Les graphes

Terminale NSI - Lycée P. Méchain

Table des matières

1 Un peu d'histoire 1

2 Les graphes 2
- 2.1 Notion de graphe et représentation graphique 2
- 2.2 Graphe non orienté 2
- 2.3 Graphe orienté 2
- 2.4 Un peu de vocabulaire sur les graphes 3

3 Représentation des graphes en machine 4
- 3.1 Liste des successeurs 4
- 3.2 Liste des prédécesseurs 4
- 3.3 Matrice d'adjacence 5

4 Notion de chaîne, chemin, circuit et cycle 6

1 Un peu d'histoire

La théorie des graphes a pour père (ou l'un des pères) le mathématicien Euler qui a proposé pour la première fois la résolution d'un problème via l'utilisation d'un graphe.

Ce problème est celui des sept ponts de Königsberg.

Le but est de traverser la rivière en empruntant une et une seule fois les sept ponts qui la traversent. Euler a donc réussi à donner la solution à ce problème en utilisant les graphes.

Source : wikipedia

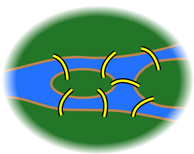


FIGURE 1 – Les 7 ponts de Königsberg

2 Les graphes

2.1 Notion de graphe et représentation graphique

Un graphe sera représenté par un ensemble de cercles (que l'on nommera **sommets**) reliés entre eux par des traits (que l'on nommera **arêtes**) ou par des flèches (que l'on nommera **arcs**).

Un graphe permet de décrire un ensemble d'objets et leurs relations.

Les objets correspondent aux **sommets** (aussi nommés **nœuds** parfois) et les liens correspondent aux **arêtes** ou aux **arcs**.

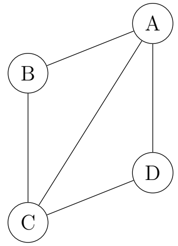


FIGURE 2 – Exemple de graphe de graphe dans lequel les sommets sont reliés par des arêtes

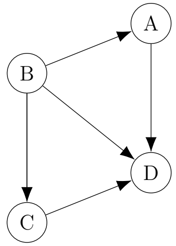


FIGURE 3 – Exemple de graphe dans lequel les sommets sont reliés par des arcs

2.2 Graphe non orienté

Lorsqu'on utilise des **arêtes** on parle de **graphes non orientés**. Un graphe non orienté va être composé de deux ensembles :

- un ensemble fini X de **sommets** ;
- un ensemble U **d'arêtes** reliant les sommets (couples non ordonnés de sommets).

On note le graphe *figure 2* mathématiquement $G = (X, U)$ avec :

- $X = A, B, C, D, E, F$;
- $U = (A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (C, D)$.

Remarque : les couples (A, B) et (B, A) représentent la même arrête. On dit que les sommets reliés par une arrête sont **adjacents**.

2.3 Graphe orienté

Lorsqu'on utilise des **arcs** on parle de **graphes orientés**. Un graphe orienté va être composé de deux ensembles :

- un ensemble fini X de **sommets** ;
- un ensemble U **d'arêtes** reliant les sommets (couples ordonnés de sommets).

On note le graphe *figure 3* mathématiquement $G = (X, U)$ avec :

- $X = A, B, C, D, E, F$;
- $U = (B, A), (A, D), (B, D), (B, C), (C, D)$.

Dans un arc (X_i, X_j) X_i est un prédécesseur de X_j et X_j est un successeur de X_i.
L'arc (X_i, X_j) X_i est **sortant** en X_i et **incident** en X_j.

2.4 Un peu de vocabulaire sur les graphes

• **Boucle** Une **boucle :** est une **arrête** qui relie un **sommet** à lui-même.

• **Ordre d'un graphe :** L'ordre d'un graphe est le **nombre de sommets** du graphe.

• **Degré d'un sommet :** On distingue le cas des graphes orientés et non orientés.

Dans un graphe non-orienté, le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet (une boucle comptant pour 2).

Dans un graphe non-orienté, le degré d'un sommet est la somme du degré sortant (c'est-à-dire le nombre d'arcs sortant du sommet) et du degré entrant (c'est-à-dire le nombre d'arcs dirigés vers le sommet).

• **Graphe complet :** Un graphe est dit complet si deux sommets quelconques distincts sont toujours adjacents. Ce qui signifie que tous les sommets sont reliés deux à deux par une arête.

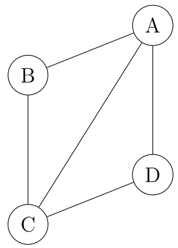
3 Représentation des graphes en machine

3.1 Liste des successeurs

Pour représenter un graphe en machine, il faut être capable de représenter pour chaque sommet s de notre graphe G, l'ensemble de ses successeurs.
On peut représenter le graphe à l'aide d'un tableau à une entrée dont chaque ligne est associée à un sommet et contient tous les successeurs du dit sommet.
En face de chaque sommet x, on inscrit la liste des différents sommets qui représentent l'extrémité terminale d'un arc, dont x est l'extrémité initiale.

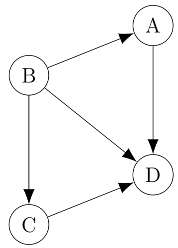
Exemples :

Liste des successeurs pour un graphe non orienté



Sommet	**Liste des successeurs**
A	B, C, D
B	A, C
C	A, B, D
D	A, C

Liste des successeurs pour un graphe orienté



Sommet	**Liste des successeurs**
A	D
B	A, C, D
C	D
D	

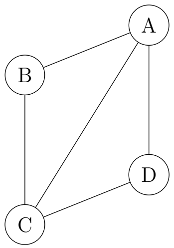
Remarque : on rencontre aussi parfois le terme : liste d'adjacence.

3.2 Liste des prédécesseurs

De manière analogue, on peut représenter le graphe à l'aide d'un tableau à une entrée dont chaque ligne est associée à un sommet et contient tous les prédécesseurs du dit sommet.
En face de chaque sommet x, on inscrit la liste des différents sommets qui représentent l'extrémité initiale d'un arc, dont x est l'extrémité terminale.

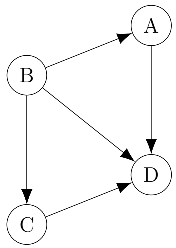
Exemples :

Liste des prédécesseurs pour un graphe non orienté



Sommet	**Liste des prédécesseurs**
A	B, C, D
B	A, C
C	A, B, D
D	A, C

Liste des prédécesseurs pour un graphe orienté



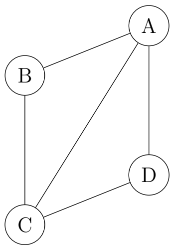
Sommet	**Liste des prédécesseurs**
A	B
B	
C	B
D	A, B, C

3.3 Matrice d'adjacence

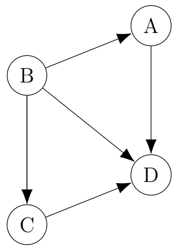
On appelle matrice d'adjacence associée à un graphe la matrice de booléens M de dimension $n \times n$, où n est l'ordre du graphe (nombre de sommets).
Le terme M_{ij} vaut 1 si les sommets et sont reliés par un arc et 0 sinon avec i et j variant de 1 à n.

Exemples :

Matrice d'adjacence pour un graphe non orienté



Matrice d'adjacence pour un graphe orienté



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque : Dans le cas d'un **graphe non orienté**, les coefficients M_{ij} et M_{ji} sont égaux pour tout i et tout j. La matrice d'adjacence est donc symétrique.

4 Notion de chaîne, chemin, circuit et cycle

Graphe non orienté : chaîne et cycle

- **Chaîne :** une chaîne est une suite d'arêtes dont chacune possède une extrémité commune avec l'arête précédente et l'autre commune avec la suivante ;
- **Chaîne élémentaire :** une chaîne élémentaire est une chaîne qui ne rencontre pas deux fois le même sommet ;
- **Cycle :** un cycle est une chaîne qui se referme sur elle-même ;
- **Cycle élémentaire :** un cycle est dit élémentaire si on ne rencontre pas deux fois le même sommet.

Graphe orienté : chemin et circuit

- **Chemin :** un chemin est une séquence d'arcs $(u_1, u_2, ...u_n)$ telle que l'extrémité de l'arc u_i coïncide avec l'extrémité initiale de l'arc suivant u_{i+1} pour i allant de 1 à $n-1$;
- **Chemin élémentaire :** un chemin élémentaire est un chemin qui ne rencontre pas deux fois le même sommet ;
- **Circuit :** un circuit est un chemin qui se referme, c'est à dire que l'extrémité terminale coïncide avec l'extrémité initiale.
- **Circuit élémentaire :** un circuit est dit élémentaire si on ne rencontre pas deux fois le même sommet.

Remarque

Les définitions applicables sur les graphes non orientés sont également applicables sur les graphes orientés. On considère dans ce cas les arcs comme de simples arêtes.