#### **TD13 Piles**

TD n°13 : Structures de données - Les Piles	Thème 1 : Structures de données
	COURS et EXERCICES

#### image

Les **piles** et les **files** sont deux structures de données linéaires qui permettent, au même titre que les listes, de gérer des séquences d'éléments. Ainsi, dans une pile et dans une file chaque élément est également repéré par sa position, il y a un premier, un dernier, chaque élément a un successeur (sauf le premier) et un prédécesseur (sauf le dernier). Les opérations disponibles pour ces deux structures sont assez proches car dans les deux cas, on veut pouvoir : \* créer une pile/file vide \* connaître sa taille \* lui ajouter un élément \* lui retirer un élément \* accéder à un élément particulier

Cependant, la politique d'ajout/retrait des éléments dans la séquence n'est pas la même. Le nom des opérations diffèrent également pour mieux distinguer les deux structures.

## I. Les Piles

Il faut se représenter une pile comme. . . une pile de livres! Seul le livre disposé sur le dessus est accessible : l'ajout et le retrait d'un livre ne peut donc se faire que sur le sommet de la pile.

image

#### 1. → Interface d'une pile

#### Interface d'une pile

Le jeu d'opérations disponibles pour une pile est :

- construire pile() : crée une pile vide
- taille(P) : accès au nombre d'éléments dans la pile P
- empiler(P, e) : ajoute l'élément e au sommet de la pile P.
- depiler(P) : retire l'élément au sommet de la pile P . **Précondition** : P n'est pas vide.
- sommet(P) : pour accéder (en lecture) au sommet de la pile P (sans le retirer de la pile). **Précondition** : P n'est pas vide.

En anglais, l'opération empiler est souvent notée push, l'opération depiler est souvent notée pop et l'opération taille est souvent notée top.

Remarque : Certaines signatures algorithmiques peuvent légèrement varier.

Par exemple, on peut parfois voir l'opération est\_vide (qui teste si une pile est vide) à la place de taille (une pile est vide si et seulement si sa taille vaut 0) ou encore l'opération depiler qui renvoie également le sommet (donc l'opération sommet n'est plus nécessaire). C'est un choix libre qui ne change pas la nature de la structure de données abstraite mais la façon d'écrire des algorithmes.

#### 2. → Représentation d'une pile et exemple

Une pile contenant les éléments ('a'), ('b') et ('c') (('a')) étant le sommet et donc ('c') le fond de la pile) sera représentée :

\[\text{>'a', 'b', 'c']}\]

#### **Exemple**

On considère la pile P: (>'a', 'b', 'c']). Voici comment la manipuler :

Opération	Contenu de la pile
empiler(P, 'e')	\(\text{>'e', 'a', 'b', 'c']}\)
depiler(P)	\(\text{>'a', 'b', 'c']}\)
depiler(P)	\(\text{>'b', 'c']}\)
sommet(P)	renvoie \(\text{'b'}\)
depiler(P)	\(\text{>'c']}\)
empiler(P, 'm')	\(\text{>'m', 'c']}\)
taille(P)	renvoie 2

### 3. → Applications des piles

Les piles sont très utilisées en informatique. Voici quelques usages caractéristiques :

- Les algorithmes récursifs utilisent une pile d'appel pour mémoriser les contextes d'exécution de chaque appel. (déjà abordé)
- Dans un navigateur web, une pile sert à mémoriser les pages Web visitées. L'adresse de chaque nouvelle page visitée est empilée et l'utilisateur dépile l'adresse courante pour accéder à la page précédente en cliquant le bouton « Afficher la page précédente ».
- La fonction « Annuler la frappe » (en anglais Undo, le célèbre CTRL+F) d'un traitement de texte mémorise les modifications apportées au texte dans une pile.
- On peut aussi utiliser une pile pour parcourir (en profondeur) un graphe et mémoriser les sommets visités. (voir Thème 5 : Algorithmique)
- La vérification du bon parenthésage d'une expression peur également se faire à l'aide d'une pile.
- etc.

#### 4. → Implémentations

Une pile est généralement implémentée par :

- un tableau (redimensionnable ou non)
- ou par une liste chaînée.

Selon le cas, il faudra veiller à ce que l'implémentation soit la plus efficace possible.

- Si on utilise un tableau, les opérations empiler et depiler seront plus efficaces si elles se font à la fin du tableau plutôt qu'au début car cela ne nécessite pas de décaler les autres éléments.
- En revanche, si on utilise une liste chaînée, elles seront plus efficaces si elles ont lieu au début (car pour accéder au dernier élément il faut parcourir tous les éléments de proche en proche à partir du premier qui est le seul accessible).

# II. Exercices sur les piles

#### Activité 1 : Manipulation des piles

1. On considère la séquence d'instructions suivantes. Indiquez le résultat à chaque étape.

```
Texte

P = construire_pile()
empiler(P, 1)
empiler(P, 2)
empiler(P, 3)
s = sommet(P)
depiler(P)
depiler(P)
empiler(P, s)
```

2. Ecrivez la séquence d'instructions permettant d'obtenir l'évolution suivante pour une pile P.

Etat de la pile P	Instructions (à compléter)
\(\text{>]}\)	
\(\text{>3]}\)	
\(\text{>1, 3]}\)	
\(\text{>4, 1, 3]}\)	
\(\text{>1, 3]}\)	

# Etat de la pile P Instructions (à compléter) \(\\text{>3]}\\) \(\\text{>]}\\)

Activité 2 : Première implémentation d'une pile (avec le type `list` de Python)

#### Interface

On définit le type abstrait Pile par ses opérations :

• création de pile vide

• empiler : ajout au sommet

• depiler : retrait du sommet

• sommet : accès (en lecture) au sommet

• taille : accès au nombre d'éléments

L'objectif est d'implémenter ce type abstrait en utilisant le type prédéfini list de Python (tableau dynamique = redimensionnable). Les éléments sont ajouter/retirer à la fin pour des raisons d'efficacité. Vous utiliserez le paradigme objet.

**Enoncé** Solution

Créez une classe Pile implémentant ce type abstrait. Les objets de cette classe auront un attribut appelé contenu qui est le contenu de la pile stocké un objet list de Python. *Indication*: il faudra utiliser les méthodes append et pop du type list.

#### 🐍 Script Python

#### **%** Script Python

```
class Pile:
    def __init__(self):
        self.contenu=[]

    def empiler(self,e):
        self.contenu.append(e)
```

```
def depiler(self):
    if self.contenu!=[]:
        self.contenu.pop()
    def sommet(self):
        if self.contenu!=[]:
            return
self.contenu[-1]

    def taille(self):
        return
len(self.contenu)
```

**Enoncé** Solution

Définissez la méthode spéciale <u>repr</u> pour afficher le contenu d'une pile comme une list Python.

Attention: la méthode
\_\_repr\_\_ doit renvoyer une
chaîne de caractères
(conversion avec la
fonction str).

#### Script Python

```
🐍 Script Python
class Pile:
  def init (self):
    self.contenu=[]
  def empiler(self,e):
    self.contenu.append(e)
  def depiler(self):
    if self.contenu!=[]:
       self.contenu.pop()
  def sommet(self):
    if self.contenu!=[]:
       return
self.contenu[-1]
  def taille(self):
    return
len(self.contenu)
  def __repr__(self):
     ch = ""
    for e in self.contenu:
       ch = str(e) + "," +
ch # ne pas oublier de
convertir les éléments en
chaine de caractères
```

```
ch = ch[:-1] # pour
enlever la dernière virgule
ch = ">" + ch+']'
return ch
```

Modifiez la méthode  $\_repr\_$  pour afficher les piles avec la notation du cours : \ (\text{>...]}\). Attention à l'odre des éléments, dans cette représentation le sommet de la pile est à gauche.



#### Exemple

on souhaite que le code

#### **&** Script Python

P = Pile()
print(P)
P.empiler('a')
print(P)
P.empiler('c')
print(P)
P.empiler('b')
print(P)
P.depiler()
print(P)
P.empiler('z')
print(P)

produise l'affichage

#### Texte

>]

>a]

>c,a]

>b,c,a]

>c,a]

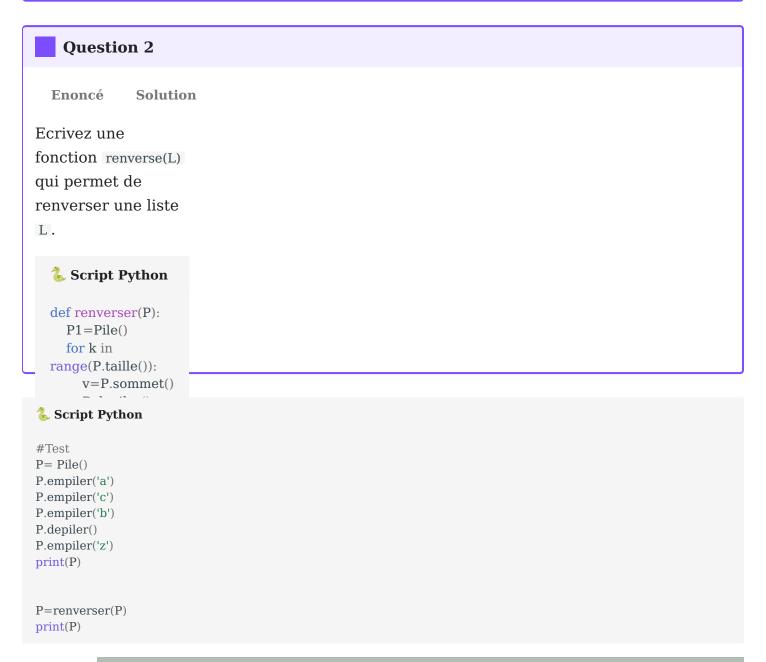
>z,c,a]

#### Activité 3 : Renverser un objet

On souhaite renverser une liste en utilisant une pile. Renverser la liste [1, 2, 3] donne une nouvelle liste [3, 2, 1].

#### Question 1:

Proposez l'algorithme d'une fonction renverser permettant de renverser une liste en utilisant une pile.



Activité 4 : Vérifier le bon parenthésage d'une expression

Voici deux expressions mal parenthésées : (2(x-1)(4(x+3))) et (2(x-1))(4(x+3))

En voici une bien parenthésée : (3(x-1)(4(x+3)-2)).

On souhaite écrire une fonction verif\_parenthesage(expression) qui renvoie Vrai si l'expression passée en argument est bien parenthésée et Faux sinon. On suppose que l'expression est une chaîne de caractères

#### **Spécification**:

• Entrée : une chaîne de caractères expression

• Sortie : un booléen OK

• Rôle : OK = Vrai si et seulement si le parenthésage dans expression est correct

• Précondition : les caractères à tester sont ( et ).

#### Idée de l'algorithme :

- On consulte les caractères un à un dans l'ordre de la chaîne
- Si on voit une parenthèse ouvrante, il faut attendre pour trouver la fermante correspondante. On peut ajouter cette parenthèse ouvrante à une pile en attendant de trouver la fermante correspondante.
- Si on voit une fermante, la **dernière** ouvrante *qui n'a pas encore été associée*, celle au sommet de la pile, doit normalement lui correspondre.

Comme on a besoin de trouver la dernière parenthèse ouvrante pas encore associée, une pile est appropriée pour conserver les ouvrantes non encore associées car la dernière se trouve alors au sommet de la pile (donc facilement accessible).



Proposez un jeu de tests de qualité pour cette fonction avec des assert.



Ecrivez une fonction verif\_parenthesage(expression) qui convient. *Elle doit passer tous les tests avec succès bien sûr.* 

#### & Script Python

 ${\color{red} \textbf{def verif\_parenthesage(expression):}}$ 

OK = True

P = Pile() # création pile vide

# à compléter

# jeu de tests à recopier ici

# Activité 5 : Deuxième implémentation d'une pile (avec des listes chaînées)

Importez la classe ListeChainee du TD 12 *listechainee.py* qui a été créé dans l'activité sur les listes chaînées puis implémentez une classe Pile par une liste chaînée. On rappelle que les opérations d'ajout/retrait pour une liste chaînée sont efficaces au tête de liste.

& Script Python

## III. Exercices sur les piles - Sujet BAC

#### Sujet zéro - Exercice 1

Cet exercice porte sur la notion de pile et sur la programmation de base en Python.

On rappelle qu'une pile est une structure de données abstraite fondée sur le principe « dernier arrivé, premier sorti » :

sujet0\_Ex1\_pile.png

On munit la structure de données Pile de quatre fonctions primitives définies dans le tableau cidessous. :

Structure de données abstraite : Pile

Utilise: Éléments, Booléen

#### Opérations:

- creer\_pile\_vide : Ø → Pile
   creer\_pile\_vide() renvoie une pile vide
- est\_vide : Pile → Booléen
   est\_vide(pile) renvoie True si pile est vide, False sinon
- empiler : Pile, Élément → Rien empiler(pile, element) ajoute element au sommet de la pile
- depiler : Pile → Élément depiler(pile) renvoie l'élément au sommet de la pile en le retirant de la pile

#### Question 1:

**Enoncé Solution** 

On suppose dans cette question que le contenu de la pile P est le suivant (les éléments étant empilés par le haut)

sujet0\_Ex1\_Q1.png

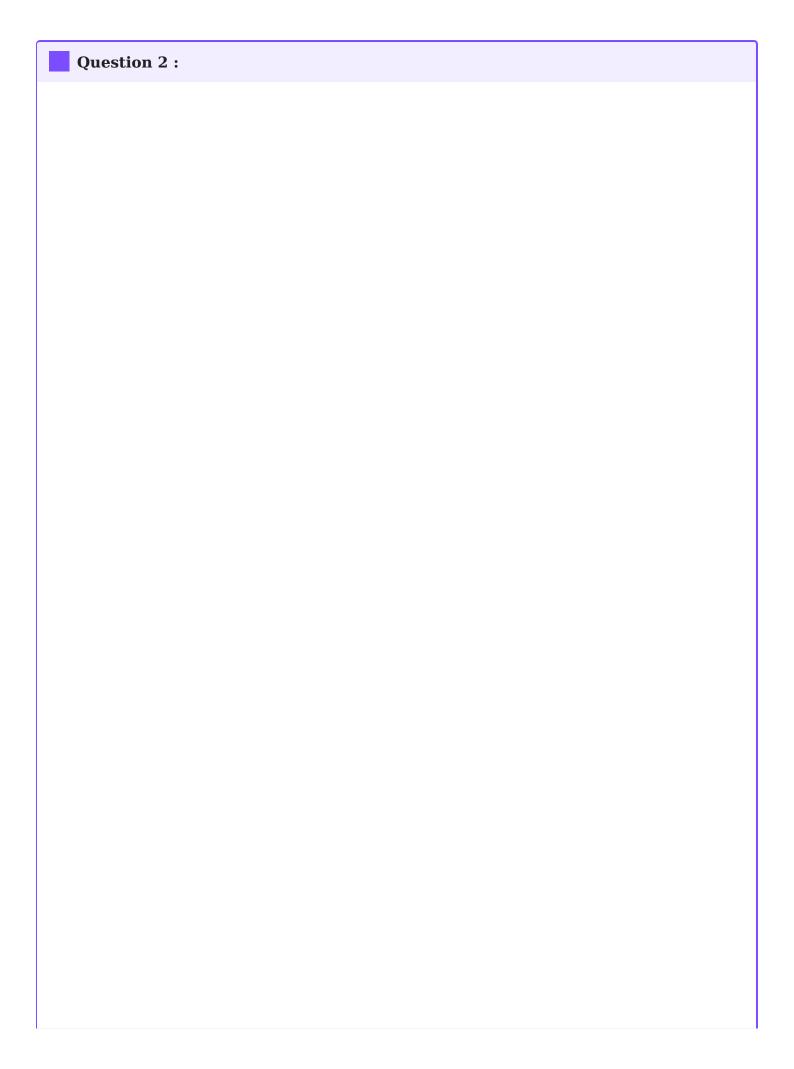
Quel sera le contenu de la pile Q après exécution de

la suite d'instructions suivante ?

#### Texte

```
1 Q =
creer_pile_vide()
2 while not
est_vide(P):
3 empiler(Q,
depiler(P))
```

sujetzero Ex1 1.png



1. On appelle hauteur
d'une pile le nombre
d'éléments qu'elle
contient. La fonction
hauteur\_pile prend en
paramètre une pile P
et renvoie sa hauteur.
Après appel de cette
fonction, la pile P doit
avoir retrouvé son état
d'origine.

Exemple: si P est la
pile de la question 1:
hauteur\_pile(P) = 4.

Recopier et compléter sur votre copie le programme Python suivant implémentant la fonction hauteur\_pile en remplaçant les ??? par les bonnes instructions.

# 1 def hauteur\_pile ( P ): 2 Q = creer\_pile\_vide () 3 n = 0 4 while not ( est\_vide ( P )): 5 ??? 6 x = depiler (P ) 7 empiler (Q ,x ) 8 while not ( est\_vide ( Q )): 9 ???

Texte

2. Créer une fonction

max\_pile ayant pour

paramètres une pile P et

un entier i. Cette fonction

renvoie la position j de

10 empiler (P, x)
11 return ???

l'élément maximum parmi les i derniers éléments empilés de la pile P. Après appel de cette fonction, la pile P devra avoir retrouvé son état d'origine. La position du sommet de la pile est 1. Exemple : si P est la pile de la question 1 : max\_pile(P, 2) = 1

```
1.

def hauteur_pile(P):
    Q=creer_pile_vide()
    n=0
    while not
    est_vide(P):
        n+=1
        x=depiler(P)
        empiler(Q,x)
    while not
    est_vide(Q):
        x=depiler(Q)
    empiler(P,x)
```

#### **Explication**

return n

On initialise Q est vide et n = 0

```
% Script Python

while not est_vide(P):
    n+=1
    x=depiler(P)
    empiler(Q,x)
```

sujetzero\_Ex1\_2.png

Maintenant il faut remettre la pile P à l'état initial, d'où la deuxième partie du programme :

# % Script Python while not est\_vide(Q): x=depiler(Q) empiler(P,x)

1.

#### **%** Script Python

```
def max_pile(P,i):
  # si la pile
comporte moins de i
élément ou que i=0
on renvoie 0
  if i >
hauteur_pile(P) or
i==0:
     return 0
  maxi = depiler(P)
  Q =
creer_pile_vide()
  empiler(Q,maxi)
  j = 1
  indice = 1
  while j < i:
    j = j + 1
    x = depiler(P)
    if x > maxi:
       maxi = x
       indice = j
     empiler(Q,x)
  while not
est\_vide(Q):
    empiler(P,
```

depiler(Q))

return indice

#### Question 3:

#### **Enoncé** Solution

Créer une fonction retourner ayant pour paramètres une pile P et un entier j. Cette fonction inverse l'ordre des j derniers éléments empilés et ne renvoie rien. On pourra utiliser deux piles auxiliaires. Exemple: si P est la pile de laquestion 1(a), après l'appel de retourner(P, 3), l'état de la pile P sera:

sujet0\_Ex1\_Q3.png

# & Script Python

```
def
retourner(P,j):
  Q1 =
creer pile vide()
  Q2 =
creer_pile_vide()
  i = 0
  while not
est vide(P) and i
< j:
    i = i + 1
    x =
depiler(P)
    empiler(Q1,
X)
  while not
```

```
est_vide(Q1):
    x =
    depiler(Q1)
        empiler(Q2,
    x)
    while not
    est_vide(Q2):
        x =
    depiler(Q2)
```

empiler(P, x)

#### Question 4:

**Enoncé** Solution

L'objectif de cette question est de trier une pile de crêpes.

On modélise une pile de crêpes par une pile d'entiers représentant le diamètre de chaque crêpe. On souhaite réordonner les crêpes de la plus grande (placée en bas de la pile) à la plus petite (placée en haut de la pile). On dispose uniquement d'une spatule que l'on peut insérer dans la pile de crêpes de façon à retourner l'ensemble des crêpes qui lui sont audessus.

Le principe est le suivant :

- On recherche la plus grande crêpe.
- On retourne la pile à partir de cette crêpe de façon à mettre cette plus grande crêpe tout en haut de la pile.
- On retourne l'ensemble de la pile de façon à ce que cette plus grande crêpe se retrouve tout en bas.
- La plus grande crêpe étant à sa place, on recommence le

```
principe avec le reste
de la pile
```

#### **Exemple:**

```
sujet0 Ex1 Q4.png
```

Créer la fonction tri\_crepes ayant pour paramètre une pile P. Cette fonction trie la pile P selon la méthode du tri crêpes et ne renvoie rien.

On utilisera les fonctions créées dans les questions précédentes.

#### **Exemple:**

```
Si la pile P est
sujet0_Ex1_Q42.png après
l'appel de tri_crepes(P), la
pile P devient
```

sujet0 Ex1 Q43.png

#### Script Python

#### ole 7 Juin 2021 - Exercice 2

s de piles et de programmation orientée objet.

élise la structure d'une pile d'entiers.

alise une pile vide.

3 l'implémentation de ses méthodes est donnée ci-dessous.

#### **& Script Python**

```
class Pile:
    def __init__(self):
        """Initialise la pile comme une pile vide."""

def est_vide(self):
        """Renvoie True si la liste est vide, False sinon."""

def empiler(self, e):
        """Ajoute l'élément e sur le sommet de la pile, ne renvoie rien."""

def depiler(self):
        """Retire l'élément au sommet de la pile et le renvoie."""
```

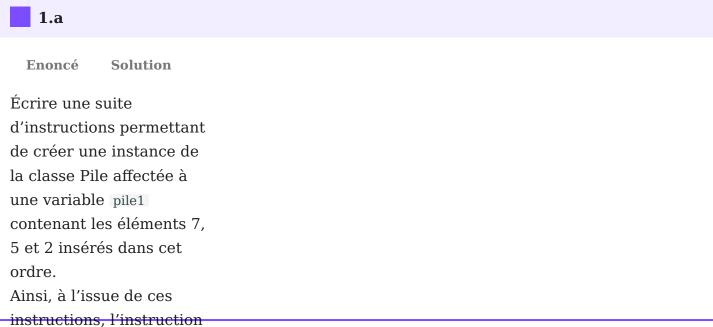
```
def nb_elements(self):

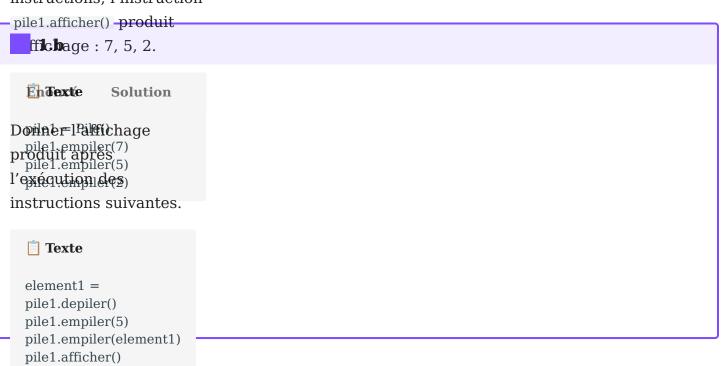
"""Renvoie le nombre d'éléments de la pile. """

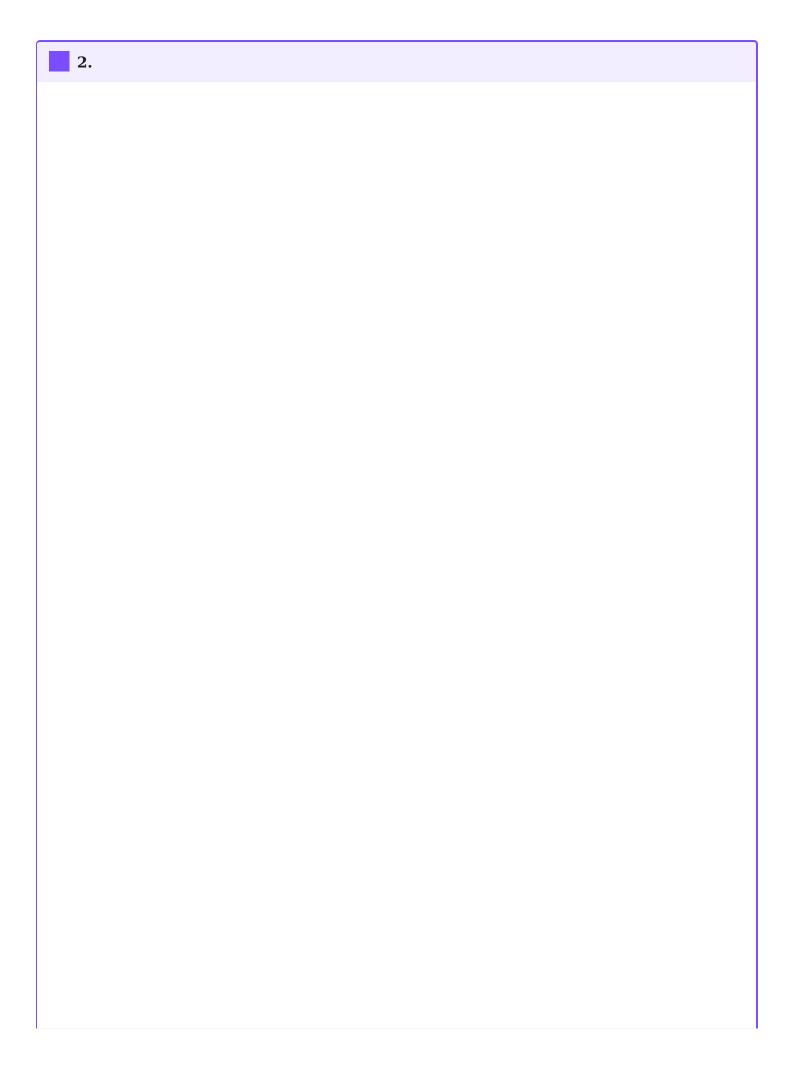
def afficher(self):

"""Affiche de gauche à droite les éléments de la pile, du fond de la pile vers son sommet. Le sommet est alors l'élément affiché le plus à droite. Les éléments sont séparés par une virgule. Si la pile est vide la méthode affiche « pile vide »."""
```

Seules les méthodes de la classe ci-dessus doivent être utilisées pour manipuler les objets Pile.







**Enoncé Solution** On donne la fonction mystere suivante :

#### Script Python

```
def mystere(pile,
element):
    pile2 = Pile()
    nb_elements =
pile.nb_elements()
    for i in
range(nb_elements):
        elem =
pile.depiler()
        pile2.empiler(elem)
        if elem ==
element:
        return pile2
return pile2
```

- a. Dans chacun des quatre cas suivants, quel est l'affichage obtenu dans la console ?
  - Cas n°1

#### **& Script Python**

```
>>>pile.afficher()
7, 5, 2, 3
>>>mystere(pile,
2).afficher()
```

• Cas n°2

#### & Script Python

```
>>>pile.afficher()
7, 5, 2, 3
>>>mystere(pile,
9).afficher()
```

• Cas n°3

**& Script Python** 

```
>>>pile.afficher()
7, 5, 2, 3
>>>mystere(pile,
3).afficher()
```

• Cas n°4

#### **& Script Python**

>>>pile.est\_vide()
True
>>>mystere(pile,
3).afficher()

b. Expliquer ce que permet d'obtenir la fonction mystere.

#### a)

• cas n°1:3,2

•  $cas n^2 : 3, 2, 5, 7$ 

• cas n°3:3

 $\bullet$  cas  $n^{\circ}4$ : pile vide

#### b)

La fonction mystere renvoie une pile qui contiendra tous les éléments de la pile passée en paramètre (pile) à condition qu'ils soient situés au-dessus de l'élément passé en paramètre (element). L'élément element sera lui aussi présent dans la pile renvoyée par la fonction.

Écrire une fonction etendre(pile1, pile2) qui prend en arguments deux objets Pile appelés pile1 et pile2 et qui modifie pile1 en lui ajoutant les éléments de pile2 rangés dans l'ordre inverse. Cette fonction ne renvoie rien.

On donne ci-dessous les résultats attendus pour certaines instructions.

#### **%** Script Python

```
>>>pile1.afficher()
7, 5, 2, 3
>>>pile2.afficher()
1, 3, 4
>>>etendre(pile1, pile2)
>>>pile1.afficher()
7, 5, 2, 3, 4, 3, 1
>>>pile2.est_vide()
True
```

#### **& Script Python**

```
def etendre(pile1,
pile2):
    while not
pile2.est_vide():
    x =
pile2.depiler()
    pile1.empiler(x)
```



Écrire une fonction supprime\_toutes\_occurences(pile, element) qui prend en arguments un objet Pile appelé pile et un élément element et supprime tous les éléments element de pile.

On donne ci-dessous les résultats attendus pour certaines instructions.

#### **& Script Python**

```
>>>pile.afficher()
7, 5, 2, 3, 5
>>>supprime_toutes_occurences
(pile, 5)
>>>pile.afficher()
7, 2, 3
```

#### Script Python

```
supprime_toutes_occurences(pile,
element):
    p2 = Pile()
    while not pile.est_vide():
        x = pile.depiler()
        if x != element:
            p2.empiler(x)
    while not p2.est_vide():
        x = p2.depiler()
```

#### ingers 2021 - Exercice 5

#### iées : les piles.

e d'entiers positifs. On suppose que les quatre fonctions plement en langage Python :

#### 🐍 Script Python

N

su

```
\begin{split} & empiler(P,\,e): ajoute \ l'\'el\'ement \ e \ sur \ la \ pile \ P \ ; \\ & depiler(P): enl\`eve \ le \ sommet \ de \ la \ pile \ P \ et \ retourne \ la \ valeur \ de \ ce \ sommet \ ; \\ & est\_vide(P): retourne \ True \ si \ la \ pile \ est \ vide \ et \ False \ sinon \ ; \\ & creer\_pile(): retourne \ une \ pile \ vide. \end{split}
```

Dans cet exercice, seule l'utilisation de ces quatre fonctions sur la structure de données pile est autorisée.

Recopier le schéma cidessous et le compléter sur votre copie en exécutant les appels de fonctions donnés. On écrira ce que renvoie la fonction utilisée dans

#### chaque cas, et on

```
liguera None si la
fonction ne retourne
aucune valeus olution
```

chief Gose 14 For the pag dessous, qui prend en sujet CE 2021 Ex5 Q1.png argument une pile P et renvoie un couple de piles :

#### **& Script Python**

```
def transforme(P):
    Q = creer_pile()
    while not
est_vide(P):
    v = depile(P)
    empile(Q,v)
    return (P,Q)
```

#### Recopier et compléter sur

votre copie le document ci-dessous

sujetCE\_2021\_Ex5\_Q2.png

 $sujetCE\_2021\_Ex5\_Q2.png$ 

Ecrire une fonction en langage Python maximum(P) recevant une pile P comme argument et qui renvoie la valeur maximale de cette pile. On ne s'interdit pas qu'après exécution de la fonction, la pile soit vide.

On souhaite connaître le nombre d'éléments d'une pile à l'aide de la fonction taille(P)

sujetCE 2021 Ex5 Q3.png

#### **%** Script Python

```
def maximum(P):
    m=depiler(P)
    while not est_vide(P):
        v = depiler(P)
        if v > m:
        m = v
    return m
```

#### Enoncé Solution a Solution b

a. Proposer une stratégie écrite en langage naturel et/ou expliquée à l'aide de schémas, qui permette de mettre en place une telle fonction.
b. Donner le code Python de cette fonction taille(P) (on pourra utiliser les cinq fonctions déjà programmées).

Il suffit de mettre place une boucle qui s'arrêtera quand la pile P sera vide. À chaque tour de boucle, on dépile P, on empile les valeurs précédemment dépilées dans une pile auxiliaire Q et on incrémente un compteur de 1. Une fois la boucle terminée, on crée une nouvelle boucle où on dépile Q et on empile P avec les valeurs dépilées

(l'idée est de retrouver l'état originel de pile. Il suffit ensuite de renvoyer la valeur du compteur.

#### & Script **Python** def taille(P): cmp = 0Q =creer\_pile() while not est\_vide(P): v =depiler(P) empiler(Q,v) cmp = cmp+ 1 while not est\_vide(Q): v =depiler(Q) empiler(P,v)

return cmp