Récursivité

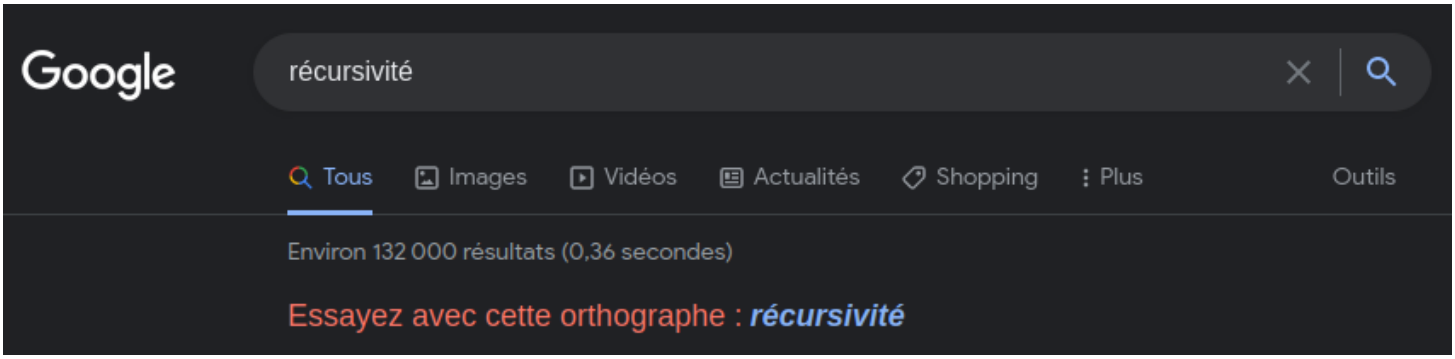
Thème 4 - Langage et Programmation

03 RECURSIVITE

Programme Terminale

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Récursivité	Ecrire un programme récursif. Analyser le fonctionnement d'un programme récursif.	Des exemples relevant de domaines variés sont à privilégier

1. Première approche



Faite l'essai

1.1. Principe

En règle générale, un objet est dit récursif s'il se définit à partir de lui-même.
On trouve donc des acronymes récursifs, comme :

- GNU dans GNU/Linux (GNU is Not Unix),
- le logiciel d'émulation WINE (Wine Is Not an Emulator),
- les cartes bancaire VISA (Visa International Service Association),
- le moteur de recherche Bing (Bing is not Google),
- etc.

> **A retenir : Fonction récursive**
>
> Une fonction est dite récursive lorsqu'elle fait appel à elle-même dans sa propre définition.

1.2. Premiers exemples et précautions d'usage

Note : No infinite recursion !
Voici trois premiers exemples de fonctions récursives. Dans chaque cas, repérer l'appel récursif à la fonction.

Une seule de ces 3 fonctions est correcte, laquelle?

- **Fonction 1**

Script Python

```
def f(n):
    print(n)
    f(n-1)
    print("Hello world!")
```

- **Fonction 2**

Script Python

```
def f(n):
    if n == 0:
        print("Hello world!")
    else:
```

```
        print(n)
        f(n-1)
```

- **Fonction 3**

Script Python

```
def f(n):
    if n == 0:
        print("Hello world!")
    else:
        print(n)
        f(n)
```

Cas de Base

Lorsqu'on écrit une fonction récursive, le piège classique est de créer une boucle infinie.

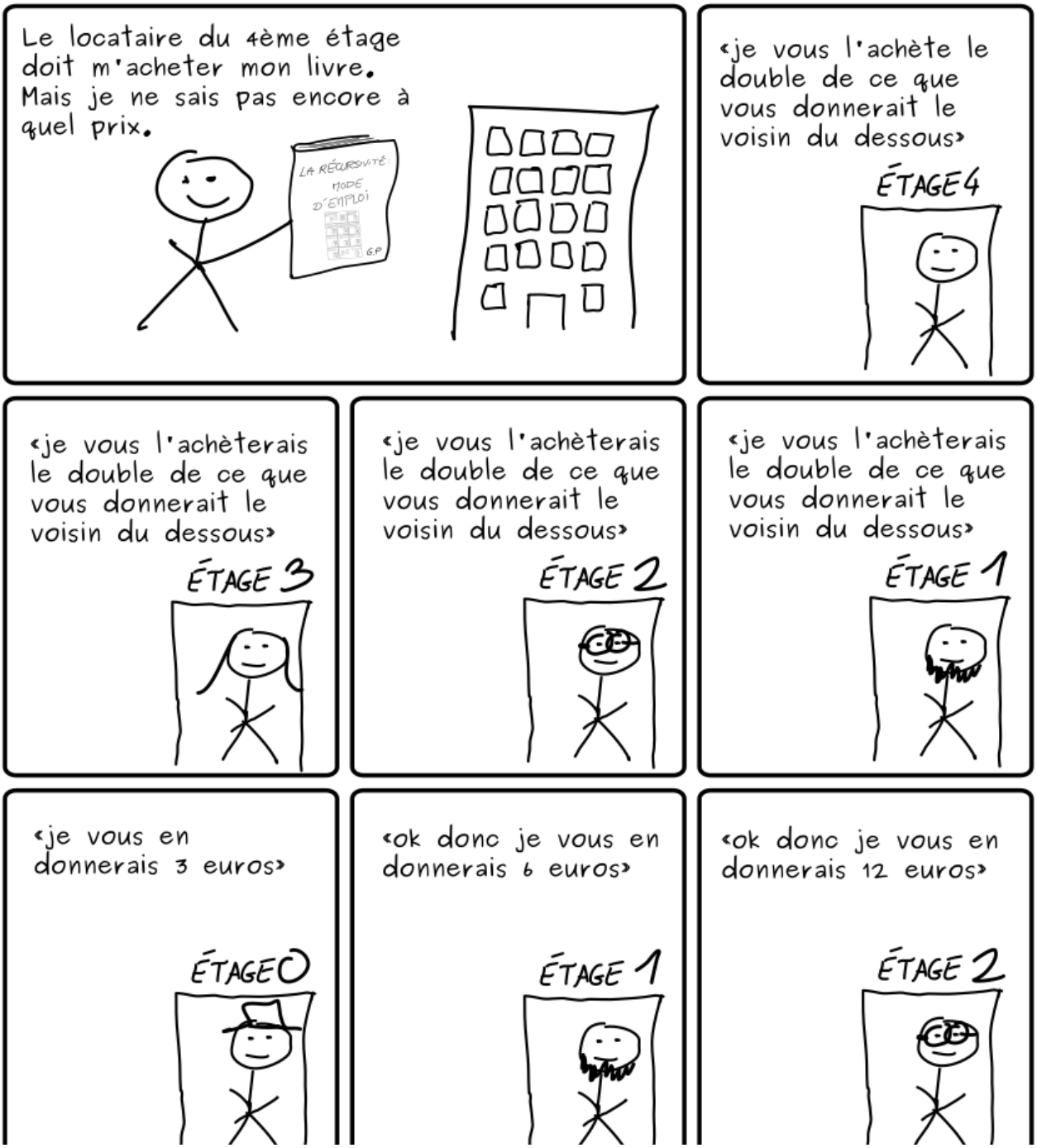
Hormis les blaques de geeks d'initiés, la récursivité en informatique ne tolère pas l'auto-référence infinie: il faut prévoir une condition d'arrêt qui traite le cas de base !!!

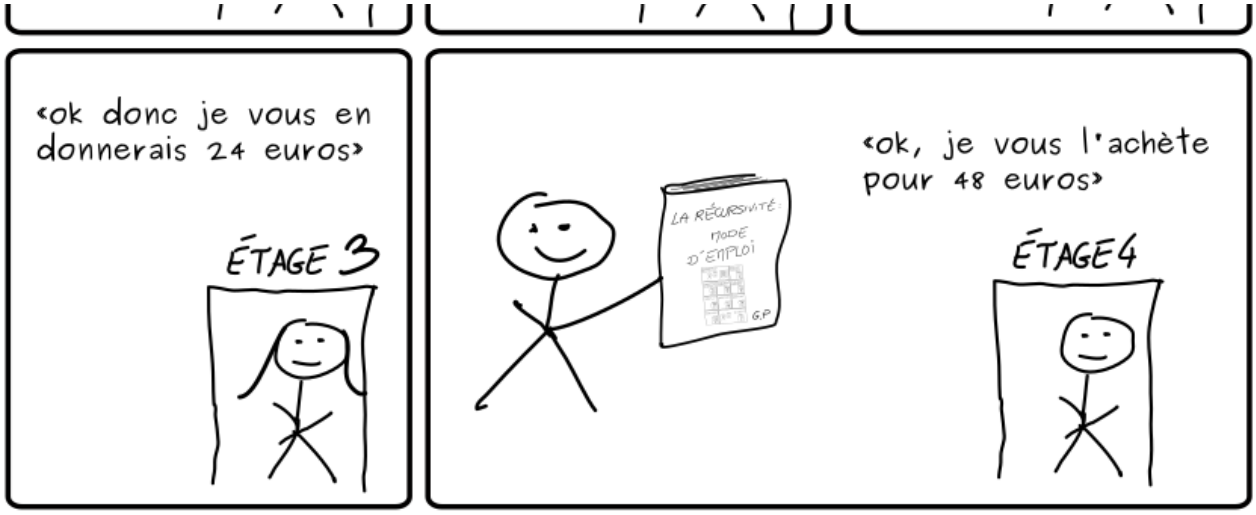
Ce «cas de base» sera aussi appelé «condition d'arrêt», puisque la très grande majorité des algorithmes récursifs peuvent être perçus comme des escaliers qu'on descend marche par marche, jusqu'au sol qui assure notre arrêt.

Terminaison

Pour s'assurer qu'une fonction récursive se termine, il faut **absolument** que la chaîne d'appel conduise au cas de base.

- si le paramètre de la fonction est un entier, alors l'appel doit se faire avec un **entier strictement inférieur**;
- si le paramètre de la fonction est une liste, alors l'appel doit se faire avec une liste de **longueur strictement inférieure**;
- etc.





Observez bien la descente puis la remontée de notre vendeur de livre. Le cas de base est ici l'étage 0. Il empêche une descente infinie.

Nous coderons bientôt la fonction donnant le prix du livre en fonction de l'étage.

Pour l'instant, découvrons enfin à quoi ressemble une fonction récursive «bien écrite» :

Script Python

```
def mystere(n):
    if n == 0 :
        return 0
    else :
        return n + mystere(n-1)
```

Trois choses sont essentielles et doivent se retrouver dans tout programme récursif :

- lignes 2 et 3 : le cas de base (si n vaut 0 on renvoie vraiment une valeur, en l'occurence 0)
- ligne 5 : l'appel récursif
- ligne 5 : la décrémentation du paramètre d'appel

Texte

```
mystere(5)
15
```

Texte

```
mystere(8)
36
```

Analyse avec Python tutor

```
1 def mystere(n):
2     if n == 0 :
3         return 0
4     else :
5         return n + mystere(n-1)
6
7 mystere(4)
```

line that has just executed
next line to execute

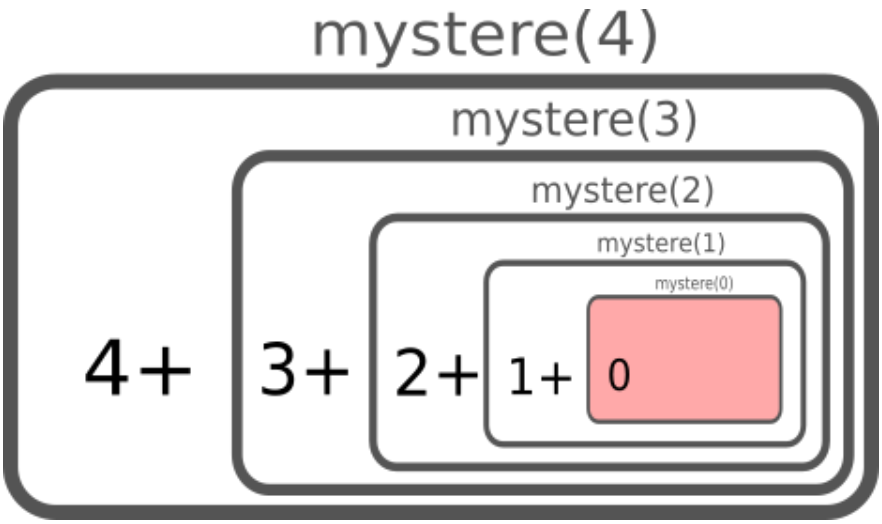
<< First | < Back | Step 1 of 22 | Forward > | Last >>

Frames Objects

Que se passe-t-il lorsqu'on appelle `mystere(4)` ?

$$\begin{aligned}\text{mystere}(4) &= 4 + \text{mystere}(3)\\ &= 4 + (3 + \text{mystere}(2))\\ &= 4 + (3 + (2 + \text{mystere}(1)))\\ &= 4 + (3 + (2 + (1 + \text{mystere}(0))))\\ &= 4 + (3 + (2 + (1 + 0)))\end{aligned}$$

On voit que l'existence du cas de base pour $n = 0$ est primordiale pour éviter la récursion infinie.



Cette fonction `mystere(n)` calcule donc la somme des entiers positifs inférieurs ou égaux à n.

Une anecdote raconte que Carl Friedrich Gauss trouva cette valeur de 5050 en quelques secondes, devant son instituteur ébahi.

Il venait pour cela d'inventer la formule : \($1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$\)

Ici, $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \dfrac{(100 \times 101)}{2} = 50 \times 101 = 5050$

A Connaitre : Somme des n premiers entiers

On souhaite calculer la somme suivante: $S = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$

Version itérative

En première, on a vu comment construire une fonction *itérative* le permettant, à l'aide d'une boucle `for` (d'où le terme *itératif*) et d'une variable accumulatrice:

Script Python

```
def somme_iter(n):
    s = 0
    for k in range(n+1):
     s += k
    return s
somme_iter(100)
5050
```

Version récursive

Une autre façon de voir le problème, c'est de se dire que cette somme peut s'écrire $S = n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1 + 0$ et que c'est la somme de n et **de la somme des** $n-1$ **premiers entiers** : $S = n + \underbrace{(n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1 + 0}_{\text{somme des entiers jusqu'à } n-1}$.

On écrit alors de façon «assez naturelle» la fonction récursive suivante (qui est la fonction mystère précédente) :

Script Python

```
def somme_rec(n):
    if n == 0:
        return 0
    else:
        return n + somme(n-1)
somme_rec(100)
5050
```

Exercice 1 ❤️

Enoncé

On considère la fonction `factorielle(n)` (notée $n!$ en mathématiques), qui calcule le produit d'un entier n par les entiers positifs qui lui sont inférieurs: $$ n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$ Exemple : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

S'inspirer des fonctions `somme` précédentes pour écrire deux fonctions `facto_iter` (itérative) et `facto_rec` (récursive) renvoyant la factorielle d'un nombre entier `n` strictement positif.

Version itérative

Script Python

```
def facto_iter(n):
    s = 1
    for k in range(1,n+1):
        s *= k
    return s

facto_iter(10)
3628800
```

Version récursive

Script Python

```
def facto_rec(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * facto_rec(n-1)

facto_rec(10)
3628800
```

1.3. Mécanisme - Notion de pile

Maintenant qu'on a vu le principe d'une fonction récursive, il faut comprendre comment se passent les appels successifs à la fonction, pour un paramètre différent.

Reprenons l'exemple de la fonction récursive `somme`. Si on appelle cette fonction:

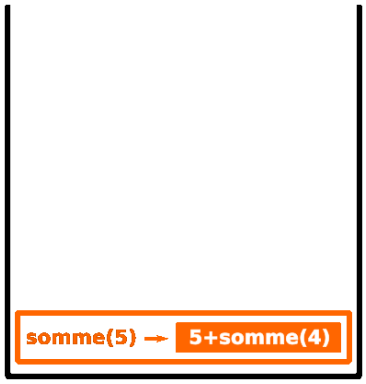
Script Python

```
>>> somme(5)
```

Puisque l'argument `5` ne correspond pas au cas de base, la fonction va faire appel à `somme(4)`. Il faut retenir que l'exécution de la fonction `somme` est interrompue (avec l'argument `5`) pour rappeler la fonction `somme` (avec l'argument `4`)...

Pour gérer ces différents appels, le système utilise une **pile d'exécution** :

(Dans la notion de pile (qui sera traitée plus tard dans le programme de Terminale), seule l'instruction «en haut de la pile» peut être traitée et enlevée (on dit «dépilée»).)



1.4. Limitation de la taille de la pile

Nous venons de voir que notre appel à `somme(5)` générait une pile de hauteur 6 (on parlera plutôt de *profondeur* 6). Cette profondeur est-elle limitée ?

Script Python

```
somme_rec(3000)
```

Texte

```
Traceback (most recent call last):
  File "<input>", line 1, in <module>
  File "<input>", line 5, in somme_rec
  File "<input>", line 5, in somme_rec
  File "<input>", line 5, in somme_rec
  [Previous line repeated 271 more times]
  File "<input>", line 2, in somme_rec
RecursionError: maximum recursion depth exceeded in comparison
```

Dans l'exemple précédent, la pile a une *profondeur* de 6. La profondeur de la pile n'est pas illimitée:

Script Python

```
>>> somme(3000)
Traceback (most recent call last):
  File "<input>", line 1, in <module>
  File "<input>", line 5, in somme_rec
  File "<input>", line 5, in somme_rec
  File "<input>", line 5, in somme_rec
  [Previous line repeated 271 more times]
  File "<input>", line 2, in somme_rec
RecursionError: maximum recursion depth exceeded in comparison
```

Vous venons de provoquer un «débordement de pile», le célèbre **stack overflow**.

De manière générale, les programmes récursifs sont souvent proches de la définition du problème à résoudre et assez naturels à écrire, mais ils sont susceptibles de générer un trop grand nombre d'appels à eux-mêmes et de nécessiter un temps d'exécution trop grand ou un débordement de pile. Il est parfois possible de les optimiser, comme nous le verrons dans le cours concernant la **programmation dynamique**.

Nous reparlerons aussi de récursivité lorsque nous l'inscrirons dans un paradigme plus global de programmation, qui est **« diviser pour régner »** (en anglais *divide and conquer*).

2. Premiers Exercices

Exercice 2

Enoncé

Coder la fonction `prix(etage)` de la BD présentée plus haut.

Correction

Script Python

```
def prix(etage):
    if etage == 0:
        return 3
    else:
        return 2 * prix(etage - 1)

prix(4)
48
```

Exercice 3

Enoncé

Écrire une fonction récursive `puissance(x,n)` qui calcule le nombre x^n.

Correction

Script Python

```
def puissance(x, n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return x * puissance(x, n-1)

puissance(2,10)
1024
```

Exercice 4

Enoncé

Dans une grande boite de Pétri contenant un mileu nutritif riche sont déposées 10 bactéries.
On suppose que chaque heure le nombre de bactéries est multiplié par 4.
Ecrire une fonction récursive nb_bact qui renvoie le nombre de bactéries au bout de n jours, n étant un entier naturel saisi comme argument.

Correction

Script Python

```
def nb_bact(n):
    if n==0:
        return 10
    else:
        return 4*nb_bact(n-1)

nb_jours=3
nb_heures=24*3
nb_bact(nb_heures)
```

```
2230074519853062314153571827264836150598041 60
```

3. . Exemples de récursivité double.

Les expressions qui définissent une fonction peuvent aussi dépendre de plusieurs appels à la fonction en cours de définition.

3.1. La suite de Fibonnaci

Considérons la suite numérique ainsi définie :

- $F_0 = 0$
- $F_1 = 1$
- $ \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1}+F_n$

On a donc $F_2 = 0 + 1 = 1, F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3, F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$ ...

Exercice 5

Enoncé

1. Implémenter de façon itérative la suite de Fibonnaci.
2. Implémenter de façon récursive la suite de Fibonnaci.

Version itérative

Script Python

```
def fibo_imperatif(n):
    a = 0
    b = 1
    for k in range(n-1):
        t = b
        b = a + b
        a = t
    return b

fibo_imperatif(10)
```

```
55
```

Version itérative

Script Python

```
def fibo_rec(n):
    if n == 0 :
        return 0
    elif n == 1 :
        return 1
    else :
        return fibo_rec(n-1) + fibo_rec(n-2)

fibo(10)
```

```
55
```

Observation de la pile d'exécution

Appelons `F(n)` la fonction calculant de manière récursive le n-ième terme de la suite. Observons en détail la pile d'exécution lors du calcul de `F(4)`.

On s'aperçoit notamment que :

- les appels récursifs ne sont PAS simultanés (rappelons que la simultanéité n'existe théoriquement pas en informatique). On pourrait s'imaginer que la relation $F_4 = F_3 + F_2$ allait déclencher deux «fils» récursifs calculant respectivement F_3 et F_2. Il n'en est rien, on va jusqu'au bout du calcul de F_3 avant de s'intéresser à F_2.
- conséquence de la remarque précédente : le calcul de F_2 s'effectue 2 fois. Une amélioration future (appelée **mémoïsation**, voir le cours de programmation dynamique) sera de conserver cette valeur de F_2 afin d'améliorer les calculs.

On peut y construire par exemple l'arbre d'appel de `fibo(6)` :

Script Python

```
from rcviz import viz
```

Script Python

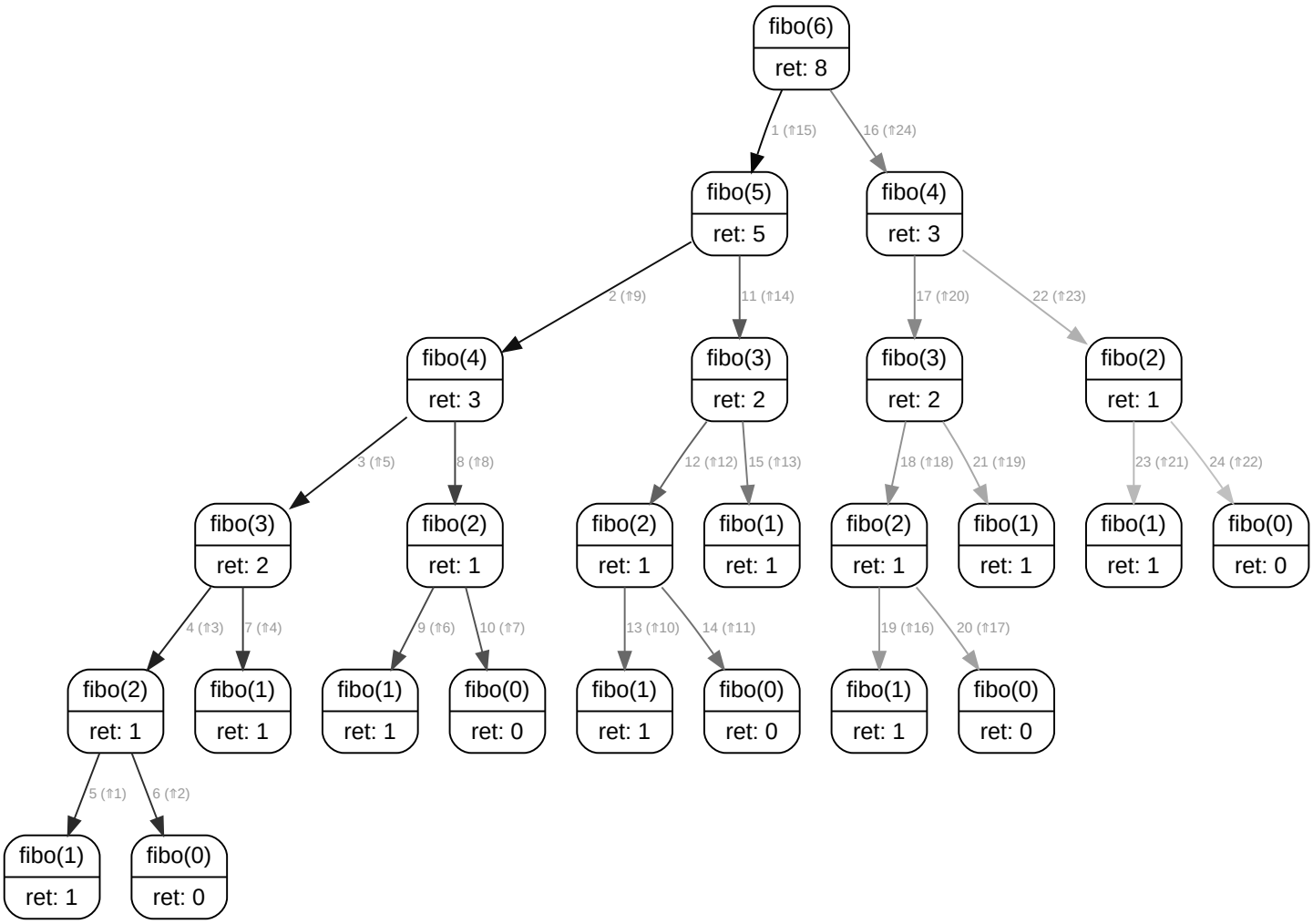
```
@viz
def fibo(n):
    if n == 0:
        return 0
    if n == 1:
        return 1
    else:
        return fibo(n-1)+fibo(n-2)
```

Script Python

```
fibo(6)
8
```

Texte

```
fibo.callgraph()
```



nodes=25

On y remarque (par exemple) que `fibo(2)` est calculé 5 fois...

4. Exercices

Exercice 6

Enoncé

On veut réaliser un château de cartes géants qui prolonge la château de l'image ci-dessous :

On note n le nombre d'étages du château et $nb_cartes(n)$ le nombre de cartes nécessaires pour réaliser un château à n étages.
On admet que l'on peut connaître le nombre $nb_cartes(n+1)$ de cartes nécessaires pour un château à $n+1$ étages si on connaît déjà le nombre $nb_cartes(n)$ en utilisant la relation suivante (appelée relation de récurrence en mathématiques) :

$$nb_cartes(n+1) = nb_cartes(n) + 2 + 3 \times n$$

(à retrouver pour ceux suivant la spécialité maths)

On veut à partir de ces informations construire une fonction récursive nommée nb_cartes qui renvoie finalement le nombre $nb_cartes(n)$ si en argument lui est entré le nombre n d'étages voulus au château.

1. Ecrire la fonction correspondante 2 Testez votre fonction obtenue.
   Vous pouvez utiliser l'image ci-dessus pour connaître quelques valeurs à obtenir.

Correction

Script Python

```
def nb_cartes(n):
    if n==0:
        return 0
    else:
        return nb_cartes(n-1)+2+3*(n-1)

nb_cartes(15)
345
```

Exercice 7

Enoncé

Soit (u_n) la suite d'entiers définie par :

$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3 \times u_n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec u_0 un entier quelconque plus grand que 1.

1. Ecrire une fonction récursive `syracuse(u_n)` qui affiche les valeurs successives de la suite u_n tant que u_n est plus grand que 1.

La conjecture de Syracuse affirme que, quelle que soit la valeur de u_0, il existe un indice n dans la liste tel que $u_n = 1$;

Cette conjecture défie toujours les mathématiciens.

2. On appelle «temps de vol» le nombre d'étapes nécessaires avant de retomber sur 1. Modifier la fonction précédente afin qu'elle affiche le temps de vol pour tout nombre n.

Correction Q1

Script Python

```
def syracuse(u):
    print(u)
    if u == 1:
        return None
    elif u % 2 == 0:
        syracuse(u // 2)
    else:
        syracuse(3*u + 1)

syracuse(50)
```

Correction Q2

Script Python

```
def syracuse(n, t=0):
    print(n)
    t += 1
    if n == 1:
        print('temps de vol :', t)
        return None
    if n % 2 == 0:
        syracuse(n // 2, t)
    else:
        syracuse(3*n + 1, t)

syracuse(50)
```

Exercice 8

Enoncé

Voici une fonction mystère nommée `myst` :

Script Python

```
def myst(l: list) -> int:
    if l==[]:
        return 0
    else:
        l.pop(0)          # suppression du premier terme de la liste l
        return 1+myst(l)
```

1. Pourquoi cette fonction myst est une fonction récursive ?
2. Testez cette fonction avec quelques listes.
3. Quel est le rôle de cette fonction myst ?

Exercice 9

Enoncé

Soit (u_n) la suite d'entiers définie par :

$$u_n = \begin{cases} a \in R & \text{si } n = 0 \\ b \in R & \text{si } n = 1 \\ 3u_{n-1} + 2u_{n-2} + 5 & \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Ecrire une fonction récursive `serie(n,a,b)` qui renvoie le n-ième terme de cette suite pour les valeurs de a et b données en paramètres.

Correction

Script Python

```
def serie(n,a,b):
    if n==0:
        return a
    if n==1:
        return b
    else:
        return 3*serie(n-1,a,b)+2*serie(n-2,a,b)+5

serie(10,1,2)
359485
```

Exercice 10

Enoncé

Un palindrome est une chaîne de caractères qui est identique lue de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, la chaîne GIRAFARIG est un palindrome : si on inverse le mot, il reste identique.
Pour coder récursivement un test de palindrome (cf. dessin ci-dessous), il suffit de vérifier que

- les lettres aux extrémités sont les mêmes (les lettres en bleu sur la figure);
- le mot privé de ses deux extrémités est encore un palindrome (en orange sur le dessin), d'où appel récursif.

Précaution : quand on vérifie que le mot privé de ses deux extrémités est encore un palindrome, il faut faire attention à ce que le retrait des extrémités soit possible. Ce problème ne se pose que si le mot a une lettre ou n'a aucune lettre. Dans ces cas, le mot est un palindrome, ce qui donne le cas de base de la récursivité. Remarquons que si le mot a deux lettres, ce n'est pas un cas de base car quand on lui retire ses extrémités, la chaîne devient vide et on tombe sur un cas de base.

Remarque

mot[1:-1] est un slice : c'est la chaîne mot amputée de son premier caractère (elle commence à l'indice 1 et se termine juste avant l'indice -1, ce dernier indice référençant le dernier caractère de la chaîne).

Correction

Script Python

```
def palindrome(mot):
    if len(mot)<=1:
        return True
    else:
        if mot[0]==mot[-1]:
            print(mot[1:-1])
            return palindrome(mot[1:-1])
        else:
            return False

print(palindrome("agirafariga"))
girafarig
irafari
rafar
afa
f
True
```

-

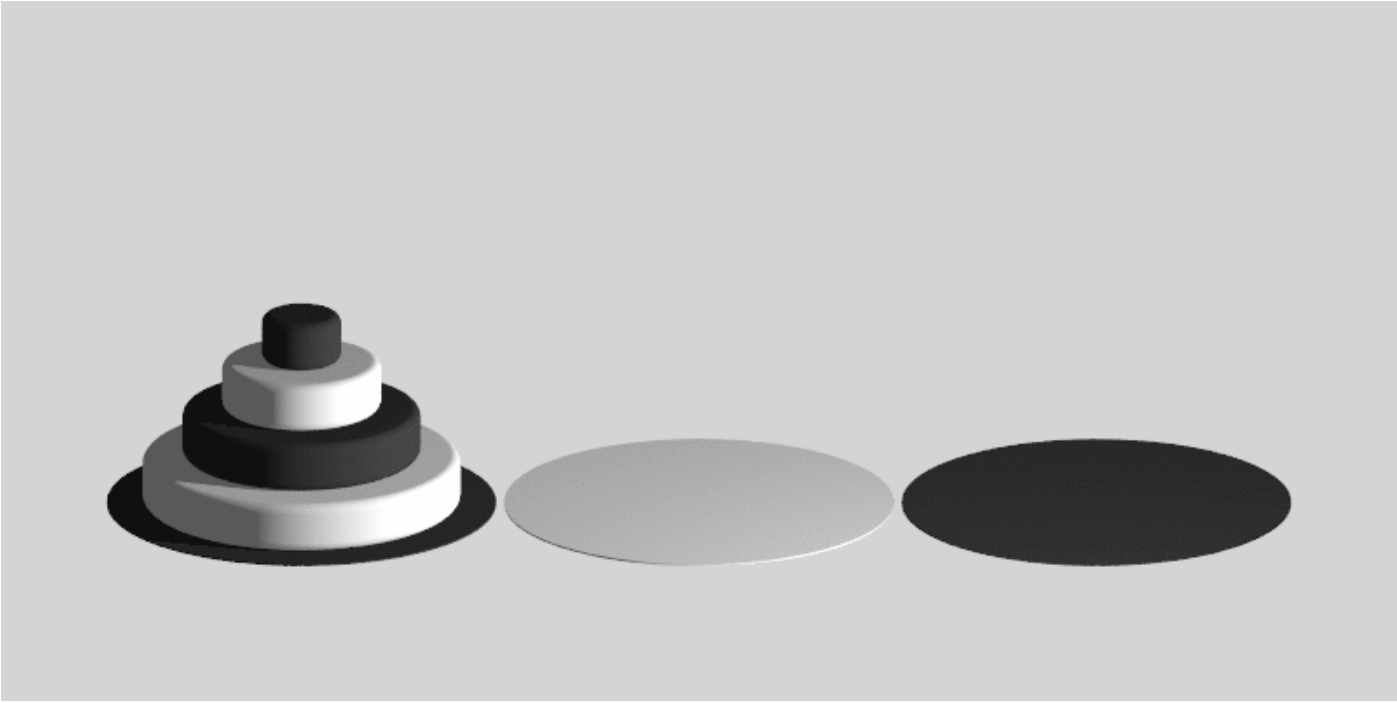
Exercice 11 les tours de Hanoï

Enoncé

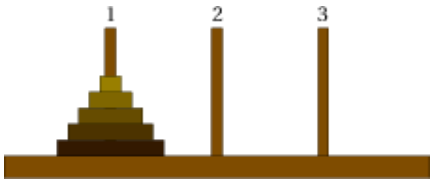
Le problème des tours de Hanoï, inventé par le mathématicien Édouard Lucas en 1889, consiste à déplacer des disques de diamètres différents d'une tour de départ à une tour d'arrivée, en passant par une tour intermédiaire.

On ne peut déplacer qu'un disque à la fois, et on ne peut pas placer un disque sur un plus petit que lui.

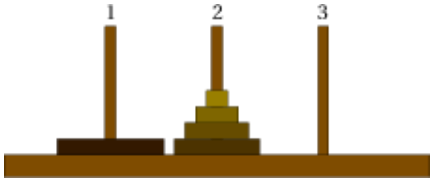
Le but est bien entendu de minimiser le nombre de déplacements.



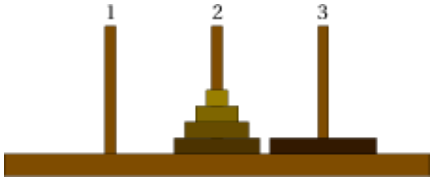
1. Essayer de trouver une stratégie optimale en s'entraînant par exemple [ici]https://www.mathsisfun.com/games/towerofhanoi.html)
2. Observer les étapes-clés suivantes :
3. Étape 1

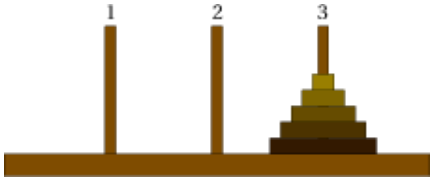


4. Étape 2



5. Étape 3



6. Étape 4 

7. Écrire une fonction récursive `hanoi(n, depart, inter, arrivee)` **affichant** les déplacements successifs (par ex. `1 -> 3`) pour déplacer `n` disques de la tour `depart` vers la tour `arrivee` en passant par la tour intermédiaire `inter`.

Correction

Script Python

```
def hanoi(n, depart, inter, arrivee):
    """ n : nombre d'assiettes dans la pile
    # depart : la pile de départ("A", "B" ou "C")
    # inter : la pile intermédaire("A", "B" ou "C")
    # arrivee : la pile d'arrivée ("A", "B" ou "C") """

    if n == 1 :
        print(depart + " vers " + arrivee)
    else :
        hanoi(n-1, depart, arrivee, inter)
        print(depart + " vers " + arrivee)
        hanoi(n-1, inter, depart, arrivee)

hanoi(5, "1", "2", "3")
```

5. Pydéfis

- Par ici la monnaie
- Le crépier (psycho-rigide)

6. Annexe : dessins récursifs grâce au module `turtle`

Le module `turtle` permet de faire des tracés basiques. Mais dès l'instant où on met de la récursivité dans le code, les résultats peuvent devenir très surprenants, et aboutir à des structures fractales.

Script Python

```
from turtle import *

ang = 40

def trace(n,l):

    if n == 0 :
        return None
    else :
        forward(l)
        left(ang)
        trace(n-1,0.7*l)
```

```
        right(2*ang)
        trace(n-1,0.7*l)
        left(ang)
        forward(-l)


penup()
goto(0,-80)
pendown()
left(90)
speed(0)

trace(5,100)
```

Script Python

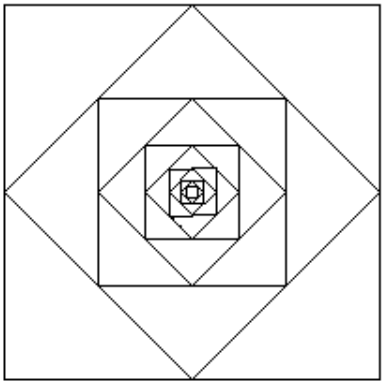
```
from turtle import *

ang = 40

def trace(n,l):

    if n == 0 :
        return None
    else :
        forward(l)
        left(ang)
        trace(n-1,0.65*l)
        right(2*ang)
        trace(n-1,0.65*l)
        left(ang)
        forward(-l)


penup()
goto(0,-80)
pendown()
left(90)
speed(0)

trace(12,100)
mainloop()
```

Exercice 12 Facultatif

enoncé

Reproduire le dessin suivant, à l'aide du module `turtle`.

`turtle` est un hommage au langage LOGO inventé par Seymour Papert au MIT à la fin des années 60.



Correction

Script Python

```
from turtle import *

def carre(c):
    for k in range(4):
        forward(c)
        right(90)

def base(c):
    carre(c)
    forward(c/2)
    right(45)

def trace(c, n):
    if n == 0 :
        return None
    else :
        base(c)
        c = c/(2**0.5)
        return trace(c, n-1)

trace(200, 15)
mainloop()
```