DS 14/12/21 - Correction

Devoir n°4 : Les arbres binaires et arbres binaires de recherche	Thème 1 : Structures de données
	EVALUATION

	Exercice n°1	Exercice n°2	Exercice n°3	Exercice n°4 : BAC
Barème	3 pts	2 pts	7 pts	8 pts

Exercice n°1 :

Exercice n°1 :

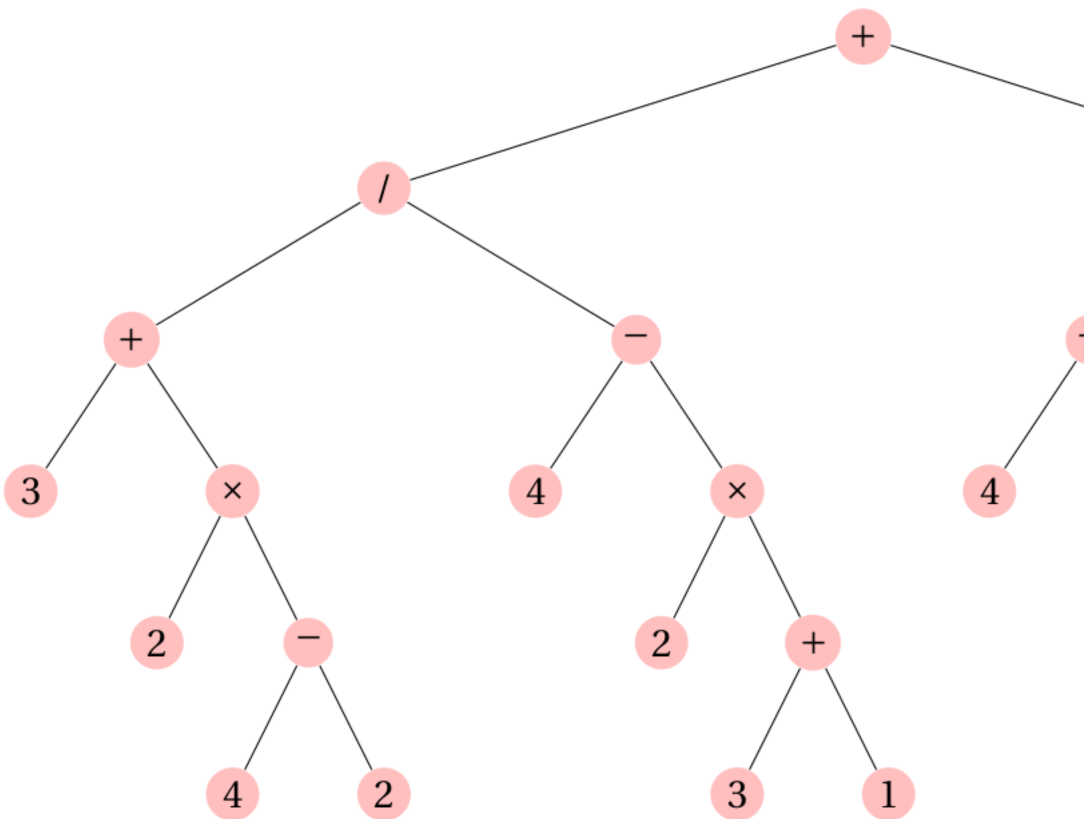
Enoncé

On considère l'expression suivante :

$(3+2\times(4-2))/(4-2\times(3+1))+(4-3)/(2-7\times(2+5))$

Représenter cette expression par un arbre binaire dans lequel les noeuds sont les opérations et les feuilles, les nombres.

Solution



Exercice n°2 : Démonstration de cours

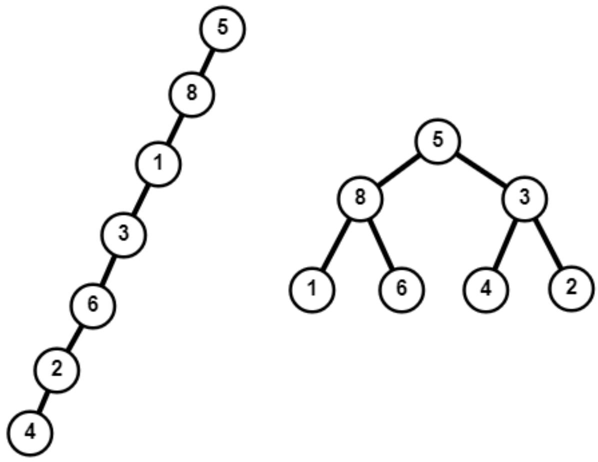
Exercice n°2 :

Enoncé

Justifier que pour tout arbre binaire de hauteur h et de taille $n \geq 2$, on a : $h \leq n \leq 2^h - 1$

Solution

La hauteur d'un arbre binaire est la profondeur maximale de ses noeuds. Cependant un arbre binaire d'une taille donnée peut avoir un aspect totalement différent. En effet, les deux arbres binaires suivants sont de même taille (égale à 7) mais ont des "formes" très différentes.



Arbre 1 **Arbre 2**

- Dans le premier cas, on a un taille t vérifiant \$ t=h\$
- Dans le cas d'un arbre complet, on a : $t = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{h-1}$ ceci est la somme S des h premiers termes d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1, d'où $S = \dfrac{1 - 2^h}{1 - 2} = 2^h - 1$.

On en déduit donc l'inégalité sur l'encadrement de la taille t d'un arbre binaire (non nécessairement complet) de hauteur h :

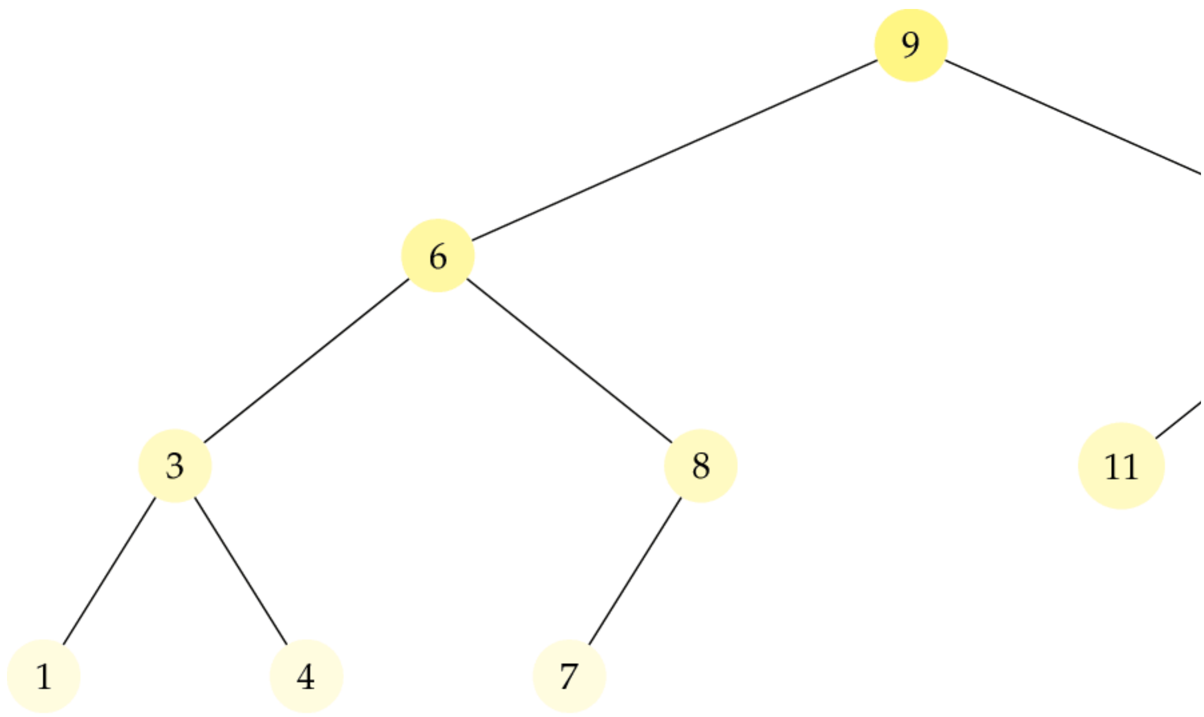
$h \leqslant t \leqslant 2^h - 1$

Exercice n°3 :

Dans cet exercice, on utilisera la définition suivante pour la hauteur d'un arbre :

- un arbre possédant un seul nœud (la racine) possède une hauteur $h = 1$
- un arbre vide possède une hauteur $h = 0$

On considère l'arbre binaire de recherche représenté ci-dessous, où val représente un entier :



Question 1

Enoncé

Indiquer :

a) Taille de l'arbre
b) Hauteur de l'arbre
c) Les feuilles
d) Donner les valeurs entières possibles de val pour cet arbre binaire de recherche.

Solution

a) Taille = 12
b) hauteur = 4
c) Les feuilles sont 1 - 4 - 7 -11 - val et 19
d) Les valeurs possibles pour val sont : 13 - 14 et 15.

On suppose pour la suite que **val** est égal à 14

Question 2

Enoncé

S'agit-il d'un arbre complet ? (Justifier la réponse)

Solution

Il ne s'agit pas d'un arbre complet car le noeud 8 a un sous-arbre gauche mais par de sous-arbre droit.

Question 3

Enoncé

Donner le résultat du parcours en profondeur infixe.

Solution

1 - 3 - 4 - 6 - 7 - 8 - 9 - 11 - 12 - 14 - 15 - 19

Question 4

Enoncé

Donner le résultat du parcours en profondeur préfixe.

Solution

9 - 6 - 3 - 1 - 4 - 8 - 7 - 12 - 11 - 15 - 14 - 19

Question 5

Enoncé

Donner le résultat du parcours en profondeur sufixe.

Solution

1 - 4 - 3 - 7 - 8 - 6 - 11 - 14 - 19 - 15 -12 - 9

Question 6

Enoncé

Donner le résultat du parcours en largeur d'abord.

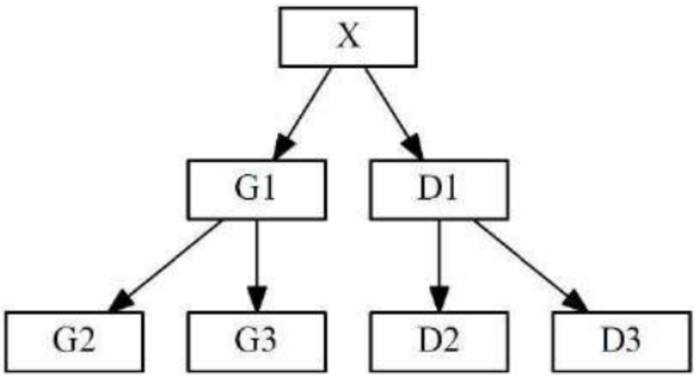
Solution

9 - 6 - 12 - 3 - 8 -11 - 15 - 1 - 4 - 7 - 14 - 19

Exercice n°4 : Exercice BAC

Notion abordée : les arbres binaires de recherche

Un arbre binaire est soit vide, soit un nœud qui a une valeur et au plus deux fils (le sous-arbre gauche et le sous-arbre droit).



- X est un nœud, sa valeur est X.valeur
- G1 est le fils gauche de X, noté X.fils_gauche
- D1 est le fils droit de X, noté X.fils_droit

Un arbre binaire de recherche est ordonné de la manière suivante :

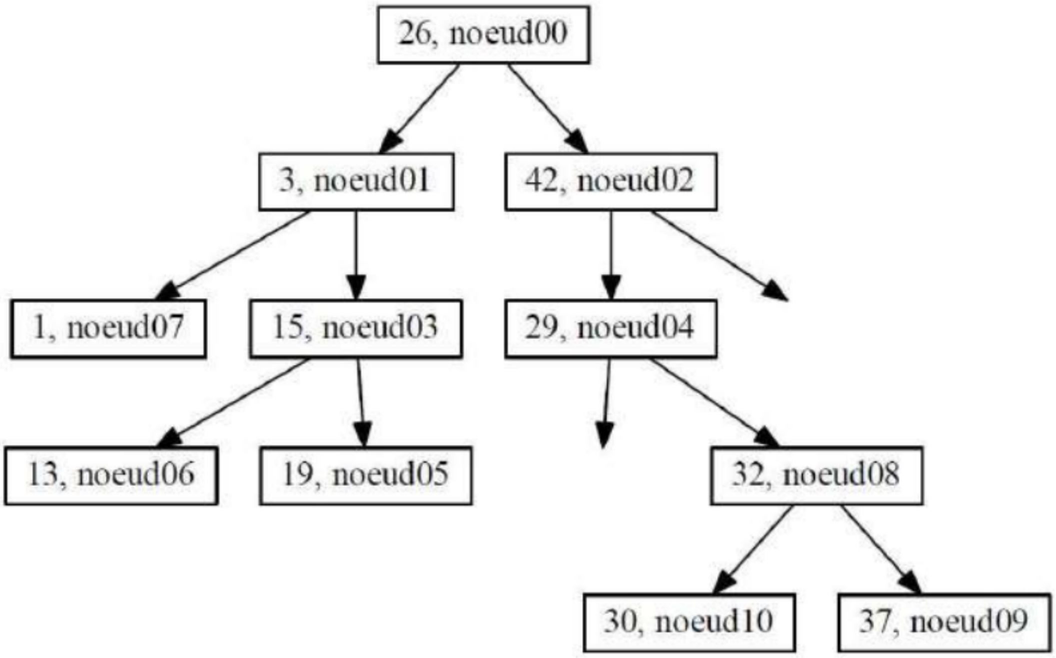
Pour chaque nœud X,

- les valeurs de tous les nœuds du sous-arbre gauche sont strictement inférieures à la valeur du nœud X
- les valeurs de tous les nœuds du sous-arbre droit sont supérieures ou égales à la valeur du nœud X

Ainsi, par exemple, toutes les valeurs des nœuds G1, G2 et G3 sont strictement inférieures à la valeur du nœud X et toutes les valeurs des nœuds D1, D2 et D3 sont supérieures ou égales à la valeur du nœud X.
Voici un exemple d'arbre binaire de recherche dans lequel on a stocké dans cet ordre les valeurs :

[26, 3, 42, 15, 29, 19, 13, 1, 32, 37, 30]

L'étiquette d'un nœud indique la valeur du nœud suivie du nom du nœud.
Les nœuds ont été nommés dans l'ordre de leur insertion dans l'arbre ci-dessous.
'29, noeud04' signifie que le nœud nommé noeud04 possède la valeur 29.

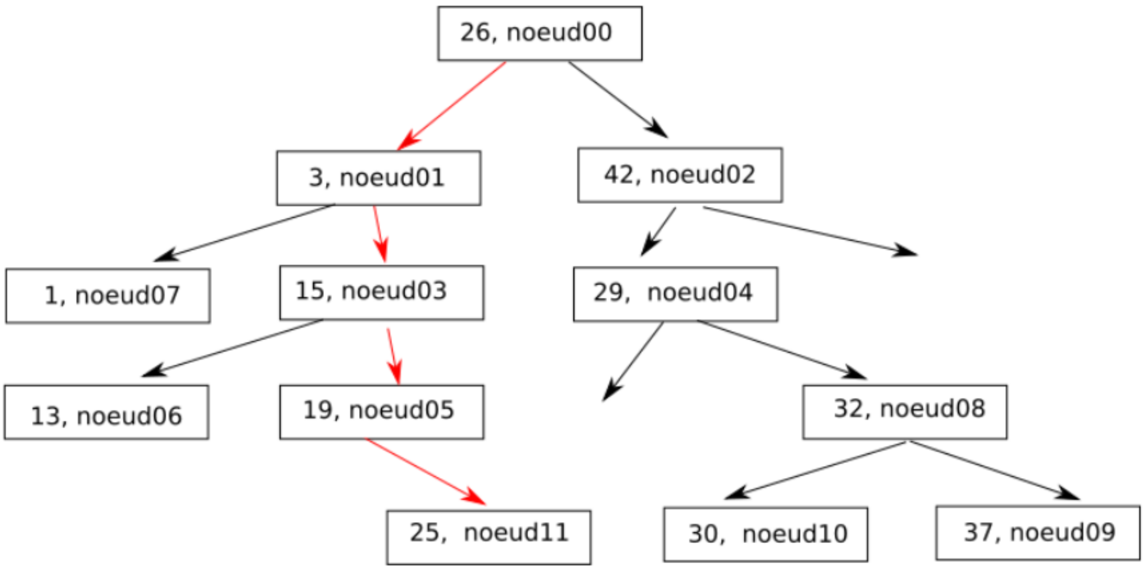


Question 1

Enoncé

On insère la valeur 25 dans l'arbre, dans un nouveau nœud nommé nœud11.
Recopier l'arbre binaire de recherche étudié et placer la valeur 25 sur cet arbre en coloriant en rouge le chemin parcouru.
Préciser sous quel nœud la valeur 25 sera insérée et si elle est insérée en fils gauche ou en fils droit, et expliquer toutes les étapes de la décision.

Solution



On désire insérer le noeud11 (valeur 25).

- On part de la racine (noeud00 de valeur 26), 25 est plus petit que 26, on considère donc le sous-arbre gauche et on se retrouve au niveau du noeud01 valeur 3).
- 25 est plus grand que 3, on considère donc le sous-arbre droit au noeud01 et on se retrouve au niveau du noeud03 (valeur 15).
- 25 est plus grand que 15, on considère donc le sous-arbre droit au noeud03 et on se retrouve au niveau du noeud05 (valeur 19).
- 25 est plus grand que 19, on considère donc le sous-arbre droit du noeud05, ce sous-arbre droit est vide et on insère donc le noeud11 à cet mplacement.
  Le noeud11 est donc inséré sous le noeud5 en fils droit.

Question 2

Enoncé

Préciser toutes les valeurs entières que l'on peut stocker dans le nœud fils gauche du nœud04 (vide pour l'instant), en respectant les règles sur les arbres binaires de recherche ?

Solution

Il est possible de stocker toutes les valeurs comprises entre 26 et 29, c'est à dire : 27 et 28

Question 3

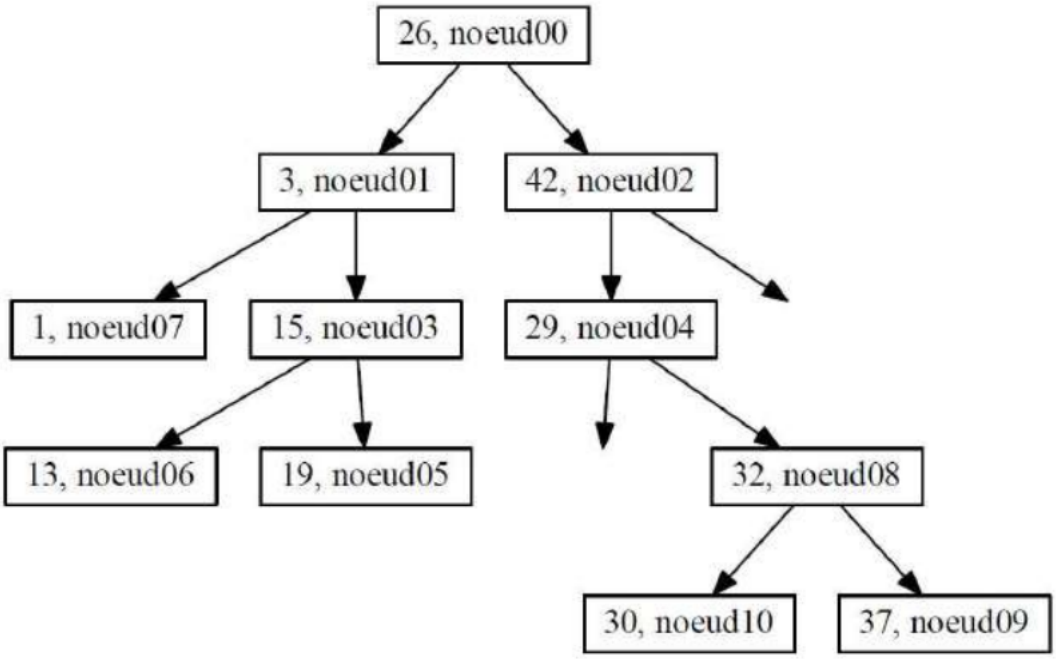
Enoncé

Voici un algorithme récursif permettant de parcourir et d'afficher les valeurs de l'arbre :

```
Parcours(A) # A est un arbre binaire de recherche
    Afficher(A.valeur)
    Parcours(A.fils_gauche)
    Parcours(A.fils_droit)
```

3.a. Écrire la liste de toutes les valeurs dans l'ordre où elles seront affichées.
3.b. Choisir le type de parcours d'arbres binaires de recherche réalisé parmi les propositions suivantes : Préfixe, Suffixe ou Infixe

Solution



3.a) 26 - 3 - 1 - 15 - 13 - 19 - 25 - 42 - 29 - 32 - 30 - 37

3.b) C'est un parcours préfixe

Question 4

Enoncé

En vous inspirant de l'algorithme précédent, écrire un algorithme Parcours2 permettant de parcourir et d'afficher les valeurs de l'arbre A dans l'ordre croissant.

Solution

```
Parcours2(A)
    Parcours2(A.fils_gauche)
    Afficher(A.valeur)
    Parcours2(A.fils_droit)
```