

Лабораторная работа №2.

Решение систем линейных уравнений.

Везде далее рассматриваем решение системы линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

или в матричном виде: $AX = B$, где на матрицу A будем накладывать определенные условия.

Из курса линейной алгебры вам известны методы точного нахождения решения системы (1): метод Крамера, метод Гаусса, метод обратной матрицы.

В большинстве случаев решение линейной системы уравнений «руками» представляет определенные вычислительные сложности и становится труднореализуемо при большом количестве неизвестных. В данном курсе вы познакомитесь с численными методами решения линейных систем.

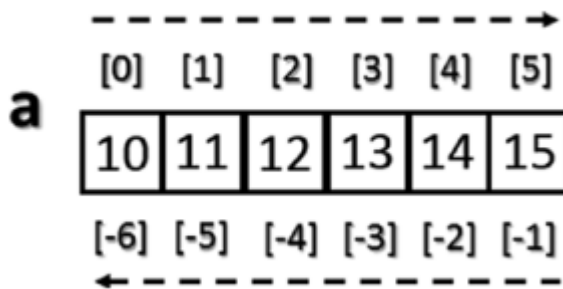
2.1 Срезы матриц.

Первым делом познакомимся с различными программными реализациями умножения векторов и матриц. Напомню, что в NumPy матрица реализована как двумерный массив `ndarray`. `Ndarray` является многомерным однородным массивом с заранее заданным количеством элементов. Однородный — потому что практически все объекты в нем одного размера или типа. Количество размерностей и объектов массива определяются его размерностью (`shape`), кортежем N -положительных целых чисел. Они указывают размер каждой размерности. Размерности определяются как оси. Размер массивов NumPy фиксирован, а это значит, что после создания объекта его уже нельзя поменять. Это поведение отличается от такового у списков Python, которые могут увеличиваться и уменьшаться в размерах.

Подробнее о массивах смотри <https://pythonru.com/biblioteki/biblioteka-numpy-ndarray-sozdanie-massiva-i-tipy-dannyh>

При работе с индексами массивов всегда используются квадратные скобки (`[]`). С помощью индексирования можно ссылаться на отдельные элементы,

выделяя их или даже меняя значения. При создании нового массива шкала с индексами создается автоматически.



Для получения доступа к одному элементу на него нужно сослаться через его индекс.

```
>>> a = np.arange(10, 16)
>>> a
array([10, 11, 12, 13, 14, 15])
>>> a[4]
14
```

Для выбора нескольких элементов в квадратных скобках можно передать массив индексов.

Двухмерные массивы, матрицы, представлены в виде прямоугольного массива, состоящего из строк и колонок, определенных двумя осями, где ось 0 представлена строками, а ось 1 — колонками. Таким образом, индексация происходит через пару значений; первое — это значение ряда, а второе — колонки. И если нужно получить доступ к определенному элементу матрицы, необходимо все еще использовать квадратные скобки, но уже с двумя значениями.

В зависимости от части массива, которую необходимо извлечь, нужно использовать синтаксис среза; это последовательность числовых значений, разделенная двоеточием (:) в квадратных скобках.

Чтобы лучше понять синтаксис среза, необходимо рассматривать и случаи, когда явные числовые значения не используются. Если не ввести первое число, NumPy неявно интерпретирует его как 0 (то есть, первый элемент массива). Если пропустить второй — он будет заменен на максимальный индекс, а если последний — представлен как 1. То есть, все элементы будут перебираться без интервалов.

```
>>> a[:,2]
array([10, 12, 14])
>>> a[5:2]
array([10, 12, 14])
>>> a[:,5:]
array([10, 11, 12, 13, 14])
```

В случае с двумерными массивами срезы тоже работают, но их нужно определять отдельно для рядов и колонок. Например, если нужно получить только первую строку:

```
array([[10, 11, 12],
       [13, 14, 15],
       [16, 17, 18]])
>>> A[0,:]
array([10, 11, 12])
```

Как видно по второму индексу, если оставить только двоеточие без числа, будут выбраны все колонки. А если нужно выбрать все значения первой колонки, то необходимо писать обратное.

```
>>> A[:,0]
array([10, 13, 16])
```

Если же необходимо извлечь матрицу меньшего размера, то нужно явно указать все интервалы с соответствующими индексами.

2.2 Умножение матриц.

Операция умножения матриц вам хорошо известна из курса линейной алгебры. Умножение матрицы A на матрицу B возможно только в случае, когда количество столбцов матрицы A совпадает с количеством строк матрицы B . Элемент c_{ij} новой матрицы получается как умножение i -той строки матрицы A на j -тый столбец матрицы B .

Возможно несколько реализаций матричного умножения: в скалярном виде, в векторном и в матричном.

Скалярный вид: $c_{ij} = \sum_{t=1}^k a_{it}b_{tj}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, где матрица A имеет размер $n \times k$, матрица B имеет размер $k \times m$.

Алгоритм умножения матриц в скалярном виде (поэлементный) представлен в приложенном файле.

скалярный вид умножения матриц.

```
n = 3
k = 4
m = 5
A = np.random.randint(0,11,(n, k))
B = np.random.randint(0,11,(k, m))
C = np.zeros((n,m), dtype = int)

for i in range(n):
    for j in range(m):
        for p in range(k):
            C[i,j] = C[i,j] + A[i,p]*B[p,j]
```

Однако такое решение является достаточно медленным.

Векторные операции существенно увеличивают скорость вычислений.

Алгоритм умножения матриц в векторном виде позволяет сразу находить произведение i -той строки матрицы A на j -тый столбец матрицы B.

Векторный вид: $c_{ij} = A(i,:) \cdot B(:, j)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Напомню, что в этом случае операция умножения – это уже скалярное умножение из модуля NumPy (.dot)

Мы можем использовать также матричное умножение. В нашем случае будем «собирать» матрицу C по строкам (для нахождения i -той строки матрицы C умножим i -тую строку матрицы A на матрицу B)

Матричный вид: $C(i, :) = A(i, :) \cdot B$.

Можно также «собрать» матрицу C по столбцам.

2.2 Решение треугольных систем линейных уравнений.

Вернемся к решению системы (1). Наиболее просто она решается, когда матрица A приведена к треугольному виду с единицами по главной

диагонали (к унитреугольному виду). Напомню, что матрицу A всегда можно привести к подобному виду, если определитель матрицы A не равен 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

Решение системы прямой подстановкой:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 - a_{21}x_1 \\ \dots \\ x_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k \end{cases}$$

Алгоритм решения в векторном виде приведен в приложенном файле:

```
A = np.array([[1, 0, 0], [3, 1, 0], [-4, 5, 1]], int) # Матрица (левая часть системы)
B = np.array([2, 4, 3], int) # Вектор (правая часть системы)
x = np.zeros((3,1), int)

x[0] = B[0]

for i in range(1,3):
    x[i] = B[i] - np.dot(A[i, :i], x[:i])

print(x)
```

В цикле умножаем элементы i -той строки матрицы A до главной диагонали на часть вектора x .

Также возможно решение без введения переменной x , хранящей решение системы.

2.2 Приведение матрицу A к LU виду.

LU разложение – это представление матрицы A в виде произведения двух матриц: L – нижняя унитреугольная, U – верхняя треугольная. LU-разложение используется для решения систем линейных уравнений, обращения матриц и вычисления определителя. LU-разложение существует только в том случае, когда матрица A обратима (невырождена), и все ведущие (угловые) главные миноры матрицы A невырождены.

Приведем алгоритм нахождения LU –разложения.

2.3 Применение LU разложения.

Решение систем линейных уравнений

Полученное LU-разложение матрицы A (матрица коэффициентов системы) может быть использовано для решения семейства систем линейных уравнений с различными векторами b в правой части:

$$Ax=b$$

Если известно LU-разложение матрицы $A=LU$, исходная система может быть записана как:

$$LUx=b.$$

Эта система может быть решена в два шага. На первом шаге решается система

$$Ly=b.$$

Поскольку L — нижняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно прямой подстановкой.

На втором шаге решается система

$$Ux=y.$$

Поскольку U — верхняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно обратной подстановкой.

Обращение матриц

Обращение матрицы A эквивалентно решению линейной системы

$$AX=E,$$

где X — неизвестная матрица, E — единичная матрица. Решение X этой системы является обратной матрицей A^{-1} .

Систему можно решить описанным выше методом LU-разложения.

Вычисление определителя матрицы

Имея LU-разложение матрицы $A=LU$,

можно непосредственно вычислить её определитель,

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = l_{11} \cdot \dots \cdot l_{nn} \cdot u_{11} \cdot \dots \cdot u_{nn}$$

Задание к лабораторной работе 2.

Вариант1.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из $[-3,3]$ размера 10 . Найти и вычислить минор 4 порядка, расположенный на пересечении 2,3,4,5 строк и 7,8,9, 10 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел из интервала (2,3) подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу C по столбцам 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение
$$\begin{aligned}4.4x_1 - 2.5x_2 + 19.2x_3 - 10.8x_4 &= 4.3 \\5.5x_1 - 9.3x_2 - 14.2x_3 + 13.2x_4 &= 6.8 \\7.1x_1 - 11.5x_2 + 5.3x_3 - 6.7x_4 &= -1.8 \\14.2x_1 + 23.4x_2 - 8.8x_3 + 5.3x_4 &= 7.2\end{aligned}$$

Вариант2.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2,4) размера 10 . Найти скалярное произведение 4 строки на 5 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из интервала [2,7) подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав скалярный алгоритм умножения матриц 2) записав векторный алгоритм, записав матрицу C 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную нижнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение
$$\begin{aligned}8.2x_1 - 3.2x_2 + 14.2x_3 + 14.8x_4 &= -8.4 \\5.6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6.4x_4 &= 4.5 \\5.7x_1 + 3.6x_2 - 12.4x_3 - 2.3x_4 &= 3.3 \\6.8x_1 &= 13.2x_2 - 6.3x_3 - 8.7x_4 = 14.3\end{aligned}$$

Вариант3.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из $[-5,2]$ размера 11 . Найти и вычислить минор 5 порядка, расположенный на пересечении 1,2,3,6,7 строк и 7,8,9, 10,11 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав векторный алгоритм умножения матриц 2) записав матричный алгоритм, записав матрицу C по строкам 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную верхнюю унитреугольную матрицу A 5 порядка, вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение
$$\begin{aligned}5.7x_1 - 7.8x_2 - 5.6x_3 - 8.3x_4 &= 2.7 \\6.6x_1 + 13.1x_2 - 6.3x_3 + 4.3x_4 &= -5.5 \\14.7x_1 - 2.8x_2 + 5.6x_3 - 12.1x_4 &= 8.6 \\8.5x_1 + 12.7x_2 - 23.7x_3 + 5.7x_4 &= 14.7\end{aligned}$$

Вариант4.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из интервала $(-1,1)$ размера 10 . Найти скалярное произведение 2 строки на 7 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из $[3,10]$ подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) скалярный алгоритм умножения матриц 2) векторный алгоритм, 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную нижнюю унитреугольную матрицу A 7 порядка, вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение
$$\begin{aligned}3.8x_1 + 14.2x_2 + 6.3x_3 - 15.5x_4 &= 2.8 \\8.3x_1 - 6.6x_2 + 5.8x_3 + 12.2x_4 &= -4.7 \\6.4x_1 - 8.5x_2 - 4.3x_3 + 8.8x_4 &= 7.7 \\17.1x_1 - 8.3x_2 + 14.4x_3 - 7.2x_4 &= 13.5\end{aligned}$$

Вариант 5.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из $[0,8]$ размера 6 . Создать две новые матрицы: первая – из двух последних

- строк исходной матрицы (должна получиться матрица размера 2x6), вторая – из двух первых столбцов матрицы (матрица размера 6x2).
2. Выполнить умножение матриц из предыдущего пункта тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу C по строкам 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
 3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу A 4 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
 4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned} 15.7x_1 + 6.6x_2 - 5.7x_3 + 11.5x_4 &= -2.4 \\ 8.8x_1 - 6.7x_2 + 5.5x_3 - 4.5x_4 &= 5.6 \\ 6.3x_1 - 5.7x_2 - 23.4x_3 + 6.6x_4 &= 7.7 \\ 14.3x_1 + 8.7x_2 - 15.7x_3 - 5.8x_4 &= 23.4 \end{aligned}$$

Вариант6.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из $[-7, -2]$ размера 9 . Найти и вычислить минор 4 порядка, расположенный на пересечении 1,2,3,4 строк и 2,3,8, 9 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу C по столбцам 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned} 4.3x_1 - 12.1x_2 + 23.2x_3 - 14.1x_4 &= 15.5 \\ 2.4x_1 - 4.4x_2 + 3.5x_3 + 5.5x_4 &= 2.5 \\ 5.4x_1 + 8.3x_2 - 7.4x_3 - 12.7x_4 &= 8.6 \\ 6.3x_1 - 7.6x_2 + 1.34x_3 + 3.7x_4 &= 12.1 \end{aligned}$$

Вариант7.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из $(2,4)$ размера 8 . Найти скалярное произведение 3 строки на 8 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из отрезка $[-2,6]$ подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1)

- записав скалярный алгоритм умножения матриц 2) записав векторный алгоритм, записав матрицу C 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитарную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
 4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned} 14.4x_1 - 5.3x_2 + 14.3x_3 - 12.7x_4 &= 14.4 \\ 23.4x_1 - 14.2x_2 - 5.4x_3 + 2.1x_4 &= 6.6 \\ 6.3x_1 - 13.2x_2 - 6.5x_3 + 14.3x_4 &= 9.4 \\ 5.6x_1 + 8.8x_2 - 6.7x_3 - 23.8x_4 &= 7.3 \end{aligned}$$

Вариант 8.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из $[-4, 3]$ размера 10. Найти и вычислить минор 5 порядка, расположенный на пересечении 1-5 строк и 2-4, 9, 10 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав векторный алгоритм умножения матриц 2) записав матричный алгоритм, записав матрицу C по строкам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнюю унитарную матрицу A 5 порядка, вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned} 1.7x_1 + 10x_2 - 1.3x_3 + 2.1x_4 &= 3.3 \\ 3.1x_1 + 1.7x_2 - 2.1x_3 + 5.4x_4 &= 2.1 \\ 3.3x_1 - 7.7x_2 + 4.4x_3 - 5.1x_4 &= 1.9 \\ 10x_1 - 20.1x_2 + 24x_3 + 1.7x_4 &= 1.8 \end{aligned}$$

Вариант 9.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из интервала $(-1, 1)$ размера 8. Найти скалярное произведение 1 строки на 8 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из $[-6, 6]$ подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) скалярный алгоритм умножения матриц 2) векторный алгоритм, 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнюю унитарную матрицу A 7 порядка, вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.

4. Решить систему, используя LU разложение

$$1.7x_1 - 1.8x_2 + 1.9x_3 - 57.4x_4 = 10$$

$$1.1x_1 - 4.3x_2 + 1.5x_3 - 1.7x_4 = 19$$

$$1.2x_1 + 1.4x_2 + 1.6x_3 + 1.8x_4 = 20$$

$$7.1x_1 - 1.3x_2 - 4.1x_3 + 5.2x_4 = 10$$

Вариант 10.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из $[-5,5]$ размера 7 . Создать две новые матрицы: первая – из трех последних строк исходной матрицы (должна получиться матрица размера 3×7), вторая – из двух первых столбцов матрицы (матрица размера 7×2).
2. Выполнить умножение матриц из предыдущего пункта тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу C по строкам 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу A 4 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$6.1x_1 + 6.2x_2 - 6.3x_3 + 6.4x_4 = 6.5$$

$$1.1x_1 - 1.5x_2 + 2.2x_3 - 3.8x_4 = 4.2$$

$$5.1x_1 - 5.0x_2 + 4.9x_3 - 4.8x_4 = 4.7$$

$$1.8x_1 + 1.9x_2 + 2.0x_3 - 2.1x_4 = 2.2$$

Вариант 11.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из $[-3,3]$ размера 10 . Найти и вычислить минор 4 порядка, расположенный на пересечении 2,3,4,5 строк и 7,8,9, 10 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел из интервала $(2,3)$ подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу C по столбцам 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned}
4.4x_1 - 2.5x_2 + 19.2x_3 - 10.8x_4 &= 4.3 \\
5.5x_1 - 9.3x_2 - 14.2x_3 + 13.2x_4 &= 6.8 \\
7.1x_1 - 11.5x_2 + 5.3x_3 - 6.7x_4 &= -1.8 \\
14.2x_1 + 23.4x_2 - 8.8x_3 + 5.3x_4 &= 7.2
\end{aligned}$$

Вариант 12.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2,4) размера 10 . Найти скалярное произведение 4 строки на 5 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из интервала [2,7) подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав скалярный алгоритм умножения матриц 2) записав векторный алгоритм, записав матрицу C 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитарную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned}
8.2x_1 - 3.2x_2 + 14.2x_3 + 14.8x_4 &= -8.4 \\
5.6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6.4x_4 &= 4.5 \\
5.7x_1 + 3.6x_2 - 12.4x_3 - 2.3x_4 &= 3.3 \\
6.8x_1 - 13.2x_2 - 6.3x_3 - 8.7x_4 &= 14.3
\end{aligned}$$

Вариант 13.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-5,2] размера 11 . Найти и вычислить минор 5 порядка, расположенный на пересечении 1,2,3,6,7 строк и 7,8,9, 10,11 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав векторный алгоритм умножения матриц 2) записав матричный алгоритм, записав матрицу C по строкам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнюю унитарную матрицу A 5 порядка, вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned}
5.7x_1 - 7.8x_2 - 5.6x_3 - 8.3x_4 &= 2.7 \\
6.6x_1 + 13.1x_2 - 6.3x_3 + 4.3x_4 &= -5.5 \\
14.7x_1 - 2.8x_2 + 5.6x_3 - 12.1x_4 &= 8.6 \\
8.5x_1 + 12.7x_2 - 23.7x_3 + 5.7x_4 &= 14.7
\end{aligned}$$

Вариант 14.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из интервала $(-1,1)$ размера 10 . Найти скалярное произведение 2 строки на 7 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из $[3,10]$ подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) скалярный алгоритм умножения матриц 2) векторный алгоритм, 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную нижнюю унитреугольную матрицу A 7 порядка, вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение
$$\begin{aligned}3.8x_1 + 14.2x_2 + 6.3x_3 - 15.5x_4 &= 2.8 \\8.3x_1 - 6.6x_2 + 5.8x_3 + 12.2x_4 &= -4.7 \\6.4x_1 - 8.5x_2 - 4.3x_3 + 8.8x_4 &= 7.7 \\17.1x_1 - 8.3x_2 + 14.4x_3 - 7.2x_4 &= 13.5\end{aligned}$$

Вариант 15.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из $[0,8]$ размера 6 . Создать две новые матрицы: первая – из двух последних строк исходной матрицы (должна получиться матрица размера 2×6), вторая – из двух первых столбцов матрицы (матрица размера 6×2).
2. Выполнить умножение матриц из предыдущего пункта тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу C по строкам 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу A 4 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение
$$\begin{aligned}15.7x_1 + 6.6x_2 - 5.7x_3 + 11.5x_4 &= -2.4 \\8.8x_1 - 6.7x_2 + 5.5x_3 - 4.5x_4 &= 5.6 \\6.3x_1 - 5.7x_2 - 23.4x_3 + 6.6x_4 &= 7.7 \\14.3x_1 + 8.7x_2 - 15.7x_3 - 5.8x_4 &= 23.4\end{aligned}$$

Вариант 16.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из $[-7,-2]$ размера 9 . Найти и вычислить минор 4 порядка, расположенный на пересечении 1,2,3,4 строк и 2,3,8, 9 столбцов. Использовать срезы матрицы.

2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу C по столбцам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned} 4.3x_1 - 12.1x_2 + 23.2x_3 - 14.1x_4 &= 15.5 \\ 2.4x_1 - 4.4x_2 + 3.5x_3 + 5.5x_4 &= 2.5 \\ 5.4x_1 + 8.3x_2 - 7.4x_3 - 12.7x_4 &= 8.6 \\ 6.3x_1 - 7.6x_2 + 1.34x_3 + 3.7x_4 &= 12.1 \end{aligned}$$

Вариант 17.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2,4) размера 8 . Найти скалярное произведение 3 строки на 8 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из отрезка [-2,6] подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав скалярный алгоритм умножения матриц 2) записав векторный алгоритм, записав матрицу C 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned} 14.4x_1 - 5.3x_2 + 14.3x_3 - 12.7x_4 &= 14.4 \\ 23.4x_1 - 14.2x_2 - 5.4x_3 + 2.1x_4 &= 6.6 \\ 6.3x_1 - 13.2x_2 - 6.5x_3 + 14.3x_4 &= 9.4 \\ 5.6x_1 + 8.8x_2 - 6.7x_3 - 23.8x_4 &= 7.3 \end{aligned}$$

Вариант 18.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-4,3] размера 10 . Найти и вычислить минор 5 порядка, расположенный на пересечении 1-5 строк и 2-4,9,10 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав векторный алгоритм умножения матриц 2) записав матричный

- алгоритм, записав матрицу С по строкам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнюю унитреугольную матрицу А 5 порядка, вектор В произвольный. Решить систему $AX = B$.
 4. Решить систему, используя LU разложение
$$\begin{aligned}1.7x_1 + 10x_2 - 1.3x_3 + 2.1x_4 &= 3.3 \\ 3.1x_1 + 1.7x_2 - 2.1x_3 + 5.4x_4 &= 2.1 \\ 3.3x_1 - 7.7x_2 + 4.4x_3 - 5.1x_4 &= 1.9 \\ 10x_1 - 20.1x_2 + 24x_3 + 1.7x_4 &= 1.8\end{aligned}$$

Вариант 19.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из интервала $(-1,1)$ размера 8 . Найти скалярное произведение 1 строки на 8 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из $[-6,6]$ подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) скалярный алгоритм умножения матриц 2) векторный алгоритм, 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнюю унитреугольную матрицу А 7 порядка, вектор В произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение
$$\begin{aligned}1.7x_1 - 1.8x_2 + 1.9x_3 - 57.4x_4 &= 10 \\ 1.1x_1 - 4.3x_2 + 1.5x_3 - 1.7x_4 &= 19 \\ 1.2x_1 + 1.4x_2 + 1.6x_3 + 1.8x_4 &= 20 \\ 7.1x_1 - 1.3x_2 - 4.1x_3 + 5.2x_4 &= 10\end{aligned}$$

Вариант 20.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из $[-5,5]$ размера 7 . Создать две новые матрицы: первая – из трех последних строк исходной матрицы (должна получиться матрица размера 3×7), вторая – из двух первых столбцов матрицы (матрица размера 7×2).
2. Выполнить умножение матриц из предыдущего пункта тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу С по строкам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу А 4 порядка (не унитреугольную), вектор В произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned}
6.1x_1 + 6.2x_2 - 6.3x_3 + 6.4x_4 &= 6.5 \\
1.1x_1 - 1.5x_2 + 2.2x_3 - 3.8x_4 &= 4.2 \\
5.1x_1 - 5.0x_2 + 4.9x_3 - 4.8x_4 &= 4.7 \\
1.8x_1 + 1.9x_2 + 2.0x_3 - 2.1x_4 &= 2.2
\end{aligned}$$

Вариант 21.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из $[-3,3]$ размера 10. Найти и вычислить минор 4 порядка, расположенный на пересечении 2,3,4,5 строк и 7,8,9, 10 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел из интервала (2,3) подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу C по столбцам 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитарную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned}
4.4x_1 - 2.5x_2 + 19.2x_3 - 10.8x_4 &= 4.3 \\
5.5x_1 - 9.3x_2 - 14.2x_3 + 13.2x_4 &= 6.8 \\
7.1x_1 - 11.5x_2 + 5.3x_3 - 6.7x_4 &= -1.8 \\
14.2x_1 + 23.4x_2 - 8.8x_3 + 5.3x_4 &= 7.2
\end{aligned}$$

Вариант 22.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2,4) размера 10. Найти скалярное произведение 4 строки на 5 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из интервала [2,7) подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав скалярный алгоритм умножения матриц 2) записав векторный алгоритм, записав матрицу C 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную нижнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитарную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned}
8.2x_1 - 3.2x_2 + 14.2x_3 + 14.8x_4 &= -8.4 \\
5.6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6.4x_4 &= 4.5 \\
5.7x_1 + 3.6x_2 - 12.4x_3 - 2.3x_4 &= 3.3 \\
6.8x_1 - 13.2x_2 - 6.3x_3 - 8.7x_4 &= 14.3
\end{aligned}$$

Вариант 23.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из $[-5,2]$ размера 11 . Найти и вычислить минор 5 порядка, расположенный на пересечении 1,2,3,6,7 строк и 7,8,9, 10,11 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав векторный алгоритм умножения матриц 2) записав матричный алгоритм, записав матрицу C по строкам 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную верхнюю унитреугольную матрицу A 5 порядка, вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение
$$\begin{aligned}5.7x_1 - 7.8x_2 - 5.6x_3 - 8.3x_4 &= 2.7 \\6.6x_1 + 13.1x_2 - 6.3x_3 + 4.3x_4 &= -5.5 \\14.7x_1 - 2.8x_2 + 5.6x_3 - 12.1x_4 &= 8.6 \\8.5x_1 + 12.7x_2 - 23.7x_3 + 5.7x_4 &= 14.7\end{aligned}$$

Вариант 24.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из интервала $(-1,1)$ размера 10 . Найти скалярное произведение 2 строки на 7 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из $[3,10]$ подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) скалярный алгоритм умножения матриц 2) векторный алгоритм, 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную нижнюю унитреугольную матрицу A 7 порядка, вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение
$$\begin{aligned}3.8x_1 + 14.2x_2 + 6.3x_3 - 15.5x_4 &= 2.8 \\8.3x_1 - 6.6x_2 + 5.8x_3 + 12.2x_4 &= -4.7 \\6.4x_1 - 8.5x_2 - 4.3x_3 + 8.8x_4 &= 7.7 \\17.1x_1 - 8.3x_2 + 14.4x_3 - 7.2x_4 &= 13.5\end{aligned}$$

Вариант 25.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из $[0,8]$ размера 6 . Создать две новые матрицы: первая – из двух последних строк исходной матрицы (должна получиться матрица размера 2×6), вторая – из двух первых столбцов матрицы (матрица размера 6×2).
2. Выполнить умножение матриц из предыдущего пункта тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу C по строкам 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу A 4 порядка (не унитарную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned} 15.7x_1 + 6.6x_2 - 5.7x_3 + 11.5x_4 &= -2.4 \\ 8.8x_1 - 6.7x_2 + 5.5x_3 - 4.5x_4 &= 5.6 \\ 6.3x_1 - 5.7x_2 - 23.4x_3 + 6.6x_4 &= 7.7 \\ 14.3x_1 + 8.7x_2 - 15.7x_3 - 5.8x_4 &= 23.4 \end{aligned}$$

Вариант 26.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из $[-7,-2]$ размера 9 . Найти и вычислить минор 4 порядка, расположенный на пересечении 1,2,3,4 строк и 2,3,8, 9 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу C по столбцам 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитарную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned} 4.3x_1 - 12.1x_2 + 23.2x_3 - 14.1x_4 &= 15.5 \\ 2.4x_1 - 4.4x_2 + 3.5x_3 + 5.5x_4 &= 2.5 \\ 5.4x_1 + 8.3x_2 - 7.4x_3 - 12.7x_4 &= 8.6 \\ 6.3x_1 - 7.6x_2 + 1.34x_3 + 3.7x_4 &= 12.1 \end{aligned}$$

Вариант 27.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из $(2,4)$ размера 8 . Найти скалярное произведение 3 строки на 8 столбец. Использовать срезы матриц.

2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из отрезка $[-2,6]$ подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав скалярный алгоритм умножения матриц 2) записав векторный алгоритм, записав матрицу C 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную нижнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитарную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned} 14.4x_1 - 5.3x_2 + 14.3x_3 - 12.7x_4 &= 14.4 \\ 23.4x_1 - 14.2x_2 - 5.4x_3 + 2.1x_4 &= 6.6 \\ 6.3x_1 - 13.2x_2 - 6.5x_3 + 14.3x_4 &= 9.4 \\ 5.6x_1 + 8.8x_2 - 6.7x_3 - 23.8x_4 &= 7.3 \end{aligned}$$

Вариант 28.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из $[-4,3]$ размера 10 . Найти и вычислить минор 5 порядка, расположенный на пересечении 1-5 строк и 2-4,9,10 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав векторный алгоритм умножения матриц 2) записав матричный алгоритм, записав матрицу C по строкам 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную верхнюю унитарную матрицу A 5 порядка, вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned} 1.7x_1 + 10x_2 - 1.3x_3 + 2.1x_4 &= 3.3 \\ 3.1x_1 + 1.7x_2 - 2.1x_3 + 5.4x_4 &= 2.1 \\ 3.3x_1 - 7.7x_2 + 4.4x_3 - 5.1x_4 &= 1.9 \\ 10x_1 - 20.1x_2 + 24x_3 + 1.7x_4 &= 1.8 \end{aligned}$$

Вариант 29.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из интервала $(-1,1)$ размера 8 . Найти скалярное произведение 1 строки на 8 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из $[-6,6]$ подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) скалярный алгоритм умножения матриц 2) векторный алгоритм, 3) проверив с помощью функции `np.dot`.

3. Создать произвольную нижнюю унитреугольную матрицу A 7 порядка, вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned} 1.7x_1 - 1.8x_2 + 1.9x_3 - 57.4x_4 &= 10 \\ 1.1x_1 - 4.3x_2 + 1.5x_3 - 1.7x_4 &= 19 \\ 1.2x_1 + 1.4x_2 + 1.6x_3 + 1.8x_4 &= 20 \\ 7.1x_1 - 1.3x_2 - 4.1x_3 + 5.2x_4 &= 10 \end{aligned}$$

Вариант 30.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из $[-5, 5]$ размера 7. Создать две новые матрицы: первая – из трех последних строк исходной матрицы (должна получиться матрица размера 3×7), вторая – из двух первых столбцов матрицы (матрица размера 7×2).
2. Выполнить умножение матриц из предыдущего пункта тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу C по строкам 3) проверив с помощью функции `np.dot`.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу A 4 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему $AX = B$.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$\begin{aligned} 6.1x_1 + 6.2x_2 - 6.3x_3 + 6.4x_4 &= 6.5 \\ 1.1x_1 - 1.5x_2 + 2.2x_3 - 3.8x_4 &= 4.2 \\ 5.1x_1 - 5.0x_2 + 4.9x_3 - 4.8x_4 &= 4.7 \\ 1.8x_1 + 1.9x_2 + 2.0x_3 - 2.1x_4 &= 2.2 \end{aligned}$$