Sujet BAC 8 : Diviser pour régner

1. France 2021

Sujet n°1 : France 2021

Cet exercice porte sur l'algorithme de tri fusion, qui s'appuie sur la méthode dite de « diviser pour régner ».

Question 1

Enoncé **Solution**

a. Quel est l’ordre de grandeur du coût, en nombre de comparaisons, de l’algorithme de tri fusion pour une liste de longueur ?
b. Citer le nom d’un autre algorithme de tri. Donner l’ordre de grandeur de son coût, en nombre de comparaisons, pour une liste de longueur . Comparer ce coût à celui du tri fusion. Aucune justification n’est attendue.

a. \(O(nlog_2(n))\)
b. L’algorithme de tri par

insertion a une complexité en temps dans le pire des cas en $O(n^2)$. L'algorithme du tri par insertion est moins efficace que l'algorithme

L'algorithme de tri fusion utilise deux fonctions moitie_gauche et moitie_droite qui prennent en argument une liste L et renvoient respectivement :

- la sous-liste de L formée des éléments d'indice strictement inférieur à `len(L)//2` ;
- la sous-liste de L formée des éléments d'indice supérieur ou égal à `len(L)//2`.

On rappelle que la syntaxe a//b désigne la division entière de a par b.

Par exemple,

🐍 **Script Python**

```python
>>> L = [3, 5, 2, 7, 1, 9, 0]
>>> moitie_gauche(L)
[3, 5, 2]
>>> moitie_droite(L)
[7, 1, 9, 0]
>>> M = [4, 1, 11, 7]
>>> moitie_gauche(M)
[4, 1]
>>> moitie_droite(M)
[11, 7]
```

L'algorithme utilise aussi une fonction fusion qui prend en argument deux listes triées L1 et L2 et renvoie une liste L triée et composée des éléments de L1 et L2.
On donne ci-dessous le code python d'une fonction récursive tri_fusion qui prend en argument une liste L et renvoie une nouvelle liste triée formée des éléments de L.

🐍 **Script Python**

```python
def tri_fusion(L):
    n = len(L)
    if n<=1 :
        return L
    print(L)
    mg = moitie_gauche(L)
    md = moitie_droite(L)
    L1 = tri_fusion(mg)
    L2 = tri_fusion(md)
    return fusion(L1, L2)
```

Question 2

Enoncé **Solution**

Donner la liste des affichages produits par l'appel suivant.

🐍 Script Python

```python
tri_fusion([7, 4, 2, 1, 8, 5, 6, 3])
```

Voici l'affichage obtenu :

🐍 Script Python

```
[7, 4, 2, 1, 8, 5, 6, 3]
[7, 4, 2, 1]
[7,4]
[2, 1]
[8, 5, 6, 3]
[8, 5]
[6, 3]
```

résultat renvoyé par la

O… ormais à différentes fonctions appelées par tri_fusion, à savoir moitie_droite et fu…

Question 3

Enoncé **Solution**

Ecrire la fonction moitie_droite.

🐍 Script Python

```python
def moitie_droite(L):
    n = len(L)
    deb = n//2
    tab = []
    for i in range(deb,n):
        tab.append(L[i])
    return tab
```

Question 4

Enoncé **Solution**

On donne ci-dessous une version incomplète de la fonction fusion.

```python
def fusion(L1, L2):
    L = []
    n1 = len(L1)
    n2 = len(L2)
    i1 = 0
    i2 = 0
    while i1 < n1 or i2 < n2 :
        if i1 >= n1:
            L.append(L2[i2])
            i2 = i2 + 1
        elif i2 >= n2:
            L.append(L1[i1])
            i1 = i1 + 1
        else:
            e1 = L1[i1]
            e2 = L2[i2]



    return L
```

Dans … entie… repré… respe… indices des éléments des listes L1 et L2 que l’on souhaite comparer :

- Si aucun des deux indices n’est valide, la boucle while est interrompue ;
- Si i1 n’est plus un indice valide, on va ajouter à L les éléments de L2 à partir de l’indice i2 ;
- Si i2 n’est plus un indice valide, on va ajouter à L les

éléments de L1 à partir de l’indice i1 ;

- Sinon, le plus petit élément non encore traité est ajouté à L et on décale l’indice correspondant.

Écrire sur la copie les instructions manquantes des lignes 17 à 22 permettant d’insérer dans la liste L les éléments des listes L1 et L2 par ordre croissant.

🐍 **Script Python**

```python
def fusion(L1, L2):
    L=[]
    n1 = len(L1)
    n2 = len(L2)
    i1 = 0
    i2 = 0
    while i1<n1 or i2<n2:
        if i1>=n1:
            L.append(L2[i2])
            i2 = i2+1
        elif i2>=n2:
            L.append(L1[i1])
            i1=i1+1
        else :
            e1 = L1[i1]
            e2 = L2[i2]
            if e1 > e2:
                L.append(e2)
                i2 = i2 + 1
            else :
                L.append(e1)
                i1 = i1 + 1
    return L
```

2

Sujet n°2 : BAC Polynésie 2021

Ce[…]ment du thème « algorithmique, langages et programmation ». Le but est de[…]on (l'un des algorithmes étudiés en 1ère NSI pour trier un tableau) avec le tri fusion (un algorithme qui applique le principe de « diviser pour régner »).

2.1. Partie A : Manipulation d’une liste en Python

Question A.1

Enoncée **Solution**

Donner les affichages obtenus après l’exécution du code Python suivant.

🐍 **Script Python**

```python
notes = [8, 7, 18, 14, 12, 9, 17, 3]
notes[3] = 16
print(len(notes))
print(notes)
```

`! stion A.2" === "Enoncé" Écrire un code Python permettant d'afficher les éléments d'indice 2 à 4 de la liste notes.

📋 **Texte**

```
=== "Solution"

    ```python
    for i in range(2,5):
        print(notes[i])
    ```
```

2.2. Partie B : Tri par insertion

Le tri par insertion est un algorithme efficace qui s'inspire de la façon dont on peut trier une poignée de cartes. On commence avec une seule carte dans la main gauche (les autres cartes sont en tas sur la table) puis on pioche la carte suivante et on l'insère au bon endroit dans la main gauche.

Question B.1

Enoncé **Solution**

Voici une implémentation en Python de cet algorithme. Recopier et compléter les lignes 6 et 7 surlignées (uniquement celles-ci).

```
1 def
2 tri_insertion(liste):
3     """ trie par
4 insertion la liste
5 en paramètre """
6     for
7 indice_courant in
8 range(1,len(liste)):
9
  element_a_inserer
  =
```

🐍 **Script Python**

```python
def tri_insertion(liste):
    for indice_courant in
range(1, len(liste)):
        element_a_inserer
= liste[indice_courant]
        i = indice_courant
```

On ... s instructions suivantes :

🐍 **Script Python**

```python
notes = [8, 7, 18, 14, 12, 9, 17, 3]
tri_insertion(notes)
print(notes)
```

```
liste[i]
            i=i-1
        liste[i + 1] =
```

On ... ınt :

🐍 **Script Python**

```python
[3, 7, 8, 9, 12, 14, 17, 18]
```

On s'interroge sur ce qui s’est passé lors de l’exécution de tri_insertion(notes).

Question B.2

Enoncé **Solution**

Donner le contenu de la liste notes après le premier passage dans la boucle for.

🐍 **Script Python**

```
>>> [7, 8, 18, 14, 12, 9, 17, 3]
```

Question B.3

Enoncé **Solution**

Donner le contenu de la liste notes après le troisième passage dans la boucle for.

🐍 **Script Python**

```
>>> [7, 8, 14, 18, 12, 9, 17, 3]
```

2.[illegible] C : Tri fusion

L'algorithme de tri fusion suit le principe de « diviser pour régner ».

(1) Si le tableau à trier n’a qu’un élément, il est déjà trié.
(2[illegible]parer le tableau en deux parties à peu près égales.
(3[illegible]deux parties avec l’algorithme de tri fusion.
(4[illegible] les deux tableaux triés en un seul tableau.

so[illegible]pedia

Question C.1

Enoncé **Solution**

Cet algorithme est-il itératif ou récursif ? Justifier en une phrase.

récursif : à l'étape (3) l'algorithme de tri fusion s'appelle lui-même.

Question C.2

Enoncé **Solution**

Expliquer en trois lignes comment faire pour rassembler dans une main deux tas déjà triés de cartes, la carte en haut d'un tas étant la plus petite de ce même tas ; la deuxième carte d'un tas n'étant visible qu'après avoir retiré la première carte de ce tas.

1. Comparer les cartes du haut des 2 tas.
2. Placer la carte de valeur plus faible dans la main.
3. Recommencer l'étape 1 jusqu'à épuisement des tas.

À la fin du procédé, les cartes en main doivent être triées par ordre croissant.

Une fonction fusionner a été implémentée en Python en s'inspirant du procédé de la question précédente.

Elle prend quatre arguments : la liste qui est en train d'être triée, l'indice où commence la sous-liste de gauche à fusionner, l'indice où termine cette sousliste, et l'indice où se termine la sous-liste de droite.

Question C.3

Enoncé **Solution**

Voici une implémentation de l'algorithme de tri fusion. Recopier et compléter les lignes 8, 9 et 10 surlignées (uniquement celles-ci).

```
1  from math import
2  floor
3
4  def tri_fusion
5  (liste, i_debut,
6  i_fin):
7      if i_debut <
8  i_fin:
           i_partage =
   floor((i_debut +
   i_fin) / 2)

   tri_fusion(liste,
   i_debut, ..................

   tri_fusion(liste, .......
```

Rem
floor
enti
pass

🐍 **Script Python**

```python
from math import floor

def tri_fusion (liste,
i_debut, i_fin):
    if i_debut < i_fin:
        i_partage =
floor((i_debut + i_fin) /
2) # milieu pour
diviser le tableau en
deux moitiés
        tri_fusion(liste,
i_debut, i_partage) #
Appel tri_fusion pour
1ère moitié du tableau
        tri_fusion(liste,
i_partage + 1, i_fin) #
Appel tri_fusion pour
2ème moitié du
tableau
        fusionner(liste,
```

```
i_debut, i_fin,
i_partage) # Fusion
des deux moitiés triées
```

Question C.4

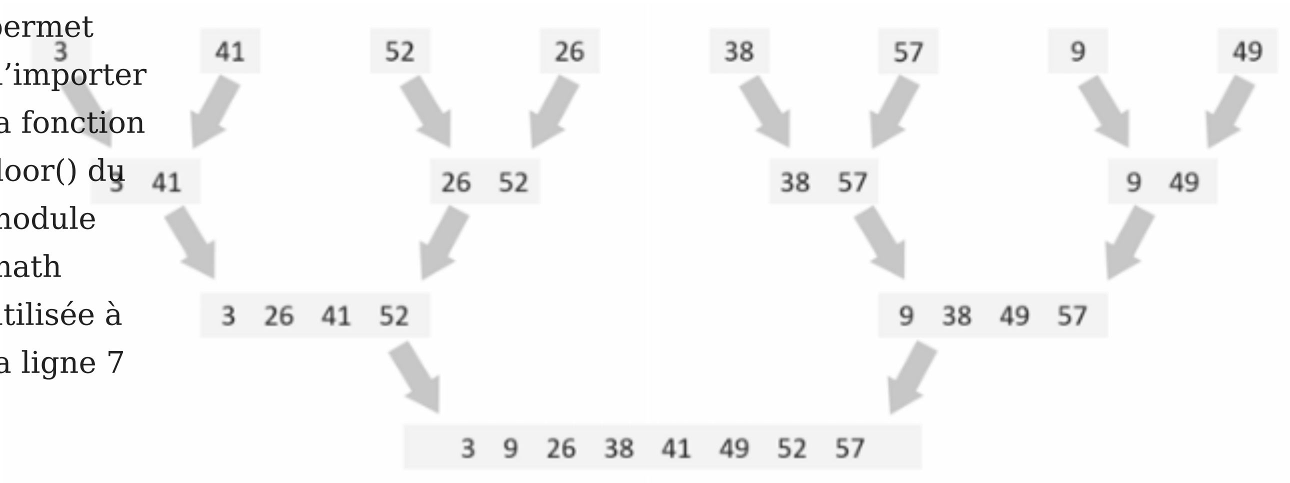
Enoncé **Solution**

Expliquer le rôle de la première ligne du code de la question 3.

permet d’importer la fonction floor() du module math utilisée à la ligne 7

2.4. Partie D : Comparaison du tri par insertion et du tri fusion

Voici une illustration des étapes d’un tri effectué sur la liste `[3, 41, 52, 26, 38, 57, 9, 49]`.



[:.center}]

Question D.1

Enoncé **Solution**

Quel algorithme a été utilisé : le tri par insertion ou le tri fusion ? Justifier.

tri par fusion : à chaque étape, le tri se fait par fusion de 2 tas déjà triés

Question D.2

Enoncé **Solution**

Identifier le tri qui a une complexité, dans le pire des cas, en $O(n^2)$ et identifier le tri qui a une complexité, dans le pire des cas, en $O(n \log_2 n)$.

Remarque : n représente la longueur de la liste à trier.

- tri par insertion : $O(n^2)$
- tri par fusion : $O(n.\log_2 n)$

Question D.3

Enoncé **Solution**

Justifier brièvement ces deux complexités.

- Le tri par insertion utilise 2 boucles imbriquées, soit dans le pire des cas $\sim \dfrac{1}{2} \times n(n+1)$ opérations soit $O(n^2)$.
- Le tri par fusion divise la liste à trier par 2 pour chaque itérations, soit ~ $\log_2 n$ opérations d'où une complexité global $O(n.\log_2 n)$.

Inversions dans une liste : FRANCE CANDIDAT LIBRE SUJET 1

Cet exercice traite de manipulation de tableaux, de récursivité et du paradigme « diviser pour régner ».

Dans un tableau Python d'entiers tab, on dit que le couple d'indices (i,j) forme une inversion lorsque $i<j$ et tab[i] > tab[j]. On donne ci-dessous quelques exemples.

- Dans le tableau [1, 5, 3, 7], le couple d'indices (1,2) forme une inversion car 5> 3.
  Par contre, le couple (1,3) ne forme pas d'inversion car 5<7. Il n'y a qu'une inversion dans ce tableau.
- Il y a trois inversions dans le tableau [1, 6, 2, 7, 3], à savoir les couples d'indices (1, 2), (1, 4) et (3, 4).
- On peut compter six inversions dans le tableau [7, 6, 5, 3] : les couples d'indices (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3) et (2, 3).

On se propose dans cet exercice de déterminer le nombre d'inversions dans un tableau quelconque.

Questions préliminaires

Question 1

Enoncé **Solution**

Expliquer pourquoi le couple (1, 3) est une inversion dans le tableau [4, 8, 3, 7]

À l'indice 1 du tableau on trouve 8, à l'indice 3 on trouve 7. Nous avons 1 < 3 alors que 8 > 7, nous avons donc bien une inversion

Question2

Enoncé **Solution**

Justifier que le couple (2, 3) n'en est pas une.

À l'indice 2 du tableau on trouve 3 à l'indice 3 on trouve 7. Nous avons 2 < 3 et 3 < 7, nous n'avons donc pas d'inversion

2.5. Partie A : Méthode itérative

Le but de cette partie est d'écrire une fonction itérative nombre_inversion qui renvoie le nombre d'inversions dans un tableau. Pour cela, on commence par écrire une fonction fonction1 qui sera ensuite utilisée pour écrire la fonction nombre_inversion.

Question A.1

Enoncé **Solution**

On donne la fonction suivante.

🐍 **Script Python**

```
def fonction1(tab, i):
    nb_elem = len(tab)
    cpt = 0
    for j in range(i+1, nb_elem):
        if tab[j] < tab[i]:
            cpt += 1
    return cpt
```

a. Indiquer ce que renvoie la fonction1(tab, i) dans les cas suivants.

- Cas n°1 : tab = [1, 5, 3, 7] et i = 0.
- Cas n°2 : tab = [1, 5, 3, 7] et i = 1.
- Cas n°3 : tab = [1, 5, 2, 6, 4] et i = 1.

b. Expliquer ce
que permet de
déterminer
cette fonction.

a.

- cas n°1 : 0
- cas n°2 : 1
- cas n°3 : 2

b.

Question A.2

Enoncé   Solution

En utilisant la fonction précédente, écrire une fonction nombre_inversion(tab) qui prend en argument un tableau et renvoie le nombre d'inversions dans ce tableau.
On donne ci-dessous les résultats attendus pour certains appels.

📋 **Texte**

```
>>> nombre_inversions([1, 5, 7])
0
>>> nombre_inversions([1, 6, 2, 7, 3])
3
>>> nombre_inversions([7, 6, 5, 3])
6
```

🐍 **Script Python**

```python
def nombre_inversions(tab):
    nb_inv = 0
    n = len(tab)
    for i in range(n-1):
        nb_inv = nb_inv + fonction1(tab, i)
    return nb_inv
```

Question A.3

Enoncé **Solution**

Quelle est l’ordre de grandeur de la complexité en temps de l'algorithme obtenu ? Aucune justification n'est attendue.

L’ordre de grandeur de la complexité en temps de l’algorithme est $O(n^2)$

2.6. Partie B : Méthode récursive

Le but de cette partie est de concevoir une version récursive de la fonction nombre_inversion.

On définit pour cela des fonctions auxiliaires.

Question B.1

Enoncé **Solution**

Donner le nom d’un algorithme de tri ayant une complexité meilleure que quadratique. Dans la suite de cet exercice, on suppose qu’on dispose d'une fonction tri(tab) qui prend en argument un tableau et renvoie un tableau contenant les mêmes éléments rangés dans l'ordre croissant.

Le tri fusion a une complexité en $O(n.log_2(n))$

Question B.2

Enoncé Solution

Écrire une fonction moitie_gauche(tab) qui prend en argument un tableau tab et renvoie un nouveau tableau contenant la moitié gauche de tab. Si le nombre d'éléments de tab est impair, l'élément du centre se trouve dans cette partie gauche.
On donne ci-dessous les résultats attendus pour certains appels.

🐍 **Script Python**

```
>>> moitie_gauche([])
[]
>>> moitie_gauche([4, 8, 3])
[4, 8]
>>> moitie_gauche ([4, 8, 3,
7])
[4, 8]
```

🐍 **Script Python**

```
def moitie_gauche(tab):
    n = len(tab)
    nvx_tab = []
    if n==0:
        return []
    mil = n//2
    if n%2 == 0:
        lim = mil
    else :
        lim =mil+1
    for i in range(lim):
        nvx_tab.append(tab[i])
    return nvx_tab
```

une autre possibilité un peu plus concise :

🐍 **Script Python**

```
def moitie_gauche(tab):
    return [tab[i] for i in
range(len(tab)//2+len(tab)%2)]
```

Dans la suite, on suppose qu’on dispose de la fonction moitie_droite(tab) qui renvoie la moitié droite sans l’élément du milieu.

Question B.3

Enoncé Solution

On suppose qu’une fonction nb_inv_tab(tab1, tab2)a été écrite. Cette fonction renvoie le nombre d’inversions du tableau obtenu en mettant bout à bout les tableaux tab1 et tab2, à condition que tab1 et tab2 soient triés dans l’ordre croissant.
On donne ci-dessous deux exemples d’appel de cette fonction :

🐍 **Script Python**

```
>>> nb_inv_tab([3, 7, 9], [2,
10])
3
>>> nb_inv_tab([7, 9, 13],
[7, 10, 14])
3
```

En utilisant la fonction nb_inv_tab et les questions précédentes, écrire une fonction récursive nb_inversions_rec(tab) qui permet de calculer le nombre d'inversions dans un tableau. * Cette fonction renverra le même nombre que nombre_inversions(tab) de la partie A. On procédera de la façon suivante :

- Séparer le tableau en deux tableaux de tailles égales (à une unité près).
- Appeler récursivement la fonction nb_inversions_rec pour compter le nombre

d’inversions dans chacun des deux tableaux.

- Trier les deux tableaux (on rappelle qu'une fonction de tri est déjà définie).
- Ajouter au nombre d'inversions précédemment comptées le nombre renvoyé par la fonction nb_inv_tab avec pour arguments les deux tableaux triés.

🐍 **Script Python**

```python
def nb_inversions_rec(tab):
    if len(tab) > 1:
        tab_g = moitie_gauche(tab)
        tab_d = moitie_droite(tab)
        return nb_inv_tab(tri(tab_g), tri(tab_d)) + nb_inversions_rec(tab_g) + nb_inversions_rec(tab_d)
    else:
        return 0
```

ou

🐍 **Script Python**

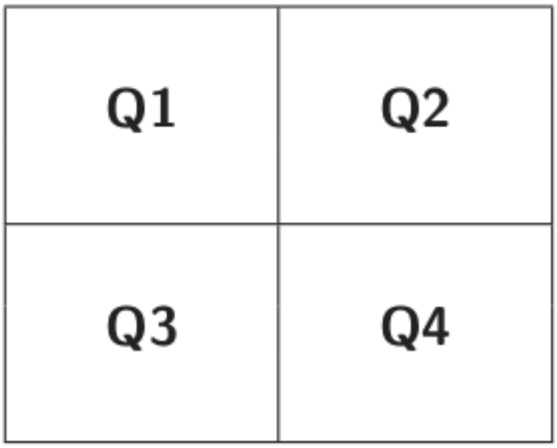
```python
def nb_inversions_rec(tab : list, n : int = 0) -> int:
    if len(tab) <= 1:
        return 0
    else:
        #Séparer le tableau en deux tableaux de tailles égales (à une unité près).
        gauche = moitie_gauche(tab)
        droite = moitie_droite(tab)
        #Compter le nombre d’inversions dans chacun des
```

```
deux tableaux.
        n = nb_inv_tab(sorted(gauche), sorted(droite))

    #Appeler récursivement la fonction nb_inversions_rec
        return n + nb_inversions_rec(gauche, n) + nb_inversions_rec(droite, n)
```

Quart de tour d'une image

1. Pour faire tourner une image carré de côté 2^n pixels d'un quart de tour à gauche, on propose la méthode suivante :
   - Diviser l'image en quatre quarts Q1,Q2,Q3,Q4

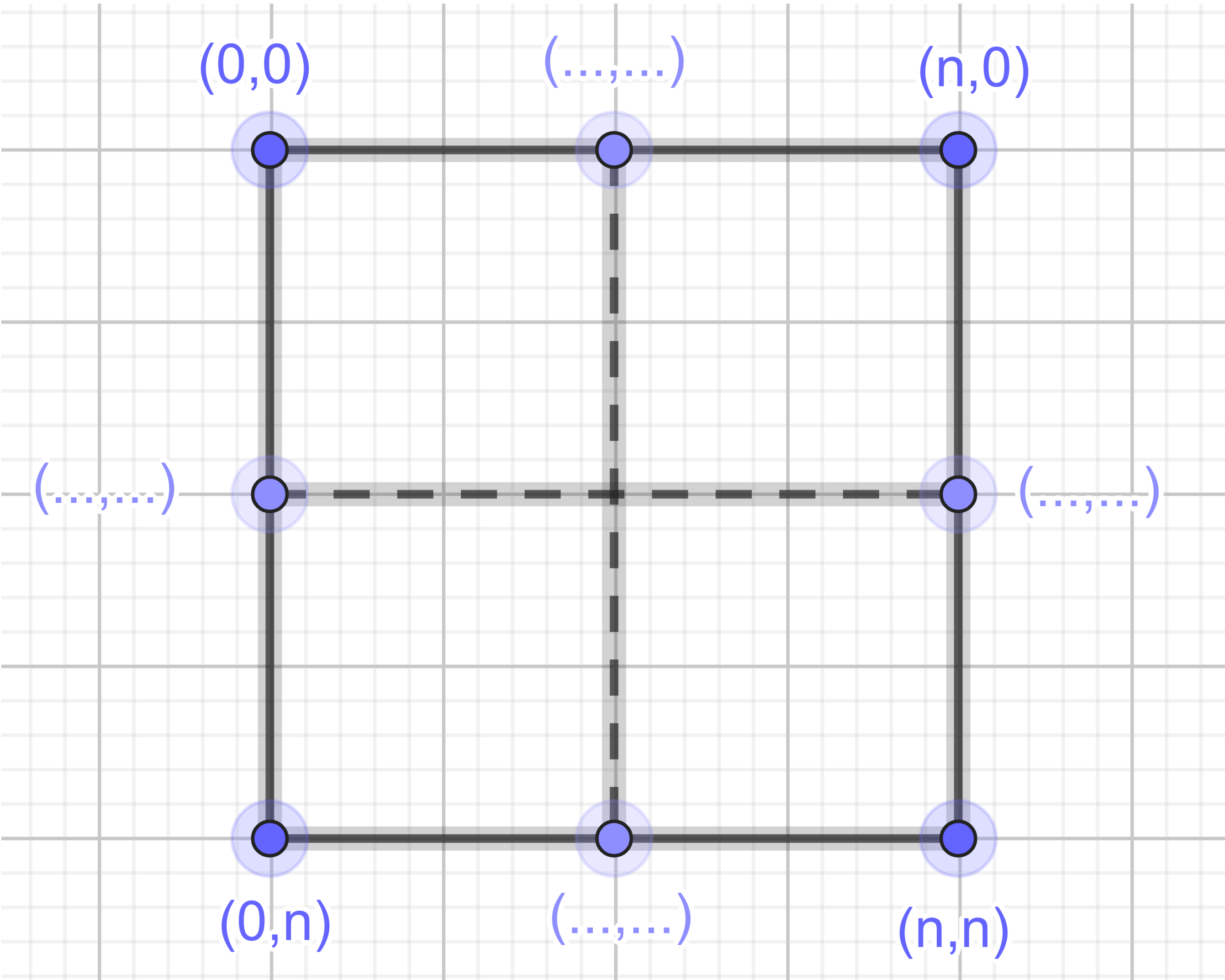


   - Faire tourner chacun des quarts d'un quart de tour à gauche

- Permuter chaque quart afin de le placer correctement

Expliquer pourquoi cette méthode est une illustration de la technique diviser pour régner.

2. C'est algorithme est-il du type itératif ou récursif ? Justifier.
3. Découpage de l'image en quatres quarts à l'aide du module pil de manipulation d'images
   a. On a représenté une image carré de \(n\) pixels de côté avec le système de coordonnées d'une image dans le module pil. Quelles sont les coordonnées manquantes ?



b. La méthode `crop` du module pil permet d'extraire une portion rectangulaire d'une image en donnant les coordonnées des coins supérieur gauche et inférieur droit du rectangle. Compléter la fonction Python suivante qui prend en entrée une image et retourne les quatre quarts de cette image.

🐍 **Script Python**

```python
from PIL import Image
def partage_quart(image):
    n = image.width
    if n > 1:
        q1 = image.crop((0,0,n//2,n//2))
        q2 = image.crop((...,...,...,...))
        q3 = image.crop((...,...,...,...))
        q4 = image.crop((...,...,...,...))
        return q1,q2,q3,q4
```

c. Tester cette fonction (on pourra utiliser cette image carré)

Aide

- La création d'une image dans pil à partir d'un fichier s'effectue à l'aide de :

🐍 **Script Python**

```python
img_test = Image.open("mettre ici le nom du fichier")
```

- La visualisation d'une image s'effectue à l'aide de :

🐍 **Script Python**

```python
img_test.show()
```

d. Ajouter une instruction `assert` permettant de vérifier que l'image est carré (c'est à dire `image.width==image.height`)

e. Ajouter une instruction `assert` permettant de vérifier que `n` est pair.

4. Compléter puis tester la fonction python qui implémente l'algorithme décrit à la question 1.

🐍 **Script Python**

```python
def quart_tour(image):
    n = image.width
    # Partage de l'image en quatre quarts
    if n>1:
        q1,q2,q3,q4 = partage_quart(image)
        # Rotation de chacun des quarts
        rq1 = quart_tour(q1)
        rq2 = quart_tour(q2)
```

```
        rq3 = quart_tour(q3)
        rq4 = quart_tour(q4)
        # Reconstruction de l'image
        resultat = Image.new('RGB',image.size)
        resultat.paste(rq2,(0,0))
        resultat.paste(...,(n//2,0))
        resultat.paste(rq1,(...,...))
        resultat.paste(...,(...,...))
        return resultat
    else:
        return image
```