

T1.3 Représentation des entiers relatifs

1. 1.3.1 Signe d'un entier et taille en bits

Au chapitre T1.1, nous avons vu comment représenter un nombre entier **positif** en notation binaire.

Par exemple, l'entier 6 (en base 10) s'écrit `110` en binaire.

Pour représenter tous les entiers relatifs, il faut étendre cette représentation aux entiers négatifs. Une première nécessité est de résérer un bit pour le signe de l'entier (+ ou -).

Signe d'un entier relatif

On choisit de représenter le signe d'un nombre entier relatif:

- sur le bit de poids fort (le plus à gauche), pour reprendre la notation classique;
- par un `0` pour le `+` : ainsi la représentation des entiers positifs est **inchangée**;
- par un `1` pour le `-`.

Mais où placer ce bit de signe?

En effet, 6 se coderait alors en `0110` et `-6` en `1110`? Mais `1110` représente l'entier `14`!

Pour lever cette ambiguïté, il faut décider :

- de la taille du mot binaire qui va représenter l'entier, c'est-à-dire le nombre de bits;
- d'une façon efficace de représenter les nombres négatifs.

Taille en bits d'un entier

Pour représenter un nombre entier relatif, on a donc besoin de fixer un nombre `n` de bits sur lequel le coder.

En général, `n` est une des valeurs suivantes : 8, 16, 32 ou 64 (1, 2, 4 ou 8 octets). Cela dépend du langage de programmation utilisé et de l'architecture matérielle de l'ordinateur.

Le bit de poids fort représente donc le signe et les `n-1` bits suivants la **valeur absolue** du nombre.

Sur 8 bits par exemple, l'entier 6 est codé par `0|000 0110`. Et on serait tenté de coder son opposé `-6` par `1|000 0110`, n'est-ce pas?

Faux.

Au moins deux (gros) inconvénients à cette méthode:

- Le nombre 0 serait codé par `0|000 0000` et par `1|000 0000`. Deux représentations pour un même nombre, ça ne sent pas bon.
- L'addition telle qu'on la connaît ne fonctionnerait plus. Posez par exemple $6 + (-6)$...

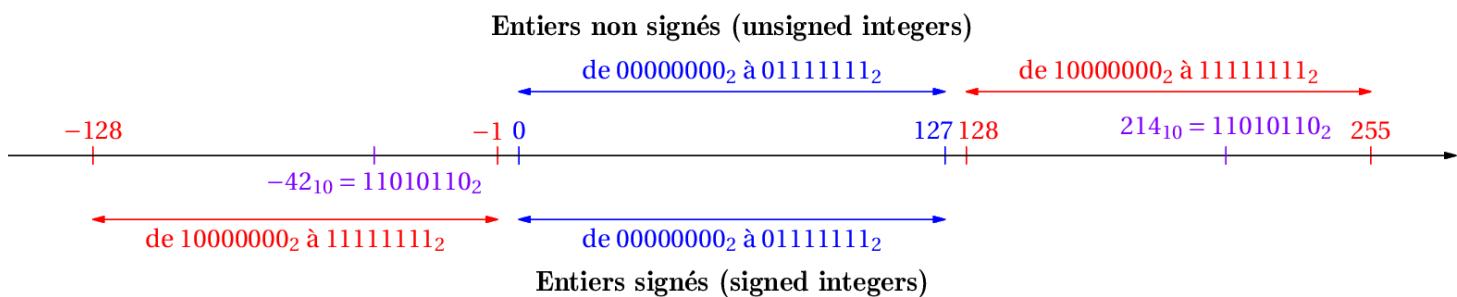
2. 1.3.2 Complément à 2

On adopte donc une autre méthode, qui consiste à représenter un entier relatif par un entier naturel.

En binaire non signé: sur 8 bits, on peut représenter tous les entiers positifs de 0 à 255. Ceux qui ont un bit de poids fort égal à 0 correspondent aux entiers de 0 à 127 et ceux qui ont un bit de poids fort égal à 1 correspondent aux nombres de 128 à 255.

En binaire signé: toujours sur 8 bits, les nombres de 0 à 127 conservent la même représentation (positifs, car avec 0 en bit de poids fort). En revanche, les écritures binaires avec un 1 en bit de poids fort représentent les entiers négatifs de -128 à -1.

Ainsi sur 8 bits, on représente à nouveau 255 valeurs : de -128 à +127, c'est-à-dire de -2^7 à $2^7 - 1$. Et puisque le bit de poids fort est réservé au signe, il est logique que la valeur absolue soit inférieure à 128 puisqu'on ne dispose plus que de 7 bits...



On représente donc l'entier -1 par 1111111_2 en binaire sur 8 bits. C'est sa notation en **complément à 2** (ou plutôt 2^n).

Écrire la représentation binaire d'un entier négatif

Complément à 2

Pour obtenir le complément à 2 d'un entier négatif:

- on code sa valeur absolue en binaire;
- on inverse tous les bits (on remplace les 0 par des 1 et les 1 par des 0);
- on ajoute 1.

Par exemple:

- -6 s'écrit 11111010 sur 8 bits: $6_{10} = 00000110_2 \rightarrow 11111001_2 \rightarrow 11111010_2$.
- -42 s'écrit 11010110 sur 8 bits: $42_{10} = 00101010_2 \rightarrow 11010101_2 \rightarrow 11010110_2$.

Par décalage

La représentation binaire d'un entier x négatif sur n bits est celle de l'entier naturel (non signé) $x + 2^n$.

Par exemple pour $x = -42$, on représente $-42 + 256 = 214$ en binaire non signé, c'est-à-dire 11010110 .

3. 1.3.3 Integer Overflow

Integer overflow



Image from Wikipedia.org; licensing details available at <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

⚠ Dépassement de capacité

On ne peut coder qu'un nombre fini d'entiers selon la valeur de n : entre -2^{n-1} et $2^{n-1} - 1$.

Tout calcul sur des entiers dont le résultat ne fait pas partie de cet intervalle donnera un résultat faux: il sera tronqué sur n bits! On parle de **dépassement de capacité**, *overflow* en anglais.

En Python, tous les entiers sont signés. Contrairement à certains langages de programmation, le type *entier non signé* n'existe pas nativement. Par défaut les entiers sont codés sur 64 bits (ou 32 bits sur les machines 32 bits), ce qui laisse un peu de marge.

Pour spécifier qu'on travaille sur 8 bits, on utilisera le module `numpy`:

Script Python

```
1 import numpy
2 un = numpy.int8(1)
3 vie = numpy.int8(42)
```

4. 1.3.4 Exercices

 Exercice 1

Énoncé

Quel est l'intervalle de nombres entiers relatifs qu'on peut représenter:

1. Sur 4 bits?
2. Sur 16 bits?
3. Sur 64 bits?

Solution

On utilise l'encadrement donné dans l'encadré précédent avec la valeur de n correspondante:

1. Pour $n = 4$, entre -8 et 7
2. Pour $n = 16$, entre -32768 et 32767
3. Pour $n = 64$, entre -9223372036854775808 et 9223372036854775801

 Exercice 2

Énoncé

1. Convertir en complément à 2 les nombres 12 et -53.
2. Effectuer l'addition en binaire de ces deux nombres, et vérifier que le résultat est correct.

Solution

1. Comme 12 est positif, sa représentation binaire est `00001100`.

En revanche, -53 est négatif. Donc:

- on écrit sa valeur absolue, 53, en binaire: `00110101`
- on effectue le complément à 2 en inversant les bits : `11001010`
- on ajoute 1 et on obtient `11001011`

2. L'addition bit par bit donne : `11010111`

Le résultat de $12 + (-53)$ est -41. Or sa représentation est

- valeur absolue : `00101001`
- complément à 2 : `11010110`
- +1 : `11010111`

On obtient bien le même résultat.

Exercice 3

Énoncé

Quels sont les entiers relatifs dont la représentation binaire en complément à 2 (sur 8 bits) est:

1. 01100111
2. 10011001

Solution

1. L'écriture binaire commence par un 0, c'est donc un positif. On fait «comme d'habitude»: 01100111 est l'écriture binaire de 103.
2. L'écriture binaire commence par un 1, c'est donc un négatif.

On effectue les opérations dans l'autre sens:

- On soustrait 1 : on obtient 10011000
- complément à 2 : on obtient 01100111
- on récupère la valeur absolue : 103

Le nombre est donc -103.

Exercice 4

Énoncé

1. Vérifier que sur 8 bits, 10000000 représente -128 et 11111111 représente -1.
2. Vérifier en effectuant l'addition en binaire, que $42 + (-42) = 0$

Solution

10000000 -> 01111111 -> '10000000' qui est 128 (la valeur absolue). Donc -128

11111111 -> 11111110 -> '00000001' qui est 1 (la valeur absolue). Donc -1

On a 42 qui est représenté par 00101010 et -42 par 11010110. L'addition bit par bit donne 100000000 mais comme on est sur 8 bits, le premier bit 1 est perdu (overflow). Donc on obtient bien 00000000, c'est-à-dire 0.

Exercice 5 : Integer Overflow

Énoncé

À l'aide du module `numpy`, effectuer en console les calculs suivants:

1. $127 + 1$
2. $127 + 2$
3. $127 + 127$

Par exemple pour le premier calcul:

🐍 Script Python

```
>>> import numpy  
>>> numpy.int8(127) + numpy.int8(1)
```

Solution

🐍 Script Python

```
>>> import numpy  
>>> numpy.int8(127)+numpy.int8(1)  
<console>:1: RuntimeWarning: overflow encountered in byte_scalars  
-128  
  
>>> numpy.int8(127)+numpy.int8(2)  
<console>:1: RuntimeWarning: overflow encountered in byte_scalars  
-127  
  
>>> numpy.int8(127)+numpy.int8(127)  
<console>:1: RuntimeWarning: overflow encountered in byte_scalars  
-2
```