

T1.3 Représentation des entiers relatifs

1.3.1 Signe d'un entier et taille en bits

Au chapitre T1.1, nous avons vu comment représenter un nombre entier **positif** en notation binaire.

Par exemple, l'entier 6 (en base 10) s'écrit 110 en binaire.

Pour représenter tous les entiers relatifs, il faut étendre cette représentation aux entiers négatifs. Une première nécessité est de réserver un bit pour le signe de l'entier (+ ou -).

!!! abstract "Signe d'un entier relatif" On choisit de représenter le signe d'un nombre entier relatif:

- sur le bit de poids fort (le plus à gauche), pour reprendre la notation classique;
- par un `0` pour le + : ainsi la représentation des entiers positifs est **inchangée**;
- par un `1` pour le -.

Mais où placer ce bit de signe?

En effet, 6 se coderait alors en 0110 et -6 en 1110? Mais 1110 représente l'entier 14 !

Pour lever cette ambiguïté, il faut décider :

- de la taille du mot binaire qui va représenter l'entier, c'est-à-dire le nombre de bits;
- d'une façon efficace de représenter les nombres négatifs.

!!! abstract "Taille en bits d'un entier" Pour représenter un nombre entier relatif, on a donc besoin de fixer un nombre n de bits sur lequel le coder.

En général, n est une des valeurs suivantes : 8, 16, 32 ou 64 (1, 2, 4 ou 8 octets). Cela

Le bit de poids fort représente donc le signe et les $n-1$ bits suivants la **valeur absolue**

Sur 8 bits par exemple, l'entier 6 est codé par 0|000 0110. Et on serait tenté de coder son opposé -6 par 1|000 0110, n'est-ce pas?

Faux.

Au moins deux (gros) inconvénients à cette méthode:

- Le nombre 0 serait codé par 0|000 0000 **et** par 1|000 0000. Deux représentations pour un même nombre, ça ne sent pas bon.
- L'addition telle qu'on la connaît ne fonctionnerait plus. Posez par exemple $6 + (-6)$...

1.3.2 Complément à 2

On adopte donc une autre méthode, qui consiste à représenter un entier relatif par un entier naturel.

En binaire non signé: sur 8 bits, on peut représenter tous les entiers positifs de 0 à 255. Ceux qui ont un bit de poids fort égal à 0 correspondent aux entiers de 0 à 127 et ceux qui ont un bit de poids fort égal à 1 correspondent aux nombres de 128 à 255.

En binaire signé: toujours sur 8 bits, les nombres de 0 à 127 conservent la même représentation (positifs, car avec 0 en bit de poids fort). En revanche, les écritures binaires avec un 1 en bit de poids fort représentent les entiers négatifs de -128 à -1.

Ainsi sur 8 bits, on représente à nouveau 255 valeurs : de -128 à +127, c'est-à-dire de -2^7 à $2^7 - 1$. Et puisque le bit de poids fort est réservé au signe, il est logique que la valeur absolue soit inférieure à 128 puisqu'on ne dispose plus que de 7 bits...

{: .center}

On représente donc l'entier -1 par 11111111 en binaire sur 8 bits. C'est sa notation en **complément à 2** (ou plutôt 2^n).

!!! abstract “Écrire la représentation binaire d'un entier négatif” === “Complément à 2” Pour obtenir le complément à 2 d'un entier négatif:

- on code sa valeur absolue en binaire;
- on inverse tous les bits (on remplace les `0` par des `1` et les `1` par des `0`);
- on ajoute 1.

Par exemple:

- -6 s'écrit `11111010` sur 8 bits: $6_{10} = 0000\ 0110_2 \rightarrow 1111\ 1001_2$
- -42 s'écrit `11010110` sur 8 bits: $42_{10} = 0010\ 1010_2 \rightarrow 1101\ 0101_2$

=== "Par décalage"

La représentation binaire d'un entier x négatif sur n bits est celle de l'entier naturel

Par exemple pour $x=-42$, on représente $-42+256=214$ en binaire non signé, c'est-à-dire

1.3.3 Integer Overflow

{: .center}

!!! warning “Dépassement de capacité” On ne peut coder qu'un nombre fini d'entiers selon la valeur de n : entre -2^{n-1} et $2^{n-1} - 1$.

Tout calcul sur des entiers dont le résultat ne fait pas partie de cet intervalle donnera un

En Python, tous les entiers sont signés. Contrairement à certains langages de programmation,

Pour spécifier qu'on travaille sur 8 bits, on utilisera le module `numpy`:

```
```python linenums='1'
import numpy
un = numpy.int8(1)
vie = numpy.int8(42)
```
```

1.3.4 Exercices

{{ initexo(0) }}

!!! exemple “{{ exercice() }}” === “Énoncé” Quel est l’intervalle de nombres entiers relatifs qu’on peut représenter:

```
1. Sur 4 bits?
2. Sur 16 bits?
3. Sur 64 bits?
=== "Solution"
{{ correction(True,
"
On utilise l'encadrement donné dans l'encadré précédent avec la valeur de $n$ correspondant à:

1. Pour $n=4$, entre -8 et 7
2. Pour $n=16$, entre -32768 et 32767
3. Pour $n=64$, entre -9223372036854775808 et 9223372036854775801
"
) }}
```

!!! exemple “{{ exercice() }}” === “Énoncé” 1. Convertir en complément à 2 les nombres 12 et -53. 2. Effectuer l’addition en binaire de ces deux nombres, et vérifier que le résultat est correct. === “Solution” {{ correction(True, " 1. Comme 12 est positif, sa représentation binaire est 00001100.

En revanche, -53 est négatif. Donc:

```
* on écrit sa valeur absolue, 53, en binaire: `00110101`
- on effectue le complément à 2 en inversant les bits : `11001010`
- on ajoute 1 et on obtient `11001011`
```


2. L'addition bit par bit donne : `11010111`

Le résultat de 12 + (-53) est -41. Or sa représentation est

```
* valeur absolue : `00101001`
```

```
* complément à 2 : `11010110`
* +1 : `11010111`
```

```
On obtient bien le même résultat.
"
) }}
```

!!! exemple “{{ exercice() }}” === “Énoncé” Quels sont les entiers relatifs dont la représentation binaire en complément à 2 (sur 8 bits) est:

```
1. `01100111`
2. `10011001`
```

=== "Solution"

```
{{ correction(True,
"
```

1. L'écriture binaire commence par un 0, c'est donc un positif. On fait «comme d'habitude

2. L'écriture binaire commence par un 1, c'est donc un négatif.

On effectue les opérations dans l'autre sens:

```
* On soustrait 1 : on obtient `10011000`
* complément à 2 : on obtient `01100111`
* on récupère la valeur absolue : 103
```

Le nombre est donc -103.

```
"
) }}
```

!!! exemple “{{ exercice() }}” === “Énoncé” 1. Vérifier que sur 8 bits, 10000000 représente -128 et 11111111 représente -1. 2. Vérifier en effectuant l'addition en binaire, que $42 + (-42) = 0$

=== "Solution"

```
{{ correction(True,
"
```

`10000000` -> `01111111` -> '10000000' qui est 128 (la valeur absolue). Donc -128

`11111111` -> `11111110` -> '00000001' qui est 1 (la valeur absolue). Donc -1

On a 42 qui est représenté par `00101010` et -42 par `11010110`. L'addition bit par bit

```
"
) }}
```

!!! exemple “{{ exercice() }} : Integer Overflow” === “Énoncé” À l'aide du module numpy, effectuer en console les calculs suivants:

```
1. 127 + 1
```

2. $127 + 2$
3. $127 + 127$

Par exemple pour le premier calcul:

```
```python
>>> import numpy
>>> numpy.int8(127) + numpy.int8(1)
```
```

```
=== "Solution"
{{ correction(True,
"
```python
>>> import numpy
>>> numpy.int8(127)+numpy.int8(1)
<console>:1: RuntimeWarning: overflow encountered in byte_scalars
-128

>>> numpy.int8(127)+numpy.int8(2)
<console>:1: RuntimeWarning: overflow encountered in byte_scalars
-127

>>> numpy.int8(127)+numpy.int8(127)
<console>:1: RuntimeWarning: overflow encountered in byte_scalars
-2
```

"
) }}
```