Лабораторная работа №3. Метод наименьших квадратов (МНК).

3.1. Норма

Нормированное пространство — векторное пространство с заданной на нём нормой; один из основных объектов изучения функционального анализа.

Более точно: нормированным пространством называется пара $(X, \|\cdot\|)$ из векторного пространства X над полем действительных или комплексных чисел и отображения $\|\cdot\| : X \to R$ таких, что выполняются следующие свойства для любых $x, y \in X$ и скаляра λ:

1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (положительная определённость)
2. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (однородность)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)

Норма является естественным обобщением понятия длины вектора в евклидовом пространстве, таким образом, нормированные пространства — векторные пространства, оснащённые возможностью определения длины вектора.

Существует множество различных способов введения норм. В вычислительных методах наиболее употребительными являются следующие три нормы:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \ \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Выбор той или иной конкретной нормы в практических задачах диктуется тем, какие требования предъявляются к точности решения. Выбор нормы $\|x\|_1$ фактически отвечает случаю, когда малой должна быть суммарная абсолютная погрешность в компонентах решения; выбор $\|x\|_2$ соответствует критерию малости среднеквадратичной погрешности, а принятие в качестве нормы $\|x\|_\infty$ означает, что малой должна быть максимальная из абсолютных погрешностей в компонентах решения.

Норма матрицы — норма в линейном пространстве матриц. Обычно, от матричной нормы требуют выполнение условия субмультипликативности: $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ для всех матриц A и B. Все нормы, которые рассматриваем в этой лабораторной работе, удовлетворяют условию сбмультипликативности.

Матричную норму, определенную соотношением $\|A\| = \max\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ называют нормой, подчиненной векторной норме $\|x\|$.

Нормы $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$ называют манхэттонской, спектральной и чебышевой соответственно. Можно доказать, что

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \max_j \sqrt{\lambda_j (A^T A)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$\|A\|_2$ - максимум из собственных значений матрицы $A^T A$.

$\|A\|_F = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$ - норма Фробениуса

Для нахождения нормы вектора и матрицы в среде программирования Python можно использовать функцию

np.linalg.norm()

numpy.linalg.norm(x, ord=None, axis=None, keepdims=False)

В зависимости от параметра ord данная функция может возвращать одну из восьми норм или одну из бесконечного числа векторных норм.

Приведу три из них:

- ord = None - для матриц возвращается норма Фробениуса, для векторов соответствует ord = 2 (то есть вычисляет корень квадратный из суммы квадратов векторов) (установлен по умолчанию);
- ord = inf - для матриц возвращается np.max(np.sum(np.abs(x), axis=1)), для векторов возвращается np.max(np.abs(x));
- ord = 1 - для матриц возвращается np.max(np.sum(np.abs(x), axis=0)), для векторов возвращается np.sum(np.abs(x))

Более подробно см. https://pyprog.pro/linear_algebra_functions/linalg_norm.html

3.2 Постановка задачи метода наименьших квадратов.

Пусть A — матрица размера m × n, a b — столбец высоты m. Линейная задача наименьших квадратов заключается в нахождении такого вектора x, называемого псевдорешением системы Ax = b, на котором достигается минимум $\min_x \|Ax-b\|_2$. Таким образом, псевдорешение доставляет минимум евклидовой нормы невязки заданной системы Ax = b. Легко видеть, что если система Ax = b совместна (имеет решение), то любое ее решение является ее псевдорешением. При решении различных практических задач, при обработке большого количества экспериментальных данных, как правило, возникают линейные системы, в которых число уравнений превышает число неизвестных и сама система, если говорить о ее строгом математическом решении, является несовместной. Если m > n, то такая система называется переопределенной.

Псевдорешение единственно тогда и только тогда, когда rank A = n (столбцы матрицы A линейно независимы).

Пусть матрица A имеет размеры mxn. Представим матрицу A в виде A=QR, где матрица Q - прямоугольная матрица mxn с ортонормированными столбцами, матрица R – квадратная nxn верхнетреугольная матрица. Ортонормированность столбцов матрицы Q равносильно выполнению условия $Q^TQ=E$.

Допустим, что QR разложение матрицы A известно.

Вектор $\bar{x}$ минимизирует величину $\|Ax-b\|_2$ тогда и только тогда, когда он является решением нормальной системы $A^T Ax = A^T b$.Преобразуем систему:

$$(QR)^T (QR)x = (QR)^T b$$
$$R^T Q^T QRx = R^T Q^T b$$
$$R^T Rx = R^T Q^T b$$

Тогда $Rx = Q^T b$, решение этой системы позволяет решить задачу наименьших квадратов.

В прошлой лабораторной работе был рассмотрен процесс ортогонализации Грама-Шмидта для нахождения ортогональной матрицы Q. В этой главе будем использовать метод отражений (метод Хаусхолдера) и метод вращений (метод Гивенса).

3.3 Метод отражений (метод Хаусхолдера)

Метод Хаусхолдера один из самых распространенных методов нахождения QR разложения матрицы A. Пусть w – n- мерный ненулевой вектор-столбец единичной длины (т.е. $\|w\| = 1$), H - матрица nxn

$H = E - 2ww^T$ называется отражением Хаусхолдера или просто отражением. Можно проверить, что матрица H симметрична и ортогональна. Умножению матрицы H на произвольный вектор x можно дать следующую геометрическую интерпретацию: вектор Hx получается отражением вектора x относительно гиперплоскости, ортогональной вектору w (см. рисунок)

Метод отражений. Матрицами Хаусхолдера (или отражений) называются квадратные матрицы вида

$$V = E - 2ww^T ,$$

где *w*- вектор-столбец в $\mathbb{R}^m$, имеющий единичную длину: $\|w\|_2 = 1$.

Матрица Хаусхолдера симметрична и ортогональна. Действительно,

$$V^T = (E - 2ww^T)^T = E^T - 2(w^T)^T w^T = E - 2ww^T = V ,$$

$$V^T V = VV = (E - 2ww^T)(E - 2ww^T) = E - 4ww^T + 4ww^T ww^T = E .$$

Учли, что $ww^T = \|w\|_2^2 = 1$.

Умножение на матрицу *V* называют преобразованием Хаусхолдера (или отражением). Действие *V* на вектор *x* можно интерпретировать как ортогональное отражение вектора в $\mathbb{R}^m$ относительно гиперплоскости, проходящей через начало координат и имеющей нормальный вектор, равный *w*.

Как и вращения, отражения используются для обращения в нуль элементов преобразуемой матрицы. Однако здесь с помощью одного отражения можно обратить в нуль уже не один элемент матрицы, а целую группу элементов некоторого столбца или строки. Поэтому, являясь почти столь же устойчивым, как и метод вращений, метод отражений позволяет получить *QR*-разложение квадратной матрицы общего вида примерно за $\frac{4}{3}m^3$ арифметических операций, т. е. в полтора раза быстрее.

Поясним, как получается *QR*-разложение матрицы *A* с помощью преобразований Хаусхолдера. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots a_m)^T$ произвольный вектор, у которого одна из координат отлична от нуля. Вектор *w* в преобразовании Хаусхолдера выбираем так, чтобы обратились в нуль все координаты вектора Va кроме первой: $Va = ce_1 = c(1, 0, \ldots 0)^T$.

Поскольку ортогональное преобразование не меняет евклидову норму вектора, то $c = \|a\|_2$ и искомое преобразование таково, что

$$Va = (E - 2ww^T)a = a - 2(w, a)w = a - \alpha w = \|a\|_2 e_1 ,$$

где $\alpha = 2(w, a)$.

Таким образом, вектор w следует выбрать так: $w=\frac{v}{\|v\|_2}$, где $v=a\pm\|a\|_2 e_1$.

Взяв $a=a_1$, где a_1 первый из столбцов матрицы A, и положив $P_1=V$ получим

$$A^{(1)}=P_1 A=\begin{pmatrix} 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2m}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \ldots & a_{m\,m}^{(1)} \end{pmatrix} .$$

Далее, взяв вектор $a_2=(a_{22}^{(1)},\ldots a_m^{(1)})^T\in\mathbb{R}^{m-1}$, с помощью преобразования Хаусхолдера V_{m-1} в пространстве (m-1)-мерных векторов можно обнулить все координаты вектора $V_{m-1}a_2$ кроме первой. Положив

$$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_{m-1} \end{pmatrix}$$

получим:

$$A^{(2)}=P_2 A^{(1)}=P_2 P_1 A=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1m}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2m}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{2m}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} & \ldots & a_{m\,m}^{(2)} \end{pmatrix} .$$

Заметим, что первый столбец и первая строка матрицы при этом преобразовании не меняются. Выполнив m-1 шаг этого метода, приходим к верхней треугольной матрице

$$A^{(m-1)}=P_{m-1}\ldots P_2 P_1 A=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1m}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2m}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \ldots & a_{2m}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{m\,m}^{(m-1)} \end{pmatrix} .$$

Поскольку матрицы $P_1 P_2 \ldots P_{m-1}$ симметричны и ортогональны, то получено разложение

$$A=QR ,$$

где матрица $Q=P_1 P_2 \ldots P_{m-1}$ - ортогональная, а матрица $R=A^{(m-1)}$ - верхняя треугольная.

П р и м е р. Рассмотрим вектор $\mathbf{x}=(1,3,4)^T$, в котором требуется обнулить x_3. Рассуждаем следующим образом: x_2 – первый элемент, отличный от 0 и за которым требуется обнулить вектор, значит, матрица Хаусхолдера имеет вид $\mathbf{H}=\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{H}}_{2\times 2} \end{pmatrix}$, см. формулу (27).

По алгоритму $\beta=\operatorname{sign}(-x_2)\|\boldsymbol{\xi}\|_2=-5$, где $\boldsymbol{\xi}=(3,4)$. Значит, $\tilde{\mathbf{p}}=(\xi_1-\beta,\xi_2)=(8,4)$ и $\mathbf{p}=\tilde{\mathbf{p}}/\|\tilde{\mathbf{p}}\|_2=(2,1)^T/\sqrt{5}$.

Находим $\tilde{\mathbf{H}}=\mathbf{E}-2\mathbf{p}\mathbf{p}^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\frac{2}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0.6 & -0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$.

Результат: $\mathbf{x}'=\mathbf{H}\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & -0.8 \\ 0 & -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Проверка: $\|\mathbf{x}'\|_2=\|\mathbf{x}\|_2=\sqrt{26}$ – нормы совпадают.

П р и м е р. Приведём матрицу $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ к верхней треугольной форме посредством преобразований Хаусхолдера.

Р е ш е н и е. Обнулим поддиагональные компоненты первого столбца матрицы $\mathbf{X}$. Отражение производится в двумерной гиперплоскости из R^2, т.к. длина преобразуемого первого вектор-столбца с учётом диагонального элемента равна 3. Матрица преобразования Хаусхолдера $\mathbf{H}=\mathbf{E}-2\mathbf{p}\mathbf{p}^T$, где $\mathbf{p}=\tilde{\mathbf{p}}/\|\tilde{\mathbf{p}}\|_2$, $\tilde{\mathbf{p}}=\left(x_{11}-\beta, x_{21}, x_{31}\right)^T$ и $\beta=\operatorname{sign}\left(-x_{11}\right)\|\mathbf{x}_1\|_2$. Вычисляем:

1. $\mathbf{x}_1=\left(-2,1,0\right)^T$, $\|\mathbf{x}_1\|_2=\sqrt{5}$.
2. $\beta=\sqrt{5}$, $\tilde{\mathbf{p}}=\left(-\left(2+\sqrt{5}\right),1,0\right)^T$, $\|\tilde{\mathbf{p}}\|_2=\sqrt{10+4\sqrt{5}}$, $\mathbf{p}=\tilde{\mathbf{p}}/\|\tilde{\mathbf{p}}\|_2$.
3. $\mathbf{H}_1=\mathbf{E}-2\mathbf{p}\mathbf{p}^T=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
4. Имеем подобную матрицу $\tilde{\mathbf{X}}=\mathbf{H}_1\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 4/\sqrt{5} & 0\\ 0 & -2/\sqrt{5} & -\sqrt{5}\\ 0 & \boxed{1} & 2\end{pmatrix}$.

Обнулим поддиагональные компоненты второго столбца матрицы $\tilde{\mathbf{X}}$. Отражение производится в одномерной гиперплоскости из R^1, т.к. длина преобразуемого второго вектор-столбца с учётом диагонального элемента равна 2 (показан красным цветом). По формуле (25) матрица Хаусхолдера $\mathbf{H}_2=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{H}}_{2\times 2}\end{pmatrix}$, где $\tilde{\mathbf{H}}_{2\times 2}=\mathbf{E}-2\mathbf{p}\mathbf{p}^T$.

Вычисляем:

1. $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \left(-2/\sqrt{5}, 1\right)^T$, $\|\tilde{\mathbf{x}}_2\|_2 = 3/\sqrt{5}$.
2. $\beta = 3/\sqrt{5}$, $\tilde{\mathbf{p}} = \left(-\sqrt{5}, 1\right)^T$, $\|\tilde{\mathbf{p}}\|_2 = \sqrt{6}$, $\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}} / \|\tilde{\mathbf{p}}\|_2$.
3. $\tilde{\mathbf{H}}_{2\times 2} = \mathbf{E} - 2\mathbf{p}\mathbf{p}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{6}\begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$,

   откуда $\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & \sqrt{5}/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.
4. Получаем верхнюю треугольную матрицу

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}_2\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 4/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{5} & 4\sqrt{5}/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Восстановим последовательность матричных произведений $\mathbf{R} = \mathbf{H}_2\tilde{\mathbf{X}} = \overbrace{\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1}^{\mathbf{Q}^T}\mathbf{X}$, откуда

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -2/3\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} & \sqrt{5}/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $\mathbf{Q}^T\mathbf{X} = \mathbf{R}$ и $\mathbf{QR} = \mathbf{X}$.

Алгоритм метода Хаусхолдера:

```
def householder_reflection(A):
    «Трансформация домохозяйка» "" "
    (r, c) = np.shape(A)
    Q = np.identity(r)
    R = np.copy(A)
    for cnt in range(r - 1):
        x = R[cnt:, cnt]
        e = np.zeros_like(x)
        e[0] = np.linalg.norm(x)
        u = x - e
        v = u / np.linalg.norm(u)
        Q_cnt = np.identity(r)
        Q_cnt[cnt:, cnt:] -= 2.0 * np.outer(v, v)
        R = np.dot(Q_cnt, R)  # R=H(n-1)*...*H(2)*H(1)*A
        Q = np.dot(Q, Q_cnt)  # Q = H (N-1) * ... * H (2) * H (1) H -
матрица саморегулятора
    return (Q, R)

np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)
A = np.array([[6, 5, 0],[5, -1, 4],[5, 1, -14],[0, 4, 3]],dtype=float)

(Q, R) = gram_schmidt(A)
print(Q)
print(R)
print np.dot(Q,R)

(Q, R) = givens_rotation(A)
print(Q)
print(R)
```

3.4 Сингулярное разложение матрицы

Сингулярное разложение матрицы. Пусть A — вещественная матрица размера $n \times m$, где $n \geqslant m$. Тогда существуют такие ортогональные матрицы U и V размера $n \times n$ и $m \times m$ соответственно, что

$$A = U \Sigma V^T .$$

Здесь

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

диагональная матрица размера $n \times m$ с элементами $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_m \geqslant 0$ на главной диагонали.

Разложение называется сингулярным разложением матрицы A или *SVD*-разложением (singular value decomposition). Числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ называются сингулярными числами матрицы A. Эти числа определяются по матрице A однозначно и являются важными ее характеристиками. Например, число ненулевых сингулярных чисел совпадает с рангом матрицы.

Задание к лабораторной работе 3.

Рекомендации к выполнению лабораторной работы:

В 3 задании вектора-строки превращайте в вектора-столбцы транспонированием

В 4 задании обязательно отдельно выводить матрицы Q и R, а также проверить правильность их нахождения.

В 4 задании рекомендуется выполнить следующие действия.

1. Ввести свои данные
2. Найти для матрицы A QR разложение.
3. Проверить правильность полученного QR разложения
4. Решить систему $RX=Q^TB$, с помощью функции, разработанной во второй лабораторной рабаоте.
5. Проверить функцией solve найденный вектор X.

Вариант1.

1. Создать вектор строку 1х10 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_1$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти спектральную норму матрицы с помощью самостоятельно написанного алгоритма (можно использовать функцию для нахождения собственных значений), проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 4 по 10. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) переводит в вектор (1,2,3,0,0,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$4.4x_1 - 2.5x_2 + 19.2x_3 - 10.8x_4 = 4.3$$
$$5.5x_1 - 9.3x_2 - 14.2x_3 + 13.2x_4 = 6.8$$
$$7.1x_1 - 11.5x_2 + 5.3x_3 - 6.7x_4 = -1.8$$
$$14.2x_1 + 23.4x_2 - 8.8x_3 + 5.3x_4 = 7.2$$

Вариант2.

1. Создать вектор строку 1x10 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_2$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы $\|A\|_\infty$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 6 по 10. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) переводит в вектор (1,2,3,4,5,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$8.2x_1 - 3.2x_2 + 14.2x_3 + 14.8x_4 = -8.4$$
$$5.6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6.4x_4 = 4.5$$
$$5.7x_1 + 3.6x_2 - 12.4x_3 - 2.3x_4 = 3.3$$
$$6.8x_1 = 13.2x_2 - 6.3x_3 - 8.7x_4 = 14.3$$

Вариант3.

1. Создать вектор-строку 1x8 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_\infty$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти фробениусову норму матрицы $\|A\|_{Fro}$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет все его координаты, кроме первой. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8) переводит в вектор (1,0,0,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$5.7x_1 - 7.8x_2 - 5.6x_3 - 8.3x_4 = 2.7$$
$$6.6x_1 + 13.1x_2 - 6.3x_3 + 4.3x_4 = -5.5$$
$$14.7x_1 - 2.8x_2 + 5.6x_3 - 12.1x_4 = 8.6$$
$$8.5x_1 + 12.7x_2 - 23.7x_3 + 5.7x_4 = 14.7$$

Вариант4.

1. Создать вектор-столбец 10x1 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_\infty$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы $\|A\|_1$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 5 по 10. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) переводит в вектор (1,2,3,4,0,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$3.8x_1 + 14.2x_2 + 6.3x_3 - 15.5x_4 = 2.8$$
$$8.3x_1 - 6.6x_2 + 5.8x_3 + 12.2x_4 = -4.7$$
$$6.4x_1 - 8.5x_2 - 4.3x_3 + 8.8x_4 = 7.7$$
$$17.1x_1 - 8.3x_2 + 14.4x_3 - 7.2x_4 = 13.5$$

Вариант 5.

1. Создать вектор-столбец 10x1 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_3$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы Фробениуса $\|A\|_{Fro}$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 3 по 10. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) переводит в вектор (1,2,0,0,0,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$15.7x_1 + 6.6x_2 - 5.7x_3 + 11.5x_4 = -2.4$$
$$8.8x_1 - 6.7x_2 + 5.5x_3 - 4.5x_4 = 5.6$$
$$6.3x_1 - 5.7x_2 - 23.4x_3 + 6.6x_4 = 7.7$$
$$14.3x_1 + 8.7x_2 - 15.7x_3 - 5.8x_4 = 23.4$$

Вариант6.

1. Создать вектор-столбец 8x1 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_3$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти спектральную норму матрицы с помощью самостоятельно написанного алгоритма (можно использовать функцию для нахождения собственных значений), проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 4 по 8. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8) переводит в вектор (1,2,3,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$4.3x_1 - 12.1x_2 + 23.2x_3 - 14.1x_4 = 15.5$$
$$2.4x_1 - 4.4x_2 + 3.5x_3 + 5.5x_4 = 2.5$$
$$5.4x_1 + 8.3x_2 - 7.4x_3 - 12.7x_4 = 8.6$$
$$6.3x_1 - 7.6x_2 + 1.34x_3 + 3.7x_4 = 12.1$$

Вариант7.

1. Создать вектор-столбец 9x1 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_2$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы $\|A\|_\infty$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 3 по 9. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9) переводит в вектор (1,2,0,0,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$14.4x_1 - 5.3x_2 + 14.3x_3 - 12.7x_4 = 14.4$$
$$23.4x_1 - 14.2x_2 - 5.4x_3 + 2.1x_4 = 6.6$$
$$6.3x_1 - 13.2x_2 - 6.5x_3 + 14.3x_4 = 9.4$$
$$5.6x_1 + 8.8x_2 - 6.7x_3 - 23.8x_4 = 7.3$$

Вариант8.

1. Создать вектор-строку 1x5 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_5$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы $\|A\|_1$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет все его координаты, кроме первой Например, вектор (1,2,3,4,5) переводит в вектор (1,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$1.7x_1 + 10x_2 - 1.3x_3 + 2.1x_4 = 3.3$$
$$3.1x_1 + 1.7x_2 - 2.1x_3 + 5.4x_4 = 2.1$$
$$3.3x_1 - 7.7x_2 + 4.4x_3 - 5.1x_4 = 1.9$$
$$10x_1 - 20.1x_2 + 24x_3 + 1.7x_4 = 1.8$$

Вариант 9.

1. Создать вектор-столбец 10x1 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_3$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы Фробениуса $\|A\|_{Fro}$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 3 по 10. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) переводит в вектор (1,2,0,0,0,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$1.7x_1 - 1.8x_2 + 1.9x_3 - 57.4x_4 = 10$$
$$1.1x_1 - 4.3x_2 + 1.5x_3 - 1.7x_4 = 19$$
$$1.2x_1 + 1.4x_2 + 1.6x_3 + 1.8x_4 = 20$$
$$7.1x_1 - 1.3x_2 - 4.1x_3 + 5.2x_4 = 10$$

Вариант 10.

1. Создать вектор-строку 1x7 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_3$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы $\|A\|_\infty$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет координтаы, начиная с третьей Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7) переводит в вектор (1,2,0,0,0, 0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$6.1x_1 + 6.2x_2 - 6.3x_3 + 6.4x_4 = 6.5$$
$$1.1x_1 - 1.5x_2 + 2.2x_3 - 3.8x_4 = 4.2$$
$$5.1x_1 - 5.0x_2 + 4.9x_3 - 4.8x_4 = 4.7$$
$$1.8x_1 + 1.9x_2 + 2.0x_3 - 2.1x_4 = 2.2$$

Вариант11.

1. Создать вектор строку 1x10 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_1$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти спектральную норму матрицы с помощью самостоятельно написанного алгоритма (можно использовать функцию для нахождения собственных значений), проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 4 по 10. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) переводит в вектор (1,2,3,0,0,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$4.4x_1 - 2.5x_2 + 19.2x_3 - 10.8x_4 = 4.3$$
$$5.5x_1 - 9.3x_2 - 14.2x_3 + 13.2x_4 = 6.8$$
$$7.1x_1 - 11.5x_2 + 5.3x_3 - 6.7x_4 = -1.8$$
$$14.2x_1 + 23.4x_2 - 8.8x_3 + 5.3x_4 = 7.2$$

Вариант12.

1. Создать вектор строку 1x10 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_2$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы $\|A\|_\infty$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 6 по 10. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) переводит в вектор (1,2,3,4,5,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$8.2x_1 - 3.2x_2 +14.2x_3 +14.8x_4 = -8.4$$
$$5.6x_1 - 12x_2 +15x_3 - 6.4x_4 = 4.5$$
$$5.7x_1 + 3.6x_2 - 12.4x_3 - 2.3x_4 = 3.3$$
$$6.8x_1 = 13.2x_2 - 6.3x_3 -8.7x_4 = 14.3$$

Вариант13.

1. Создать вектор-строку 1x8 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_\infty$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти фробениусову норму матрицы $\|A\|_{Fro}$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет все его координаты, кроме первой. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8) переводит в вектор (1,0,0,0,0,0,0,0)

4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$5.7x_1 - 7.8x_2 - 5.6x_3 - 8.3x_4 = 2.7$$
$$6.6x_1 + 13.1x_2 - 6.3x_3 + 4.3x_4 = -5.5$$
$$14.7x_1 - 2.8x_2 + 5.6x_3 - 12.1x_4 = 8.6$$
$$8.5x_1 + 12.7x_2 - 23.7x_3 + 5.7x_4 = 14.7$$

Вариант14.

1. Создать вектор-столбец 10х1 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_\infty$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы $\|A\|_1$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 5 по 10. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) переводит в вектор (1,2,3,4,0,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$3.8x_1 + 14.2x_2 + 6.3x_3 - 15.5x_4 = 2.8$$
$$8.3x_1 - 6.6x_2 + 5.8x_3 + 12.2x_4 = -4.7$$
$$6.4x_1 - 8.5x_2 - 4.3x_3 + 8.8x_4 = 7.7$$
$$17.1x_1 - 8.3x_2 + 14.4x_3 - 7.2x_4 = 13.5$$

Вариант 15.

1. Создать вектор-столбец 10х1 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_3$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы Фробениуса $\|A\|_{Fro}$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 3 по 10. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) переводит в вектор (1,2,0,0,0,0,0,0,0,0)

4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$15.7x_1 + 6.6x_2 - 5.7x_3 + 11.5x_4 = -2.4$$
$$8.8x_1 - 6.7x_2 + 5.5x_3 - 4.5x_4 = 5.6$$
$$6.3x_1 - 5.7x_2 - 23.4x_3 + 6.6x_4 = 7.7$$
$$14.3x_1 + 8.7x_2 - 15.7x_3 - 5.8x_4 = 23.4$$

Вариант16.

1. Создать вектор-столбец 8x1 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_3$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти спектральную норму матрицы с помощью самостоятельно написанного алгоритма (можно использовать функцию для нахождения собственных значений), проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 4 по 8.
   Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8) переводит в вектор (1,2,3,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$4.3x_1 - 12.1x_2 + 23.2x_3 - 14.1x_4 = 15.5$$
$$2.4x_1 - 4.4x_2 + 3.5x_3 + 5.5x_4 = 2.5$$
$$5.4x_1 + 8.3x_2 - 7.4x_3 - 12.7x_4 = 8.6$$
$$6.3x_1 - 7.6x_2 + 1.34x_3 + 3.7x_4 = 12.1$$

Вариант17.

1. Создать вектор-столбец 9x1 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_2$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы $\|A\|_\infty$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 3 по 9.
   Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9) переводит в вектор (1,2,0,0,0,0,0,0,0)

4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$14.4x_1 - 5.3x_2 + 14.3x_3 - 12.7x_4 = 14.4$$
$$23.4x_1 - 14.2x_2 - 5.4x_3 + 2.1x_4 = 6.6$$
$$6.3x_1 - 13.2x_2 - 6.5x_3 + 14.3x_4 = 9.4$$
$$5.6x_1 + 8.8x_2 - 6.7x_3 - 23.8x_4 = 7.3$$

Вариант18.

1. Создать вектор-строку 1x5 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_5$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы $\|A\|_1$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет все его координаты, кроме первой Например, вектор (1,2,3,4,5) переводит в вектор (1,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$1.7x_1 + 10x_2 - 1.3x_3 + 2.1x_4 = 3.3$$
$$3.1x_1 + 1.7x_2 - 2.1x_3 + 5.4x_4 = 2.1$$
$$3.3x_1 - 7.7x_2 + 4.4x_3 - 5.1x_4 = 1.9$$
$$10x_1 - 20.1x_2 + 24x_3 + 1.7x_4 = 1.8$$

Вариант 19.

1. Создать вектор-столбец 10x1 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_3$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы Фробениуса $\|A\|_{Fro}$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 3 по 10. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) переводит в вектор (1,2,0,0,0,0,0,0,0,0)

4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$1.7x_1 - 1.8x_2 + 1.9x_3 - 57.4x_4 = 10$$
$$1.1x_1 - 4.3x_2 + 1.5x_3 - 1.7x_4 = 19$$
$$1.2x_1 + 1.4x_2 + 1.6x_3 + 1.8x_4 = 20$$
$$7.1x_1 - 1.3x_2 - 4.1x_3 + 5.2x_4 = 10$$

Вариант 20.

1. Создать вектор-строку 1x7 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_3$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы $\|A\|_\infty$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет координтаы, начиная с третьей Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7) переводит в вектор (1,2,0,0,0, 0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$6.1x_1 + 6.2x_2 - 6.3x_3 + 6.4x_4 = 6.5$$
$$1.1x_1 - 1.5x_2 + 2.2x_3 - 3.8x_4 = 4.2$$
$$5.1x_1 - 5.0x_2 + 4.9x_3 - 4.8x_4 = 4.7$$
$$1.8x_1 + 1.9x_2 + 2.0x_3 - 2.1x_4 = 2.2$$

Вариант21.

1. Создать вектор строку 1x10 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_1$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти спектральную норму матрицы с помощью самостоятельно написанного алгоритма (можно использовать функцию для нахождения собственных значений), проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 4 по 10. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) переводит в вектор (1,2,3,0,0,0,0,0,0,0)

4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$4.4x_1 - 2.5x_2 + 19.2x_3 - 10.8x_4 = 4.3$$
$$5.5x_1 - 9.3x_2 - 14.2x_3 + 13.2x_4 = 6.8$$
$$7.1x_1 - 11.5x_2 + 5.3x_3 - 6.7x_4 = -1.8$$
$$14.2x_1 + 23.4x_2 - 8.8x_3 + 5.3x_4 = 7.2$$

Вариант22.

1. Создать вектор строку 1x10 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_2$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы $\|A\|_\infty$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 6 по 10. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) переводит в вектор (1,2,3,4,5,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$8.2x_1 - 3.2x_2 +14.2x_3 +14.8x_4 = -8.4$$
$$5.6x_1 - 12x_2 +15x_3 - 6.4x_4 = 4.5$$
$$5.7x_1 + 3.6x_2 - 12.4x_3 - 2.3x_4 = 3.3$$
$$6.8x_1 = 13.2x_2 - 6.3x_3 -8.7x_4 = 14.3$$

Вариант23.

1. Создать вектор-строку 1x8 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_\infty$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти фробениусову норму матрицы $\|A\|_{Fro}$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().

3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет все его координаты, кроме первой. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8) переводит в вектор (1,0,0,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$5.7x_1 - 7.8x_2 - 5.6x_3 - 8.3x_4 = 2.7$$
$$6.6x_1 + 13.1x_2 - 6.3x_3 + 4.3x_4 = -5.5$$
$$14.7x_1 - 2.8x_2 + 5.6x_3 - 12.1x_4 = 8.6$$
$$8.5x_1 + 12.7x_2 - 23.7x_3 + 5.7x_4 = 14.7$$

Вариант24.

1. Создать вектор-столбец 10x1 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_\infty$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы $\|A\|_1$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 5 по 10. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) переводит в вектор (1,2,3,4,0,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$3.8x_1 + 14.2x_2 + 6.3x_3 - 15.5x_4 = 2.8$$
$$8.3x_1 - 6.6x_2 + 5.8x_3 + 12.2x_4 = -4.7$$
$$6.4x_1 - 8.5x_2 - 4.3x_3 + 8.8x_4 = 7.7$$
$$17.1x_1 - 8.3x_2 + 14.4x_3 - 7.2x_4 = 13.5$$

Вариант 25.

1. Создать вектор-столбец 10x1 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_3$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы Фробениуса $\|A\|_{Fro}$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().

3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 3 по 10. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) переводит в вектор (1,2,0,0,0,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$15.7x_1 + 6.6x_2 - 5.7x_3 + 11.5x_4 = -2.4$$
$$8.8x_1 - 6.7x_2 + 5.5x_3 - 4.5x_4 = 5.6$$
$$6.3x_1 - 5.7x_2 - 23.4x_3 + 6.6x_4 = 7.7$$
$$14.3x_1 + 8.7x_2 - 15.7x_3 - 5.8x_4 = 23.4$$

Вариант26.

1. Создать вектор-столбец 8x1 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_3$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти спектральную норму матрицы с помощью самостоятельно написанного алгоритма (можно использовать функцию для нахождения собственных значений), проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 4 по 8. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8) переводит в вектор (1,2,3,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$4.3x_1 - 12.1x_2 + 23.2x_3 - 14.1x_4 = 15.5$$
$$2.4x_1 - 4.4x_2 + 3.5x_3 + 5.5x_4 = 2.5$$
$$5.4x_1 + 8.3x_2 - 7.4x_3 - 12.7x_4 = 8.6$$
$$6.3x_1 - 7.6x_2 + 1.34x_3 + 3.7x_4 = 12.1$$

Вариант27.

1. Создать вектор-столбец 9x1 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_2$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы $\|A\|_\infty$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().

3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 3 по 9. Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9) переводит в вектор (1,2,0,0,0,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$14.4x_1 - 5.3x_2 + 14.3x_3 - 12.7x_4 = 14.4$$
$$23.4x_1 - 14.2x_2 - 5.4x_3 + 2.1x_4 = 6.6$$
$$6.3x_1 - 13.2x_2 - 6.5x_3 + 14.3x_4 = 9.4$$
$$5.6x_1 + 8.8x_2 - 6.7x_3 - 23.8x_4 = 7.3$$

Вариант28.

1. Создать вектор-строку 1x5 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_5$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы $\|A\|_1$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет все его координаты, кроме первой Например, вектор (1,2,3,4,5) переводит в вектор (1,0,0,0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$1.7x_1 + 10x_2 - 1.3x_3 + 2.1x_4 = 3.3$$
$$3.1x_1 + 1.7x_2 - 2.1x_3 + 5.4x_4 = 2.1$$
$$3.3x_1 - 7.7x_2 + 4.4x_3 - 5.1x_4 = 1.9$$
$$10x_1 - 20.1x_2 + 24x_3 + 1.7x_4 = 1.8$$

Вариант2 9.

1. Создать вектор-столбец 10x1 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_3$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы Фробениуса $\|A\|_{Fro}$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет его координаты с 3 по 10.

Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) переводит в вектор (1,2,0,0,0,0,0,0,0,0)

4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$1.7x_1 - 1.8x_2 + 1.9x_3 - 57.4x_4 = 10$$
$$1.1x_1 - 4.3x_2 + 1.5x_3 - 1.7x_4 = 19$$
$$1.2x_1 + 1.4x_2 + 1.6x_3 + 1.8x_4 = 20$$
$$7.1x_1 - 1.3x_2 - 4.1x_3 + 5.2x_4 = 10$$

Вариант 30.

1. Создать вектор-строку 1x7 из случайных целых чисел. Вычислить норму $\|x\|_3$ самостоятельно написанной функцией и проверить результат с помощью linalg.norm()
2. Создать матрицу из случайных целых чисел. Найти норму матрицы $\|A\|_\infty$ с помощью самостоятельно написанного алгоритма, проверить результат с помощью linalg.norm().
3. Для вектора, созданного в первом пункте, найти отражение Хаусхолдера, которое обнуляет координтаы, начиная с третьей Например, вектор (1,2,3,4,5,6,7) переводит в вектор (1,2,0,0,0, 0,0)
4. Решить систему, используя QR разложение, полученное преобразованием Хаусхолдера.

$$6.1x_1 + 6.2x_2 - 6.3x_3 + 6.4x_4 = 6.5$$
$$1.1x_1 - 1.5x_2 + 2.2x_3 - 3.8x_4 = 4.2$$
$$5.1x_1 - 5.0x_2 + 4.9x_3 - 4.8x_4 = 4.7$$
$$1.8x_1 + 1.9x_2 + 2.0x_3 - 2.1x_4 = 2.2$$