

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Parcours d'une liste

On rappelle qu'une liste `L`, en Python peut se représenter par le schéma suivant :

Eléments	L[0]	L[1]	L[2]	L[3]	...
	↑	↑	↑	↑	↑
Indices	0	1	2	3	...

On peut parcourir cette liste :

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Parcours d'une liste

On rappelle qu'une liste `L`, en Python peut se représenter par le schéma suivant :

Eléments	L[0]	L[1]	L[2]	L[3]	...
	↑	↑	↑	↑	↑
Indices	0	1	2	3	...

On peut parcourir cette liste :

- **Par indice** (on se place sur la seconde ligne du schéma ci-dessus) et on crée une variable (un entier) qui va parcourir la liste des indices :

```
for indice in range(len(L))
```

Il faut alors accéder aux éléments en utilisant leurs indices.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Parcours d'une liste

On rappelle qu'une liste `L`, en Python peut se représenter par le schéma suivant :

Eléments	L[0]	L[1]	L[2]	L[3]	...
	↑	↑	↑	↑	↑
Indices	0	1	2	3	...

On peut parcourir cette liste :

- **Par indice** (on se place sur la seconde ligne du schéma ci-dessus) et on crée une variable (un entier) qui va parcourir la liste des indices :

```
for indice in range(len(L))
```

Il faut alors accéder aux éléments en utilisant leurs indices.

- **Par élément** (on se place sur la première ligne du schéma ci-dessus) et on crée une variable qui va parcourir directement la liste des éléments :

```
for element in L
```

La variable de parcours (ici `element`) contient alors directement les éléments).

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Algorithme de recherche simple

Un algorithme de recherche **simple** d'un élément dans une liste consiste :

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Algorithme de recherche simple

Un algorithme de recherche **simple** d'un élément dans une liste consiste :

- à parcourir les éléments de cette liste

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Algorithme de recherche simple

Un algorithme de recherche **simple** d'un élément dans une liste consiste :

- à parcourir les éléments de cette liste
- renvoyer True si on trouve cet élément

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Algorithme de recherche simple

Un algorithme de recherche **simple** d'un élément dans une liste consiste :

- à parcourir les éléments de cette liste
- renvoyer `True` si on trouve cet élément
- sinon continuer le parcours et renvoyer `False` si la fin de liste est atteinte

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Algorithme de recherche par dichotomie

Lorsqu'une **liste est triée**, on peut utiliser la recherche par dichotomie :

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Algorithme de recherche par dichotomie

Lorsqu'une **liste est triée**, on peut utiliser la recherche par dichotomie :

- Partager la liste en deux moitiés

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Algorithme de recherche par dichotomie

Lorsqu'une **liste est triée**, on peut utiliser la recherche par dichotomie :

- Partager la liste en deux moitiés
- Comparer l'élément cherché avec celui situé au milieu

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Algorithme de recherche par dichotomie

Lorsqu'une **liste est triée**, on peut utiliser la recherche par dichotomie :

- Partager la liste en deux moitiés
- Comparer l'élément cherché avec celui situé au milieu
- En déduire dans quelle moitié poursuivre la recherche

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Algorithme de recherche par dichotomie

Lorsqu'une **liste est triée**, on peut utiliser la recherche par dichotomie :

- Partager la liste en deux moitiés
- Comparer l'élément cherché avec celui situé au milieu
- En déduire dans quelle moitié poursuivre la recherche
- S'arrêter lorsque la zone de recherche ne contient plus qu'un élément.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Définition : complexité

La **complexité** d'un algorithme est une mesure de son efficacité.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Définition : complexité

La **complexité** d'un algorithme est une mesure de son efficacité. On parle notamment de :

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Définition : complexité

La **complexité** d'un algorithme est une mesure de son efficacité. On parle notamment de :

- Complexité en temps : le nombre d'opérations nécessaire à l'exécution d'un algorithme en fonction de la taille des données

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Définition : complexité

La **complexité** d'un algorithme est une mesure de son efficacité. On parle notamment de :

- Complexité en temps : le nombre d'opérations nécessaire à l'exécution d'un algorithme en fonction de la taille des données
- Complexité en mémoire : l'occupation mémoire en fonction de la taille des données

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Complexité des algorithmes de recherche

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Complexité des algorithmes de recherche

- Le nombre de comparaisons nécessaire à l'algorithme de recherche simple est proportionnel à la taille de la liste.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Complexité des algorithmes de recherche

- Le nombre de comparaisons nécessaire à l'algorithme de recherche simple est proportionnel à la taille de la liste. On dit que cet algorithme a une **complexité linéaire**.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Complexité des algorithmes de recherche

- Le nombre de comparaisons nécessaire à l'algorithme de recherche simple est proportionnel à la taille de la liste. On dit que cet algorithme a une **complexité linéaire**.

L'allure du graphique représentant le temps d'exécution en fonction de la taille des données est une droite.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Complexité des algorithmes de recherche

- Le nombre de comparaisons nécessaire à l'algorithme de recherche simple est proportionnel à la taille de la liste. On dit que cet algorithme a une **complexité linéaire**.
L'allure du graphique représentant le temps d'exécution en fonction de la taille des données est une droite.
- Le nombre de comparaisons nécessaire à l'algorithme de recherche dichotomique augmente de 1 lorsque la taille de la liste double.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Complexité des algorithmes de recherche

- Le nombre de comparaisons nécessaire à l'algorithme de recherche simple est proportionnel à la taille de la liste. On dit que cet algorithme a une **complexité linéaire**.
L'allure du graphique représentant le temps d'exécution en fonction de la taille des données est une droite.
- Le nombre de comparaisons nécessaire à l'algorithme de recherche dichotomique augmente de 1 lorsque la taille de la liste double. En mathématiques, les fonctions évoluant de cette façon sont appelées **logarithmes**, l'algorithme de recherche dichotomique a donc une **complexité logarithmique**.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Rappel

On distingue deux types de boucle :

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle



Rappel

On distingue deux types de boucle :

- Les boucles **bornées**, on connaît leur nombre de répétitions. Ce sont les boucles `for` de Python.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle



Rappel

On distingue deux types de boucle :

- Les boucles **bornées**, on connaît leur nombre de répétitions. Ce sont les boucles `for` de Python.
- Les boucles **non bornées**, qui peuvent se répéter un nombre indéterminé de fois. Ce sont les boucles `while` de Python.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle



Rappel

On distingue deux types de boucle :

- Les boucles **bornées**, on connaît leur nombre de répétitions. Ce sont les boucles `for` de Python.
- Les boucles **non bornées**, qui peuvent se répéter un nombre indéterminé de fois. Ce sont les boucles `while` de Python.

Terminaison d'un algorithme

Une boucle non bornée pouvant se répéter à l'infini, on s'interroge sur le problème de la **terminaison** d'un programme. C'est à dire qu'on souhaite prouver mathématiquement qu'un programme s'arrête quelques soient les données fournies.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Preuve de la terminaison d'un algorithme

- Pour prouver la terminaison d'un algorithme on utilise la notion de **variant de boucle**. Il s'agit de mettre en évidence une **suite d'entiers naturels strictement décroissante** avec le nombre de tours de boucle.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Preuve de la terminaison d'un algorithme

- Pour prouver la terminaison d'un algorithme on utilise la notion de **variant de boucle**. Il s'agit de mettre en évidence une **suite d'entiers naturels strictement décroissante** avec le nombre de tours de boucle.
- On montre en mathématique qu'une telle suite ne peut être infinie, traduit en langage informatique cela signifie que la boucle s'arrête forcément.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Exemple

On considère la fonction ci-dessous :

```
1 def quotient(a,b):  
2     '''Renvoie le quotient dans la division euclidienne de a  
   par b avec a et b deux entiers naturels'''  
3     q=0  
4     while a-b>=0:  
5         a=a-b  
6         q=q+1  
7     return q
```

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Exemple

On considère la fonction ci-dessous :

```
1 def quotient(a,b):  
2     '''Renvoie le quotient dans la division euclidienne de a  
   par b avec a et b deux entiers naturels'''  
3     q=0  
4     while a-b>=0:  
5         a=a-b  
6         q=q+1  
7     return q
```

En trouvant un variant de boucle, prouver la terminaison de ce programme.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction de l'exemple

Montrer que la suite de valeurs prises par la variable a est une suite d'entiers naturels strictement décroissante.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction de l'exemple

Montrer que la suite de valeurs prises par la variable a est une suite d'entiers naturels strictement décroissante.

- La valeur initiale de a est un entier naturel (précondition)

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction de l'exemple

Montrer que la suite de valeurs prises par la variable a est une suite d'entiers naturels strictement décroissante.

- La valeur initiale de a est un entier naturel (précondition)
- A chaque tour de boucle la valeur de a diminue (de b).

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction de l'exemple

Montrer que la suite de valeurs prises par la variable a est une suite d'entiers naturels strictement décroissante.

- La valeur initiale de a est un entier naturel (précondition)
- A chaque tour de boucle la valeur de a diminue (de b).
- La nouvelle valeur de a est $a-b$ qui est garantie positive par condition d'entrée dans la boucle

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction de l'exemple

Montrer que la suite de valeurs prises par la variable a est une suite d'entiers naturels strictement décroissante.

- La valeur initiale de a est un entier naturel (précondition)
- A chaque tour de boucle la valeur de a diminue (de b).
- La nouvelle valeur de a est $a-b$ qui est garantie positive par condition d'entrée dans la boucle

Les trois éléments ci-dessus prouvent que la suite de valeurs prises par la variable a est une suite d'entiers naturels strictement décroissante. Cette suite de valeurs est donc finie ce qui prouve la terminaison de cet algorithme.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction d'un algorithme

On dira qu'un algorithme est **correct**

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction d'un algorithme

On dira qu'un algorithme est **correct** lorsqu'il renvoie la réponse attendue pour n'importe quel donnée.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction d'un algorithme

On dira qu'un algorithme est **correct** lorsqu'il renvoie la réponse attendue pour n'importe quel donnée.

Tests et correction

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction d'un algorithme

On dira qu'un algorithme est **correct** lorsqu'il renvoie la réponse attendue pour n'importe quel donnée.

Tests et correction

Des tests ne permettent **pas** de prouver qu'un algorithme est correct.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction d'un algorithme

On dira qu'un algorithme est **correct** lorsqu'il renvoie la réponse attendue pour n'importe quel donnée.

Tests et correction

Des tests ne permettent **pas** de prouver qu'un algorithme est correct. En effet, ils ne permettent de valider le comportement de l'algorithme que dans quelques cas particuliers et jamais dans le cas général

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Preuve de la correction d'un algorithme

Pour prouver la correction d'un algorithme on utilise la notion d'**invariant de boucle**. C'est une propriété du programme qui

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Preuve de la correction d'un algorithme

Pour prouver la correction d'un algorithme on utilise la notion d'**invariant de boucle**. C'est une propriété du programme qui

- est vraie à l'entrée dans la boucle.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Preuve de la correction d'un algorithme

Pour prouver la correction d'un algorithme on utilise la notion d'**invariant de boucle**. C'est une propriété du programme qui

- est vraie à l'entrée dans la boucle.
- reste vraie à chaque itération si elle l'était à l'itération précédente.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Preuve de la correction d'un algorithme

Pour prouver la correction d'un algorithme on utilise la notion d'**invariant de boucle**. C'est une propriété du programme qui

- est vraie à l'entrée dans la boucle.
- reste vraie à chaque itération si elle l'était à l'itération précédente.

Trouver un invariant de boucle c'est **prouver** qu'un algorithme fournit la réponse attendue quelque soient les données.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Exemple

On considère la fonction ci-dessous :

```
1 def compte(elt, liste) :  
2     '''compte le nombre de fois où elt apparaît dans liste'''  
3     compteur=0  
4     for x in liste :  
5         if x==elt :  
6             compteur=compteur+1  
7     return compteur
```

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Exemple

On considère la fonction ci-dessous :

```
1 def compte(elt, liste) :  
2     '''compte le nombre de fois où elt apparaît dans liste'''  
3     compteur=0  
4     for x in liste :  
5         if x==elt :  
6             compteur=compteur+1  
7     return compteur
```

En trouvant un invariant de boucle, montrer qu'à la sortie de la boucle, la variable compteur contient le nombre de fois où elt apparaît dans liste

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction de l'exemple

On note la liste $[e_1, e_2, \dots, e_n]$, et on note k le nombre de tours de boucle

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction de l'exemple

On note la liste $[e_1, e_2, \dots, e_n]$, et on note k le nombre de tours de boucle
Montrons que la propriété :

« compteur contient le nombre de de fois où elt apparaît dans les k premiers
éléments de la liste »

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction de l'exemple

On note la liste $[e_1, e_2, \dots, e_n]$, et on note k le nombre de tours de boucle
Montrons que la propriété :

« compteur contient le nombre de de fois où elt apparaît dans les k premiers
éléments de la liste »

est un invariant de boucle.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction de l'exemple

On note la liste $[e_1, e_2, \dots, e_n]$, et on note k le nombre de tours de boucle
Montrons que la propriété :

« compteur contient le nombre de de fois où e_{lt} apparaît dans les k premiers
éléments de la liste »

est un invariant de boucle.

- En entrant dans la boucle ($k=0$) la propriété est vraie car compteur vaut 0.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction de l'exemple

On note la liste $[e_1, e_2, \dots, e_n]$, et on note k le nombre de tours de boucle
Montrons que la propriété :

« **compteur** contient le nombre de de fois où **elt** apparaît dans les k premiers
éléments de la liste »

est un invariant de boucle.

- En entrant dans la boucle ($k=0$) la propriété est vraie car compteur vaut 0.
- Supposons la propriété vraie au k -ième tour de boucle alors, au tour suivant elle reste vraie puisqu'on ajoute 1 au compteur lorsque $elt=e_{k+1}$

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction de l'exemple

On note la liste $[e_1, e_2, \dots, e_n]$, et on note k le nombre de tours de boucle
Montrons que la propriété :

« **compteur** contient le nombre de de fois où **elt** apparaît dans les k premiers éléments de la liste »

est un invariant de boucle.

- En entrant dans la boucle ($k=0$) la propriété est vraie car compteur vaut 0.
- Supposons la propriété vraie au k -ième tour de boucle alors, au tour suivant elle reste vraie puisqu'on ajoute 1 au compteur lorsque $elt=e_{k+1}$

Cette propriété est donc bien un invariant de boucle.

C17 Notion algorithmique - Tableaux, Complexité - Variant de boucle

Correction de l'exemple

On note la liste $[e_1, e_2, \dots, e_n]$, et on note k le nombre de tours de boucle
Montrons que la propriété :

« **compteur** contient le nombre de de fois où **elt** apparaît dans les k premiers éléments de la liste »

est un invariant de boucle.

- En entrant dans la boucle ($k=0$) la propriété est vraie car compteur vaut 0.
- Supposons la propriété vraie au k -ième tour de boucle alors, au tour suivant elle reste vraie puisqu'on ajoute 1 au compteur lorsque $elt=e_{k+1}$

Cette propriété est donc bien un invariant de boucle. L'invariant de boucle reste vraie en sortie de boucle ce qui prouve que l'algorithme est correct.