***Опр.* Комбинаторное число** характеризует число объектов в данном множестве.

Пусть $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$

Опр. Набор элементов $x_{i1},x_{i2},\dots,x_{ik}$ называется ***выборкой объема k из n*** элементов или ***(n,k)-выборкой***.

Выборка может быть: - упорядоченной и неупорядоченной

- с повторениями и без повторений

Опр.* Выборка** называется ***упорядоченной, если в ней задан порядок расположения элементов. (Две выборки из одних и тех же элементов, расположенных в разном порядке - различны).

Опр*. Выборка** называется ***неупорядоченной, если порядок расположения элементов несущественен.

Размещение элементов множества

Опр. Упорядоченная (n,k)-выборка, в которой элементы могут повторяться называется (n,k)-***размещением с повторениями***.

Опр. Упорядоченная (n,k)-выборка, в которой элементы попарно различны называется (n,k)-***размещением без повторений***.

Пример5. X={1, 2, 3}

1. Выпишем все (3,2)-размещения с повторениями

   <1,1>; <1,2>; <1,3>; <2,1>; <2,2>; <2,3>; <3,1>; <3,2>; <3,3>

2. Выпишем все (3,2)-размещения без повторений

   <1,2>; <1,3>; <2,1>; <2,3>; <3,1>; <3,2>

Комбинаторное число – число возможных размещений

Обозначение: $\overline{A_n^k}$ - число (n,k)-размещений с повторениями

A_n^k - число (n,k)-размещений без повторений

Утверждение2. $\overline{A_n^k} = n^k$

Доказательство

Каждое (n,k)-размещение с повторениями является упорядоченной последовательностью длины k. Причем 1-ый элемент последовательности может быть выбран n способами, 2-ой – также n способами, и т.д., k-ый – n способами.

По правилу произведения получим n^k.

Утверждение доказано.

Утверждение3.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad если\ k \le n$$

$$A_n^k = 0, \quad если\ k > n$$

1. $A_n^k = n \cdot A_{n-1}^{k-1}$ 2. $A_n^k = A_n^{k-1}(n-k+1)$

Перестановки элементов множества

Опр. (n,n)-размещение без повторений называется ***перестановкой***, т.е. это *частный случай* (n,k) размещений для случая k=n.

Комбинаторное число – число возможных перестановок

Утверждение5. $A_n^n = P_n = n!$

Опр. Пусть есть k элементов m различных типов: k_1 элементов 1-го типа, k_2 элементов 2-го типа, …, k_m элементов m-го типа, $k=k_1+k_2+\ldots+k_m$, причем элементы одного типа считаются неразличимыми. Перестановки таких элементов называются ***перестановками с повторениями.***

Комбинаторное число – число возможных перестановок

Утверждение6. $P(k_1,k_2,...,k_m) = \dfrac{(k_1+k_2+...+k_m)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$

Сочетание элементов множества

Опр. Неупорядоченная (n,k)-выборка, в которой элементы могут повторяться называется (n,k)-***сочетанием с повторениями***.

Опр. Неупорядоченная (n,k)-выборка, в которой элементы попарно различны называется (n,k)-***сочетанием без повторений***.

Пример8. X={1, 2, 3}

1. Выпишем все (3,2)-сочетания с повторениями

   (1,1); (1,2); (1,3); (2,2); (2,3); (3,3)

2. Выпишем все (3,2)-сочетания без повторений

   (1,2); (1,3); (2,3)

Комбинаторное число – число возможных сочетаний

Обозначение: $\overline{C_n^k}$ - число (n,k)-сочетаний с повторениями

C_n^k - число (n,k)-сочетаний без повторений

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad \text{если } k \le n \qquad C_n^k = 0, \quad \text{если } k > n$$

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$$