Лабораторная работа №4. Интреполяционные многочлены Ньютона и Лагранжа.

Интерполя́ция, интерполи́рование (от лат. inter–polis — «разглаженный, подновлённый, обновлённый; преобразованный») — в вычислительной математике нахождение неизвестных промежуточных значений некоторой функции, по имеющемуся дискретному набору её известных значений, определенным способом. Термин «интерполяция» впервые употребил Джон Валлис в своём трактате «Арифметика бесконечных» (1656).

Рассмотрим систему несовпадающих точек x_i, $i = 1..N$ из некоторой области D. Пусть значения функции f известны только в этих точках: $f(x_i) = y_i$

Задача интерполяции состоит в поиске такой функции F из заданного класса функций, что $F(x_i) = y_i$

Точки x_i, $i = 1..N$ называют узлами интерполяции, а их совокупность — интерполяционной сеткой.

Пары (x_i, y_i) называют точками данных или базовыми точками.

Разность между «соседними» значениями $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — шагом интерполяционной сетки. Он может быть как переменным, так и постоянным.

Функцию F(x) — интерполирующей функцией или интерполянтом.

4.1 Интерполяционный многочлен Лагранжа для неравноотстоящих узлов

Пусть функция *f* задана таблицей 1.

Таблица 1 - Значения функции f(x)

x	x_o	x_1	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	...	y_n

Построим интерполяционный многочлен $L_n(x)$, степень которого не больше n и для которого выполнены условия

$$F(x_o)=y_0,\ F(x_1)=y_1,\ \ldots.\ F(x_n)=y_n, \quad (1)$$

Будем искать $L_n(x)$ в виде

$$L_n(x)=l_0(x)+l_1(x)+l2(x)+\ldots\ldots\ldots+l_n(x), \quad (2)$$

где $l_i(x)$ — многочлен степени n, причем

$$l_i(x_k)=\begin{cases} y_i,\ \text{если}\ i=k \\ 0,\ \text{если}\ i\neq k \end{cases} \quad (3)$$

Очевидно, что требование (3) с учетом (2) вполне обеспечивает выполнение условий (1).

Многочлены $l_i(x)$ составим следующим способом:

$$l_i(x)=c_i(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n), \quad (4)$$

где c_i - постоянный коэффициент, значение которого найдем из первой части условия (3):

$$c_i=\frac{y_i}{(x_i-x_0)*\ldots*(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})*\ldots*(x_i-x_n)}$$

(заметим, что ни один множитель в знаменателе не равен нулю).

Подставим c_i в (4) и далее с учетом (2) окончательно имеем:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i * \frac{(x - x_0)*...*(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})*...*(x - x_n)}{(x_i - x_0)*...*(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})*...*(x_i - x_n)} \qquad (5)$$

В общем виде он записывается следующим образом:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i * \prod_{j=0}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad при \quad i \neq j\ , \qquad (6)$$

Это и есть интерполяционный многочлен Лагранжа для неравностоящих узлов.

2.1.1 Пример вычисления значения функции, заданной таблицей в точке с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа для неравностоящих узлов

Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной таблицей 2

Таблица 2 - Исходные данные

	x_0	x_1	x_2
x	1	3	4
f(x)	12	4	6

Из таблицы 2 следует, что $n=2$ (т. е. степень многочлена будет не выше, чем вторая); здесь $x_o=1$, $x_1=3$, $x_2=4$. Используя формулу (5), получаем:

$$L_2(x) = 12\frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} + 4\frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} + 6\frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} =$$

$$= 2(x^2 - 7x + 12) - 2(x^2 - 5x + 4) + 2(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 12x + 22$$

Таким образом, приближающая функция для функции f заданной таблицей 2 имеет следующий вид $F(x)=2x^2-12x+22$.

4.2 Интерполяционный полином Ньютона для равноотстоящих узлов

4.2.1 Первая интерполяционная формула Ньютона (интерполяция вперед)

Пусть для функции, заданной таблицей с постоянным шагом, составлена таблица конечных разностей таблица 3.

Таблица 3 - Таблица конечных разностей

x	y	Δy_1	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	…
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	…	
x_3	y_3	Δy_3	…		
x_4	y_4	…			
…	…				

Будем искать интерполяционный многочлен в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots +a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}). \qquad (12)$$

Это многочлен n-й степени. Значения коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ найдем из условия совпадения значений исходной функции и многочлена в узлах. Полагая $x=x_0$, из (12) находим $y_o=Pn(x_0)=a_o$, откуда $a_o=y_0$. Далее, придавая x значения x_1 и x_2, последовательно получаем:

$$y_1 =P_n(x_1)=a_0 +a_1(x_1 -x_0),$$

откуда $a_1 = \dfrac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{\Delta y_0}{h}$;

$$y_2 =P_n(x_2)=a_0 +a_1(x_2 -x_0)+a_2(x_2 -x_0)(x_2 -x_1),$$

$$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - y_0 - \dfrac{\Delta y_0 * 2 * h}{h}}{1 * 2 * h^2} = \frac{(y_2 - y_0) - 2y_1 + 2y_0}{2!\,h^2} =$$

$$= \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2!\,h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}$$

Далее, проведя аналогичные выкладки, можно получить:

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3},$$

в общем случае выражение для a_k будет иметь вид:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!\,h^k}. \tag{13}$$

Подставим теперь (13) в выражение для многочлена (12):

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x-x_0)\times\text{KK}$$
$$\ldots\times(x-x_{n-1}). \tag{14}$$

Практически эта формула применяется в несколько ином виде.

Положим, $\frac{x-x_0}{h}=t$ т. е. $x=x_o+ht$.

Тогда:

$$\frac{x-x_1}{h} = \frac{x-x_0-h}{h} = t-1,$$
$$\frac{x-x_2}{h} = \frac{x-x_0-2h}{h} = t-2$$

и т. д.

Окончательно имеем:

$$P_n(x) = P_n(x_0+th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots +$$
$$+ \frac{t(t-1)*\ldots*(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \tag{14}$$

Формула (14) называется *первой интерполяционной формулой Ньютона.* Эта формула применяется для интерполирования в начале отрезка интерполяции, когда t мало по абсолютной величине. Первую интерполяционную формулу Ньютона называют по этой причине формулой для интерполирования вперед.

4.2.2. Вторая интерполяционная формула Ньютона (интерполяция назад)

Когда значение аргумента находится ближе к концу отрезка интерполяции, применять первую интерполяционную формулу становится невыгодно. В этом случае применяется формула для интерполирования назад—*вторая интерполяционная формула Ньютона,* которая отыскивается в виде:

$$P_n(x)=a_0-a_1(x-x_n)+a_2(x-x_n)(x-x_{n-1})+\ldots+a_n(x-x_n)\times\ldots\times(x-x_1), \quad (15)$$

Как и для первой формулы Ньютона, коэффициенты $a_0, a_1,\ldots a_n$ находятся из условия совпадения значений функции и интерполяционного многочлена в узлах интерполяции:

$$a_k=\frac{\Delta^k y_k}{k!\,h^k}, \qquad (16)$$

Подставляя (16) в (15) и переходя к переменной $\frac{x-x_n}{h}=t$ получим окончательный вид второй интерполяционной формулы Ньютона:

$$P_n(x)=P_n(x_n+th)=y_n+t\Delta y_{n-1}+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\Lambda$$
$$+\frac{t(t+1)\times\ldots\times(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad (17)$$

4.2.3 Пример вычисления значения функции с помощью интеполяционной формулы Ньютона

Пусть функция задана следующей таблицей 4:

Таблица 4 – Исходные данные

x	y
1.215	0.106044
1.220	0.113276
1.225	0.119671
1.230	0.125324
1.235	0.130328
1.240	0.134776
1.245	0..38759
1.250	0.142367
1.255	0.145688
1.260	0148809

Определить значение функции *y(x)* при следующих значениях аргумента:
1) $x_1 = 1.2273$; 3) $x_2 = 1.253$;
2) $x_3 = 1.210$; 4) $x_4 = 1.2638$;
Составим таблицу конечных разностей (таблица 5).

Таблица 5 – Таблица конечных разностей

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1.215	0.106044	0.007232	-0.000837	0.000095
1.220	0.113276	0.006395	-0.000742	0.000093
1.225	0.119671	0.005653	-0.000649	0.000093
1.230	0.125324	0.005004	-0.000556	0.000091
1.235	0.130328	0.004448	-0.000465	0.000090
1.240	0.134776	0.0003983	-0.000375	0.000088
1.245	0.138759	0.003608	-0.000287	0.000087
1.250	0.142367	0.003321	-0.000200	-
1.255	0.145688	0.003121	-	-
1.260	0.148809	-	-	-

При составлении таблицы разностей ограничиваемся разностями третьего порядка, так как они практически постоянны.

Вычислим значения функции в заданных точках.

Для вычисления значений функции при x = 1,2273 и x = 1,210 воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования вперед:

$$y(x) \approx y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

где $t=(x-x_0)/h$

1)Если x=1.2273, то примем x_0=1.225, тогда

$$t = \frac{1.2273 - 1.225}{0.005} = 0.46,$$

$$y(1.2273) \approx 0.119671 + 0.46 \cdot 0.005653 + \frac{0.46(-0.54)}{2}(-0.000649) +$$
$$\frac{0.46(-0.54)(-1.54)}{6} 0.000093 == 0.119671 + 0.0026004 + 0.0000806 + 0.0000059 =$$
$$0.1223579 \approx 0.122358.$$

2)Если x=1.210, то примем x_0=1.215; тогда

$$t = \frac{1.210 - 1.215}{0.005} = -1$$

$$y(1.210) \approx 0.106044 + (-1) \cdot 0.007232 + \frac{(-1)(-2)}{2}(-0.000837) +$$
$$\frac{(-1)(-2)(-3)}{6} 0.000095 = 0.097880.$$

Для вычисления значений функции при x=1.253 и x=1.2638 воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования назад:

$$y(x) \approx y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots\ldots,$$

где $t=(x-x_n)/h$.

3)Если x=1.253, то примем x_n=1.255; тогда

$$t = \frac{1.252 - 1.255}{0.005} = -0.4$$

$$y(1.253) \approx 0.145688 + (-0.4) \cdot 0.003321 + \frac{(-0.4)0.6}{2}(-0.000287) +$$
$$\frac{(-0.4)0.6 \cdot 1.6}{6} 0.000088 = 0.145688 - 0.0013284 + 0.0000344 - 0.0000056 =$$
$$0.1443884 \approx 0.144388.$$

4)Если x=1.2638, то примем x_n=1.260, тогда

$$t = \frac{1.2638 - 0.260}{0.005} = 0.76,$$

$$y(1.2638) \approx 0.148809 + 0.76 \cdot 0.003121 + \frac{0.76 \cdot 1.76}{2}(-0.000200) +$$
$$\frac{0.76 \cdot 1.76 \cdot 2.76}{6} 0.000087 = 0.148809 + 0.0023720 - 0.0001328 + 0.0000535 =$$
$$0.1511007 \approx 0.151101.$$

Задание к лабораторной работе 4.

1.Используя интерполяционную формулу Лагранжа для неравноотстоящих узлов а) построить многочлен Лагранжа (вывести формулу) б) вывести график в)вычислить значения функции при данных значениях аргумента

2. Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона вычислить указанные значения функции при данных значениях аргумента

Рекомендации

В первом задании одно из заданий – построить многочлен Лагранжа. Наиболее легко это сделать с помощью библиотеки SymPy

https://pythonru.com/biblioteki/sympy-v-python

Все необходимые знания:

В [1]:
```
# подключим библиотеку Симпой
import sympy as sm
```

В [2]:
```
#заменим x на символ
x = sm.Symbol('x')
```

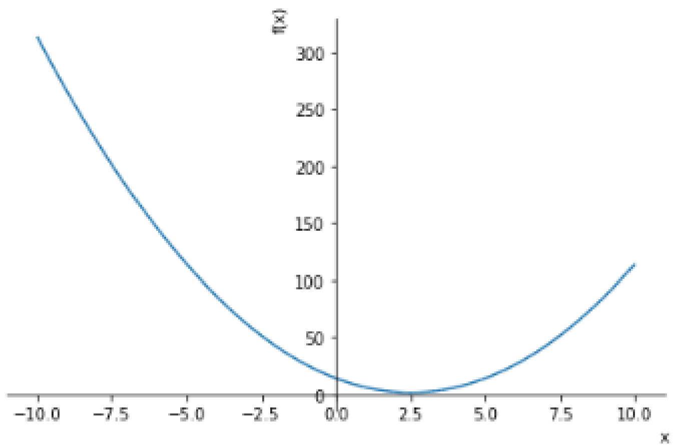
В [3]:
```
# строим нужный многочлен (здесь нужно применить процесс построения многочлена Лагранжа)
F = (x - 1)* (x - 2) + (x - 3) * (x - 4)
#полюбуемся на построенный многочлен
F
```

Out[3]: $(x-4)(x-3)+(x-2)(x-1)$

В [4]:
```
#Можем раскрыть скобки и привести подобные
F = sm.expand(F)
F
```

Out[4]: $2x^2 - 10x + 14$

В [6]:
```
#можем построить график (но здесь можно и матплотлибом строить)
sm.plot(F)
```



Out[6]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x5f09658>

В [7]:
```
#можем подставить нужное значение, я подставлю x = -5
F.subs(x, -5)
```

Out[7]: 114

Вариант1.

Таблица 1

1.

X	Y
0.43	1.63597
0.48	1.73234
0.55	1.87686
0.62	2.03345
0.70	2.22846
0.75	2.35973

Значение функции в точках:

X
0.702
0.512
0.645
0.736
0.608

Таблица 1

x	y
1.415	0.888551
1.420	0.889599
1.425	0.890637
1.430	0.891667
1.435	0.892687
1.440	0.893698
1.445	0.894700
1.450	0.895693
1.455	0.896677
1.460	0.897653
1.465	0.898619

Значение функции в точках

1.4161	1.4625	1.4135	1.470

Вариант2.

Таблица 2

X	Y
0.02	1.02316
0.08	1.09590
0.12	1.14725
0.17	1.21483
0.23	1.30120
0.30	1.40976

Значение функции в точках :

X
0.102
0.114
0.125
0.203
0.154

Таблица 2

x	y
0.101	1.26183
0.106	1.27644
0.111	1.29122
0.116	1.306617
0.121	1.32130
0.126	1.33660
0.131	1.35207
0.136	1.36773
0.141	1.38357
0.146	1.39959
0.151	1.41579

Значение функции в точках

0.1026	0.1440	0.099	0.161

Вариант3.

Таблица 3

X	Y
0.35	2.73951
0.41	2.30080
0.47	1.96864
0.51	1.78776
0.56	1.59502
0.64	1.34310

Значение функции в точках:

X
0.526
0.453
0.482
0.552
0.436

Таблица 3

x	y
0.15	0.860708
0.20	0.818731
0.25	0.778801
0.30	0.740818
0.35	0.704688
0.40	0.670320
0.45	0.637628
0.50	0.606531
0.55	0.576950
0.60	0.548812
0.65	0.522046
0.70	0.496585
0.75	0.4722367

0.1511	0.7250	0.1430	0.80

Вариант4.

Таблица 4

X	Y
0.41	2.57418
0.46	2.32513
0.52	2.09336
0.60	1.86203
0.65	1,74926
0.72	1,62098

Значение функции в точках:

X
0,616
0,478
0,665
0,537
0,673

Таблица 4

x	y
0.180	5.61543
0.185	5.46693
0.190	5.32634
0.195	5.19304
0.200	5.06649
0.205	4.94619
0.210	4.83170
0.215	4.72261
0.220	4.61855
0.225	4.51919
0.230	4.42422
0.235	4.33337

Значения функции в точках

x_1	x_2	x_3	x_4
0.1817	0.2275	0.175	0.2375

Вариант 5.

Таблица 5

X	Y
0.68	0.80866
0.73	0.89492
0.80	1.02964
0.88	1.20966
0.93	1.34087
0.99	1.52368

Значение функции в точках

X
0.896
0.812
0.774
0.955
0.715

Таблица 5

x	y
3.50	33.1154
3.55	34.8133
3.60	36.5982
3.65	38.4747
3.70	40.4473
3.75	42.5211
3.80	44.7012
3.85	46.9931
3.90	49.4024
3.95	51.5982
4.00	57.3975
4.10	60.3403
4.15	63.4340
4.20	66.6863

Значения функции в точках

№ вари-анта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
5	3.522	4.176	3.475	4.25

Вариант6.

Таблица 6

X	Y
0.11	9.05421
0.15	6.61659
0.21	4.69170
0.29	3.35106
0.35	2.73951
0.40	2.36522

Значения функции в точках:

X
0.314
0.235
0.332
0.275
0.186

Таблица 6

x	y
0.115	8.65729
0.120	8.29329
0.125	7.95829
0.130	7.64893
0.135	7.36235
0.140	7.09613
0.145	6.84815
0.150	6.61659
0.155	6.39986
0.160	6.19658
0.165	6.00551
0.170	5.82558
0.175	5.65583
0.180	5.49543

№ варианта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
6	0.1217	0.1736	0.1141	0.185

Вариант7.

X	Y
0.43	1.63597
0.48	1.73234
0.55	1.87686
0.62	2.03345
0.70	2.22846
0.75	2.35973

Значения функции в точках

X
0.702
0.512
0.645
0.736
0.608

Таблица 7

x	y
1.340	4.25562
1.345	4.35325
1.350	4.45522
1.355	4.56184
1.360	4.67344
1.365	4.79038
1.370	4.91306
1.375	5.04192
1.380	5.17744
1.385	5.32016
1.390	5.47069
1.395	5.62968

№ варианта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
7	1.3617	1.3921	1.3359	1.400

Вариант8.

X	Y
0.35	2.73951
0.41	2.30080
0.47	1.96864
0.51	1.78776
0.56	1.59502
0.64	1.34310

Значения функции в точках

X
0.526
0.453
0.482
0.552
0.436

Таблица 8

x	y
0.01	0.991824
0.06	0.951935
0.11	0.913650
0.16	0.876905
0.21	0.841638
0.26	0.807789
0.31	0.775301
0.36	0.744120
0.41	0.714193
0.46	0.685470
0.51	0.657902
0.56	0.631442

№ варианта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
8	0.027	0.525	0.008	0.61

Вариант 9.

X	Y
0.41	2.57418
0.46	2.32513
0.52	2.09336
0.60	1.86203
0.65	1,74926
0.72	1,62098

Значения функции в точках

X
0,616
0,478
0,665
0,537
0,673

Таблица 9

x	y
0.15	4.4817
0.16	4.9530
0.17	5.4739
0.18	6.0496
0.19	6.6859
0.20	7.3891
0.21	8.1662
0.22	9.0250
0.23	9.9742
0.24	11.0232
0.25	12.1825
0.26	13.4637

№ варианта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
9	0.1539	0.2569	0.14	0.2665

Вариант 10.

X	Y
0.68	0.80866
0.73	0.89492
0.80	1.02964
0.88	1.20966
0.93	1.34087
0.99	1.52368

Значения функции в точках

X
0.896
0.812
0.774
0.955
0.715

Таблица 10

x	y
0.45	20.1946
0.46	19.6133
0.47	18.9425
0.48	18.1746
0.49	17.3010
0.50	16.3123
0.51	15.1984
0.52	13.9484
0.53	12.5508
0.54	10.9937
0.55	9.2647
0.56	7.3510

№ варианта	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
10	0.455	0.5575	0.44	0.5674