Лабораторная работа №2.

Решение систем линейных уравнений - 2

3.1 Применение LU разложения.

LU - разложение может быть использовано не только для решения систем линейных уравнений.

LU – разложение может быть использовано для нахождения обратной матрицы.

Обращение матрицы A эквивалентно решению линейной системы

AX=E,

где X — неизвестная матрица, E — единичная матрица. Решение X этой системы является обратной матрицей A^{-1}.

Систему можно решить описанным выше методом LU-разложения.

Вычисление определителя матрицы

Имея LU-разложение матрицы A=LU, можно непосредственно вычислить её определитель:

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = l_{11} \cdot \ldots \cdot l_{nn} \cdot u_{11} \cdot \ldots u_{nn} = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn}$$

То есть определитель матрицы A равен произведению элементов по главной диагонали матрицы U .

3.2 QR разложение матрицы

Матрица A размера nxn с комплексными элементами может быть представлена в виде: A=QR, где Q — унитарная матрица размера nxn, а R — верхнетреугольная матрица размера nxn.

В частном случае, когда матрица A состоит из вещественных чисел, Q является ортогональной матрицей .

По аналогии, можно определить варианты этого разложения: QL-, RQ-, и LQ-разложения, где L — нижнетреугольная матрица.

Напомню, что матрица A является ортогональной матрицей, тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий: 1) строчки матрицы A образуют ортонормированный базис, 2) столбцы матрицы A образуют ортонормированный базис, 3) $A^{-1} = A^t$, 4) $A^{-1} \cdot A^t = E$

Нахождение QR разложения невырожденной матрицы A является эквивалентом метода ортогонализации Грама-Шмидта. Если рассматривать столбцы (строки) матрицы A как линейно независимую систему векторов, то к этой системе можно применить метод ортогонализации Грама-Шмидта, и получить матрицу, состоящую из векторов ортонормированного базиса (матрицу Q). Тогда для нахождения матрицы R достаточно найти произведение AQ^t (это следует из того, что $A = QR \Rightarrow AQ^{-1} = R \Rightarrow R = AQ^t$.

3.3 Разложение Холецкого

3.4. Решение системы линейных уравнений методом простых итераций

Рассмотрим один из простых методов – метод простой итерации.

Пусть дана система линейных уравнений, имеющая вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Эта система эквивалентна векторной (матричной) записи A·X =B

Данную систему можно преобразовать к виду X = C·X+F, где C – некоторая матрица, F - вектор – столбец, то есть система принимает форму

$$X = \Phi(X) \qquad (2),$$

где Φ(X) = C·X+F.

Пусть X_0 – начальное приближение (произвольным образом заданный вектор-решение X). Получим последовательность:

$X_1 = \Phi(X_0)$

$X_2 = \Phi(X_1)$

…..

$X_n = \Phi(X_{n-1})$

Аналогичную последовательность получается при решении нелинейного уравнения методом простой итерации x = φ(x).

Возникает только вопрос о том, как привести систему (1) к виду удобному для итераций виду (2). В общем случае это не простая задача, требующая специальных знаний, но в некоторых случаях можно поступить очень просто. Например, можно сделать такие преобразования:

AX = B заменить на (A - E +E) X = B ,то есть из матрицы A вычли и прибавили единичную матрицу.

(A – E)·X +E ·X = B

E·X = -(A-E)·X+B

X = (E-A)X +B

Можно использовать другой способ (метод Якоби).

Из первого уравнения системы (1) выразим неизвестное x_1, из второго x_2 и так далее. В результате получим систему:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2) \\ \ldots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1} + b_n) \end{cases} \qquad (3)$$

Или X = CX +F, где C матрица nxn, F – вектор-столбец. На главной диагонали матрицы C стоят нули, а ненулевые элементы выражают по

формулам: $c_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}},\ f_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$ (4)

Для выполнения данного преобразования необходимо чтобы диагональные элементы исходной матрицы не были нулевыми. Если матрица преобразована к виду (3) по данным формулам (4), то метод итераций называют методом Якоби.

Для системы (1) метод итерации сходится, если модули диагональных

коэффициентов для каждого уравнения системы больше суммы модулей всех остальных коэффициентов (не считая свободных членов).

В качестве критерия окончания расчета (достижения заданной точности) можно использовать простое соотношение $|X_{n+1} - X_n| < \varepsilon$.

Пример. Решим систему уравнений с точностью $\varepsilon = 0{,}001$

$$\begin{cases} 6{,}25x_1 - x_2 + 0{,}5x_3 = 7{,}5 \\ -x_1 + 5x_2 + 2{,}12x_3 = -8{,}68 \\ 0{,}5x_1 + 2{,}12x_2 + 3{,}6x_3 = -0{,}24 \end{cases}$$

Перепишем систему пересчитав коэффициенты по формулам (3).

$$\begin{cases} x_1 = \qquad 0{,}16x_2 - 0{,}08x_3 + 1{,}2 \\ x_2 = 0{,}2x_1 - \qquad 0{,}424x_3 - 1{,}786 \\ x_3 = -0{,}1389x_1 - 0{,}58889x_2 \qquad - 0{,}0667 \end{cases}$$

Здесь $C = \begin{pmatrix} 0 & 0.16 & -0.08 \\ 0.2 & 0 & -0.424 \\ -0.1389 & -0.5889 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1.2 \\ -1.786 \\ -0.0667 \end{pmatrix}$.

За начальное приближение примем $\vec{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Результаты итераций запишем в таблицу.

n	0	1	2	3	4
$x_1^{(n)}$	0	1,2	0,9276	0,902	0,8449
$x_2^{(n)}$	0	-1,736	-1,4677	-1,885	-1,8392
$x_3^{(n)}$	0	-0,0667	0,789	0,6688	0,9181
$\left\lvert \vec{X}^{(n+1)} - \vec{X}^{(n)} \right\rvert$		1,736	0,8557	0,4173	0,2493

n	…	12	13	14	15
$x_1^{(n)}$	…	0,8006	0,8003	0,8002	0,8001
$x_2^{(n)}$	…	-1,9985	-1,9993	-1,9995	-1,9998
$x_3^{(n)}$	…	0,9987	0,9990	0,9995	0,9997
$\left\lvert \vec{X}^{(n+1)} - \vec{X}^{(n)} \right\rvert$	…	0,0018	0,0008	0,0005	0,0003

После 15 итераций достигнута искомая точность, и можно записать решение. $x_1 = 0{,}8$; $x_2 = -2{,}0$; $x_3 = 1{,}0$.

3.5 Метод Зейделя

Модификацией метода простых итераций Якоби можно считать метод Зейделя. В методе Якоби на (k+1)-ой итерации значения x_i^{k+1} (i = 1, 2, …, n) вычисляютсяподстановкой в правую часть системы (2) вычисленных на предыдущей итерации значений x_i^{k}.

В методе Зейделя при вычислении x_i^{k+1} используются значенитя x_1^{k+1}, x_2^{k+1},

x_{i-1}^{k+1}, уже найденные на (k+1)-ой итерации, т.е. (k+1)-е приближение строится следующим образом:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = c_{12}x_2^k + \ldots c_{1n}x_n^k + f_1 \\ x_2^{k+1} = c_{21}x_1^{k+1} + c_{23}x_3^k + \ldots + c_{2n}x_n^k + f_2 \\ x_3^{k+1} = c_{31}x_1^{k+1} + c_{32}x_2^{k+1} + c_{34}x_4^k + \ldots + f_3 \\ x_n^{k+1} = c_{n1}x_1^{k+1} + \ldots + c_{nn-1}x_{n-1}^{k+1} + f_n \end{cases} \quad (5)$$

Запишем нижнюю и верхнюю треугольные матрицы:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \ldots & 0 \end{pmatrix} \text{ и } C_2 = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 0 & c_{23} & \ldots & c_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & & c_{3n} \\ \ldots & & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда перепишем (5) в матричном виде:

$$X^{k+1} = C_1 X^{k+1} + C_2 X^k + F \qquad (6)$$

Достаточным условием сходимости метода Зейделя является выполнение неравенства: $\max|c_{ij}|<1$. Это означает, что для сходимости метода Зейделя достаточно, чтобы максимальный по модулю элемент матрицы C =C1+C2 был меньше единицы.

Критерий окончания расчета можно взять такой же, как и в методе Якоби. Метод Зейделя, как правило, сходится быстрее, чем метод Якоби. Однако возможны ситуации, когда метод Якоби сходится, а метод Зейделя сходится медленнее или вообще расходится.

Пример.

Решим систему с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ методом Зейделя.

$$\begin{cases} 3{,}2x_1 - 11{,}5x_2 + 3{,}8x_3 = 2{,}8 \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 - 6{,}4x_3 = -6{,}5 \\ 2{,}4x_1 + 7{,}2x_2 - 1{,}2x_3 = 4{,}5 \end{cases}$$

Чтобы выполнить условия сходимости к первому уравнению прибавим третье, а второе и третье поменяем местами.

$$\begin{cases} 5{,}6x_1 - 4{,}3x_2 + 2{,}6x_3 = 7{,}3 \\ 2{,}4x_1 + 7{,}2x_2 - 1{,}2x_3 = 4{,}5 \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 - 6{,}4x_3 = -6{,}5 \end{cases}$$

Выразим неизвестные:

$$\begin{cases} x_1 = \qquad 0{,}77x_2 - 0{,}46x_3 + 1{,}3 \\ x_2 = -0{,}333x_1 - \qquad 0{,}1667x_3 + 0{,}625 \\ x_3 = 0{,}125x_1 + 0{,}203x_2 \qquad + 1{,}015625 \end{cases}$$

Результаты итераций запишем в таблицу.

n	0	1	2	3	4
$x_1^{(n)}$	0	1,303571	0,884673	1,139681	1,06956
$x_2^{(n)}$	0	0,190476	0,532986	0,450852	0,476757
$x_3^{(n)}$	0	1,217262	1,234472	1,249664	1,246161
$\left\|\vec{X}^{(n+1)} - \vec{X}^{(n)}\right\|$		1,793685	0,948818	0,183948	0,186726

n	…	7	8	9	10
$x_1^{(n)}$	…	1,086559	1,085969	1,086147	1,086094
$x_2^{(n)}$	…	0,470637	0,470851	0,470786	0,470806
$x_3^{(n)}$	…	1,247043	1,247013	1,247022	1,247019
$\left\|\vec{X}^{(n+1)} - \vec{X}^{(n)}\right\|$	…	0,004575	0,001381	0,000417	0,000126

После 10 итераций достигнута искомая точность, и можно записать решение. $x_1 = 1{,}086$; $x_2 = 0{,}47$; $x_3 = 1{,}247$.

Вопросы к лабораторной работе

1. Определение линейной системы уравнений.
2. Методы решения систем – метод Крамера, метод Гаусса, метод обратной матрицы.
3. Верхнетреугольная, нижнетреугольная, унитреугольная матрицы.
4. Определение LU разложения.
5. Определение QR разложения.
6. Применение LU разложения.
7. Применение QR разложения.
8. Определение ортогональной матрицы.

9. Определение унитарной матрицы.
10. Определение ортонормированного и ортогонального базисов.

Рекомендации по выполнению лабораторной работы.

В 3 задании рекомендуется использовать функции np.tril и np.triu.

#np.triu и np.tril - для создания треугольных матриц

numpy.tril(m, k=0) – возвращает копию массива m, с элементами выше k-той диагонали равными нулю. По умолчанию k=0 (главная диагональ), k<0 диагональ ниже главной, k>0 диагональ выше главной диагонали.

np.triu

В 3 задании для решения использовать или алгоритм прямой подстановки, приведенной в исходном файле, или разработать свой алгоритм прямой подстановки для верхнетреугольной матрицы и для не унитреугольной матрицы.

Функцию solve использовать для проверки своего решения.

В 4 задании обязательно отдельно выводить матрицы L и U, а также проверить правильность их нахождения.

В 4 задании рекомендуется выполнить следующие действия.

1. Ввести свои данные
2. Найти для матрицы A LU разложение.
3. Проверить правильность полученного LU разложения
4. Решить систему L(UX)= B , где UX положить за неизвестный вектор Y (то есть решить систему LY = B) методом прямой подстановки, приведенной в моем файле.
5. Решить систему UX = Y собственным разработанным алгоритмом.
6. Проверить функцией solve найденный вектор X.

Задание к лабораторной работе 2.

Вариант1.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [1,7] размера 10 . Найти ее определитель, используя LU разложение.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод простых итераций с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций
$$2.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1$$
$$3.5x_1 - 1.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7$$
$$4.1x_1 + 5.8x_2 - 1.7x_3 = 0.8$$

Вариант2.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2,4) размера 5 . Найти матрицу, обратную к этой матрице с помощью LU разложения. Проверить вычисления непосредственным умножением на матрицу А.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод Зейделя, с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций
$$3.75x_1 - 0.28x_2 + 0.17x_3 = 0.75$$
$$2.11x_1 - 0.11x_2 - 0.12x_3 = 1.11$$
$$0.22x_1 - 3.17x_2 + 1.81x_3 = 0.05$$

Вариант3.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [5,10] размера 5 . Найти ее определитель, используя LU разложение.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод простых итераций с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций
$$3.1x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.2$$
$$1.9x_1 + 3.1x_2 +2.1x_3 = 2.1$$
$$7.5x_1 + 3.8x_2 + 4.8x_3 = 5.6$$

Вариант4.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (1, 5) размера 5 . Найти матрицу, обратную к этой матрице с помощью LU разложения. Проверить вычисления непосредственным умножением на матрицу А.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод Зейделя, с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$0.21x_1 - 0.18x_2 + 0.75x_3 = 0.11$$
$$0.13x_1 + 0.75x_2 - 0.11x_3 = 2.00$$
$$3.01x_1 - 0.33x_2 + 0.11x_3 = 0.13$$

Вариант5.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-7,-1] размера 6 . Найти ее определитель, используя LU разложение.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод простых итераций с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$3.3x_1 + 2.1x_2 + 2.8x_3 = 0.8$$
$$4.1x_1 + 3.7x_2 + 4.8x_3 = 5.7$$
$$2.7x_1 + 1.8x_2 + 1.1x_3 = 3.2$$

Вариант 6.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (3,8) размера 6 . Найти матрицу, обратную к этой матрице с помощью LU разложения. Проверить вычисления непосредственным умножением на матрицу А.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод Зейделя, с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$3.15x_1 - 1.72x_2 - 1.23x_3 = 2.15$$
$$0.72x_1 + 0.67x_2 + 1.18x_3 = 1.43$$
$$2.57x_1 - 1.34x_2 - 0.68x_3 = 1.03$$

Вариант7.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [3,8] размера 6 . Найти ее определитель, используя LU разложение.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод простых итераций с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций
$$3.2x_1 - 2.5x_2 + 3.7x_3 = 6.5$$
$$0.5x_1 + 0.34x_2 + 1.7x_3 = -0.24$$
$$1.6x_1 + 2.3x_2 - 1.5x_3 = 4.3$$

Вариант 8.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2, 5) размера 4 . Найти матрицу, обратную к этой матрице с помощью LU разложения. Проверить вычисления непосредственным умножением на матрицу A.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод Зейделя, с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций
$$0.21x_1 - 0.18x_2 + 0.75x_3 = 0.11$$
$$0.13x_1 + 0.75x_2 - 0.11x_3 = 2.00$$
$$3.01x_1 - 0.33x_2 + 0.11x_3 = 0.13$$

Вариант 9.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [2,8] размера 7 . Найти ее определитель, используя LU разложение.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод простых итераций с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$3.6x_1 + 1.8x_2 - 4.7x_3 = 3.8$$
$$2.7x_1 - 3.6x_2 + 1.9x_3 = 0.4$$
$$1.5x_1 + 4.5x_2 + 3.3x_3 = -1.6$$

Вариант10.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2,5) размера 4 . Найти матрицу, обратную к этой матрице с помощью LU разложения. Проверить вычисления непосредственным умножением на матрицу А.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод Зейделя, с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$1.24x_1 + 0.62x_2 - 0.95x_3 = 1.43$$
$$2.15x_1 - 1.18x_2 + 0.57x_3 = 2.43$$
$$1.72x_1 - 0.83x_2 + 1.57x_3 = 3.88$$

Вариант11.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [6,12) размера 5 . Найти ее определитель, используя LU разложение.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод простых итераций с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$2.7x_1 + 0.9x_2 - 1.5x_3 = 3.5$$
$$4.5x_1 - 2.8x_2 + 6.7x_3 = 2.6$$
$$5.1x_1 + 3.7x_2 - 1.4x_3 = -0.14$$

Вариант12.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2, 5) размера 3 . Найти матрицу, обратную к этой матрице с помощью LU разложения. Проверить вычисления непосредственным умножением на матрицу А.

2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод Зейделя, с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$0.43x_1 + 1.24x_2 - 0.58x_3 = 2.71$$
$$0.74x_1 + 0.83x_2 + 1.17x_3 = 1.26$$
$$1.43x_1 - 1.58x_2 + 0.83x_3 = 1.03$$

Вариант13.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-6,-1] размера 4 . Найти ее определитель, используя LU разложение.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод простых итераций с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$4.5x_1 - 3.5x_2 + 7.4_3 = 2.5$$
$$3.1x_1 - 0.6x_2 - 2.3x_3 = -1.5$$
$$0.8x_1 + 7.4x_2 - 0.5x_3 = 6.4$$

Вариант 14.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (4, 9) размера 4 . Найти матрицу, обратную к этой матрице с помощью LU разложения. Проверить вычисления непосредственным умножением на матрицу A.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод Зейделя, с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$2.47x_1 + 0.65x_2 - 1.88x_3 = 1.24$$
$$1.34x_1 + 1.17x_2 + 2.54x_3 = 2.35$$
$$0.86x_1 - 1.73x_2 - 1.08x_3 = 3.15$$

Вариант 15.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [3,9] размера 5 . Найти ее определитель, используя LU разложение.

2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод простых итераций с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$5.6x_1 + 2.7x_2 - 1.7x_3 = 1.9$$
$$3.4x_1 - 3.6x_2 - 6.7x_3 = -2.4$$
$$0.8x_1 + 1.3x_2 + 3.7x_3 = 1.2$$

Вариант 16.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2, 5) размера 4 . Найти матрицу, обратную к этой матрице с помощью LU разложения. Проверить вычисления непосредственным умножением на матрицу A.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод Зейделя, с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$0.46x_1 + 1.72x_2 + 2.53x_3 = 2.44$$
$$1.53x_1 - 2.32x_2 - 1.83x_3 = 2.83$$
$$0.75x_1 + 0.86x_2 + 3.72x_3 = 1.06.$$

Вариант17.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [1,7] размера 10 . Найти ее определитель, используя LU разложение.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод простых итераций с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$2.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1$$
$$3.5x_1 - 1.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7$$
$$4.1x_1 + 5.8x_2 - 1.7x_3 = 0.8$$

Вариант18.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2,4) размера 5 . Найти матрицу, обратную к этой матрице с помощью

LU разложения. Проверить вычисления непосредственным умножением на матрицу А.

2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод Зейделя, с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$
\begin{aligned}
3.75x_1 - 0.28x_2 + 0.17x_3 &= 0.75\\
2.11x_1 - 0.11x_2 - 0.12x_3 &= 1.11\\
0.22x_1 - 3.17x_2 + 1.81x_3 &= 0.05
\end{aligned}
$$

Вариант19.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [5,10] размера 5 . Найти ее определитель, используя LU разложение.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод простых итераций с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$
\begin{aligned}
3.1x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 &= 0.2\\
1.9x_1 + 3.1x_2 + 2.1x_3 &= 2.1\\
7.5x_1 + 3.8x_2 + 4.8x_3 &= 5.6
\end{aligned}
$$

Вариант20.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (1, 5) размера 5 . Найти матрицу, обратную к этой матрице с помощью LU разложения. Проверить вычисления непосредственным умножением на матрицу А.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод Зейделя, с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$
\begin{aligned}
0.21x_1 - 0.18x_2 + 0.75x_3 &= 0.11\\
0.13x_1 + 0.75x_2 - 0.11x_3 &= 2.00\\
3.01x_1 - 0.33x_2 + 0.11x_3 &= 0.13
\end{aligned}
$$

Вариант21.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-7,-1] размера 6 . Найти ее определитель, используя LU разложение.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод простых итераций с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$
\begin{aligned}
3.3x_1 + 2.1x_2 + 2.8x_3 &= 0.8\\
4.1x_1 + 3.7x_2 + 4.8x_3 &= 5.7\\
2.7x_1 + 1.8x_2 + 1.1x_3 &= 3.2
\end{aligned}
$$

Вариант 22.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (3,8) размера 6 . Найти матрицу, обратную к этой матрице с помощью LU разложения. Проверить вычисления непосредственным умножением на матрицу A.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод Зейделя, с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$
\begin{aligned}
3.15x_1 - 1.72x_2 - 1.23x_3 &= 2.15\\
0.72x_1 + 0.67x_2 + 1.18x_3 &= 1.43\\
2.57x_1 - 1.34x_2 - 0.68x_3 &= 1.03
\end{aligned}
$$

Вариант23.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [3,8] размера 6 . Найти ее определитель, используя LU разложение.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод простых итераций с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$3.2x_1 - 2.5x_2 + 3.7x_3 = 6.5$$
$$0.5x_1 + 0.34x_2 + 1.7x_3 = -0.24$$
$$1.6x_1 + 2.3x_2 - 1.5x_3 = 4.3$$

Вариант 24.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2, 5) размера 4 . Найти матрицу, обратную к этой матрице с помощью LU разложения. Проверить вычисления непосредственным умножением на матрицу A.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод Зейделя, с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$0.21x_1 - 0.18x_2 + 0.75x_3 = 0.11$$
$$0.13x_1 + 0.75x_2 - 0.11x_3 = 2.00$$
$$3.01x_1 - 0.33x_2 + 0.11x_3 = 0.13$$

Вариант 25.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [2,8] размера 7 . Найти ее определитель, используя LU разложение.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод простых итераций с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$3.6x_1 + 1.8x_2 - 4.7x_3 = 3.8$$
$$2.7x_1 - 3.6x_2 + 1.9x_3 = 0.4$$
$$1.5x_1 + 4.5x_2 + 3.3x_3 = -1.6$$

Вариант26.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2,5) размера 4 . Найти матрицу, обратную к этой матрице с помощью LU разложения. Проверить вычисления непосредственным умножением на матрицу A.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.

3. Решить систему, используя метод Зейделя, с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$1.24x_1 + 0.62x_2 - 0.95x_3 = 1.43$$
$$2.15x_1 - 1.18x_2 + 0.57x_3 = 2.43$$
$$1.72x_1 - 0.83x_2 + 1.57x_3 = 3.88$$

Вариант27.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [6,12) размера 5 . Найти ее определитель, используя LU разложение.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод простых итераций с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$2.7x_1 + 0.9x_2 - 1.5x_3 = 3.5$$
$$4.5x_1 - 2.8x_2 + 6.7x_3 = 2.6$$
$$5.1x_1 + 3.7x_2 - 1.4x_3 = -0.14$$

Вариант28.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2, 5) размера 3 . Найти матрицу, обратную к этой матрице с помощью LU разложения. Проверить вычисления непосредственным умножением на матрицу А.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод Зейделя, с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$0.43x_1 + 1.24x_2 - 0.58x_3 = 2.71$$
$$0.74x_1 + 0.83x_2 + 1.17x_3 = 1.26$$
$$1.43x_1 - 1.58x_2 + 0.83x_3 = 1.03$$

Вариант29.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-6,-1] размера 4 . Найти ее определитель, используя LU разложение.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод простых итераций с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$4.5x_1 - 3.5x_2 + 7.4_3 = 2.5$$
$$3.1x_1 - 0.6x_2 - 2.3x_3 = - 1.5$$
$$0.8x_1 + 7.4x_2 - 0.5x_3 = 6.4$$

Вариант 30.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (4, 9) размера 4 . Найти матрицу, обратную к этой матрице с помощью LU разложения. Проверить вычисления непосредственным умножением на матрицу А.
2. Найдите QR разложение матрицы, созданной в пункте 1. Проверьте правильность найденного разложения 1) с помощью умножения Q на R 2) с помощью функции np.linalg. qr.
3. Решить систему, используя метод Зейделя, с точностью до 10^{-3}, приведя к виду, удобному для итераций

$$2.47x_1 + 0.65x_2 - 1.88x_3 = 1.24$$
$$1.34x_1 + 1.17x_2 + 2.54x_3 = 2.35$$
$$0.86x_1 - 1.73x_2 - 1.08x_3 = 3.15$$