Propositions
    - 1 + 1 = 2 — Vrai
    - 1 + 1 > 3 — Faux
    - Mampuya aime les soins des patients — Vrai
    - Nsenge est titulaire d'un doctorat en Physique — Faux
  - Pas de propositions
  - 1 + 1 > x — Inconnu
  - Quel beau livre! — Inconnu
  - Ta voiture est-elle rouge ? — Inconnu

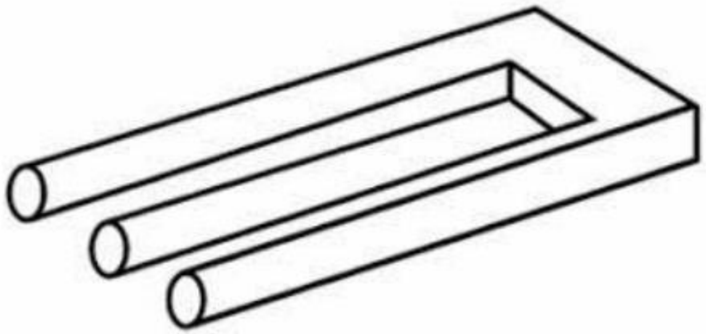
Paradoxe

Une affirmation à laquelle on ne peut attribuer une valeur de vérité

- Un paradoxe ne peut pas être une proposition

- Exemple : le [paradoxe du menteur]

  - Cette affirmation est fausse



Le paradoxe du Menteur consiste à dire « je mens » ou, sous une forme plus précise : « *la présente phrase est fausse* ». Si cette phrase est vraie, alors elle est fausse (puisque c'est ce qu'elle dit) ; et si elle est fausse, comme c'est précisément ce qu'elle dit, elle est vraie ! On ne peut pas lui attribuer une valeur de vérité (« vraie » ou « fausse ») de façon cohérente.

Logique formelle moderne

- Aussi connue comme : logique booléenne, logique symbolique, calcul propositionnel, logique des énoncés, logique de l'ordre de Zéro.
- Repose sur les principes établis par la logique syllogistique
- Se préoccupe de la vérité et de la fausseté
  - Comment les valeurs de vérité s'étendent à travers une série de propositions

    Vrai Faux
    - "Nsenge est Informaticien" **ET** "Nsenge est un maçon" → **FAUX**
- Construit des énoncés plus complexes (c'est-à-dire des phrases) en combinant des propositions avec des connecteurs logiques
  - C'est la syntaxe de la logique propositionnelle.

Langage propositionnel

Langage propositionnel : Variables

- Pour formaliser les propositions atomiques, nous utilisons des symboles simples (c'est-à-dire primitifs).
  - Symboles simples : constantes propositionnelles
  - Ces symboles héritent des mêmes valeurs de vérité que les énoncés
  - F en tant que symbole est une proposition qui est toujours fausse
  - V en tant que symbole est une proposition qui est toujours vraie
- Une signature propositionnelle est un ensemble de constantes propositionnelles

Symboles

↓

"1 + 1 = 2"	=	'P'	Vrai
"1 + 1 > 3"	=	'Q'	Faux
"Mampuya aime s'occuper des patients"	=	'R'	Vrai
"Nsenge est titulaire d'un doctorat en chimie"	=	'S'	Faux

Langage propositionnel : Les connecteurs

- **Aussi connu comme :** Opérateurs logiques
- Phrase propositionnelle : Une déclaration obtenue en utilisant des connecteurs pour combiner :
  - des membres de la signature propositionnelle (c'est-à-dire une constante propositionnelle) $\boxed{P \wedge Q}$
  - Une expression composée formée à partir de membres de la signature propositionnelle $\boxed{(S \vee P) \wedge Q}$

- Les connecteurs :
  - Conjonction ($\wedge$, &, $\cdot$): ET
  - Disjonction ($\vee$, | , +) : OU
  - Négation ($\neg$, ~) : NON
  - Implication ($\rightarrow$, $\Rightarrow$, $\supset$) : SI ... ALORS
  - Biconditionnel/Equivalence ($\leftrightarrow$, ssi) : SI ET SEULEMENT SI

Table de vérités

Décrit le comportement d'une proposition sous toutes les interprétations possibles des propositions atomiques incluses.

- Longueur de la table :
  - Etant donné *n* propositions atomiques différentes dans une proposition :
  - 2^n lignes différentes dans la table de vérité de cette formule
  - Parce que chacune d'entre elles peut prendre l'une des deux valeurs suivantes : vrai ou faux.
- Propositions atomiques (pour les exemples suivants) :
  - "Mbuyi aime les gâteaux" = "p".
  - "Mbuyi mange des gâteaux" = "q".

Proposition atomique		Propositions	
p	q	~p	~p ∨ q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

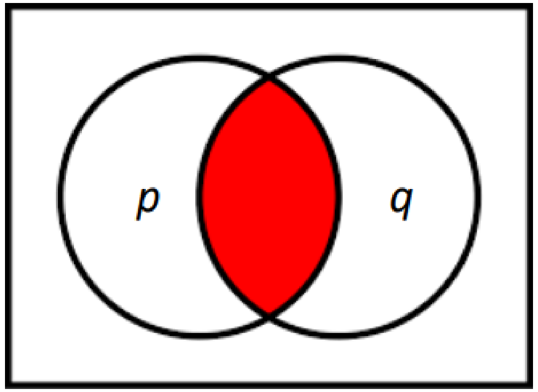
Connecteurs : Conjonction

- ET (∧, &, ·): Vrai uniquement lorsque les deux sont vrais

- Table de vérités

p	q	P ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

= "Mbuyi aime les gâteaux ET Mbuyi mange des gâteaux"

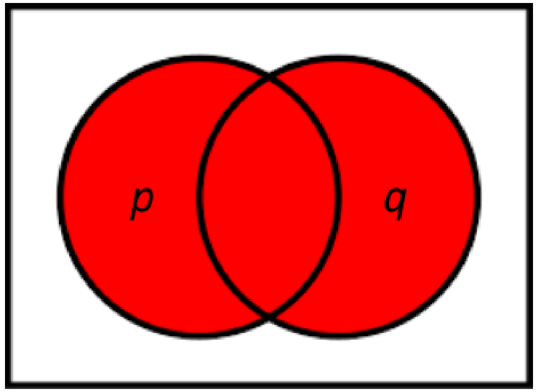


Connecteurs : Disjonction

- OU (V, | , +): Faux uniquement lorsque les deux sont faux
- Table de vérités

p	q	P V q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	**F**	**F**

= "Mbuyi aime les gâteaux OU Mbuyi mange des gâteaux"



Connecteurs : Négation

- NON (¬ , ~):
  - Un seul argument suffit
  - Inversion de la vérité

= "Mbuyi n'aime pas les gâteaux "

- Table de vérités

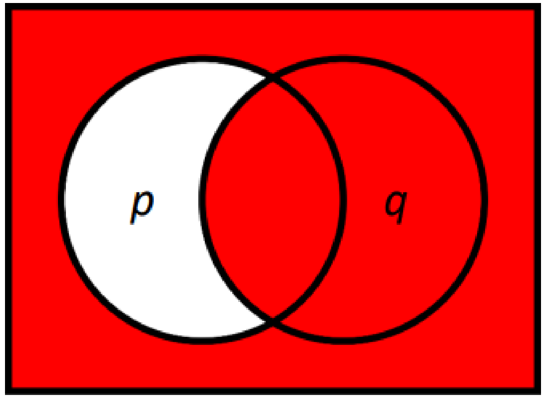
p	¬ p
V	F
F	V

Connecteurs : Implication

- $SI \ \ldots ALORS\ (\rightarrow, \Rightarrow, \supset)$:
  - L'implication de Q par P est la proposition (¬P) v Q, notée P ⇒ Q ou « P *implique* Q » *qui est fausse seulement si la proposition P est vraie* et la *proposition Q est fausse*.
  - L'implication est vraie dans tous les autres cas.
- Table de vérités

= "Si Mbuyi aime les gâteaux alors Mbuyi mange des gâteaux."

p	q	P → q
V	V	V
V	**F**	**F**
F	V	V
F	F	V



Conditions suffisantes et nécessaires

- En ce qui concerne les implications...

Lorsque $p \rightarrow q$, p est appelé une condition suffisante pour q, q est une condition nécessaire pour p.

- Être Congolais est une condition suffisante pour être Africain

≡ si quelqu'un est Congolais, il sera Africain

- Être Africain est une condition nécessaire pour être Congolais

≡ si quelqu'un n'est pas Africain, il ne peut pas être Congolais

Réciproque, Contraposée, et Inverse

- A partir de l'implication p → q, nous pouvons former de nouveaux énoncés conditionnels
  - Réciproque = q → p
  - Contraposition = ¬p → ¬q
  - Inverse = ¬q → ¬p

- Exemple Implication :
  - "S’il pleut, je n'irai pas à l’Université".
    - Réciproque : "Si je ne vais pas à l’Université, alors il pleut".
    - Contraposition: "S'il ne pleut pas, alors j'irai à l’Université".
    - Inverse : "Si je vais à l’Université, alors il ne pleut pas".

Réciproque

- En mathématiques et en logique, la **réciproque (converse en anglais)** d'une **proposition logique** n'est pas toujours vraie même si la proposition initiale l'est.
  - pour simplifier, un théorème n'admet pas toujours de réciproque (par contre sa contraposée est toujours vraie).
  - C'est à dire que si la proposition logique est vraie, sa réciproque ne l'est pas toujours.

Proposition	Réciproque (converse)
Si $\boxed{A}$ alors $\boxed{B}$	Si $\boxed{B}$ alors $\boxed{A}$

- Pa exemple:
  - **Proposition**: Si je suis dans la Ville de Kinshasa alors je suis en RDC
  - **Réciproque** fausse dans ce cas: Si je suis en RDC alors je suis à Kinshasa
    - Ce qui n'est évidemment pas une proposition toujours vraie, je peux me trouver à Bunia

Contraposée

- En mathématiques et en logique, la **contraposée (Contraposition en anglais)** d'une **proposition logique** est toujours équivalente à la proposition initiale.

  - C'est à dire que si la proposition logique est vraie, sa contraposée l'est aussi :

Proposition	Contraposée (Contraposition)
Si $\boxed{A}$ alors $\boxed{B}$	Si $\boxed{non\ B}$ alors $\boxed{non\ A}$

- Pa exemple:
  - **Proposition**: Si je suis dans la Ville de Kinshasa alors je suis en RDC
  - **Contraposition** : Si je ne suis pas en RDC alors je ne suis pas à Kinshasa

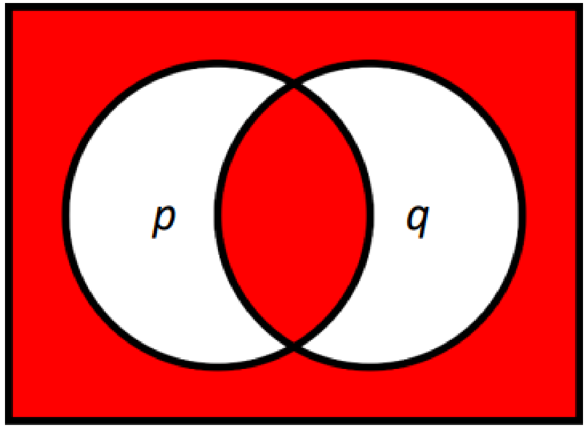
Connecteurs : Equivalence

- *SI ET SEULEMENT SI* (↔ , ssi):
  - Vrai si p et q sont tous deux Vrai ou Faux

- Table de vérités

p	q	P ↔ q
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	F
F	F	V

= "Si Mbuyi aime les gâteaux, alors Mbuyi mange des gâteaux, et vice versa."



Langage propositionnel : Grammaire

- Propositions abstraites :
  - Plus générales que les propositions atomiques
  - Ça peut être toute proposition syntaxiquement correcte
    - c'est-à-dire une formule bien formée (fbf)
    - Peut imbriquer des propositions complexes aussi profondément que nécessaire
    - Les parenthèses ( ) sont utilisées pour le regroupement.
    - Omettre autant de parenthèses que possible, sans toutefois créer d'ambiguïté.
    - La négation a la plus haute priorité

Exemples:

$$((\neg a) \vee (\neg b)) \overset{1}{\rightsquigarrow} (\neg a) \vee (\neg b) \overset{2}{\rightsquigarrow} \neg a \vee \neg b$$

$$((\neg a) \wedge b) \overset{1}{\rightsquigarrow} (\neg a) \wedge b \overset{2}{\rightsquigarrow} \neg a \wedge b$$

$$(\neg(a \wedge b)) \overset{1}{\rightsquigarrow} \neg(a \wedge b) \overset{?}{\rightsquigarrow} \cancel{\neg a \wedge b} \quad \textbf{Non!}$$

Exemples corrects

a

b

$(\neg a)$

$((\neg a) \wedge b)$

$(((\neg a) \wedge b) \vee b)$

Mauvais exemples

$a\wedge$

$\Rightarrow\Rightarrow a$

$a\neg b$

Priorité des opérateurs logiques

Opérateur	Priorité
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

$p \vee q \rightarrow \neg r$ est équivalent à $(p \vee q) \rightarrow \neg r$ si le sens voulu est $p \vee (q \rightarrow \neg r)$ il faut alors utiliser des parenthèses

Vérité propositionnelle

Calcul des tables de vérité

- Pour chaque proposition (non atomique), calculer la table de vérité
- Utiliser les règles respectives pour les connecteurs
- L'ordre de la table de vérité est déterminé par la "préséance".

$$(p \lor q) \to \neg r$$

p	q	r	¬r	p ∨ q	p ∨ q → ¬r
V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V

Interprétation des tables de vérité

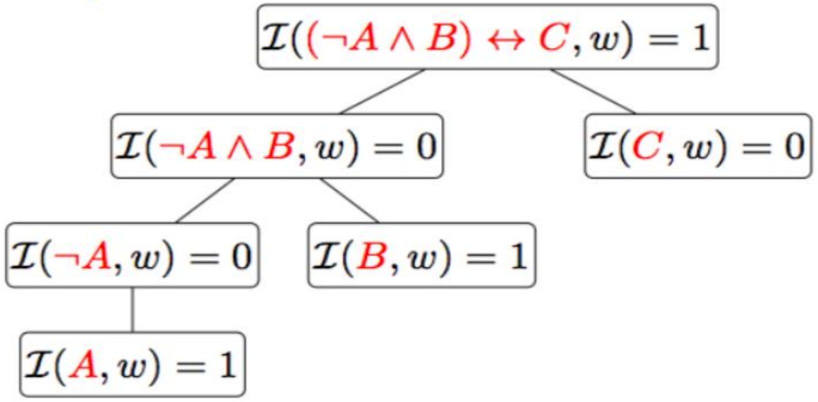
- Chaque ligne est une interprétation possible (c'est-à-dire un modèle) :
  - Les interprétations sont des mondes possibles
  - La recherche des valeurs de vérité possibles des propositions constitutives nous donne le sens de la phrase.
- Interprétation propositionnelle :
  - Cartographie de vérité des constantes propositionnelles
  - p = "Il pleut"
  - q = "Il y a de l’insécurité dans la ville"
  - r = "Il y a cours aujourd'hui"
- Interprétation des phrases :
  - Cartographie de la vérité des phrases propositionnelles

p	q	r	$p \vee q \rightarrow \neg r$
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

Il ne pleut pas mais il y a de l’insécurité dans la ville, donc il n'y a pas cours aujourd'hui.

Fonction d'interprétation

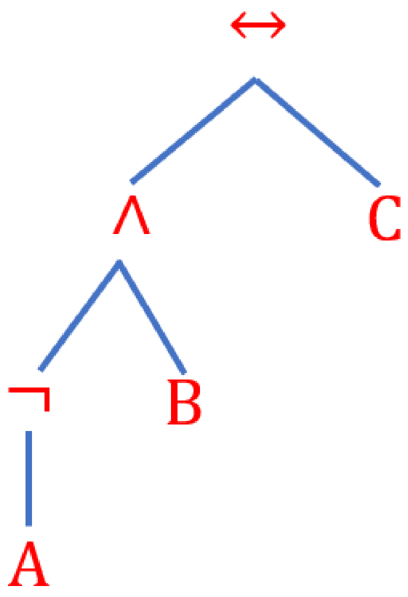
- On peut créer une fonction afin d'interpréter une formule de proposition
  - Soit la formule donnée ci-dessous:
    - Formule: f = $(\neg A \land \text{B}) \leftrightarrow C$
    - On peut obtenir le modèle ci-dessous:
    - Modèle: $w = \{A: 1, B: 1, C: 0\}$ → Interprétation
    - Ce qui peut s'interpréter comme suit:
    - Interprétation:



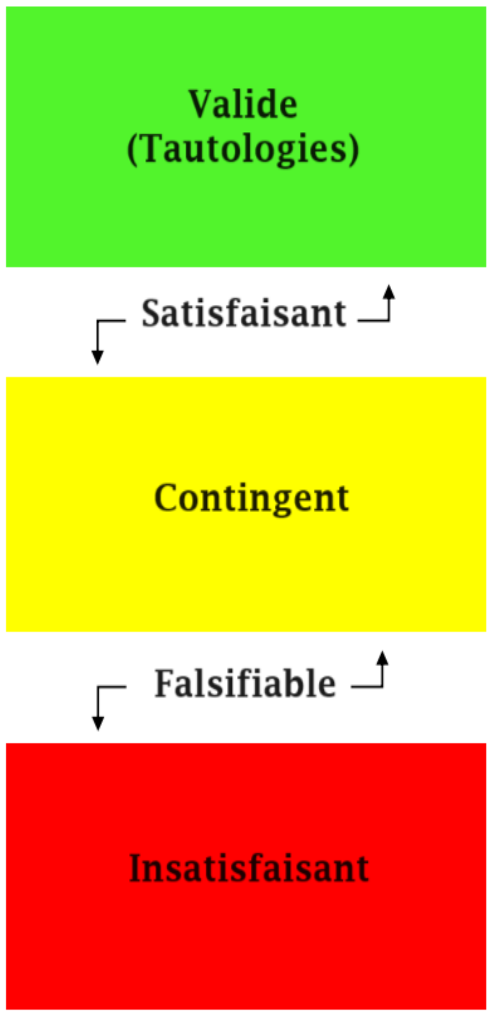
- Dans le graphe ci-contre, on peut voir que le dernier nœud gauche $I(A, w)$ vaut 1 (Vrai) car A est positif, en montant dans le niveau suivant $I(\neg A, w)$ vaut 0 (Faux) car ici A est négatif tandis qu'à droite de ce nœud $I(B, w)$ vaut 1 (Vrai) puisque B est positif. Le nœud qui vient juste au dessus $I(\neg A \land B, w)$ vaut 0 (Faux) car la conjonction est vrai seulement lorsque A et B sont vrais alors qu'ici nous avons le scénario de $\neg A = 0$ et B =1. $\text{I}(\text{C}, w)$ vaut 0 ici car pour que notre formule soit vraie (cad l'équivalence), il faut que $(\neg A \land \text{B})$ soit vraie et C soit vrai ou que $(\neg A \land \text{B})$ soit fausse et C soit fausse. Étant donné que $I(\neg A \land B, w)$ vaut 0 (faux), par déduction C est aussi égal à 0 (faux)

Fonction d'interprétation (Cont.)

- Partant du modèle obtenu dans le slide précédent, nous avions d’abord écrit notre Formule sous forme d’arborescence comme suit:



Propriétés des propositions abstraites



- Chaque interprétation est satisfaite (c'est-à-dire vraie)
- Certaines interprétations le satisfont, mais pas d'autres
- Aucune interprétation n'est satisfaite

Tautologie

"Face je gagne, pile tu perds"

Une proposition abstraite qui est toujours vraie

- Exemple :
  - Ce cours est facile ou ce cours n'est pas facile
  - a ∨ (¬a) ≡ V (vraie)
  - La colonne de la table de vérité est toujours Vrai
  - (0 = Faux, 1 = Vrai)

a	b	$b \Rightarrow a$	$a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Contradiction

Une proposition abstraite qui est toujours fausse

- Exemple :
  - Ce cours est facile et ce cours n'est pas facile
  - a ∧ (¬a) ≡ F
  - La colonne de la table de vérité est toujours Faux
  - (0 = Faux, 1 = Vrai)

a	b	$a \Rightarrow b$	$\neg b$	$a \wedge \neg b$	$(a \Rightarrow b) \wedge (a \wedge \neg b)$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0

Contingence

Proposition abstraite qui n'est ni une tautologie ni une contradiction.

- Exemples :

1. a
2. $a \Rightarrow \neg a$
3. $a \wedge b$
4. $a \vee b$
5. $\neg a \Rightarrow (b \wedge c)$

Equivalence

Propositions équivalentes

- Les propositions abstraites ayant des colonnes identiques sont dites équivalentes
  - c'est-à-dire que les valeurs de vérité correspondantes dans chaque modèle

- Toutes les tautologies et contradictions sont équivalentes

a	b	$a \Rightarrow b$	$\neg(a \Rightarrow b)$	$\neg a$	$\neg a \vee b$	$\neg(\neg a \vee b)$
0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0

Propositions équivalentes (Cont.)

- Exemples:
  - "Nsenge n'est pas marié mais Georgine n'est pas célibataire" ($\neg h \land \neg b$)
  - "Georgine n'est pas célibataire et Nsenge n'est pas marié" ($\neg b \land \neg h$)
  - "Ni Georgine n'est célibataire ni Nsenge n'est marié" ($\neg(b \lor h)$).
  - Ces trois énoncés sont équivalents
    - $\neg h \land \neg b \equiv \neg b \land \neg h \equiv \neg(b \lor h)$

b	h	¬b	¬h	b ∨ h	(¬h ∧ ¬b)	(¬b ∧ ¬h)	¬(b ∨ h)
V	V	F	F	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V

Notation étendue

- si *P* est équivalent à *Q*, on écrit $P \overset{val}{=\!=} Q$
- **Note** : $\overset{val}{=\!=}$ ne fait pas partie du vocabulaire du langage des propositions abstraites ; c'est un méta-symbole.

- Ainsi,

$$\underbrace{\underbrace{a \Rightarrow b}_{\text{proposition abstraite}} \overset{val}{=\!=} \underbrace{\neg a \vee b}_{\text{proposition abstraite}}}_{\text{meta formule}}$$

Commutativité et associativité

- Les équivalences standard - c'est-à-dire les règles de transformation

Commutativité :

$$P \wedge Q \overset{val}{=\!=} Q \wedge P$$
$$P \vee Q \overset{val}{=\!=} Q \vee P$$
$$P \Leftrightarrow Q \overset{val}{=\!=} Q \Leftrightarrow P$$

Associativité :

$$(P \wedge Q) \wedge R \overset{val}{=\!=} P \wedge (Q \wedge R)$$
$$(P \vee Q) \vee R \overset{val}{=\!=} P \vee (Q \vee R)$$
$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R \overset{val}{=\!=} P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R)$$

NB: $P \Rightarrow Q \overset{val}{\neq} Q \Rightarrow P$

NB: $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \overset{val}{\neq} (P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$
0	1	1	0

P	Q	R	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$
0	1	0	1	0

Idempotence et double négation

- Les équivalences standard - c'est-à-dire les règles de transformation

Idempotence:

$$P \wedge P \stackrel{val}{=\!=} P$$

$$P \vee P \stackrel{val}{=\!=} P$$

NB: $P \Rightarrow P \stackrel{val}{\neq} P$

$P \Leftrightarrow P \stackrel{val}{\neq} P$ (Il s'avère == à Vrai)

Double négation

$$\neg\neg P \stackrel{val}{=\!=} P$$

« Ce n'est pas que je n'aime pas les épinards »

N.B. : Dans la logique propositionnelle, la nuance voulue ne peut pas être saisie.

Adsorption

- Équivalences standard
  - c'est-à-dire règles de transformation
  - Simplification/Réduction

$$p \lor (p \land q) \equiv p$$
$$p \land (p \lor q) \equiv p$$

Vrai et Faux (V & F)

- Équivalences standard - c'est-à-dire règles de transformation
- Simplification des propositions abstraites en constantes de vérité

Inversion

$$\neg \text{ Vrai } \stackrel{val}{=\!=} \text{ Faux}$$

$$\neg \text{ Faux } \stackrel{val}{=\!=} \text{ Vrai}$$

Négation

$$\neg P \stackrel{val}{=\!=} P \Rightarrow \text{ Faux}$$

Contradiction

$$P \wedge \neg P \stackrel{val}{=\!=} \text{ Faux}$$

Vrai/faux-élimination

$$P \wedge \text{ Vrai } \stackrel{val}{=\!=} P$$

$$P \wedge \text{ Faux } \stackrel{val}{=\!=} \text{ Faux}$$

$$P \vee \text{ Vrai } \stackrel{val}{=\!=} \text{ Vrai}$$

$$P \vee \text{ Faux } \stackrel{val}{=\!=} P$$

Milieu exclu

$$P \vee \neg P \stackrel{val}{=\!=} \text{ Vrai}$$

Distributivité

Distributivité :

$$P \wedge (Q \vee R) \overset{val}{=\!=} (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \vee (Q \wedge R) \overset{val}{=\!=} (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

- Équivalences standard - c'est-à-dire règles de transformation

- Peut reconnaître des noms et des modèles issus de l'algèbre

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$
$$(A \cdot B) + (A \cdot C) = A \cdot (B + C)$$

Les lois de Morgan

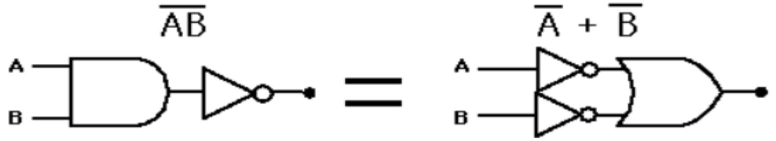
- En plus des trois opérations de base ET, OU et NON, qui suffisent pour tout faire, on trouve aussi des opérations NON-ET, NON-OU et OU exclusif.

De Morgan:

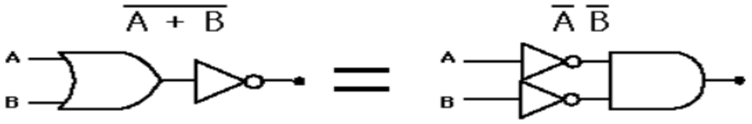
$$\neg(P \wedge Q) \overset{val}{=\!=} \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) \overset{val}{=\!=} \neg P \wedge \neg Q$$

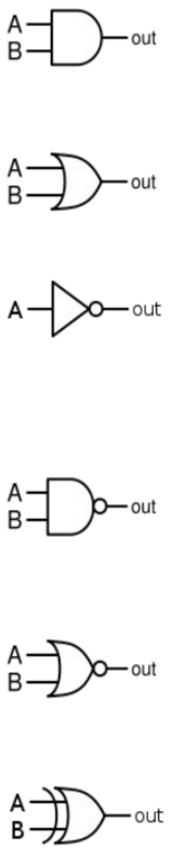
- Circuit: Portes logiques



Une porte **NAND** est équivalente à une inversion suivie d'un OU



Une porte **NOR** est équivalente à une inversion suivie d'un ET



	Opération booléenne
ET (AND)	$A \cdot B$
OU (OR)	$A + B$
NON (NOT)	$\overline{A}$
NON-ET (NAND)	$\overline{A \cdot B}$
NON-OU (NOR)	$\overline{A + B}$
OU exclusif (XOR)	$A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$

En électronique, une porte NON est plus communément appelée *inverseur*. Le cercle utilisé sur la représentation est appelé « bulle », et montre qu'une entrée ou une sortie est inversée.

Table de vérité

Entrées A	Entrées B	Sortie A AND B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Entrées A	Entrées B	Sortie A OR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Entrée A	Sortie NOT A
0	1
1	0

Entrées A	Entrées B	Sortie A NAND B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Entrées A	Entrées B	Sortie A NOR B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Entrées A	Entrées B	Sortie A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Calcul logique

Calcul: Calcul logique

Rappelons le calcul suivant :

$$\neg P \Rightarrow Q$$
$$\stackrel{val}{=\!=} \quad \{\text{ Implication }\}$$
$$\neg\neg P \vee Q$$
$$\stackrel{val}{=\!=} \quad \{\text{ Double négation }\}$$
$$P \vee Q$$

Peut-on conclure?

$$\neg P \Rightarrow Q \stackrel{val}{=\!=} P \vee Q \ ?$$

OUI !

- Autres équivalences fondamentales

1. (**Réflexivité :**) $P \stackrel{val}{=\!=} P$
2. (**Symétrie :**) **Si** $P \stackrel{val}{=\!=} Q$, **alors** $Q \stackrel{val}{=\!=} P$
3. (**Transitivité :**) **Si** $P \stackrel{val}{=\!=} Q$ **et** $Q \stackrel{val}{=\!=} R$, **alors** $P \stackrel{val}{=\!=} R$

Substitution

Le remplacement de toutes les occurrences d'une "lettre" par une formule

Exemple :

Si nous remplaçons $Q \wedge P$ pour P dans l'équivalence valide

$$P \Rightarrow Q \stackrel{val}{=\!=} \neg P \vee Q \ ,$$

alors nous obtenons l'équivalence valide :

$$(Q \wedge P) \Rightarrow Q \stackrel{val}{=\!=} \neg(Q \wedge P) \vee Q \ .$$

- Ce serait le cas pour toute substitution de Q
- Ou pour P et Q simultanément

La substitution préserve l'équivalence

Règle de Leibniz

Le remplacement d'une sous-formule par une sous-formule équivalente

Exemple

A partir de l'équivalence valide

$$P \Rightarrow Q \overset{val}{=\!=} \neg P \vee Q$$

nous pouvons créer de nouvelles équivalences valides en remplaçant $P \Rightarrow Q$ dans une formule complexe par $\neg P \vee Q$, par exemple

$$(\neg P \wedge (P \Rightarrow Q)) \vee R \overset{val}{=\!=} (\neg P \wedge (\neg P \vee Q)) \vee R$$

Prouver les tautologies (Exemple 1)

- Prouver par un calcul que $\neg(P \wedge \neg P)$ est une tautologie
- Solution:

$$
\begin{aligned}
& \neg(P \wedge \neg P) \\
\overset{val}{=\!=} \quad & \{\text{Loi de Morgan}\} \\
& \neg P \vee \neg\neg P \\
\overset{val}{=\!=} \quad & \{\ \text{Double négation}\ \} \\
& P \vee \neg P \\
\overset{val}{=\!=} \quad & \{\ \text{Milieu exclu}\ \} \\
& \textbf{Vrai}
\end{aligned}
$$

$$\neg(P \wedge Q) \overset{val}{=\!=} \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg\neg P \overset{val}{=\!=} P$$

$$P \vee \neg P \overset{val}{=\!=} \text{Vrai}$$

- Alors $\neg(P \wedge \neg P)$ est une tautologie

Prouver les tautologies (exemple 2)

- Prouver par un calcul que $\neg(Q \rightarrow R) \leftrightarrow (\neg R \wedge Q)$ est une tautologie
- Solution:
  - Tout d'abord, nous établissons, à l'aide d'un calcul, que $\neg(Q \rightarrow R) \overset{val}{=\!=} (\neg R \wedge Q)$

$$\neg(Q \Rightarrow R)$$

$$\overset{val}{=\!=} \quad \{\ \text{Implication}\ \}$$

Avec la loi de Leibniz

$$\neg(\neg Q \vee R)$$

$$\overset{val}{=\!=} \quad \{\text{Loi de Morgan}\}$$

Avec la loi de substitution

$$\neg\neg Q \wedge \neg R$$

$$\overset{val}{=\!=} \quad \{\ \text{Double négation}\ \}$$

$$\neg R \wedge Q$$

$$P \Rightarrow Q \overset{val}{=\!=} \neg P \vee Q$$

$$\neg(P \wedge Q) \overset{val}{=\!=} \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg\neg P \overset{val}{=\!=} P$$

De $\neg(Q \Rightarrow R) \overset{val}{=\!=} \neg R \wedge Q$ il s'ensuit que $\neg(Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow (\neg R \wedge Q)$ est une tautologie

Résumé de la représentation de la logique propositionnelle

1. Le langage de la logique (en tant que représentation)
   - Propositions atomiques
     - NB : Symboles ayant une signification fixe (ce ne sont pas des "variables")
2. Les connecteurs et la façon dont ils transforment la véracité d'une phrase propositionnelle
3. Les tables de vérité, les tautologies et les contradictions sont des concepts importants pour résumer la vérité et la fausseté d'une phrase propositionnelle.
     - Nous traitons ici des phrases propositionnelles uniques à la fois.
4. Équivalence - comprendre quand des propositions distinctes signifient la même chose (et pourraient être échangées l'une contre l'autre)
     - Comment l'équivalence peut-elle être utilisée (par exemple pour prouver une tautologie) ?

Travail pratique 2

- **Objectifs :**

  - Logique propositionnelle et logique du premier ordre
    - S'entraîner à travailler avec la syntaxe et la sémantique de la logique
    - S'entraîner à manipuler des expressions logiques de manière "algébrique".
    - Appliquer la logique pour faire des déductions et déterminer la "vérité".
    - Comprendre deux des approches d'inférences les plus simples sur lesquelles nous nous concentrerons principalement dans ce cours :
      - Le chaînage avant
      - Le chaînage arrière

Au contraire, poursuivit Tweedledee, si c'était ainsi, cela pourrait être ; et si c'était ainsi, cela serait ; mais comme ce n'est pas le cas, cela ne l'est pas. C'est la logique.

- LEWIS CARROLL -