Logique du premier ordre : Représentation

Dr. NSENGE MPIA HERITIER, Ph.D

Précédemment

- Logique propositionnelle (raisonnement) :
  - Conséquence logique
  - Arguments
  - Règles d'inférence
  - Raisonnement déductif à partir d'une base de connaissances

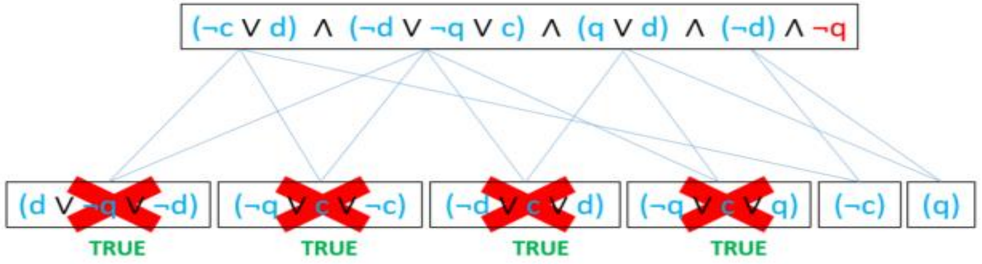
$\models$

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \therefore q \end{array}$$

Modus Ponens

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Resolution

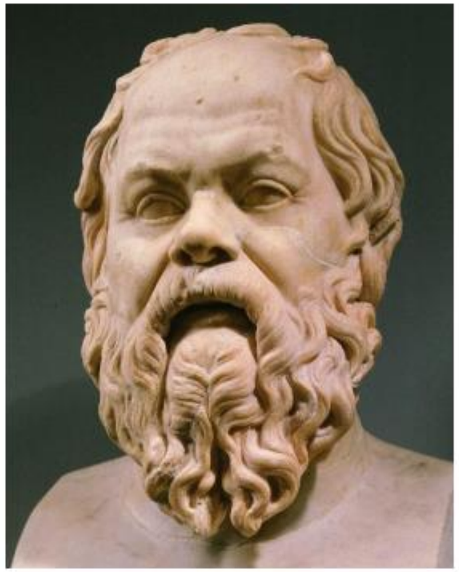


Plan de cette leçon

- Qu'est-ce que la logique des prédicats ?
- Syntaxe de la logique des prédicats
- Équivalence de la logique des prédicats
- Sémantique de la logique des prédicats

Qu'est-ce que la logique des prédicats ?

L'argument de Socrate



Tous les hommes sont mortels

Socrate est un homme

Donc, Socrate est mortel

Ecrit en logique propositionnelle →

$$\begin{array}{r} p \\ q \\ \therefore\ r \end{array}$$

Est-ce que cela a un sens ?

- La validité de cet argument provient de la structure interne de ces phrases, que la *logique propositionnelle* ne peut pas voir (indivisible).

Le problème de la logique propositionnelle

- Il n'est pas possible d'écrire des énoncés généraux sous forme de propositions
  - "Mbuyi mange tout ce qu'il aime"
- Cela nécessiterait une énumération de propositions :
  - "Mbuyi mange ce qu'il aime"
  - "Mbuyi aime les gâteaux", "Mbuyi aime les bananes", "Mbuyi aime le chien"...
- Argument de Socrate :
  - Serait-il pratique d'énumérer toutes les personnes qui sont mortelles ?

Que faut-il faire alors?

- Nous devons diviser l'atome

- Affichez la structure interne de ces phrases "atomiques" en ajoutant de nouvelles catégories de vocabulaire

- Rendre compte sémantiquement de ces nouveaux éléments de vocabulaire

- Introduire des règles d'utilisation

Pourquoi la logique des prédicats du premier ordre ?

- Flexibilité et concision

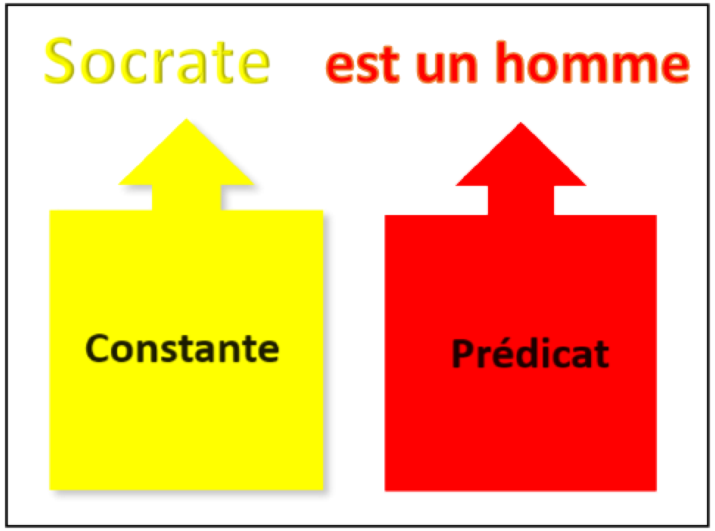
- La logique des prédicats permet de faire des énoncés généraux

- Plutôt que d'avoir des propositions simples et concrètes :
  - La logique des prédicats permet des propositions conditionnelles et collectives:
    - Enoncés d'existence et énoncés de nombre

- Important pour traiter des problèmes et des environnements plus complexes

Logique des prédicats du premier ordre

- **Aussi connue comme**: Logique des prédicats, logique du premier ordre (LPO), logique quantificative, calcul des prédicats du premier ordre
- Abstraction de la logique propositionnelle
- Nécessite une syntaxe supplémentaire
  - Constantes
  - Variables
  - Prédicats
  - Fonctions
  - Égalité
  - Quantificateurs



- La logique syllogistique, c'est comme apprendre à compter
- La logique propositionnelle, c'est comme apprendre à faire de l'arithmétique de base
- La logique des prédicats est comme l'apprentissage de l'algèbre
- Ils constituent une élaboration progressive

Premier ordre

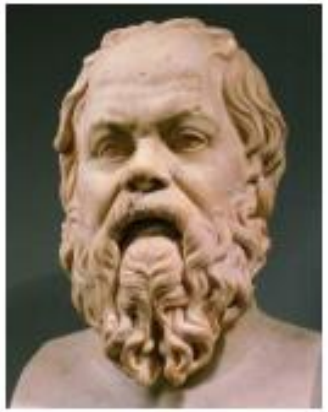
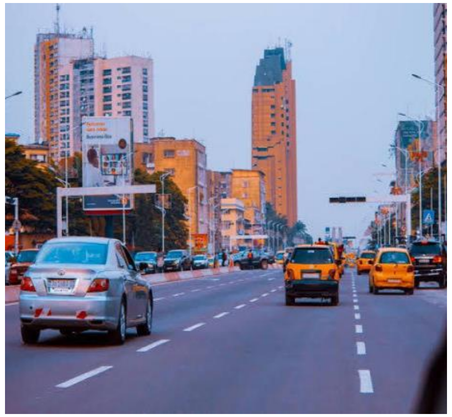
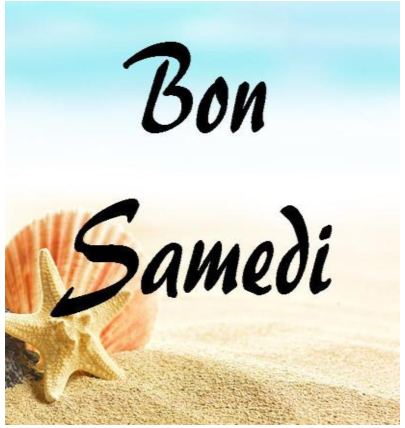
- Distingue la logique du premier ordre de la logique d'ordre supérieur :
  - Premier ordre : (plus simple)
    - Les prédicats quantifient des objets ou des choses (fonctionnent avec un ensemble).
  - Ordre supérieur : (plus complexe)
    - Les quantificateurs peuvent se référer à des prédicats ou à des fonctions.
    - Les prédicats peuvent avoir des prédicats ou des fonctions imbriqués (ensembles d'ensembles).

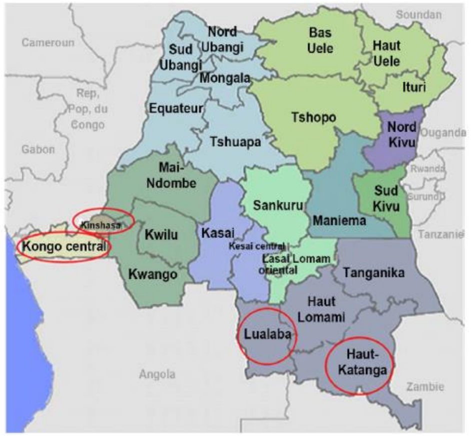
Syntaxe de la logique des prédicats

Les constantes individuelles

Sont des noms propres invariables, c'est-à-dire que leur valeur/sens ne change pas.

- Représenter des objets : personnes, lieux, choses, temps...
  - Ex : Nsenge, Socrates, Kinshasa, samedi, gâteau, RDC
- Peut être représenté par la plupart des symboles (comme une proposition) :
  - Certaines conventions utilisent des lettres minuscules (par exemple a, b, c,...u, v, w).
  - Pour une interprétation naturelle, on peut utiliser le nom propre original.
- Les symboles de vérité (V & F) sont conservés de la logique propositionnelle.

Variables

Ce sont des symboles qui représentent un individu dans une collection ou un ensemble.

- Par exemple, la variable *x* peut représenter l'un des jours suivants
  - x = lundi, x = mardi, ...
- Normalement, on utilise les lettres de la fin de l'alphabet telles que x, y, z.
- Une collection d'objets est appelée domaine d'objets.
- Dans l'exemple ci-dessus, les jours de la semaine constituent le domaine de la variable ***x***

Prédicats

- **Aussi connue comme**: *fonctions propositionnelles*, *expressions de fonctions*

- Enoncé verbal qui décrit :
  - la propriété d'un individu (constante ou variable)
    - Par exemple : "__ est un être humain".
  - La relation entre les individus
    - Par exemple : "__ le professeur de __".
    - "__ est entre __ et __".
  - Renvoie une valeur booléenne : Vrai ou Faux.
  - Peut être représenté par la plupart des symboles :
    - Pour une interprétation naturelle, on peut utiliser le nom propre original.
    - Certaines conventions utilisent des lettres majuscules (par exemple A, B, C,...U, V, W).
- Phrases atomiques :
  - "Mbuyi aime le chocolat" représenté comme :
    - aime(Mbuyi, chocolat)
  - "Mbuyi aime tous les aliments" représenté par :
    - aime(Mbuyi, x) *où x est une variable du domaine "nourriture"*.

Énoncés en logique des prédicats

- Sont construites (comme dans la logique propositionnelle)
  - En combinant des phrases atomiques avec des connecteurs logiques
    - Conjonction (∧) : ET
    - Disjonction (∨) : OU
    - Négation (¬) : NON
    - Implication (→) : SI … ALORS
    - Équivalence (↔) : SI ET SEULEMENT SI
- Exemples :
  - "Si Merveille est amie avec Héritier, alors elle l'aime bien".
    - ami(merveille,héritier) → aime(merveille,héritier)
  - "Merveille aime Héritier ou le chocolat".
    - aime(merveille,héritier) ∨ aime(merveille,chocolat)
  - "Merveille n'aime ni la pluie ni la chaleur".
    - ¬aime(merveille,pluie) ∧ ¬aime(merveille,chaleur)

Fonctions

- Rappelons que les constantes sont des objets "fixes".
  - Il n'est pas toujours concis d'énumérer les constantes pour chaque objet

Les fonctions sont similaires (à première vue) aux prédicats mais *permettent de faire correspondre des termes à d'autres termes* (c'est-à-dire qu'elles ne renvoient pas de vérité)

- Exemples :
  - Fonction mathématique : $p(x) \rightarrow x^2$
    - Toute valeur de *x* est élevée au carré
  - Objet : JambeGauche(Kalala)
    - Interprété comme "la jambe gauche de Kalala"
    - Plutôt que de spécifier un nom constant pour la jambe gauche de Kalala

Quantificateurs

Un opérateur permettant des énoncés plus généraux qui indiquent combien d'objets ont une certaine propriété.

- Deux types de quantificateurs :
  - Quantificateur universel : représenté par ∀, "pour tous", "pour chacun", "pour chaque" ou "pour n'importe quel"
    - L'implication est le connecteur principal
      - Par exemple : "Mbuyi mange tout ce qu'il aime".
        - $\forall x(aime(Mbuyi,x) \rightarrow mange(Mbuyi,x))$
  - Quantificateur existentiel : représenté par ∃, "pour certains", "il existe", "il y a un", ou "pour au moins un".
    - La conjonction est le connecteur principal
      - Par exemple : "Il existe un oiseau qui ne vole pas".
        - $\exists x(oiseau(x) \land \neg vole(x))$
      - Par exemple : "Chaque personne a quelque chose qu'elle aime".
        - $\forall x(personne(x) \rightarrow \exists y\ aime(x,y))$

Les quantificateurs : Erreurs courantes

- Utilisation de ∧ comme *connecteur principal* avec ∀ :

$$\forall x(aime(Mbuyi,x) \wedge mange(Mbuyi,x))$$

  - Qui se traduit par : "Mbuyi aime tout et mange tout".
  - Ce qui était voulu: "Mbuyi mange tout ce qu'il aime".

- Utilisation de → comme *connecteur principal* avec ∃ :

$$\exists x(oiseau(x) \rightarrow \neg vole(x))$$

  - Traduction très difficile, mais cette énoncé n'est vrai que s'il y a autre chose qu'un oiseau
  - Ce qui était voulu : "Il existe un oiseau qui ne vole pas".

Prédicats unaires, binaires,... N-aires

- Prédicats unaires :
  - Impliquant les propriétés d'une seule variable

$$\forall x\ (maison(x) \rightarrow objet\_physique(x))$$

- "Chaque maison est un objet physique"

- Prédicat binaire :
  - Impliquant les propriétés de deux variables

$$\forall x,y\ (Frère(x,y) \rightarrow Fratrie(x,y))$$

- "Les frères sont une fratrie"

- Les prédicats ternaires et n-aires sont également possibles

Phrases avec des quantificateurs

- Les frères sont des fratries

$$\forall x,y\ (Frère(x,y) \rightarrow Fratrie(x,y))$$

- Le terme "fratrie" est symétrique

$$\forall x,y\ (Fratrie(x,y) \leftrightarrow Fatrie(y,x))$$

- La mère est le parent féminin de quelqu'un
  - c'est-à-dire définir la mère en termes de filiation

$$\forall x,y\ (Mère(x,y) \leftrightarrow (Feminin(x) \land Parent(x,y)))$$

- Un cousin germain est l'enfant d'un frère ou d'une sœur d'un parent.
  - c'est-à-dire la définition du "cousin germain" en termes de filiation et de fratrie

$$\forall x,y\ (CousinGermain(x,y) \leftrightarrow \exists p,ff\ Parent(p,x) \land Fatrie(ff,p) \land Parent(ff,y))$$

Portée d'une variable dans une expression

- La portée d'une variable *est la phrase à laquelle le quantificateur s'applique syntaxiquement*.
- Exemples:
  - $\exists x\ (Chat(x) \wedge \forall x(Noir\ (x)))$
    - Le x dans Noir(x) est universellement quantifié, mais ailleurs il ne l'est pas
  - "Il existe un chat qui est tout noir"

  - $\forall x\ ((\exists y)(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \rightarrow R(x))$
    - La portée de $\forall x$ est l'expression entière
    - La portée de $\exists y$ est $(P(x,y) \vee Q(x,y))$

  - $\forall x\ (P(x,y) \rightarrow (\exists y)\ Q(x,y))$
    - La portée de $\forall x$ est l'expression entière
    - La portée de y n'est pas définie pour P(x,y), y est donc une variable libre.

Variables liées et variables libres

- Les variables sont liées ou libres en *fonction de leur lien avec un quantificateur*
- *Variable liée :* une variable qui est comprise dans la portée d'un quantificateur.
  - Les variables peuvent se voir attribuer des valeurs spécifiques (en tant que constantes) ou peuvent être contraintes par des quantificateurs.
  - $\forall x\ (A(x) \rightarrow B(x))$
  - x est lié par $\forall$
  - Une formule (fbf) *sans variables libres* est appelée formule fermée, phrase ou proposition, et a une valeur de vérité.
- *Variable libre* : toute variable qui n'est pas liée à un quantificateur.
  - Pour évaluer la formule, la variable libre doit être remplacée par un objet/une valeur.
  - $\forall x((\exists y\ A(x,y)) \rightarrow B(z))$ N.B: z est une variable libre
  - Une telle expression est simplement une formule

Formules fondamentale (de base) et formules fermées

- Formule de base
  - Une formule F est fondamentale si elle ne contient pas de variables
  - Exemple :
    - Poisson (Tilapia)
    - Qui signifie: Tilapia est un poisson
- Formule fermée
  - Une formule F est fermée si elle ne contient pas de variables libres
  - Exemples :
    - $\forall x\ (P(x) \rightarrow G(x))$(c'est exemple est une formule fermée car il ne contient aucune variable libre, mais pas de base car il contient des variables)
    - $\forall x(P(x) \rightarrow G(y, x))$
      - (c'est exemple n'est pas une formule fermée, est n'est pas de base car il contient la variable libre y)

Négation de la quatification

- Attention à la manière de traduire les négations de la quantification
- La *négation d'une quantification universelle* devient *une quantification existentielle*, et vice versa.
- "Tout est beau" $\forall x\, P(x)$
- "Tout n'est pas beau" $\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$
  - "Il y a au moins quelque chose qui n'est pas beau".
- "Ce n'est pas parce qu'une chose est belle qu'elle l'est". $\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$
  - "Tout n'est pas beau"
  - "Rien n'est beau"

De Morgan:

$$\neg(P \wedge Q) \overset{val}{=\!=} \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) \overset{val}{=\!=} \neg P \wedge \neg Q$$

Unicité de la quantification

- Il arrive que l'on veuille dire qu'il existe un seul objet, unique, qui satisfait à une certaine condition (c'est-à-dire un seul).
- "*Il existe un unique x tel que roi(x) est vrai*".
  - Comment cela est-il possible avec nos opérateurs et connecteurs existants ?
    - $\exists x\ roi(x) \wedge \forall y(roi(y) \rightarrow x=y)$
    - $\exists x\ roi(x) \wedge \neg\exists y\ (roi(y) \wedge x \neq y)$
    - Les expressions ci-haut (qui sont disent une même chose) peuvent être écrites avec un quantificateur unique
  - Comment cela se fait-il avec une quantification de l'unicité ?
    - $\exists!x\ roi(x)$ N.B: Il existe un x où x est roi. ($\exists!$: un et un seul)
- "*Chaque pays a un seul dirigeant*"
  - $\forall p\ (pays(p) \rightarrow \exists!d\ dirigeant(p,d))$
- Opérateur iota : "ι x P(x)" signifie "l'unique x tel que p(x) est vrai"
  - "L'unique dirigeant du Congo est mort"
  - mort(ι x dirigeant(Congo,x))

Égalité (=)

- Ce n'est pas strictement la même chose que l'équivalence
- (=) vs (≡)
- L'égalité indique que deux termes se réfèrent aux mêmes objets
- Exemples :
  - Considérons la fonction : Père(Jean)
    - père(Jean) = Henri
    - Cette fonction fait référence au même objet que la constante Henry
  - $\exists x,y\ (Frère(x,Richard) \land Frère(y,Richard) \land \neg(x=y))$
    - "Richard a au moins deux frères"

Priorité

- Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ ont une priorité plus élevée que tous les opérateurs logiques du calcul propositionnel.
  - Puis d'autres connecteurs comme dans la logique des prédicats
  - Comme dans la logique propositionnelle, utiliser des parenthèses pour désambiguïser

Opérateur	Priorité
$\neg$	1
$\wedge$ $\vee$	2 3
$\rightarrow$ $\leftrightarrow$	4 5

Exemples de pratiques de traduction

- "Tout jardinier aime le soleil".

  $\forall x\ (jardinier(x) \rightarrow aime(x, Soleil))$

- "On peut tromper une partie de la population tout le temps".

  $\forall x\ \exists y\ (personne(x) \rightarrow temps(y) \land tromper(x,y))$
  $\forall x\ (personne(x) \rightarrow \exists y\ (temps(y) \land tromper(x,y)))$

  Equivalent

- "Tous les champignons violets sont toxiques".

  $\forall x\ (champignon(x) \land violet(x)) \rightarrow toxique(x)$

- "Aucun champignon violet n'est toxique".

  $\neg\exists x\ (violet(x) \land champignon(x) \land toxique(x))$
  $\forall x\ ((champignon(x) \land violet(x)) \rightarrow \neg toxique(x))$

  Equivalent

- "Il y a exactement deux champignons violets".

  $\exists x\ \exists y\ (champignon(x) \land violet(x) \land champignon(y) \land violet(y) \land \neg(x=y) \land \forall z\ (champignon(z) \land violet(z)) \rightarrow ((x=z) \lor (y=z)))$

- "Kabila n’est pas élancé".

  $\neg élancé(Kabila)$

Equivalence dans la logique des prédicats

Revenir à l'équivalence

- Toutes les équivalences logiques définies dans la logique propositionnelle restent valables dans la logique du premier ordre.

Distributivité :
$P \wedge (Q \vee R) \overset{val}{=\!=} (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),$
$P \vee (Q \wedge R) \overset{val}{=\!=} (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Inversion:
$\neg$ Vrai $\overset{val}{=\!=}$ Faux,
$\neg$ Faux $\overset{val}{=\!=}$ Vrai

Contradiction:
$P \wedge \neg P \overset{val}{=\!=}$ Faux

Milieu exclu :
$P \vee \neg P \overset{val}{=\!=}$ Vrai

Bi-implication:
$P \Leftrightarrow Q \overset{val}{=\!=} (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

Double négation :
$\neg\neg P \overset{val}{=\!=} P$

Négation :
$\neg P \overset{val}{=\!=} P \Rightarrow$ Faux

Associativité :
$(P \wedge Q) \wedge R \overset{val}{=\!=} P \wedge (Q \wedge R),$
$(P \vee Q) \vee R \overset{val}{=\!=} P \vee (Q \vee R),$
$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R \overset{val}{=\!=} P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R)$

De Morgan:
$\neg(P \wedge Q) \overset{val}{=\!=} \neg P \vee \neg Q,$
$\neg(P \vee Q) \overset{val}{=\!=} \neg P \wedge \neg Q$

Implication:
$P \Rightarrow Q \overset{val}{=\!=} \neg P \vee Q$

Contraposition:
$P \Rightarrow Q \overset{val}{=\!=} \neg Q \Rightarrow \neg P$

Auto-équivalence :
$P \Leftrightarrow P \overset{val}{=\!=}$ Vrai

Vrai/Faux-élimination :
$P \wedge$ Vrai $\overset{val}{=\!=} P,$
$P \wedge$ Faux $\overset{val}{=\!=}$ Faux,
$P \vee$ Vrai $\overset{val}{=\!=}$ Vrai,
$P \vee$ Faux $\overset{val}{=\!=} P$

Commutativité :
$P \wedge Q \overset{val}{=\!=} Q \wedge P,$
$P \vee Q \overset{val}{=\!=} Q \vee P,$
$P \Leftrightarrow Q \overset{val}{=\!=} Q \Leftrightarrow P$

Idempotence:
$P \wedge P \overset{val}{=\!=} P,$
$P \vee P \overset{val}{=\!=} P$

Lois de l'absorption :
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

- Cependant, il existe des règles supplémentaires pour les formules contenant des quantificateurs

L'équivalence dans la logique du premier ordre

- Les énoncés impliquant des prédicats et des quantificateurs sont logiquement équivalents *si et seulement s'ils* ont la même valeur de vérité, quel que soit le quantificateur :
  - Les prédicats sont substitués dans ces énoncés
  - Le domaine du discours est utilisé pour les variables dans ces fonctions propositionnelles
- En appliquant les équivalences propositionnelles précédentes
  - En dehors d'une fonction propositionnelle avec quantificateur :

$$\neg\neg(\forall x\, A(x)) \equiv (\forall x\, A(x))$$

  - A l'intérieur de la portée d'un quantificateur :

$$\forall x\, (\neg\neg P(x)) \equiv \forall x\, (P(x))$$

Double Negation:
$\neg\neg P \stackrel{val}{=\!=} P$

$$\forall x \exists y\, (A(x) \rightarrow B(y)) \equiv \forall x \exists y\, (\neg B(y) \rightarrow \neg A(x))$$

Contraposition:
$P \Rightarrow Q \stackrel{val}{=\!=} \neg Q \Rightarrow \neg P$

- Mais attention à ne pas faire trop de suppositions
  - Vérifiez d'abord les règles d'équivalence !

Équivalences de base avec les quantificateurs

- Les formules sont logiquement équivalentes si elles diffèrent par :
  - Le nom des variables dans la portée des quantificateurs
    - $\forall x\, P(x) \equiv \forall y\, P(y)$
  - L'ajout ou l'élimination de quantificateurs dont la variable n'apparaît pas dans leur champ d'application.
    - $\forall x\, P(x) \equiv P(y)$
  - L'ordre des quantificateurs de même nature (quantificateurs imbriqués)
    - $\forall x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall y \forall x\, P(x,y) \equiv \forall y,x\, P(x,y)$

Équivalence des quantificateurs imbriqués

- $\forall x \forall y\ P(x,y) \equiv \forall y \forall x\ P(x,y)$
  - $\forall x\ \forall y$ Aime(x,y) ≡ $\forall y\ \forall x$ Aime(x,y)
    - "Tout le monde dans le monde aime tout le monde dans le monde«
- $\exists x \exists y\ P(x,y) \equiv \exists y \exists x\ P(x,y)$
  - $\exists x\ \exists y$ Aime(x,y) ≡ $\exists y\ \exists x$ Aime(x,y)
    - "Au moins une personne dans le monde aime au moins une autre personne dans le monde"
- $\forall x \exists y\ P(x,y)$ **n'est pas la même chose que** $\forall y \exists x\ P(x,y)$
  - $\forall x\ \exists y$ Aime(x,y)
    - "Tout le monde dans le monde aime au moins une personne"
  - $\forall y\ \exists x$ Aime(x,y)
    - "Au moins une personne aime tout le monde dans le monde"

Équivalence de la quatification négative

- Nous avons vu les deux premières plus tôt...

De Morgan:

$\neg(P \wedge Q) \stackrel{val}{=\!=} \neg P \vee \neg Q$

$\neg(P \vee Q) \stackrel{val}{=\!=} \neg P \wedge \neg Q$

- D'après les lois De Morgan :
  - $\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$ "Quelqu'un n'aime pas Mbuyi"
  - $\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$ " Tout le monde n'aime pas Mbuyi"

- Egalités connexes:
  - $\forall x\, \neg P(x) \equiv \neg\exists x\, P(x)$ "Personne n'aime Mbuyi"
  - $\forall x\, P(x) \equiv \neg\exists x\, \neg P(x)$ "Tout le monde n'aime pas Mbuyi"
  - $\exists x\, P(x) \equiv \neg\forall x\, \neg P(x)$ "Quelqu'un aime Mbuyi"

Autres équivalences avec des quantificateurs

- Conjonctions triviales
  - $\forall x\,(P(x) \land Q(x)) \equiv \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$
    - "Toutes les choses sont et ont été"
  - $\exists x\,(P(x) \lor Q(x)) \equiv \exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$
    - "Certaines choses sont ou étaient"
- Toutefois
  - $\forall x\,(P(x) \lor Q(x)) \not\equiv \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$
  - $\exists x\,(P(x) \land Q(x)) \not\equiv \exists x P(x) \land \exists x Q(x)$

Sémantique de la logique des prédicats

Interprétation vs modèle

- Une interprétation spécifie/attribue/instancie la signification et les valeurs de la signature d'une formule compte tenu d'un domaine

- La signature inclut tous les symboles non logiques
  - les prédicats
  - les constantes
  - les fonctions

- Il en résulte une proposition avec une valeur de vérité correspondante

- Un modèle est une interprétation qui satisfait à une phrase

Domaine des variables de prédicats

- Le domaine (υ) est l'ensemble de toutes les valeurs possibles que la variable peut prendre
  - Par exemple, $\upsilon = \{1,2,3,4\}$ ...ou... $\upsilon = \{\mathbb{R}\}$ (c'est-à-dire tous les nombres réels)
  - Chaque variable de prédicat peut avoir différents domaines

- Exemple :
  - Soit le Prédicat P(x, y) = "x > y"
  - υ = {tous les entiers}
  - Instancié :
    - P(4, 3) signifie "4 >3", donc VRAI
    - P(1, 2) signifie "1>2", donc FAUX
- On peut définir explicitement le domaine dans une formule :
  - i.e. Quantification conditionnelle
  - $(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x)$
  - c'est-à-dire que le domaine est l'ensemble de tous les nombres réels
- Un prédicat instancié est une proposition
  - Lorsque les variables sont évaluées avec des valeurs spécifiques

Ensembles

- Un ensemble { } est une collection bien définie d'objets

- Les éléments d'un ensemble, c'est-à-dire ses membres, peuvent être n'importe quoi :
  - des nombres, des personnes, des lettres de l'alphabet, d'autres ensembles, etc.

- Les ensembles A et B sont égaux si et seulement 'ils ont exactement les mêmes éléments.

- Les ensembles sont des "objets abstraits" :
  - Ils n'occupent ni le temps ni l'espace, et n'ont pas de pouvoir causal même si leurs membres l’ont

Substitution

- Remplacement de la signature d'une formule par des objets ou des valeurs du domaine

- Partie importante de la détermination de la vérité de la formule, nécessaire pour l'inférence dans la logique du premier ordre
- Exemple :
  - $\forall x$ (Poisson(x) → Nager(x)), Poisson(Tilapia)
  - Pour déterminer si Tilapia peut nager, nous devons remplacer chaque occurrence de la variable x dans l'implication par le terme Tilapia (un objet du monde réel).
  - $\forall x$ (Poisson(Tilapia) → Nager(Tilapia))
  - Nous pouvons maintenant évaluer la vérité
- Formellement, la substitution a lieu à l'intérieur de chaque phrase atomique
  - Ne s'applique qu'aux variables libres à l'intérieur de chaque phrase atomique
    - Ne pas tenir compte des liaisons de la phrase dans son ensemble pour déterminer les "variables libres" ici.
  - La substitution est formellement dénotée ici par : Poisson[Tilapia/x]

Les quantificateurs comme conjonctions/disjonctions

- Si le domaine est fini, alors :
  - Les quantificateurs universels/existentiels peuvent être exprimés par des conjonctions/disjonctions
- Si le domaine υ = {1,2,3,4}, alors...
  - $\forall x$ P(x) = P(1) ∧ P(2) ∧ P(3) ∧ P(4)
  - $\exists x$ P(x) = P(1) ∨ P(2) ∨ P(3) ∨ P(4)
- Si les domaines sont infinis, les expressions équivalentes sans quantificateurs seront infiniment longues
- Utile lors de l'examen de la véracité d'une phrase
  - Considérons : P(x) = x^2 < 10

Satisfaisabilité des phrases

- Une phrase du calcul des prédicats est satisfaisable ssi elle est vraie pour :
  - un certain domaine
  - certaine fonction propositionnelle substituée aux prédicats dans la phrase

- Un élément (par exemple x) qui rend une phrase fausse est appelé un contre-exemple

- Exemple de satisfaisabilité:
  - $\forall x \, \exists y \, P(x,y)$

- Exemple insatisfaisabilité/inconsistant (pas de modèle) :
  - $\forall x \, (P(x) \land \neg P(x))$
    - Ne peut jamais être vrai

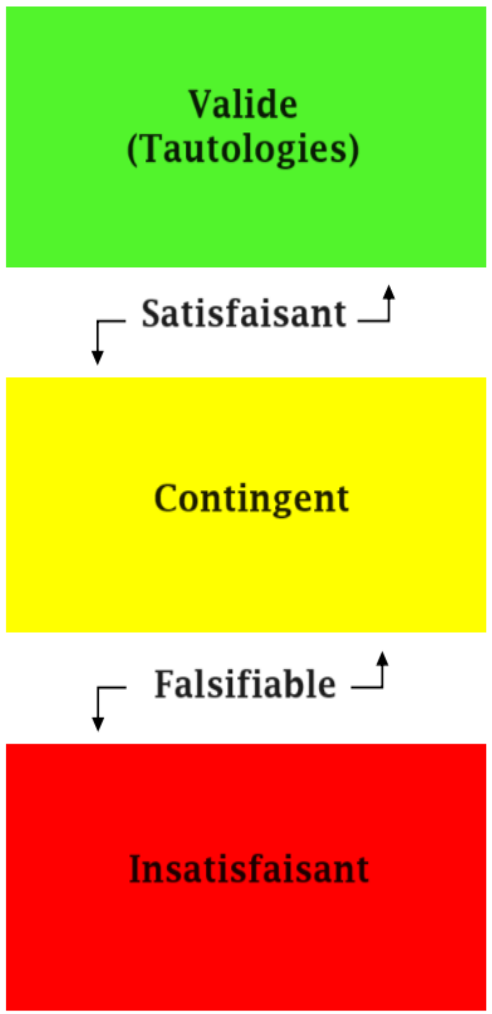
Validité de la phrase

- Une phrase du calcul des prédicats est valide si elle est vraie dans toutes les interprétations.

- **ssi** c'est vrai pour
  - tous les domaines
  - Chaque fonction propositionnelle substituée aux prédicats dans la phrase
- Elle est vraie pour toutes les lignes de la table de vérité

- Les phrases valides en logique des prédicats jouent un rôle similaire à celui des tautologies en logique propositionnelle.
  - Cependant, on parle de validité de premier ordre.

Propriétés des propositions abstraites



- Chaque interprétation est satisfaite (c'est-à-dire vraie)
- Certaines interprétations le satisfont, mais pas d'autres
- Aucune interprétation n'est satisfaite

La tautologie en logique propositionnelle

- Une proposition abstraite qui est toujours vraie

- Exemple :
  - Ce cours est facile et ce cours n'est pas facile

$$p \lor (\neg p) \equiv T$$

- La colonne de la table de vérité est toujours vraie
  - (0 = Faux, 1 = Vrai)

a	b	$b \Rightarrow a$	$a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Validité du premier (tautologie) ordre en logique des prédicats

- Une phrase de logique des prédicats du premier ordre est valide au premier ordre si elle est satisfaite pour chaque interprétation.

$$\forall x.P(x) \rightarrow \exists x.P(x);$$

$$\forall x.P(x) \rightarrow P(c);$$

$$P(c) \rightarrow \exists x.P(x);$$

$$\forall x(P(x) \leftrightarrow \neg\neg P(x));$$

$$\forall x(\neg(P_1(x) \wedge P_2(x)) \leftrightarrow (\neg P_1(x) \vee \neg P_2(x))).$$

La vérité dans les énoncés quantifiés

Enoncé	Quand c'est Vrai	Quand c'est faux
$\forall x \in D, P(x)$	$P(x)$ est vrai pour tout x	Il y a un x pour lequel $P(x)$ est faux
$\exists x \in D, P(x)$	Il y a un x pour lequel $P(x)$ est vrai	$P(x)$ est faux pour tout x

Table 1 Quantifications de deux variables		
Enoncé	**Quand c'est Vrai**	**Quand c'est faux**
$\forall x \forall y\ P(x, y)$ $\forall y \forall x\ P(x, y)$	$P(x, y)$ est vrai pour tout couple x, y	Il y a un couple x, y pour lequel $P(x, y)$ est faux
$\forall x \exists y\ P(x, y)$	Pour tout x, il existe un y pour lequel $P(x, y)$ est vrai	Il existe un x tel que $P(x, y)$ est faux pour tout y
$\exists x \forall y\ P(x, y)$	Il existe un x pour lequel $P(x, y)$ est vrai pour tout y	Pour tout x , il existe un y pour lequel $P(x, y)$ est faux
$\exists x \exists y\ P(x, y)$ $\exists y \exists x\ P(x, y)$	Il existe une coupe x, y pour lequel $P(x, y)$ est vraie	$P(x, y)$ est faux pour tout couple x, y

Comment déterminer la valeur de vérité ?

- Approches systématiques :

  - Méthode de l’exhaustivité

  - Méthode de cas

  - Méthode de dérivation logique

Méthode de l'exhaustivité

- Si le domaine contient un petit nombre d'éléments, on peut essayer de vérifier tous ces éléments

- Soit le domaine $D = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.
- $\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}, \boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}$ est-il vrai ou faux?
- **Preuve:**
  - $5^2 = 25 \neq 5;\ 6^2 = 36 \neq 6;\ 7^2 = 49 \neq 7;\ 8^2 = 64 \neq 8;\ 9^2 = 81 \neq 9$
  - Donc, c'est faux.

- **Limite de cette méthode**
  - Le domaine peut être trop grand pour essayer toutes les option
    - par exemple, tous les entiers

Méthode de cas

- **A savoir**: nous ne pouvons pas espérer faire une recherche exhaustive dans un domaine.
  - Exemples positifs pour prouver la quantification existentielle
  - Soit Z l'ensemble des entiers. $\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}$ est-il vrai ou faux?
    - Prenons $x = 0$ ou 1 et nous l'avons. Vrai.
  - Contre-exemple pour réfuter la quantification universelle
  - Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x}^2 > \boldsymbol{x}$ est-il vrai ou faux?
  - Prenons $x = 0.3$ comme contre-exemple. Faux

L'exemple positif n'est pas une preuve de la quantification universelle

L'exemple négatif n'est pas une réfutation de la quantification existentielle Ca peut être difficile de trouver des "cas" appropriés, même si de tels cas existent !

Méthode de dérivation logique

- Cette méthode consiste à utiliser des étapes logiques pour transformer une expression logique en une autre

- Considérons un domaine (arbitraire) avec n éléments,
- $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ est-il logiquement équivalent à $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$?

$$\exists x(P(x) \vee Q(x))$$

$$\equiv [P(x_1) \vee Q(x_1)] \vee \dots \vee [P(x_n) \vee Q(x_n)]$$

$$\equiv [P(x_1) \vee \dots \vee P(x_n)] \vee [Q(x_1) \vee \dots \vee Q(x_n)]$$

$$\equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

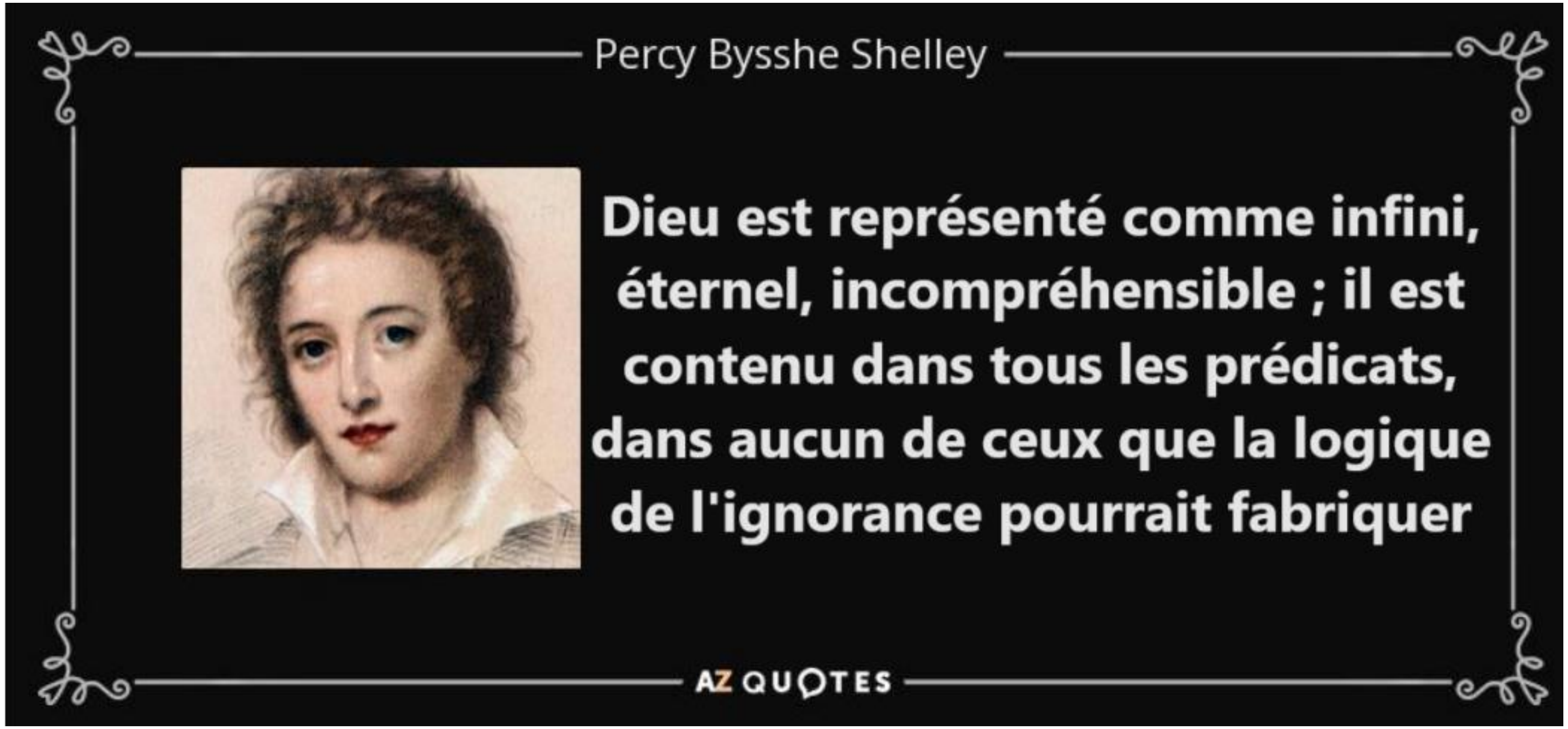
Indécidabilité de la satisfiabilité/validité

- Il n'existe pas d'algorithme (ni de programme informatique) permettant de déterminer si une phrase de la logique des prédicats du premier ordre est satisfaisable.
  - c'est-à-dire qui, pour une phrase d'entrée G, produit "Oui" si G est satisfaisable et "Non" si G n'est pas satisfaisable.

- De même, il n'existe pas de programme informatique qui décide si un programme informatique donné P s'arrête pour un nombre d'entrée n
  - Appelée indécidabilité du problème de l'arrêt

Résumé de la logique de prédicat de premier ordre (Représentation)

- Qu'est-ce que la logique des prédicats ?
- Syntaxe de la logique des prédicats
  - Constantes
  - Variables
  - Prédicats
  - Fonctions
  - Égalité
  - Quantificateurs
  - Variables liées et variables libres
  - Traduire un texte naturel en logique de premier ordre
- Équivalence de la logique des prédicats
  - En quoi l'équivalence diffère-t-elle entre la logique propositionnelle et la logique du premier ordre?
  - Focus sur les quantificateurs universels et existentiels
- Sémantique de la logique des prédicats
  - Interprétations et modèles
  - Satisfiabilité, validité et véracité
  - Comment déterminer la vérité en logique du premier ordre?


Percy Bysshe Shelley
Dieu est représenté comme infini, éternel, incompréhensible ; il est contenu dans tous les prédicats, dans aucun de ceux que la logique de l'ignorance pourrait fabriquer
AZ QUOTES

Travail pratique 2: Rappel

- **Objectifs :**
  - Logique propositionnelle et logique du premier ordre
    - S'entraîner à travailler avec la syntaxe et la sémantique de la logique
    - S'entraîner à manipuler des expressions logiques de manière "algébrique".
    - Appliquer la logique pour faire des déductions et déterminer la "vérité".
    - Comprendre deux des approches d'inférences les plus simples sur lesquelles nous nous concentrerons principalement dans ce cours :
      - Le chaînage avant
      - Le chaînage arrière