

Содержание

Задание	2
Результаты работы	4
Код программы.....	18

Задание

1. Реализовать одномерное финитное преобразование Фурье с помощью применения алгоритма БПФ.
2. Построить график гауссова пучка e^{-x^2} . Здесь и далее для каждого графика следует строить отдельно графики амплитуды и фазы.
3. Убедиться в правильности реализации преобразования, подав на вход гауссов пучок e^{-x^2} – собственную функцию преобразования Фурье. На выходе тоже должен получиться гауссов пучок (построить график на правильной области определения $[-\tilde{b}, \tilde{b}]$. Рекомендуемая входная область: $[-a, a] = [-5, 5]$.
4. Реализовать финитное преобразование Фурье стандартным методом численного интегрирования (например, методом прямоугольников). Важно: необходимо вычислить интеграл для каждого дискретного значения u , чтобы получить результат в виде вектора. На вход преобразования вновь следует подавать гауссов пучок.
5. Построить результаты двух разных реализаций преобразования на одном изображении (одно для амплитуды, одно для фазы) и убедиться, что они совпадают.
6. Используя первую реализацию преобразования, подать на вход световое поле, отличное от гауссова пучка, в соответствии со своим вариантом. Построить графики самого пучка и результата преобразования.
7. Рассчитать аналитически результат преобразования своего варианта поля и построить график на одной системе координат с результатом, полученным в предыдущем пункте. Аналитический расчёт должен быть помещён в отчёт. Прикрепление в отчёт фотографии или скана вывода формулы не является допустимым. В некоторых вариантах после преобразования могут появиться особые точки. Значения в них нужно вычислять отдельно, в том числе в коде программы.
8. Исследовать параметры N и M алгоритма БПФ. Для этого сначала необходимо варьировать N , задавая при этом $M = N$. Что происходит при увеличении и уменьшении N ? После этого следует зафиксировать N и изменять $M > N$. Что происходит при увеличении M ? Выводы следует поместить в таблицу 1. Подкрепить выводы графиками. Важно: число M должно оставаться степенью двойки, чтобы график фазы содержал минимальное число ошибок.
9. Выполнить пункты 1-3 и 6 для двумерного случая. Графики изменятся на двумерные изображения, одномерные функции следует заменить на двумерные, равные произведению соответствующих одномерных функций. Например, гауссов пучок поменяется на $e^{-x^2-y^2}$. Изображение следует строить не в виде 3D-графиков, а в

виде цветовой схемы (см. примеры двумерных пучков в лекциях). Рассчитать аналитически результат двумерного преобразования и нарисовать изображения его амплитуды и фазы. Двумерное преобразование следует реализовывать по предложенному выше алгоритму, а именно: применить одномерный алгоритм к строкам и столбцам матрицы. Если реализовывать алгоритм через двумерное БПФ, то добавление огромного числа нулей к матрице не будет оптимальным, сведёт на нет все преимущества БПФ, а потому будет поводом для снижения оценки за работу.

Вариант 15:

15	$\exp(-\pi i x) + \exp(3\pi i x)$	Для аналитики применить финитное преобразование.
----	-----------------------------------	---

Результаты работы

Задание 1-3:

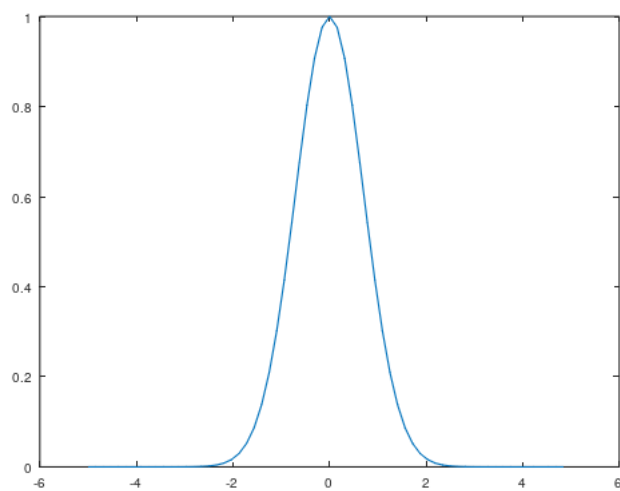


Рисунок 1 – График амплитуды гауссова пучка

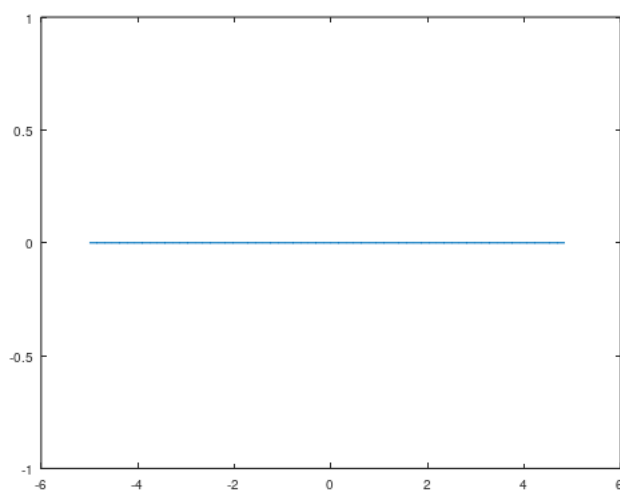


Рисунок 2 – График фазы гауссова пучка

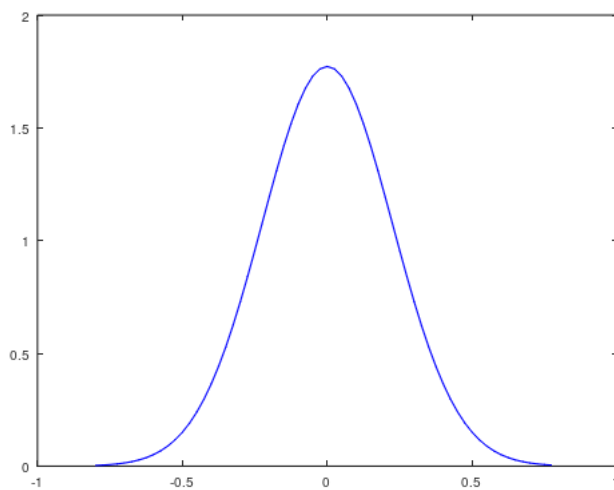


Рисунок 3 – График амплитуды БПФ гауссова пучка

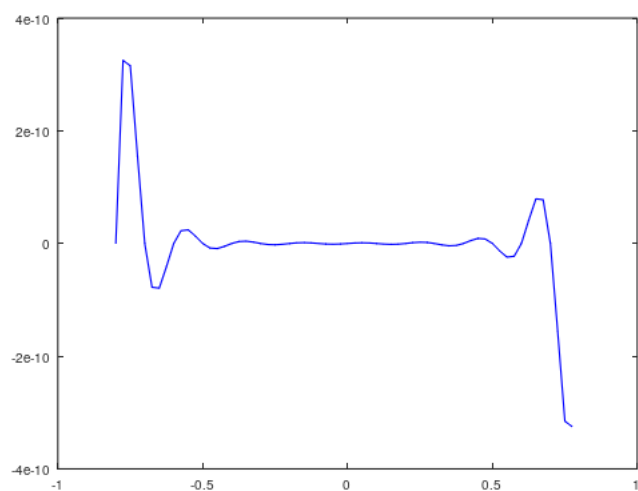


Рисунок 4 – График фазы БПФ гауссова пучка

Задание 4-5:

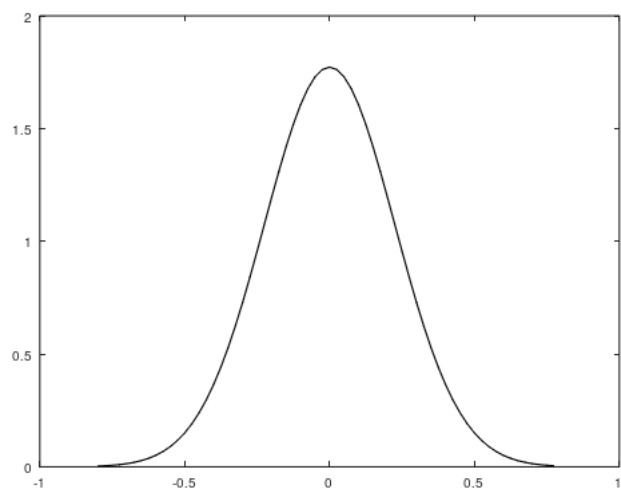


Рисунок 5 – График амплитуды преобразования стандартным методом численного интегрирования

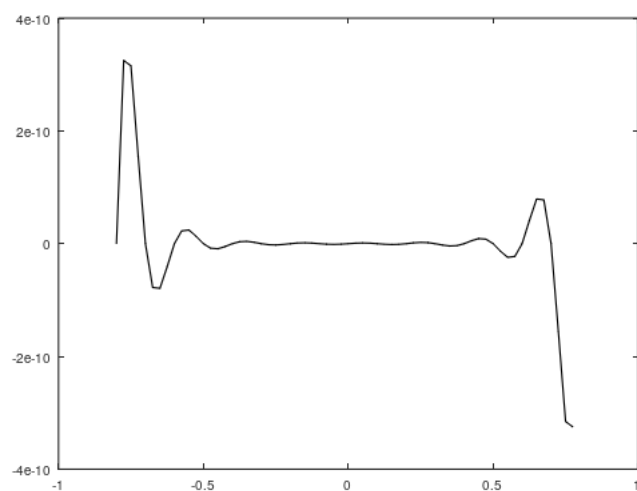


Рисунок 6 – График фазы преобразования стандартным методом численного интегрирования

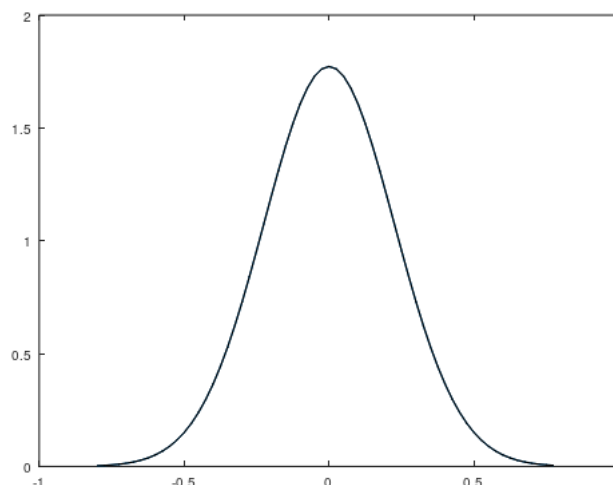


Рисунок 7 – Графики амплитуд результатов БПФ и преобразования стандартным методом численного интегрирования

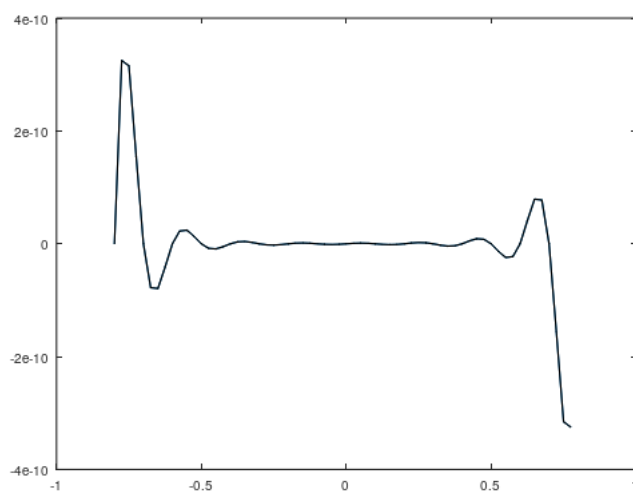


Рисунок 8 – Графики фаз результатов БПФ и преобразования стандартным методом численного интегрирования

Исходя из рисунков 7 и 8, где синим цветом изображены графики, полученные с помощью БПФ, а черным – с использованием стандартного метода численного интегрирования, можно сделать вывод, что результаты двух преобразований совпадают.

Задание 6:

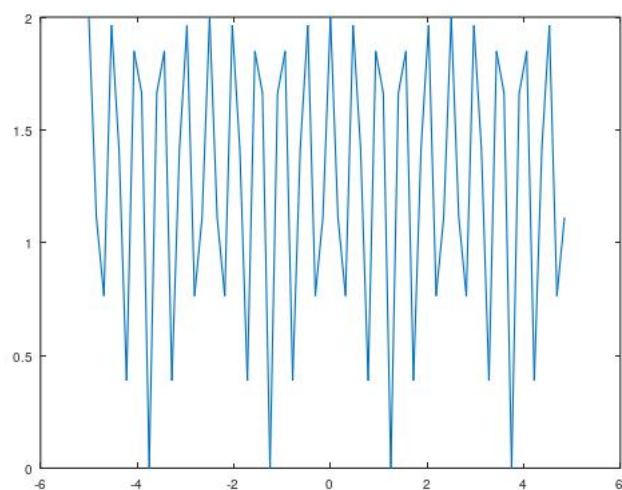


Рисунок 9 – График амплитуды светового поля

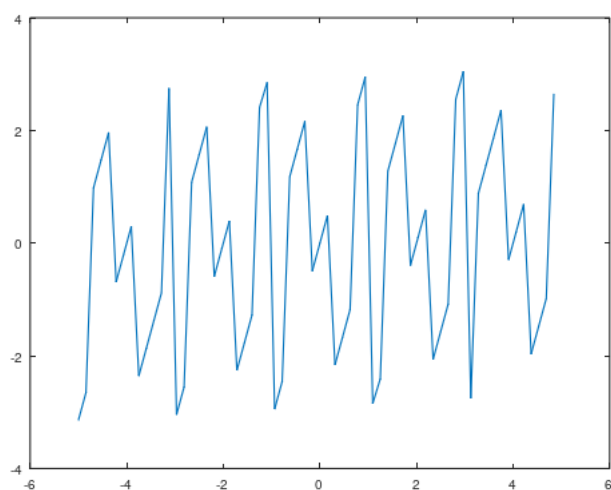


Рисунок 10 – График фазы светового поля

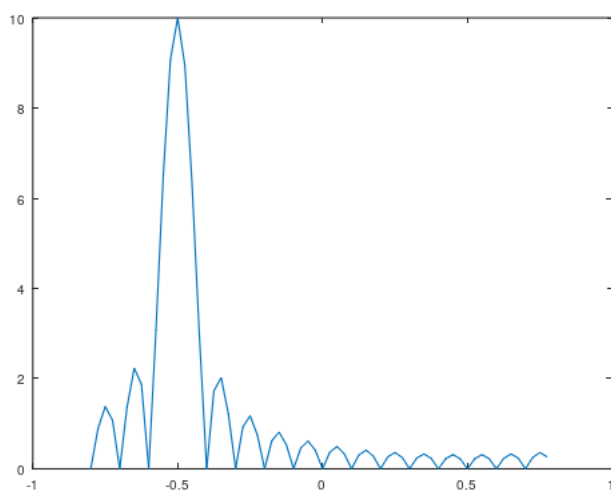


Рисунок 11 – График амплитуды БПФ светового поля

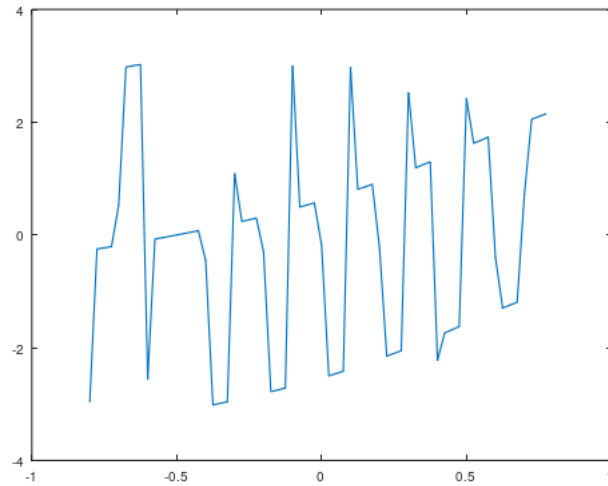


Рисунок 12 – График фазы БПФ светового поля

Задание 7:

$$\begin{aligned}
 \int_{-5}^5 (e^{-\pi i x} + e^{3\pi i x}) e^{-2\pi i x} dx &= \int_{-5}^5 (e^{-\pi i x(1+2u)} + e^{\pi i x(3-2u)}) dx = \\
 &= \left(\frac{e^{-\pi i x(1+2u)}}{-\pi i(1+2u)} + \frac{e^{\pi i x(3-2u)}}{\pi i(3-2u)} \right) \Big|_{-5}^5 = -\frac{e^{-5\pi i(1+2u)}}{\pi i(1+2u)} + \frac{e^{5\pi i(3-2u)}}{\pi i(3-2u)} + \\
 &+ \frac{e^{5\pi i(1+2u)}}{\pi i(1+2u)} - \frac{e^{-5\pi i(3-2u)}}{\pi i(3-2u)} = \frac{(4ui - 2i)e^{10\pi i u}}{4\pi u^2 - 4\pi u - 3\pi} - \frac{4ui - 2i}{(4\pi u^2 - 4\pi u - 3\pi)e^{10\pi i u}} \\
 &= \frac{i}{\pi} \left(\frac{4u - 2}{4u^2 - 4u - 3} \right) (e^{10\pi i u} - e^{-10\pi i u}).
 \end{aligned}$$

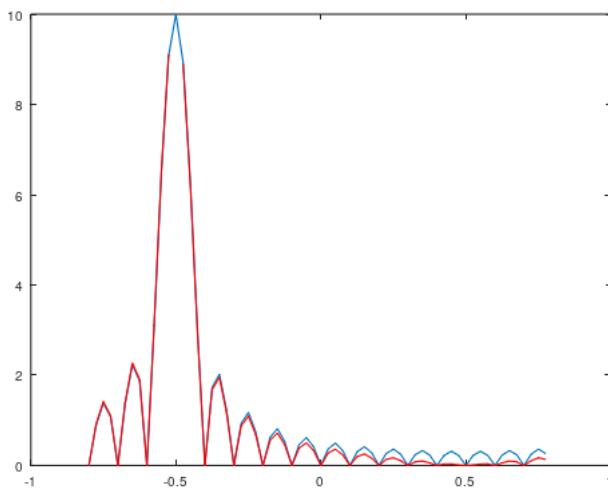


Рисунок 13 – Графики амплитуды результатов преобразований светового поля

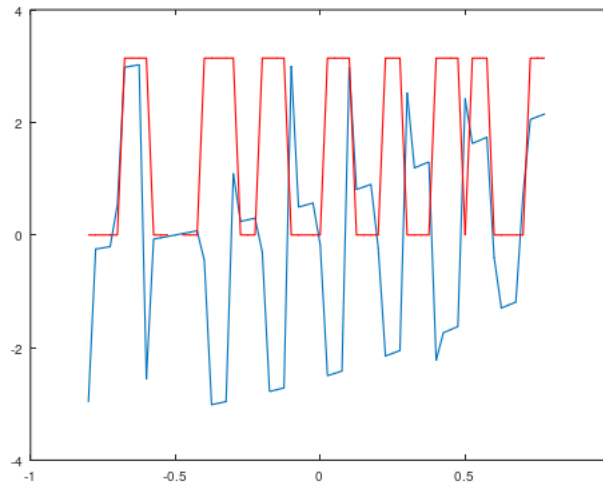


Рисунок 14 – Графики фазы результатов преобразований светового поля

На рисунках 13 и 14 представлены графики амплитуд и фаз соответственно, где синим цветом изображены графики, полученные с помощью БПФ, а красным с помощью аналитического решения.

Задание 8:

Сначала будем увеличивать N и брать $M = N$.

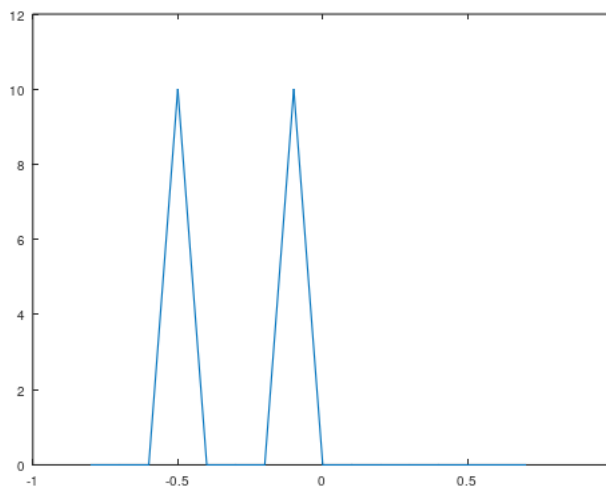


Рисунок 15 – График амплитуды БПФ светового поля при $N = 16$

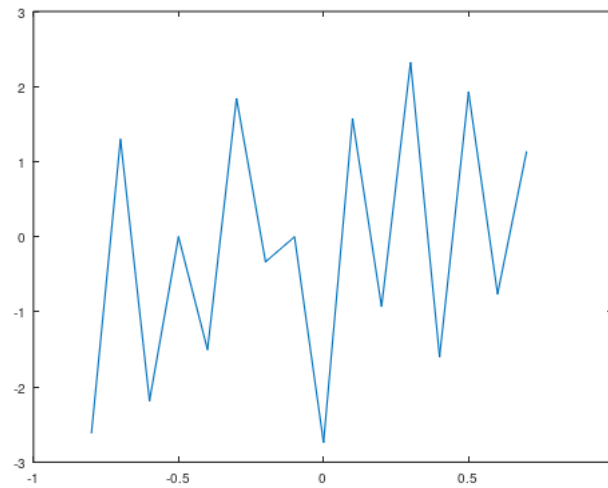


Рисунок 16 – График фазы БПФ светового поля при $N = 16$

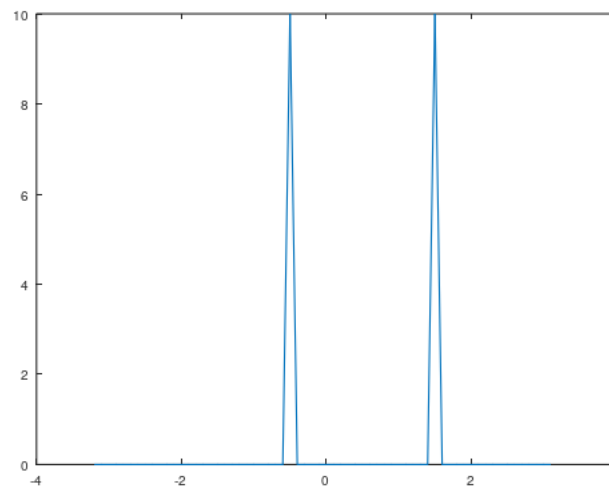


Рисунок 17 – График амплитуды БПФ светового поля при $N = 64$

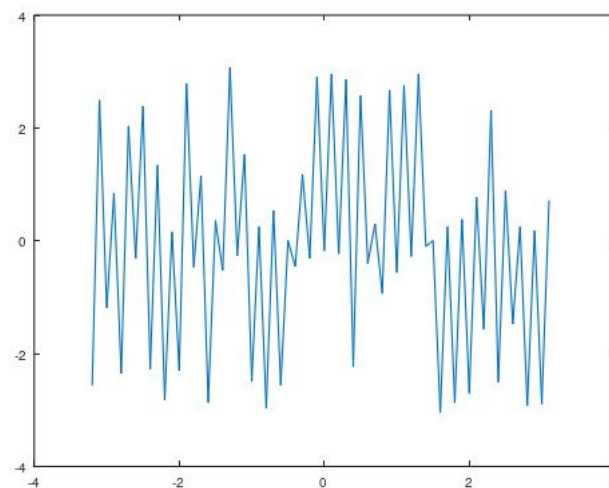


Рисунок 18 – График фазы БПФ светового поля при $N = 64$

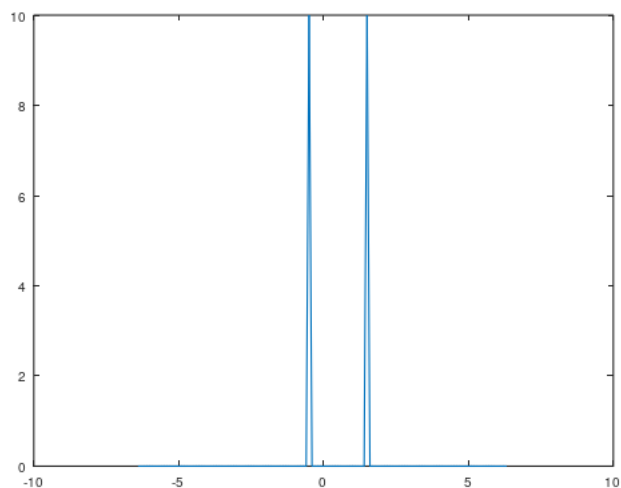


Рисунок 19 – График амплитуды БПФ светового поля при $N = 256$

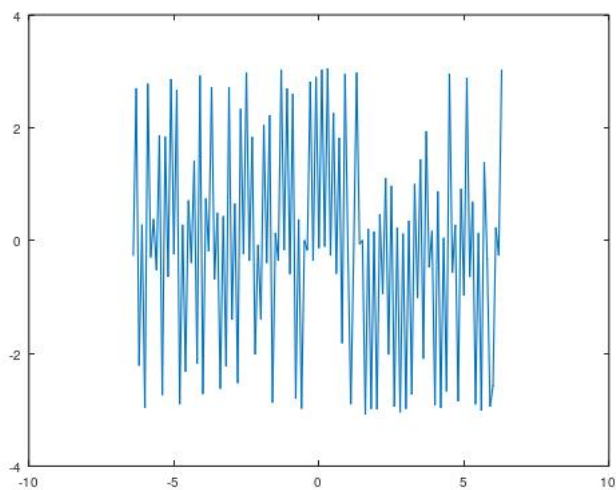


Рисунок 20 – График фазы БПФ светового поля при $N = 256$

Выводы по влиянию параметра N представлены в таблице 1.

Теперь зафиксируем $N = 64$ и будем увеличивать параметр M .

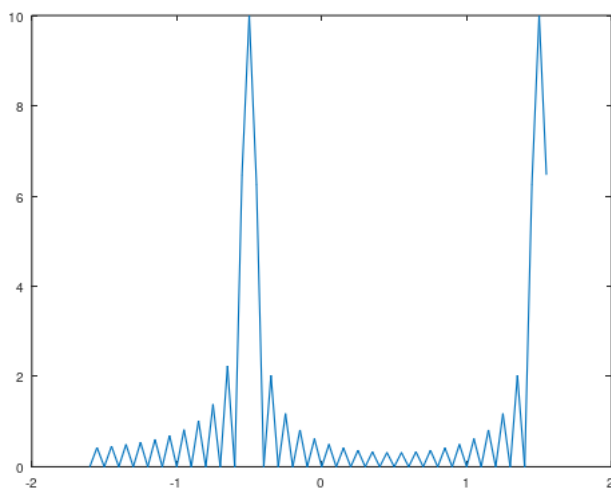


Рисунок 21 – График амплитуды БПФ светового поля при $M = 128$

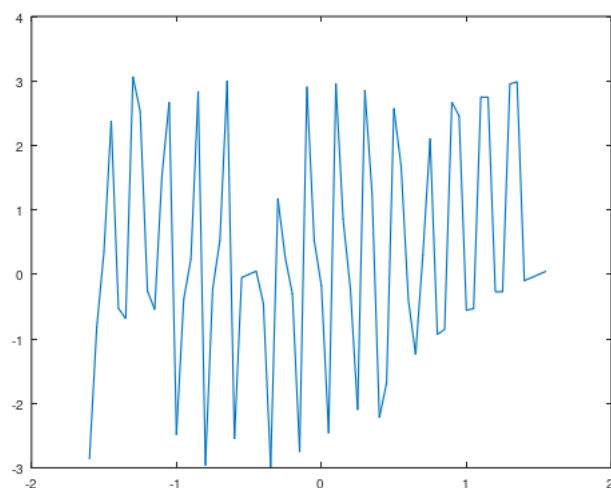


Рисунок 22 – График фазы БПФ светового поля при $M = 128$

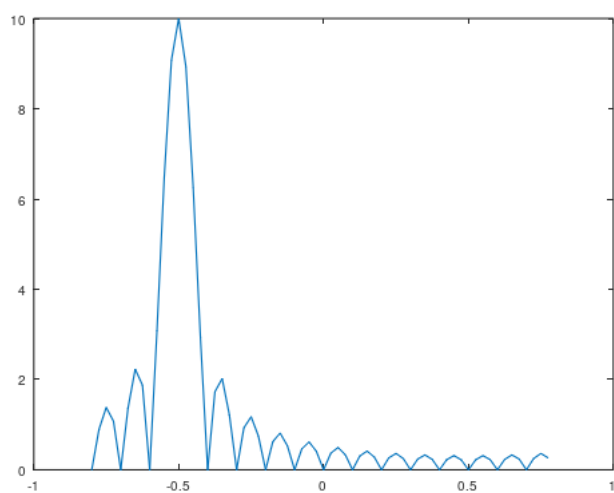


Рисунок 23 – График амплитуды БПФ светового поля при $M = 256$

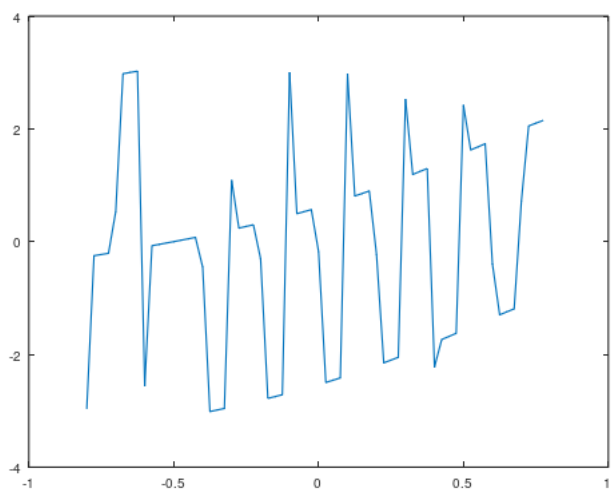


Рисунок 24 – График фазы БПФ светового поля при $M = 256$

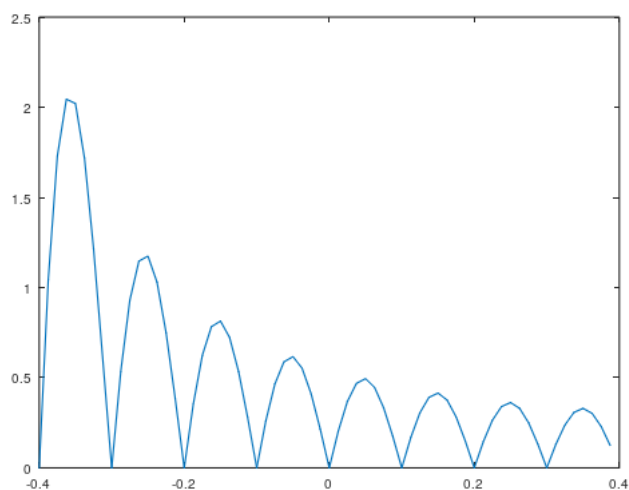


Рисунок 25 – График амплитуды БПФ светового поля при $M = 512$

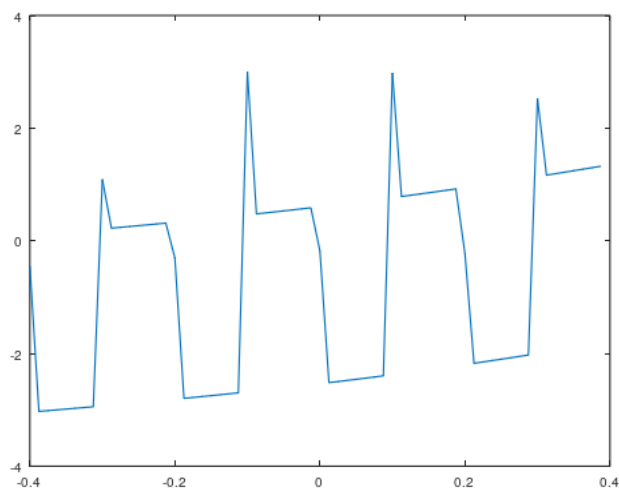


Рисунок 26 – График фазы БПФ светового поля при $M = 512$

Выводы по влиянию параметра M представлены в таблице 1.

Таблица 1. Влияние параметров на график результата преобразования.

N	При изменении N (увеличении или уменьшении), выходная область преобразования меняется соответственно, а также каждый раз меняются экстремумы.
M	При увеличении M , выходная область преобразования уменьшается, и масштаб графика увеличивается.

Задание 9:

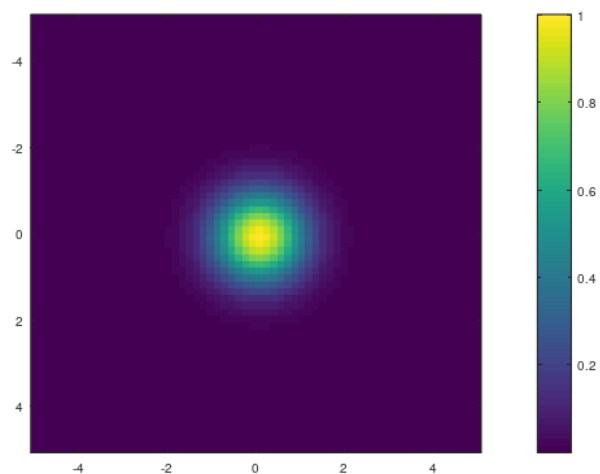


Рисунок 27 – Изображение амплитуды двумерного гауссова пучка

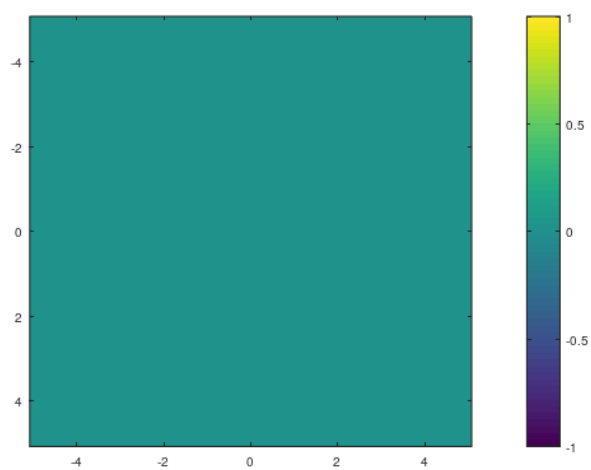


Рисунок 28 – Изображение фазы двумерного гауссова пучка

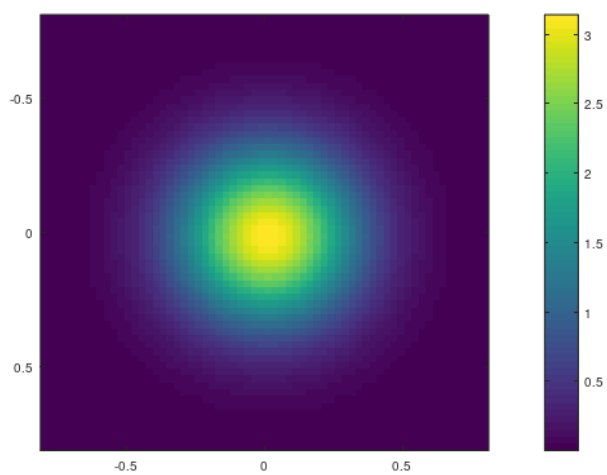


Рисунок 29 – Изображение амплитуды двумерного преобразования гауссова пучка

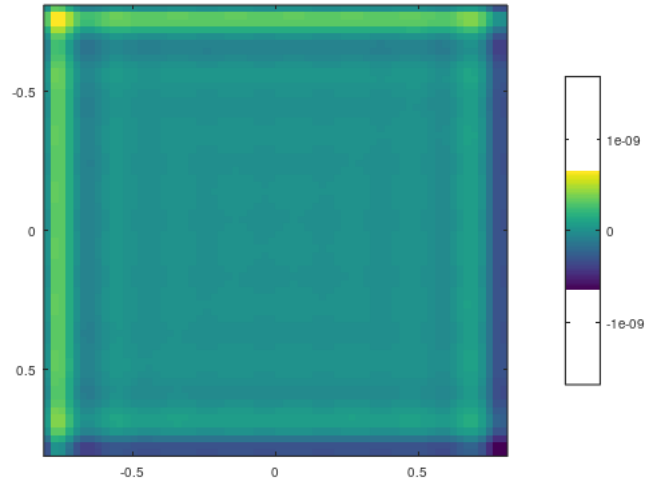


Рисунок 30 – Изображение фазы двумерного преобразования гауссова пучка

$$\begin{aligned}
 & \int_{-5}^5 \int_{-5}^5 (e^{-\pi i x} + e^{3\pi i x})(e^{-\pi i y} + e^{3\pi i y}) e^{-2\pi i (ux+vy)} dx dy = \\
 & = \int_{-5}^5 (e^{-\pi i x} + e^{3\pi i x}) e^{-2\pi i u x} dx \int_{-5}^5 (e^{-\pi i y} + e^{3\pi i y}) e^{-2\pi i v y} dy = \\
 & = \left(\left(\frac{e^{-\pi i x(1+2u)}}{-\pi i(1+2u)} + \frac{e^{\pi i x(3-2u)}}{\pi i(3-2u)} \right) \Big|_{-5}^5 \right) \left(\left(\frac{e^{-\pi i y(1+2v)}}{-\pi i(1+2v)} + \frac{e^{\pi i y(3-2v)}}{\pi i(3-2v)} \right) \Big|_{-5}^5 \right) = \\
 & = -\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{4u-2}{4u^2-4u-3} \right) \left(\frac{4v-2}{4v^2-4v-3} \right) (e^{10\pi i v} - e^{-10\pi i v})(e^{10\pi i u} - e^{-10\pi i u}).
 \end{aligned}$$

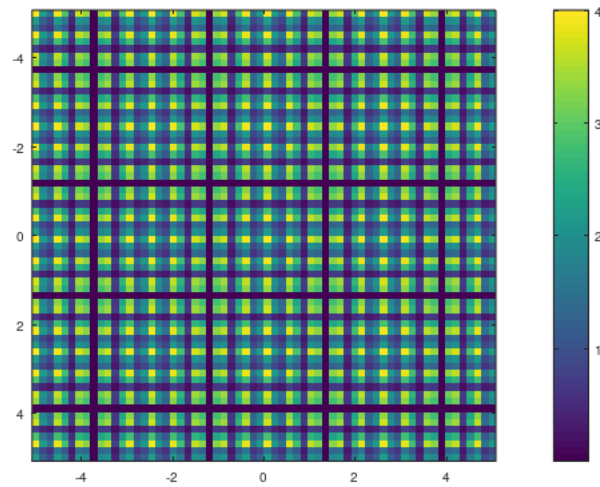


Рисунок 31 – Изображение амплитуды двумерного светового поля

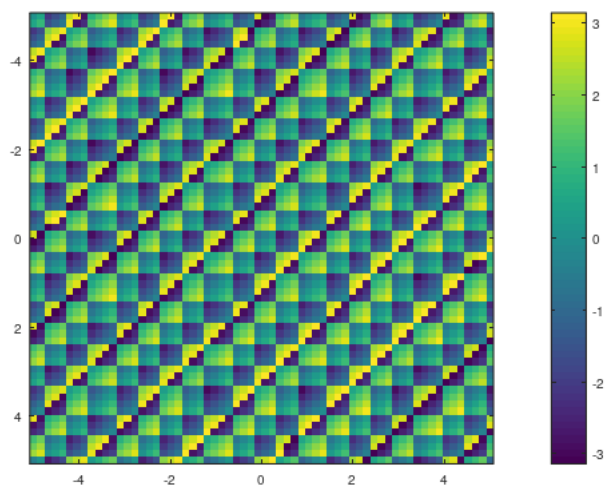


Рисунок 32 – Изображение фазы двумерного светового поля

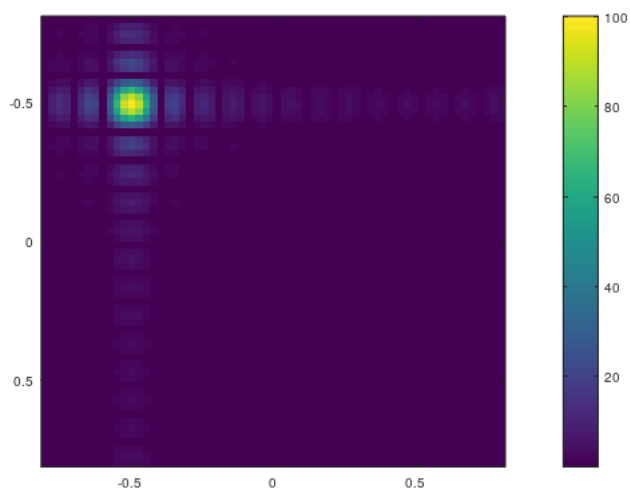


Рисунок 33 – Изображение амплитуды двумерного преобразования светового поля

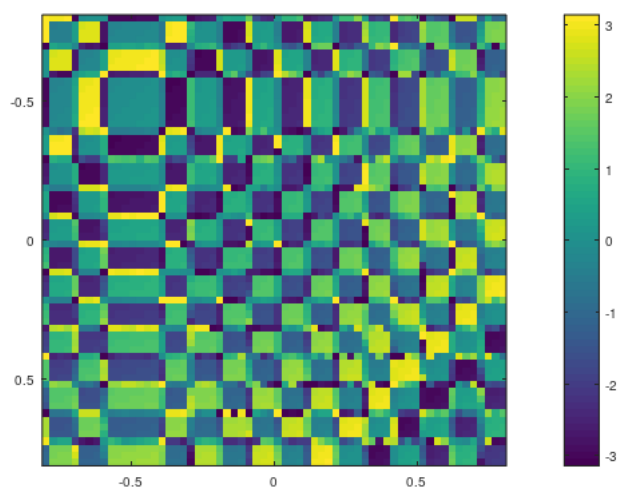


Рисунок 34 – Изображение фазы двумерного преобразования светового поля

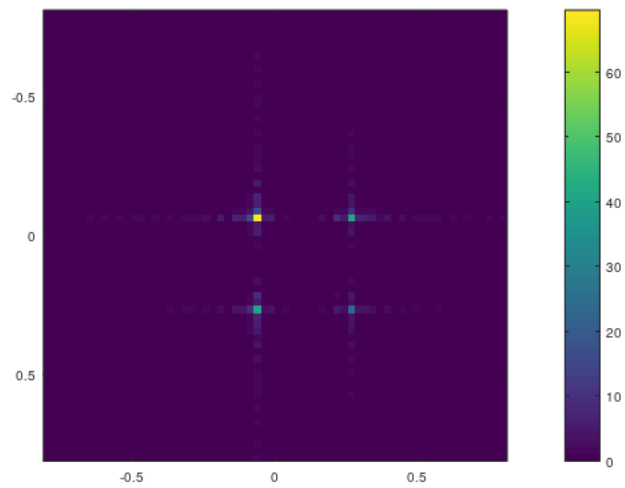


Рисунок 35 – Изображение амплитуды аналитического результата двумерного преобразования светового поля

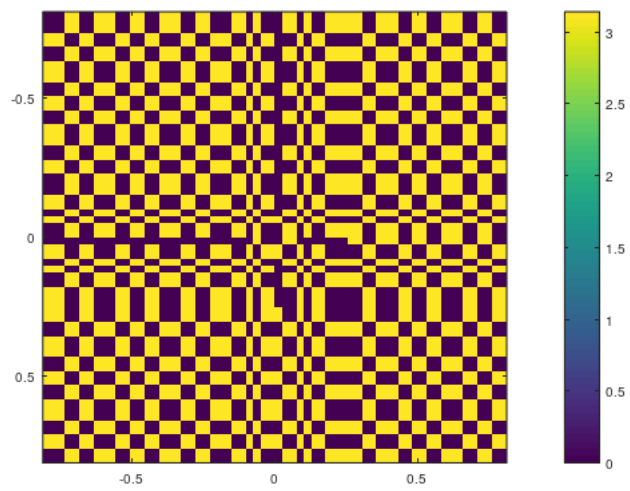


Рисунок 36 – Изображение фазы аналитического результата двумерного преобразования светового поля

Код программы

```
clear;
# БПФ
function F = DFT(func, M, hx)
    s = (M - length(func)) / 2;

    func = [zeros(s, 1).', func, zeros(s, 1).'];
    func = [func(1 + M/2:end), func(1:M / 2)];

    F = fft(func) * hx;
    F = [F(1 + M/2:end), F(1:M / 2)];
    F = F(s + 1:M - s);
end

# Аналитическое решение
function solve = AnaliticSolve(u, a)
    #e = exp(2i*a*pi.*u);
    #solve = (1i/pi).*(4*u - 2)./(4*u.^2 - 4*u - 3).*(e.^2-1)./e;
    solve = (1i/pi).*(4*u - 2)./(4*u.^2 - 4*u - 3).*(exp(2i*a*pi.*u)-exp(-2i*a*pi.*u));
end

# Аналитическое решение для двумерного случая
function solve = AnaliticSolve2D(u, v, a)
    #e = exp(2i*a*pi.*u);
    #solve = (1i/pi).*(4*u - 2)./(4*u.^2 - 4*u - 3).*(e.^2-1)./e;
    solve = (-1/(pi^2)).*(4*u - 2)./(4*u.^2 - 4*u - 3).*(exp(2i*a*pi.*u)-exp(-2i*a*pi.*u)).*(4*v - 2)./(4*v.^2 - 4*v - 3).*(exp(2i*a*pi.*v)-exp(-2i*a*pi.*v));
end

N = 64;
a = 5;
hx = 2 * a / N;
x = -a:hx:(a - hx / 2);

# Гауссов пучок
f = exp(-(x.^2));
#figure(1);
#plot(x, abs(f)); # Амплитуда
#figure(2);
#plot(x, arg(f)); # Фаза

# БПФ гауссова пучка
M = 256;
F = DFT(f, M, hx);
b = N ^ 2 / (4 * a * M);
hxi = 2 * b / N;
xi = -b:hxi:(b - hxi / 2);
#figure(1);
#plot(xi, abs(F), "b"); # Амплитуда
#figure(2);
```

```

#plot(xi, arg(F), "b"); # Фаза

# Стандартный метод численного интегрирования
[X, XI] = meshgrid(x, xi);
Kernel = exp(-2 * pi * 1i * X.*XI);
F2 = Kernel * f.' * hx;
#figure(1);
#plot(xi, abs(F2), "k"); # Амплитуда
#figure(2);
#plot(xi, arg(F2), "k"); # Фаза

# Сравнение БПФ и стандартного метода численного интегрирования
#figure(3);
#plot(xi, abs(F)); # Амплитуда
#hold on;
#plot(xi, abs(F2), "k"); # Амплитуда
#figure(4);
#plot(xi, arg(F)); # Фаза
#hold on;
#plot(xi, arg(F2), "k"); # Фаза

# Световое поле
LF = exp(-pi * 1i * x) + exp(3 * pi * 1i * x)
#figure(1);
#plot(x, abs(LF)); # Амплитуда
#figure(2);
#plot(x, arg(LF)); # Фаза

# Преобразование светового поля
FLF = DFT(LF, M, hx);
#figure(1);
#plot(xi, abs(FLF)); # Амплитуда
#figure(2);
#plot(xi, arg(FLF)); # Фаза

# Аналитическое решение
ASolve = AnalyticSolve(xi, a);
#figure(1);
#plot(xi, abs(FLF)); # Амплитуда
#hold on;
#plot(xi, abs(ASolve), "r"); # Фаза
#figure(2);
#plot(xi, arg(FLF)); # Амплитуда
#hold on;
#plot(xi, arg(ASolve), "r"); # Фаза

# Двумерный гауссов пучок
y = x.';
f = exp(-(x.^2)-(y.^2));
intervalA = [-a, a];
#figure(1);
#imagesc(intervalA, intervalA, abs(f)); # Амплитуда

```

```

#colorbar;
#figure(2);
#imagesc(intervalA, intervalA, arg(f)); # Фаза
#colorbar;

# Двумерное преобразование гауссова пучка
[X, Y] = meshgrid(x, y);
F2D = exp(-(X.^2)-(Y.^2));
intervalB = [-b, b];
for i = 1:rows(F2D)
    F2D(i, :) = DFT(F2D(i, :), M, hx);
endfor
for j = 1:columns(F2D)
    F2D(:, j) = DFT(F2D(:, j).', M, hx).';
endfor
#figure(1);
#imagesc(intervalB, intervalB, abs(F2D)); # Амплитуда
#colorbar;
#figure(2);
#imagesc(intervalB, intervalB, arg(F2D)); # Фаза
#colorbar;

# Двумерное световое поле
y = x.';
LF2D = (exp(-pi * 1i * x) + exp(3 * pi * 1i * x)).*(exp(-pi * 1i * y) + exp(3 * pi * 1i * y));
#figure(1);
#imagesc(intervalA, intervalA, abs(LF2D)); # Амплитуда
#colorbar;
#figure(2);
#imagesc(intervalA, intervalA, arg(LF2D)); # Фаза
#colorbar;

# Двумерное преобразование светового поля
[X, Y] = meshgrid(x, y);
FLF2D = (exp(-pi * 1i * x) + exp(3 * pi * 1i * x)).*(exp(-pi * 1i * y) + exp(3 * pi * 1i * y));
intervalB = [-b, b];
for i = 1:rows(FLF2D)
    FLF2D(i, :) = DFT(FLF2D(i, :), M, hx);
endfor
for j = 1:columns(FLF2D)
    FLF2D(:, j) = DFT(FLF2D(:, j).', M, hx).';
endfor
#figure(1);
#imagesc(intervalB, intervalB, abs(FLF2D)); # Амплитуда
#colorbar;
#figure(2);
#imagesc(intervalB, intervalB, arg(FLF2D)); # Фаза
#colorbar;

# Аналитическое решение двумерного случая
[X, Y] = meshgrid(x, y);
ASolve2D = AnalyticSolve2D(X, Y, a);

```

```
figure(1);  
imagesc(intervalB, intervalB, abs(ASolve2D)); # Амплитуда  
colorbar;  
figure(2);  
imagesc(intervalB, intervalB, arg(ASolve2D)); # Фаза  
colorbar;
```