Thème 1 - Représentation des données - Types et valeurs de bases

05 Ecriture d'un entier positif dans une base b

Programme Terminale

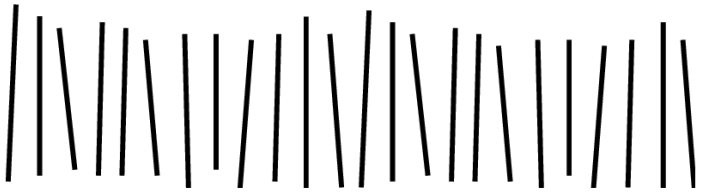
Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Ecriture d'un entier positif dans une base $b \leq 2$	Passer de la représentation d'une base à l'autre	Les bases 2, 10 et 16 sont privilégiées

1. Écriture d'un entier dans une base

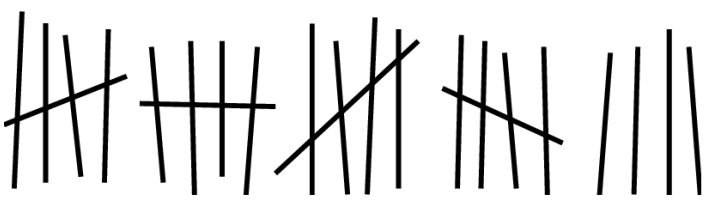
> Le monde se divise en 2 catégories : ceux qui comprennent le binaire et ceux qui ne le comprennent pas.

1.1. Le système décimal

Depuis la préhistoire, l'Homme a besoin de compter. Sa première idée:



Pas très pratique... Heureusement, il en eut rapidemennt une autre, beaucoup plus efficace: regrouper les bâtons en paquets.



Des paquets de 5 et surtout de 10. Pourquoi 10 ?

Pour écrire les nombres, regroupés en paquets de 10, il a donc fallu inventer 10 chiffres pour compter les unités (en-dessous du paquet): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Et le nombre 10 ne signifie ni plus ni moins que 1 paquet et 0 unité.

Ensuite, on fait un paquet de paquets, la centaine (100, c'est à dire $10 \times 10 = 10^2$), puis un paquet de centaines, le millier (1000, c'est-à-dire $10 \times 10 \times 10 = 10^3$), et ainsi de suite.

Au final, si on écrit le nombre 2022 on sait que c'est:

- **2** mille, c'est-à-dire 2×10^3 ;
- **0** centaine, c'est-à-dire 0×10^2 ;
- **2** dizaines, c'est-à-dire 2×10^1;
- **2** unité, c'est-à-dire 2×10^0.

Et bien entendu, $2022 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 2 \times 10^0$

> La position de chaque chiffre dans l'écriture du nombre correspond à la puissance de 10 par laquelle on le multiplie.

Homer compte

Octal	Décimal
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
10	8
11	9
12	10
13	11
14	12
15	13
16	14
17	15
20	16
21	17
...	...

Un autre exemple, la base octale

Pour Homer Simpson, qui n'a que 8 doigts, il aurait été certainement plus naturel de faire des paquets de 8... et donc de manipuler seulement 8 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.

C'est le **système octal**.

Ainsi, «son» 10 signifierait 1 paquet de 8 et 0 unité, soit «notre» 8... Et donc notre 10 (en décimal) s'écrirait 12 (en octal).

Enfin, 2022 (en décimal) s'écrit 3746 en octal puisque :

$$\begin{aligned} 3746_8 &= 3 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 5 \times 8^0 \\ &= 8 \times 512 + 7 \times 64 + 4 \times 8 + 6 \times 1 \\ &= 1536 + 448 + 32 + 6 \\ &= 2022 \end{aligned}$$

1.2. Notion de base

Écriture d'un entier en base b

- Choisir une base, c'est choisir la «taille» du paquet, et donc le nombre de chiffres dont on aura besoin: en base b, il y a b chiffres.
- Dans notre système décimal, la base est $b = 10$.
- La position de chaque chiffre correspond à la puissance de b par laquelle on le multiplie.
- On précisera la base (si différente de 10) en indice en fin du nombre. Par exemple, le nombre 312_5 est écrit en base 5.

Exemples

$$\begin{aligned} 312_5 &= 3 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 2 \times 5^0 \\ &= 3 \times 25 + 1 \times 5 + 2 \times 1 \\ &= 82 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25072_8 &= 2 \times 8^4 + 5 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 2 \times 8^0 \\ &= 2 \times 4096 + 5 \times 512 + 7 \times 8 + 2 \times 1 \\ &= 10810 \end{aligned}$$

1.3. Le système binaire (base 2)

Le binaire

- Le système binaire est le système de numération de base $b = 2$.
- Il utilise donc seulement deux chiffres, 0 et 1, appelés **bits** (contraction de l'anglais binary digit).
- Il est particulièrement adapté à l'informatique car il permet d'unifier la logique (Vrai/Faux), le calcul et l'électronique (voir vidéo suivante).
- Un regroupement de 8 bits est appelé un **octet**.

Vidéo

Conversions

Binaire → Décimal

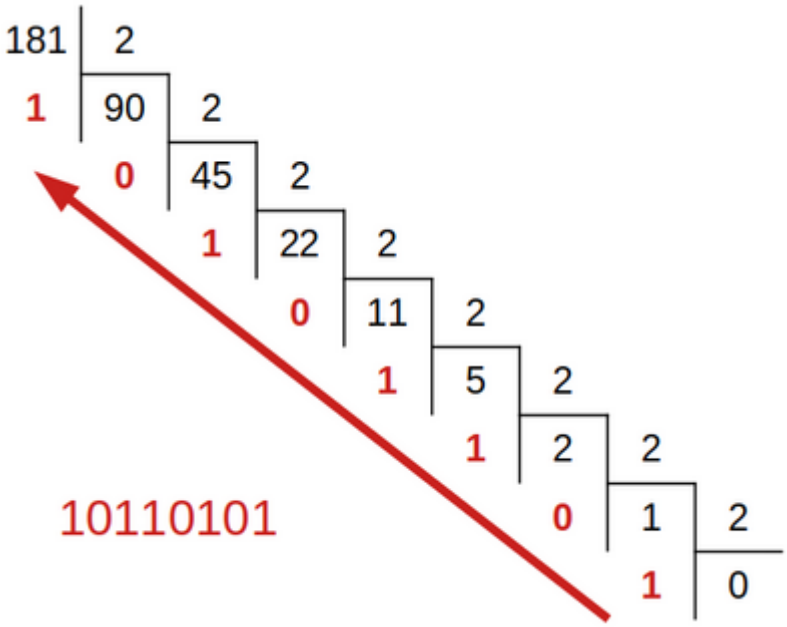
Il est utile de connaître alors les puissances de 2 pour convertir rapidement de l'écriture binaire vers l'écriture décimale.

puissances de 2 :	128	64	32	16	8	4	2	1
bits :	1	0	1	1	0	1	0	1

Par exemple $10110101_2 = 128 + 32 + 16 + 4 + 1 = 181$.

Décimal → Binaire

- On peut utiliser l'algorithme de soustraction: on soustrait du nombre la plus grande puissance de 2 possible, et on recommence...
- On utilise l'algorithme de divisions: on effectue les divisions successives du nombre par 2. L'écriture en binaire est donnée par les restes lus de bas en haut.



Décimal → Base quelconque

Les deux algorithmes de soustraction et de divisions fonctionnent également pour la conversion du

décimal vers n'importe quelle autre base.

1.4. Le système hexadécimal (base 16)

L'hexadécimal

- Le système hexadécimal est le système de numération de base $b = 16$.
- Il utilise donc 16 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.
- Bien qu'il nécessite plus de chiffres, ce système donne des écritures plus courtes et particulièrement pratique du fait que 16 est une puissance de 2 : la conversion entre les systèmes binaire et hexadécimal se fait sans calcul, uniquement par regroupement de 4 bits.

Couleurs

Le système hexadécimal est en particulier un mode de code informatique des couleurs.

En effet une couleur (codage RGB) est composée de 3 valeurs correspondant aux composantes rouge, verte et bleue, et chacune de ces valeurs est un entier compris entre 0 et 255, c'est-à-dire entre 0 et FF en hexadécimal: on peut les écrire avec seulement deux chiffres.

Par exemple, la couleur rouge ci-contre a pour composantes (178, 26, 15), ce qui donne en hexadécimal : (B2, 1A, 0F), qu'on écrit en général de façon *concaténée* B21A0F et souvent précédée d'un #.

Convertisseur

Un convertisseur bien utile.

1.5. Exercices

À la main

Exercices

Exercice 1

Convertir de la base mentionnée vers la base 10 (système décimal).

Attention, il y a un piège...

1. 131_6
2. 420_5
3. 1515_8
4. 716_4
5. 321_4

Exercice 2

Convertir les écritures décimales vers la base mentionnée.

1. 47 en base 5
2. 92 en base 4

Exercice 3

Convertir du binaire vers le décimal.

1. 1010
2. 101110
3. 10001101
4. 11111111

Exercice 4

Convertir du décimal vers le binaire.

1. 17
2. 34
3. 68
4. 100

5. 200

Que remarquez-vous quand on passe de l'écriture binaire d'un nombre à celle de son double?

Exercice 5

1. Vérifier la conversion de la couleur rouge donnée en exemple à la section précédente.
2. Convertir les écritures hexadécimales en décimal: 99, D7, 1B8, ABC.
3. Comment s'écrit la couleur blanche en code hexadécimal?

Exercice 6

Convertir les écritures décimales en hexadécimal.

1. 45
2. 72
3. 421

Exercice 7

Conversion Binaire → Hexadécimal

- On regroupe les bits par paquets de 4 (quitte à ajouter des 0 pour compléter).
- On convertit chaque paquet en chiffre hexadécimal.
- On concatène les chiffres

Par exemple, $11111100101_2 = \underbrace{0111}_{7}\underbrace{1110}_{14=\mathrm{E}_{16}}\underbrace{0101}_{5} = 7\mathrm{E}5_{16}$

Conversion Hexadécimal → Binaire

On fait la même chose dans l'autre sens.

Application

1. Convertir 101101_2 puis 10011011111_2 en base 16.
2. Convertir $8\mathrm{D}_{16}$ puis $1\mathrm{CA}7_{16}$ en binaire.

Avec Python

Fonctions de conversion

Pour convertir un entier écrit en décimal vers le binaire ou l'hexadécimal, on peut utiliser les fonctions `bin` et `hex`, qui renvoient des chaînes de caractères.

Script Python

```
>>> bin(2021)
'0b11111100101'
>>> hex(2021)
'0x7e5'
>>>
```

Les préfixes `0b` et `0x` indiquent que les écritures sont respectivement en base 2 et en base 16.

Réciproquement, pour convertir l'écriture d'un nombre écrit en base b vers le décimal, on utilise la fonction `int` en passant en arguments l'écriture en chaîne de caractères et la base.

Script Python

```
>>> int('11111100101', 2)
2021
>>> int('7e5', 16)
2021
>>>
```

Exercice 8

Utilisez ces fonctions pour vérifier vos résultats des exercices précédents.

```
>>>
```