Поиск корней полиномов

Правила пользования

- Пользователь должен ввести коэффициенты полинома при соответствующих степенях x. При этом если не заполнять поля коэффициента, калькулятор автоматически распознает это как 0.
- Нельзя найти корни многочлена если его степени отлична от 2-ой, 3-ей, 4-ой.
- Значения коэффициентов полиномов должны быть целыми числами или числами с плавающие точкой (при вводе чисел с плавающей точкой использовать вместо точки **запятую**).
- После ввода полинома при нажатии на кнопку «=» калькулятор вычисляет корни полинома.

Поиск корней полинома 2-ой степени

$$ax^2 + bx + c = 0$$

где a, b, c — любые числа.

Дальше, вычисляем дискриминант. Он рассчитывается по формуле:

$$D = b^2 - 4ac$$

Определив дискриминант, мы можем определить корни уравнения по следующей формуле:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Поиск корней полинома 3-ей степени (метод Кардано)

Схема метода Кардано

Целью данного раздела является ***вывод формулы Кардано*** для решения уравнений третьей степени (***кубических уравнений***)

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \quad (1)$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 – произвольные вещественные числа, $a_0 \neq 0$.

Вывод формулы Кардано состоит из двух этапов.

На первом этапе кубические уравнения вида (1) приводятся к кубическим уравнениям, у которых отсутствует член со второй степенью неизвестного. Такие кубические уравнения называют ***трёхчленными кубическими уравнениями***.

На втором этапе трёхчленные кубические уравнения решаются при помощи сведения их к квадратным уравнениям.

Приведение кубических уравнений к трехчленному виду

Разделим уравнение (1) на старший коэффициент a_0 . Тогда оно примет вид

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad (2)$$

где a, b, c – произвольные вещественные числа.

Заменим в уравнении (2) переменную x на новую переменную y по формуле:

$$x = y - \frac{a}{3}. \quad (3)$$

Тогда, поскольку

$$x^3 + ax^2 + bx + c = \left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c =$$

$$= y^3 - 3y^2 \cdot \frac{a}{3} + 3y \cdot \frac{a^2}{9} - \frac{a^3}{27} + a\left(y^2 - 2y \cdot \frac{a}{3} + \frac{a^2}{9}\right) + by - \frac{ab}{3} + c =$$

$$= y^3 - ay^2 + \frac{a^2y}{3} - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2y}{3} + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c =$$

$$= y^3 - \frac{a^2y}{3} + \frac{2a^3}{27} + by - \frac{ab}{3} + c = y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + c + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3},$$

то уравнение (2) примет вид

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + c + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} = 0. \qquad (4)$$

Если ввести обозначения

$$p = b - \frac{a^2}{3}, \quad q = c + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3},$$

то уравнение (4) примет вид

$$y^3 + py + q = 0, \qquad (5)$$

где $p,\ q$ – вещественные числа.

Уравнения вида (5) и являются ***трёхчленными кубическими уравнениями***, у которых отсутствует член со второй степенью неизвестного.

Первый этап вывода формулы Кардано завершён.

Сведение трёхчленных кубических уравнений к квадратным уравнениям при помощи метода Никколо Тартальи

Следуя методу, примененому Никколо Тартальей (1499-1557) для решения трехчленных кубических уравнений, будем искать решение уравнения (5) в виде

$$y = \sqrt[3]{t} - \frac{p}{3\sqrt[3]{t}}, \qquad (6)$$

где t – новая переменная.

Поскольку

$$y^3 = \left(\sqrt[3]{t} - \frac{p}{3\sqrt[3]{t}}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{t}\right)^3 - 3\left(\sqrt[3]{t}\right)^2 \frac{p}{3\sqrt[3]{t}} + 3\sqrt[3]{t}\,\frac{p^2}{9\left(\sqrt[3]{t}\right)^2} - \frac{p^3}{27\left(\sqrt[3]{t}\right)^3} = t - p\sqrt[3]{t} + \frac{p^2}{3\sqrt[3]{t}} - \frac{p^3}{27t},$$

то выполнено равенство:

$$y^3 + py + q = t - p\sqrt[3]{t} + \frac{p^2}{3\sqrt[3]{t}} - \frac{p^3}{27t} + p\left(\sqrt[3]{t} - \frac{p}{3\sqrt[3]{t}}\right) + q =$$

$$= t - p\sqrt[3]{t} + \frac{p^2}{3\sqrt[3]{t}} - \frac{p^3}{27t} + p\sqrt[3]{t} - \frac{p^2}{3\sqrt[3]{t}} + q = t - \frac{p^3}{27t} + q.$$

Следовательно, уравнение (5) переписывается в виде

$$t - \frac{p^3}{27t} + q = 0. \qquad (7)$$

Если теперь уравнение (7) умножить на t, то мы получим квадратное уравнение относительно t:

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0. \qquad (8)$$

Формула Кардано

Решение уравнения (8) имеет вид:

$$t_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

В соответствии с (6), отсюда вытекает, что уравнение (5) имеет два решения:

$$y_1 = \sqrt[3]{t_1} - \frac{p}{3\sqrt[3]{t_1}}, \quad y_2 = \sqrt[3]{t_2} - \frac{p}{3\sqrt[3]{t_2}}. \tag{9}$$

В развернутой форме эти решения записываются так:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}, \tag{10}$$

$$y_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}. \tag{11}$$

Покажем, что, несмотря на кажущиеся различия, решения (10) и (11) совпадают.

Дейтсвительно,

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}} = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}$$

С другой стороны

$$y_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}} = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}$$

Таким образом,

$$y_1 = y_2 = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}$$

Получаем «Формулу Кардано»

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Поиск корней полинома 4-ой степени (метод Феррари)

> **Уравнение четвертой степени имеет вид:** $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$**.**
> **При этом** $a_0 \neq 0$.

Метод Феррари позволяет решить уравнения четвертой степени через их приведение к кубическому виду. Далее они решаются по формуле Кардано. То есть используется алгоритм решения кубических уравнений.

Находят y_0 — любой из корней кубического уравнения:

$y^3 - By^2 + (AC - 4D)y - A^2D + 4BD - C^2 = 0.$

Затем решают два квадратных уравнения:

$x^2 + \frac{A}{2}x + \frac{y_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - B + y_0\right)x^2 + \left(\frac{A}{2}y_0 - C\right)x + \frac{y_0^2}{4} - D} = 0.$

Полный квадрат является подкоренным выражением.

Корни этих уравнений являются корнями исходного уравнения четвертой степени.