Лабораторная работа №5

Решение нелинейных уравнений. Решение систем нелинейных уравнений.

Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

Требуется построить последовательность $\{x_i,\ y_i\}$, которая при определенных условиях сходится к решению системы. Пусть задано начальное приближение $\{x_0,\ y_0\}$ (его можно определить графическим методом). Тогда очередное приближение:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \Delta x \\ y_1 = y_0 + \Delta y \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=0 \\ g(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=0 \end{cases}$$

Разложим функцию в окрестности некоторой фиксированной точки по формуле Тейлора:

$$\begin{cases} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + R = 0 \\ g(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = g(x_0,y_0) + \dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + R = 0 \end{cases}$$

Пренебрегая остаточным членом, получаем:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y = -f(x_0,y_0)\right) \\ \left(\dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y = -g(x_0,y_0)\right) \end{cases}$$

Введем матрицу Якоби:

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Тогда вместо системы нелинейных уравнений будем решать систему линейных уравнений относительно $\Delta x, \Delta y$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

А далее вычислять на каждой итерации:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \text{ и } y_{i+1} = y_i + \Delta y_i\,,$$

где x_i – текущее приближение к корню, x_{i+1} – последующее приближение, $\Delta x_i\,, \Delta y_i$ – приращения к очередным приближениям.

Процесс заканчивается, когда $\|x_{i+1} - x_i\| < \varepsilon$

Рассмотрим пример: Найти решение системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 3x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ -3x^2 + y = 0 \end{cases}$$

Как отмечено ранее, система имеет не более двух различных решений. Построим матрицу Якоби:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -6x \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1$$

Тогда будем решать следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x\Delta x + 2y\Delta y = 4 - x^2 - y^2 \\ -6x\Delta x + \Delta y = 3x^2 - y \end{cases} \qquad (8)$$

Определим начальные приближения (см. рис. 14): $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Подставим эти значения в систему уравнений (8). Тогда система (8) на первой итерации будет иметь вид:

$$\begin{cases} 2\Delta x + 4\Delta y = -1 \\ -6\Delta x + \Delta y = 1 \end{cases} \qquad (9)$$

Решать эту систему относительно неизвестных Δx, Δy можно любым известным способом. Получаем $\Delta x = -0{,}192$ и $\Delta y = -0{,}154$. Тогда $x_1 = x_0 + \Delta x = 1 - 0{,}192 = 0{,}808$ и $y_1 = y_0 + \Delta y = 2 - 0{,}154 = 1{,}846$. Новые приближения x_1, y_1 подставляем в систему (8) и, решая ее заново, найдем сначала Δx и Δy, а затем значения $x_2 = x_1 + \Delta x$, $y_2 = y_1 + \Delta y$ и т.д.

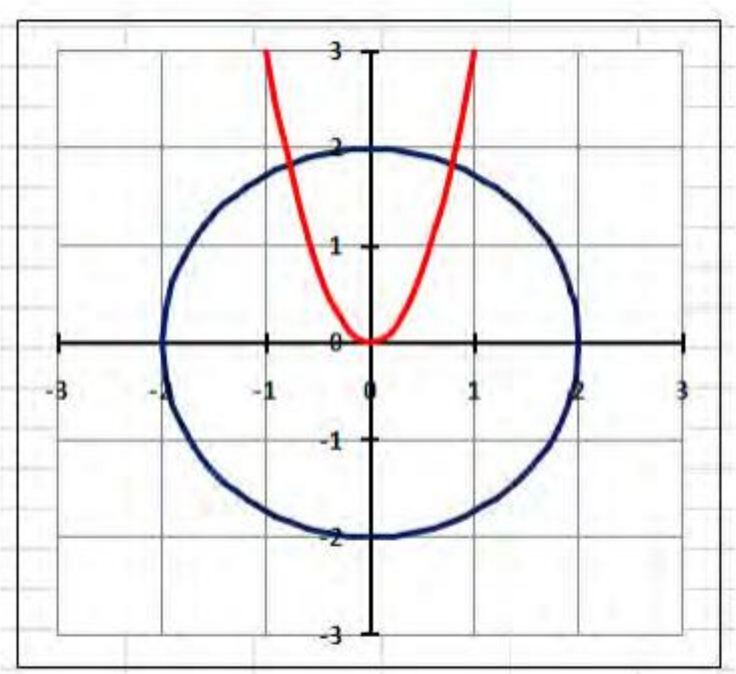

Рис. 14. Графики функций $x^2 + y^2 = 4$ и $y = 3x^2$

Рекомендации к выполнению работы.

Первое задание

1. Построить график функции. Убедиться, что на указанном интервале функция имеет единственный корень.
2. Проверить условия сходимости для каждого метода.
3. Вычислить с точностью до 0.001 значения корня.

   Подсказака. Для метода половинного деления использовать формулу

$$x_n = \frac{a+b}{2}$$

Для метода хорд использовать формулу $x_n = x_{n-2} - \frac{f(x_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$

Для метода Ньютона (касательных) $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

4. Стоп по условию $f(x_n) < \varepsilon$ или $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$
5. Вывести количество итераций.
6. Проверить полученное решение.
7. Сравнить методы.

Второе задание.

1. Построить графики функций. (вспомните первую лаб работу)
2. Определите начальное приближение исходя из графиков.
3. Вычислить производные, составить матрицу Якоби. (Вывести на экран)
4. Составить систему линейных уравнений относительно приращений x и y. (вывести на экран)
5. Решить линейную систему методом Крамера. (вывести на экран решение)
6. Составить итерационную систему. (вывести на экран)
7. Стоп по условию $\|x_n - x_{n-1}\| < \varepsilon$.
8. Вывести количество итераций.
9. Проверить полученные решения подстановкой и сравнить с решениями функцией Питон (nonlinsolve)

Задания к лабораторной работе.

1. Решить нелинейное уравнение на указанном отрезке используя методы половинного деления, метод хорд и метод Ньютона с $\varepsilon = 0.0001$

№ варианта	Функция	a	b
1	$2{,}74x^3 - 1{,}93x^2 - 15{,}28x - 3{,}72$	–3	4
2	$-1{,}38x^3 - 5{,}42x^2 + 2{,}57x + 10{,}95$	–5	3
3	$x^3 + 2{,}84x^2 - 5{,}606x - 14{,}766$	–4	3
4	$x^3 - 1{,}89x^2 - 2x + 1{,}76$	–3	4
5	$-2{,}7x^3 - 1{,}48x^2 + 19{,}23x + 6{,}35$	–4	4
6	$2x^3 + 3{,}41x^2 - 23{,}74x + 2{,}95$	–5	4
7	$x^3 + 2{,}28x^2 - 1{,}934x - 3{,}907$	–4	2
8	$3x^3 + 1{,}7x^2 - 15{,}42x + 6{,}89$	–4	3
9	$-1{,}8x^3 - 2{,}94x^2 + 10{,}37x + 5{,}38$	–5	4
10	$x^3 - 3{,}125x^2 - 3{,}5x + 2{,}458$	–3	5
11	$4{,}45x^3 + 7{,}81x^2 - 9{,}62x - 8{,}17$	–4	3
12	$x^3 - 4{,}5x^2 - 9{,}21x - 0{,}383$	–3	7
13	$x^3 + 4{,}81x^2 - 17{,}37x + 5{,}38$	–8	3
14	$2{,}3x^3 + 5{,}75x^2 - 7{,}41x - 10{,}6$	–4	3
15	$-2{,}4x^3 + 1{,}27x^2 + 8{,}63x + 2{,}31$	–2	3
16	$1{,}8x^3 - 2{,}47x^2 - 5{,}53x + 1{,}539$	–3	3
17	$x^3 - 3{,}78x^2 + 1{,}25x + 3{,}49$	–2	4
18	$-x^3 + 5{,}67x^2 - 7{,}12x + 1{,}34$	–1	5
19	$x^3 - 2{,}92x^2 + 1{,}435x + 0{,}791$	–1	3
20	$x^3 - 2{,}56x^2 - 1{,}325x + 4{,}395$	–2	3
21	$1{,}62x^3 - 8{,}15x^2 + 4{,}39x + 4{,}29$	–2	5
22	$2{,}335x^3 + 3{,}98x^2 - 4{,}52x - 3{,}11$	–4	2
23	$-1{,}85x^3 - 4{,}75x^2 - 2{,}53x + 0{,}49$	–3	2
24	$-1{,}78x^3 - 5{,}05x^2 + 3{,}64x + 1{,}37$	–5	2
25	$-2{,}75x^3 - 4{,}53x^2 + 17{,}87x - 1{,}94$	–4	3
26	$-3{,}64x^3 + 2{,}12x^2 + 10{,}73x + 1{,}49$	–3	3
27	$x^3 + 1{,}41x^2 - 5{,}472x - 7{,}38$	–4	3
28	$x^3 - 0{,}12x^2 - 1{,}475x + 0{,}192$	–2	2
29	$x^3 - 0{,}77x^2 - 1{,}251x + 0{,}43$	–2	2
30	$x^3 - 0{,}78x^2 - 0{,}826x + 0{,}145$	–2	2

2. Решить систему нелинейных уравнений методом Ньютона $\varepsilon = 0.0001$

1. $\begin{cases} \sin(x+1) - y &= 1,2; \\ 2x + \cos y &= 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sin(x) + 2y &= 2; \\ 2x + \cos(y-1) &= 0.7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sin(x+0.5) - y &= 1; \\ x + \cos(y-2) &= 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \cos(x+0.5) - y &= 2; \\ \sin y - 2x &= 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sin(y+1) - x &= 1,2; \\ 2y + \cos x &= 2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sin(x+1) - y &= 1,2; \\ 2x + \cos y &= 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sin(x) + 2y &= 2; \\ 2x + \cos(y-1) &= 0.7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \sin(x+0.5) - y &= 1; \\ x + \cos(y-2) &= 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \cos(x+0.5) - y &= 2; \\ \sin y - 2x &= 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sin(y+1) - x &= 1,2; \\ 2y + \cos x &= 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sin(x+1) - y &= 1,2; \\ 2x + \cos y &= 2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \sin(x) + 2y &= 2; \\ 2x + \cos(y-1) &= 0.7. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \sin(x+0.5) - y &= 1; \\ x + \cos(y-2) &= 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \cos(x+0.5) - y &= 2; \\ \sin y - 2x &= 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \sin(y+1) - x &= 1,2; \\ 2y + \cos x &= 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \sin(x+1) - y &= 1,2; \\ 2x + \cos y &= 2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \sin(x) + 2y &= 2; \\ 2x + \cos(y-1) &= 0.7. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \sin(x+0.5) - y &= 1; \\ x + \cos(y-2) &= 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \cos(x+0.5) - y &= 2; \\ \sin y - 2x &= 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \sin(y+1) - x &= 1,2; \\ 2y + \cos x &= 2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \sin(x+1) - y &= 1,2; \\ 2x + \cos y &= 2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \sin(x) + 2y &= 2; \\ 2x + \cos(y-1) &= 0.7. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \sin(x+0.5) - y &= 1; \\ x + \cos(y-2) &= 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \cos(x+0.5) - y &= 2; \\ \sin y - 2x &= 1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \sin(y+1) - x &= 1,2; \\ 2y + \cos x &= 2. \end{cases}$