Вычисление расстояний

Расстояние между прямыми в пространстве

Правила пользования

- Пользователь должен ввести две прямые, заданных каноническими уравнениями.
- Значения коэффициентов в уравнениях должны быть целыми числами или числами с плавающие точкой (при вводе чисел с плавающей точкой использовать вместо точки **запятую**).
- После ввода двух прямых при нажатии на кнопку «Выполнить» калькулятор определяет расстояние между ними.

Теоретическая часть

Для определения взаимного положения прямых находится смешанное произведение направляющих векторов первой, второй прямых и вектора образованного точками, которые лежат на этих прямых (их получаем из канонических уравнений).

Пусть задана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ и пусть в этой системе координат заданы прямые L_1 и L_2:

$$L_1: \quad \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{p_1} = \frac{z-z_1}{l_1}. \qquad (1)$$

$$L_2: \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{p_2} = \frac{z-z_2}{l_2}, \qquad (2)$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ − точки, лежащие на прямых L_1 и L_2, а $q_1=\{m_1, p_1, l_1\}$ и $q_2=\{m_2, p_2, l_2\}$ − направляющие векторы прямых L_1 и L_2, соответственно.

Если смешанное произведение векторов равно нулю, то прямые **параллельны**, тогда расстояние между ними определяется следующим образом:

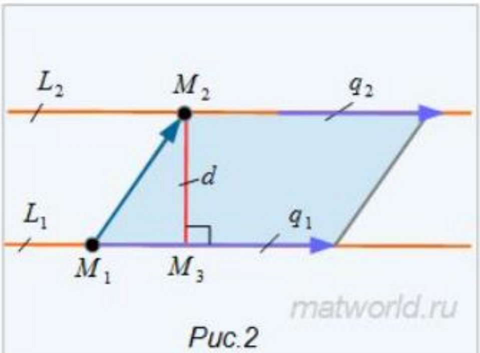

Рис.2

Вычислим координаты вектора $\overline{M_1M_2}$:

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$$

Вычислим векторное произведение векторов $\overline{M_1M_2}$ и q_1:

$$c=\left[\overline{M_1M_2},q_1\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & p_1 & l_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p_1 & l_1 \end{vmatrix}i$$

$$+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & l_1 \end{vmatrix}j+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ m_1 & p_1 \end{vmatrix}k$$

Вычисляя определители второго порядка находим координаты вектора c:

$$c=(c_1,\ c_2,\ c_3).$$

Далее находим площадь параллелограмма:

$$S=|c|=\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}\ .$$

Расстояние между прямыми L_1 и L_2 равно:

$$d=\frac{|c|}{|q_1|},$$

где

$$|q_1|=\sqrt{m_1^2+p_1^2+l_1^2}\ ,$$

Если смешанное произведение векторов не равно нулю, то прямые **скрещиваются**, тогда расстояние между ними определяется следующим образом:

Поскольку скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях, то задача сводиться к нахождени. расстояния между плоскостями в пространстве.

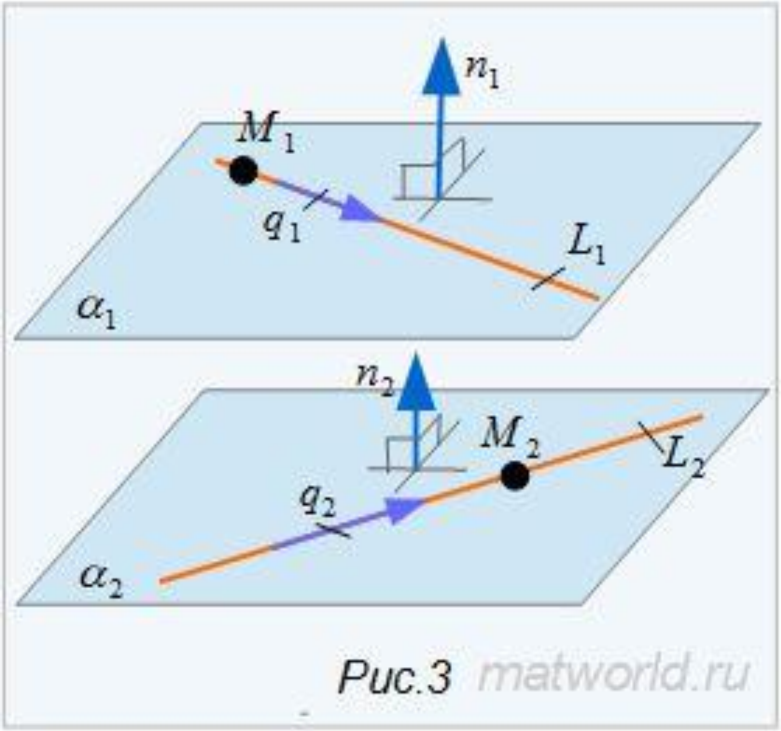

Рис.3

Поскольку плоскость α_1, проходит через прямую L_1, то он проходит также через $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Следовательно справедливо следующее равенство:

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1=0. \tag{27}$$

где $n_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ – нормальный вектор плоскости α_1. Для того, чтобы плоскость α_1 проходила через прямую L_1, нормальный вектор n_1 должен быть ортогональным направляющему вектору q_1 прямой L_1, т.е. скалярное произведение этих векторов должен быть равным нулю:

$$A_1m_1+B_1p_1+C_1l_1=0. \tag{28}$$

Так как плоскость α_1 должна быть параллельной прямой L_2, то должна выполнятся условие:

$$A_1m_2+B_1p_2+C_1l_2=0. \tag{29}$$

Решая систему линейных уравнений (27)−(29), с тремя уравнениями и четыремя неизвестными A_1, B_1, C_1, D_1, и подставляя в уравнение

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0. \tag{30}$$

получим уравнение плоскости α_1. (Как построить уравнение плоскости, проходящей через прямую, параллельно другой прямой подробно изложено здесь).

Аналогичным образом находим уравнение плоскости α_2:

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \tag{31}$$

Плоскости α_1 и α_2 параллельны, следовательно полученные нормальные векторы$n_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ и $n_2=\{A_2, B_2, C_2\}$ этих плоскостей коллинеарны. Если эти векторы не равны, то можно умножить (31) на некторое число так, чтобы полученный нормальный вектор n_2 совпадал с нормальным вектором уравнения (30).

Тогда расстояние между параллельными плоскостями вычисляется формулой:

$$d=\frac{\left|D_2-D_1\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}.$$

Расстояние между прямой и плоскостью в пространстве

Правила пользования

- Пользователь должен ввести каноническое уравнение прямой и уравнение плоскости.
- Значения коэффициентов в уравнениях должны быть целыми числами или числами с плавающие точкой (при вводе чисел с плавающей точкой использовать вместо точки **запятую**).
- После ввода прямой и плоскости при нажатии на кнопку «Выполнить» калькулятор определяет расстояние между ними.

Теоретическая часть

Расстояние между прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, и плоскостью в пространстве $Ax+By+Cz+D=0$, вычисляется по следующей формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Расстояние между плоскостями в пространстве

Правила пользования

- Пользователь должен ввести две плоскости с помощью уравнений.
- Значения коэффициентов в уравнениях должны быть целыми числами или числами с плавающие точкой (при вводе чисел с плавающей точкой использовать вместо точки **запятую**).
- После ввода двух плоскостей при нажатии на кнопку «Выполнить» калькулятор определяет расстояние между ними.

Теоретическая часть

Определение. **Расстояние между плоскостями** — равно длине перпендикуляра, опущенного с одной плоскости на другую.

Формула для вычисления расстояния между плоскостями

Если заданы уравнения параллельных плоскостей $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$, то расстояние между плоскостями можно найти, используя следующую формулу

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$