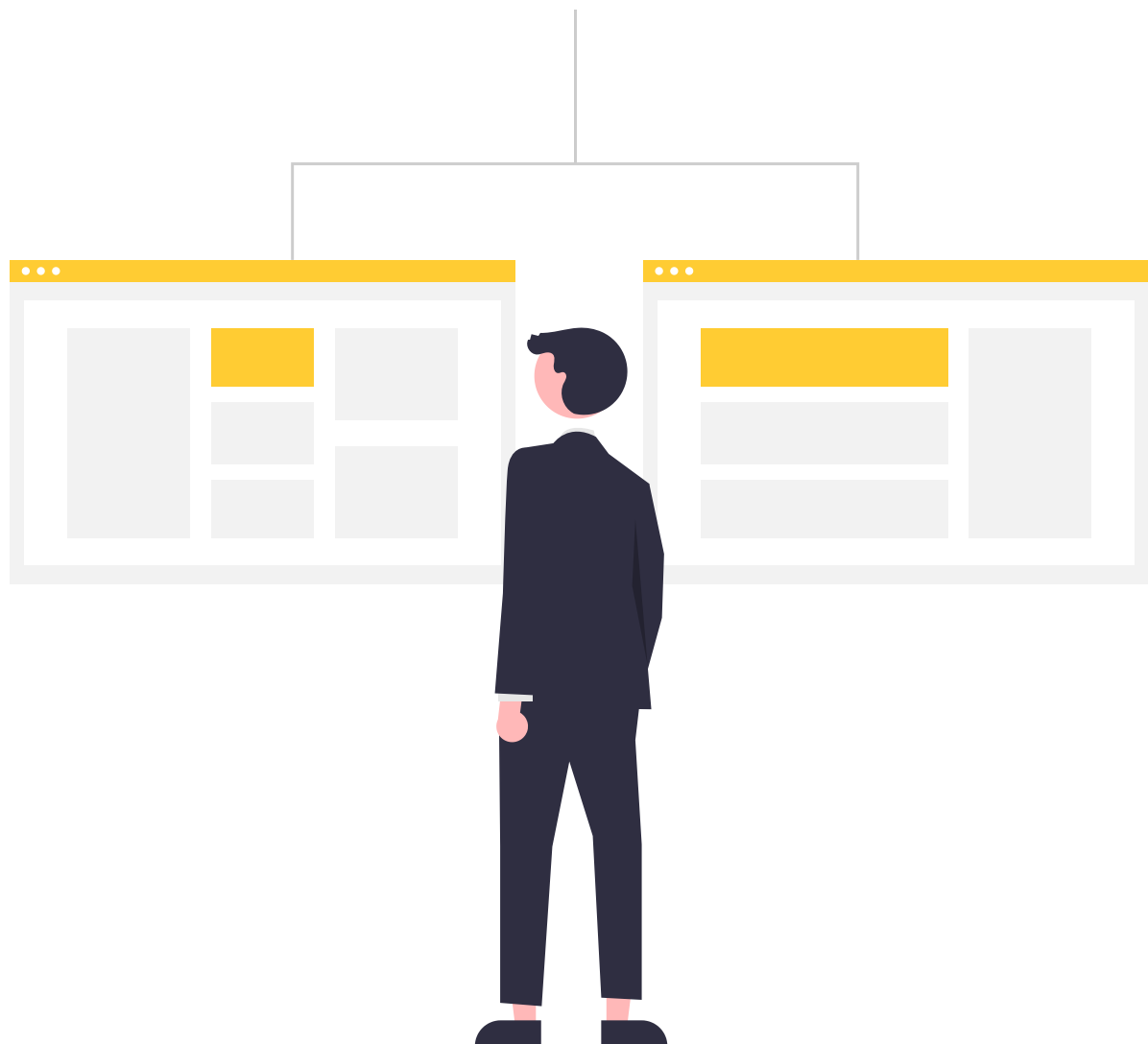


# TD 20 : Diviser pour régner



## I. Le principe

Diviser pour régner

La stratégie « diviser pour régner » consiste à 1. **Diviser** : Décomposer un problème en un ou plusieurs *sous-problèmes* de même nature mais plus petits. 2. **Régner** : Résoudre les sous-problèmes, généralement de manière récursive, jusqu'à ce qu'on arrive aux *cas d'arrêt* : des sous-problèmes que l'on sait résoudre immédiatement. 3. **Combiner** : Construire la solution au problème initial à partir des solutions des sous-problèmes.

## II. Diviser pour régner : Palindromes

Palindromes Une chaîne est un palindrome si elle peut se lire de la même manière dans les deux sens, de gauche à droite et de droite à gauche. Par exemple :

- "ressasser", "radar", "12321" sont des palindromes ;
- "nsi", "toto" n'en sont pas.

On se propose d'écrire une fonction récursive `est_palindrome(ch)` qui renvoie Vrai si la chaîne `ch` passée en argument est un palindrome et Faux sinon.

## Partie A

Une première version utilisant le slicing  
On considère la chaîne suivante.

```
ch = "ressasser"
```

**Question 1.** Quels slices permettent d'accéder :

- au premier caractère de `ch` ?
- au dernier caractère de `ch` ?
- à une chaîne privée du premier et du dernier caractères de `ch`.

**Question 2.** En utilisant les slices, complétez la fonction suivante.

```
def est_palindrome(ch):
    if len(ch) <= 1:
        return ...
    else:
        return ...
```

**Question 3.** Au moyen du mot clé `assert`, écrivez un bon jeu de tests pour cette fonction. Vérifiez que les tests passent avec succès.

**Question 4.** Expliquez pourquoi cet algorithme est un exemple de la méthode diviser pour régner.

**Question 5.** Utiliser Python tutor, exécutez en mode pas à pas le déroulement des appels récursifs de cette fonction pour la chaîne "ressasser". Si la chaîne de départ est un palindrome de longueur `n`, combien de comparaisons sont effectuées ? En déduite le coût en temps de cet algorithme (sa complexité) dans le pire des cas.

**Question 6.** Le slicing a un coût en mémoire caché. En effet, chaque appel `ch[1:-1]` induit la création d'une nouvelle chaîne qu'il faut stocker en mémoire. On peut le voir facilement avec Python tutor. Dans le pire cas, pour une chaîne de longueur `n` au départ, combien de chaînes doivent être créées pour répondre au problème ?

## Partie B

### Une deuxième version améliorée

En réalité, on peut se passer de la création de toutes ces chaînes intermédiaires en utilisant et en faisant varier (comme pour la recherche dichotomique) les indices `g` (pour gauche) et `d` (pour droite) des caractères restants. Voici une fonction `palindrome(ch, g, d)` qui renvoie `True` si la chaîne `ch[g..d]` (c'est-à-dire la chaîne `ch` limitée à ses caractères entre les positions `g` et `d`) est un palindrome et `False` sinon.

```
def palindrome(ch, g, d):
    if d - g < 1:
        return True
    else:
        return ch[g] == ch[d] and palindrome(ch, g+1, d-1)
```

**Question 7.** Quel appel à cette fonction faut-il faire pour tester si mot est un palindrome ?

```
mot = "ressasser"
# à compléter par le bon appel :
```

Pour éviter cette écriture un peu lourde, il suffit de créer une autre fonction `est_palindrome2(ch)` qui est chargée de lancer le premier appel à la fonction récursive `palindrome`. Complétez le code de la fonction `est_palindrome2(ch)`.

**Question 8.**

```
def est_palindrome2(ch):
    # à compléter
    pass
```

La fonction `est_palindrome2` est appelée une **fonction d'interface** qui permet d'ajouter des arguments à une fonction sans que l'utilisateur ait à s'en préoccuper.

**Question 9.** Vérifiez avec Python tutor qu'avec cette version, il n'y a qu'une chaîne `ch` à mémoriser (celle de départ). On obtient un algorithme avec un coût mémoire inférieur à la première version.

### III. Les tris : tri par sélection et tri par insertion - Tri fusion

#### Tri par sélection

**Tri par sélection** Voici l'algorithme du tri par sélection écrit en français : - Rechercher le plus petit élément du tableau, et l'échanger avec l'élément d'indice 0 ; - Rechercher le second plus petit élément du tableau, et l'échanger avec l'élément d'indice 1 ; - Continuer de cette façon jusqu'à ce que le tableau soit entièrement trié Le tri par sélection parcourt ainsi le tableau de la gauche vers la droite, en maintenant sur la gauche une partie déjà triée et à sa place définitive.

	8
	5
	2
	6
	9
	3
	1
	4
	0
	7

[Animation explicative du tri par sélection](#)

#### Exercice

**Question 1** Appliquez l'algorithme de tri par sélection sur le tableau suivant. Vous écrirez l'état du tableau à l'issue de chaque itération.  $T = [8, 3, 11, 7, 9, 2]$

**Question 2.** Déterminer la complexité de cette algorithme : Combien de comparaisons sont nécessaires pour trier par sélection un tableau de taille  $n$  dans le pire des cas ?

#### Exercice

**Question 1.** Écrivez une fonction `echange(T, i, j)` qui échange les éléments d'indices `T[i]` et `T[j]` dans le tableau `T`.

**Question 2.** Écrivez une fonction `tri_par_selection(T)`, utilisant la fonction `echange`, qui trie par sélection le tableau `T` dans l'ordre croissant.

## Tri par insertion (rappels)

6 5 3 1 8 7 2 4

#### Tri par insertion

Voici l'algorithme du tri par insertion écrit en français : - Prendre le deuxième élément du tableau et l'insérer à sa place parmi les éléments qui le précède - Prendre le troisième élément du tableau et l'insérer à sa place parmi les éléments qui le précède - Continuer de cette façon jusqu'à ce que le tableau soit entièrement trié. Le tri par sélection parcourt donc également le tableau de la gauche vers la droite, en maintenant une partie déjà triée sur la gauche. Au lieu de chercher la plus petite valeur dans la partie de droite, le tri par insertion va insérer la première valeur non encore triée au bon endroit dans la partie de gauche déjà triée.

#### Exercice :

##### Question 1.

Appliquez l'algorithme de tri par insertion sur le tableau suivant. Vous écrirez l'état du tableau à l'issue de chaque itération. `T = [8, 3, 11, 7, 9, 2]`

**Question 2.** Combien de comparaisons et d'échanges sont nécessaires pour trier par insertion un tableau de taille  $n$  dans le pire des cas ?

**Exercice :** Écrivez une fonction `tri_par_insertion(T)` qui trie par insertion le tableau `T` dans l'ordre croissant.

## Tri fusion

### Principe

Voici un deuxième exemple d'application de cette stratégie : le *tri fusion*. On doit cet algorithme à [John Von Neumann](#).

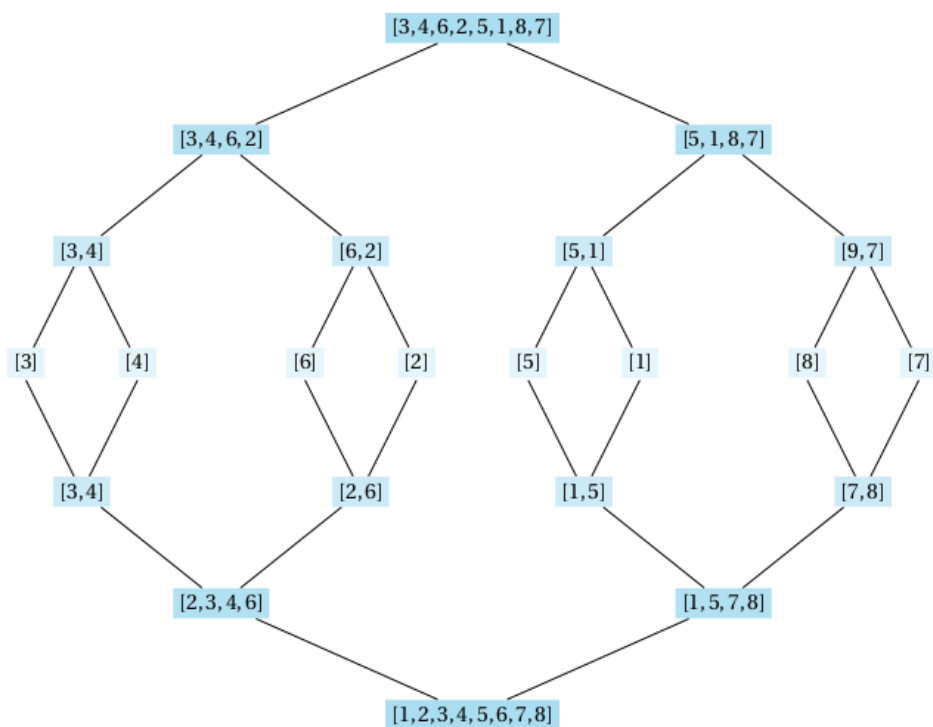
On dispose d'une liste d'entiers que l'on veut trier dans l'ordre croissant.

6 5 3 1 8 7 2 4

1. On scinde cette liste en deux listes de longueurs « à peu près égales ».
2. On trie ces listes en utilisant... le tri fusion. (on tri donc le manière récursive)

3. On *fusionne* les deux listes triées par ordre croissant pour ne plus en obtenir qu'une.

#### Un exemple



[lien video](#)

*Une chorégraphie du tri fusion*

## Code correspondant

Voici comment coder le tri fusion :

On a tout d'abord besoin d'une fonction `scinde` qui renvoie la première moitié et la deuxième moitié de la liste qu'on lui passe en argument.

```
def scinde(L):
    """prend une liste L et renvoie un couple de
    deux listes de taille identique (à l'unité près)
    de sorte que leur réunion soit la liste L de départ """
    lg= len(L)
    if lg < 2:
        return L, []
    else:
        p = lg // 2
        q = lg - p
        L1, L2 = [0] * q, [0] * p
        for i in range(lg):
            if i < q:
                L1[i] = L[i]
            else:
                L2[i - q] = L[i]
        return L1, L2
```

### Version avec slice

```
def scinde(lst: list) -> tuple:
    return lst[:len(lst) // 2], lst[len(lst) // 2:]
```

Ensuite, on a besoin d'une fonction `fusion` qui, étant donnée deux listes triées, les fusionne.

```
def fusion(L1, L2):
    '''réalise la fusion de deux listes triées,
    le résultat est une liste triée'''
    n1, n2 = len(L1), len(L2)
    n = n1 + n2
    L = [0] * n
    i, i1, i2 = 0, 0, 0
    while i1 < n1 and i2 < n2:
        if L1[i1] < L2[i2]:
            L[i] = L1[i1]
            i1 += 1
        else:
            L[i] = L2[i2]
            i2 += 1
        i += 1
    # ici on a vidé l'une ou l'autre des deux listes
    # s'il faut encore vider L1
    while i1 < n1:
        L[i] = L1[i1]
        i1 += 1
        i += 1
    # s'il faut encore vider L2
    while i2 < n2:
        L[i] = L2[i2]
        i2 += 1
        i += 1
    return L
```

Enfin, la fonction `tri_fusion`.

```
def tri_fusion(L):
    if len(L) < 2:
        return L
    else:
        L1, L2 = scinde(L)
        return fusion(tri_fusion(L1), tri_fusion(L2))
```

## Complexité du tri fusion

→ La partie “diviser” est de complexité constante.

Pour pouvoir majorer le nombre maximum d'itérations, si le tableau contient  $P$  valeurs, et si on a un entier  $n$  tel que  $P \leq 2^n$ , alors puisque qu'à chaque itération, on sélectionne une moitié de ce qui reste :

- au bout d'une itération, une moitié de tableau aura au plus  $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$  éléments,
- un quart aura au plus  $2^{n-2}$
- et au bout de  $k$  itérations, la taille de ce qui reste à étudier est de taille au plus  $2^{n-k}$ .
- En particulier, si l'on fait  $n$  itérations, il reste au plus  $2^{n-n} = 1$  valeur du tableau à examiner. On est sûr de s'arrêter cette fois-ci

On a donc montré que si l'entier  $n$  vérifie  $P \leq 2^n$ , alors l'algorithme va effectuer au plus  $n$  itérations. La plus petite valeur est obtenue pour  $n = \log_2 P$ . Ainsi, la complexité de la fonction est de l'ordre du logarithme de la longueur de la liste ( $O(\log_2(n))$ ).

**Exemple** Pour un tableau de taille  $n = 64$  il faut :

$64/2=32, 32/2=16, 16/2=8, 8/2=4, 4/2=2, 2/2=1$  :

6 étapes.

$2^6 = 64$ .

Comme toujours quand on peut séparer le tableau en deux, la méthode diviser pour régner permet de ne réaliser que  $\log_2 n$  étapes. Mais...

#### → Complexité fusion

La partie fusion utilise une boucle qui parcourt plusieurs tableaux en même temps.

On réalise à chaque étape la même chose :

- lire deux valeurs,
- comparer,
- ranger la plus petite.

La complexité est linéaire.

Notons  $n$  la taille de la liste à trier et considérons comme seule *opération élémentaire* le fait d'accéder à un élément d'une liste.

**Complexité du tri fusion** Le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour trier une liste de taille  $n$  par la méthode du tri fusion est de l'ordre de  $n \times \log_2 n$ .

## IV. Application : Exercices de l'Epreuve Pratique

**Sujet 23 - Exercice 2** La fonction fusion prend deux listes `L1`, `L2` d'entiers triées par ordre croissant et les fusionne en une liste triée `L12` qu'elle renvoie. Le code Python de la fonction est

```
def fusion(L1, L2):
    n1 = len(L1)
    n2 = len(L2)
    L12 = [0] * (n1 + n2)
    i1 = 0
    i2 = 0
    i = 0
    while i1 < n1 and ... :
        if L1[i1] < L2[i2]:
            L12[i] = ...
            i1 = ...
        else:
            L12[i] = L2[i2]
            i2 = ...
        i += 1
    while i1 < n1:
        L12[i] = ...
        i1 = i1 + 1
        i = ...
    while i2 < n2:
        L12[i] = ...
        i2 = i2 + 1
        i = ...
    return L12
```

Compléter le code.

Exemple :

```
>>> fusion([1,6,10],[0,7,8,9])
[0, 1, 6, 7, 8, 9, 10]
```

## Recherche dichotomique

### EX : Recherche dichotomique

1. Expliquer pourquoi la recherche dichotomique d'un élément dans une liste d'entiers triés dans l'ordre croissant peut être vue comme un exemple de stratégie « diviser pour régner ».
2. Programmer la recherche dichotomique de manière récursive.

## V. Exercices BAC

### Sujet n°1 : France 2021

*Cet exercice porte sur l'algorithme de tri fusion, qui s'appuie sur la méthode dite de « diviser pour régner ».*

**Question 1** a. Quel est l'ordre de grandeur du coût, en nombre de comparaisons, de l'algorithme de tri fusion pour une liste de longueur ? b. Citer le nom d'un autre algorithme de tri. Donner l'ordre de grandeur de son coût, en nombre de comparaisons, pour une liste de longueur . Comparer ce coût à celui du tri fusion. Aucune justification n'est attendue.

L'algorithme de tri fusion utilise deux fonctions `moitie_gauche` et `moitie_droite` qui prennent en argument une liste L et renvoient respectivement : - la sous-liste de L formée des éléments d'indice strictement inférieur à  $\text{len}(L)//2$  ; - la sous-liste de L formée des éléments d'indice supérieur ou égal à  $\text{len}(L)//2$ .

On rappelle que la syntaxe  $a//b$  désigne la division entière de a par b.

Par exemple,

```
>>> L = [3, 5, 2, 7, 1, 9, 0]
>>> moitie_gauche(L)
[3, 5, 2]
>>> moitie_droite(L)
[7, 1, 9, 0]
>>> M = [4, 1, 11, 7]
>>> moitie_gauche(M)
[4, 1]
>>> moitie_droite(M)
[11, 7]
```

L'algorithme utilise aussi une fonction `fusion` qui prend en argument deux listes triées L1 et L2 et renvoie une liste L triée et composée des éléments de L1 et L2. On donne ci-dessous le code python d'une fonction récursive `tri_fusion` qui prend en argument une liste L et renvoie une nouvelle liste triée formée des éléments de L.

```
def tri_fusion(L):
    n = len(L)
    if n<=1 :
        return L
    print(L)
    mg = moitie_gauche(L)
    md = moitie_droite(L)
    L1 = tri_fusion(mg)
    L2 = tri_fusion(md)
    return fusion(L1, L2)
```

**Question 2** Donner la liste des affichages produits par l'appel suivant.



```
tri_fusion([7, 4, 2, 1, 8, 5, 6, 3])
```

On s'intéresse désormais à différentes fonctions appelées par `tri_fusion`, à savoir `moitie_droite` et `fusion`.

**Question 3** Écrire la fonction `moitie_droite`.

**Question 4** On donne ci-dessous une version incomplète de la fonction `fusion`.

```

1  def fusion(L1, L2):
2      L = []
3      n1 = len(L1)
4      n2 = len(L2)
5      i1 = 0
6      i2 = 0
7      while i1 < n1 or i2 < n2 :
8          if i1 >= n1:
9              L.append(L2[i2])
10             i2 = i2 + 1
11          elif i2 >= n2:
12              L.append(L1[i1])
13              i1 = i1 + 1
14          else:
15              e1 = L1[i1]
16              e2 = L2[i2]
17
18
19
20      return L
```

Dans cette fonction, les entiers `i1` et `i2` représentent respectivement les indices des éléments des listes `L1` et `L2` que l'on souhaite comparer :

- Si aucun des deux indices n'est valide, la boucle `while` est interrompue ;
- Si `i1` n'est plus un indice valide, on va ajouter à `L` les éléments de `L2` à partir de l'indice `i2` ;
- Si `i2` n'est plus un indice valide, on va ajouter à `L` les éléments de `L1` à partir de l'indice `i1` ;
- Sinon, le plus petit élément non encore traité est ajouté à `L` et on décale l'indice correspondant.

Écrire sur la copie les instructions manquantes des lignes 17 à 22 permettant d'insérer dans la liste `L` les éléments des listes `L1` et `L2` par ordre croissant.

## Sujet n°2 : BAC Polynésie 2021

*Cet exercice traite principalement du thème « algorithmique, langages et programmation ». Le but est de comparer le tri par insertion (l'un des algorithmes étudiés en 1ère NSI pour trier un tableau) avec le tri fusion (un algorithme qui applique le principe de « diviser pour régner »).*

## Partie A : Manipulation d'une liste en Python

**Question A.1** Donner les affichages obtenus après l'exécution du code Python suivant.

```

notes = [8, 7, 18, 14, 12, 9, 17, 3]
notes[3] = 16
print(len(notes))
print(notes)
```

**Question A.2** Écrire un code Python permettant d'afficher les éléments d'indice 2 à 4 de la liste `notes`.

## Partie B : Tri par insertion

Le tri par insertion est un algorithme efficace qui s'inspire de la façon dont on peut trier une poignée de cartes. On commence avec une seule carte dans la main gauche (les autres cartes sont en tas sur la table) puis on pioche la carte suivante et on l'insère au bon endroit dans la main gauche.

**Question B.1** Voici une implémentation en Python de cet algorithme. Recopier et compléter les lignes 6 et 7 surlignées (uniquement celles-ci).

```
1 def tri_insertion(liste):
2     """ trie par insertion la liste en paramètre """
3     for indice_courant in range(1,len(liste)):
4         element_a_inserer = liste[indice_courant]
5         i = indice_courant - 1
6         while i >= 0 and liste[i] > ..... :
7             liste[.....] = liste[.....]
8             i = i - 1
9             liste[i + 1] = element_a_inserer
```

On a écrit dans la console les instructions suivantes :

```
notes = [8, 7, 18, 14, 12, 9, 17, 3]
tri_insertion(notes)
print(notes)
```

On a obtenu l'affichage suivant :

```
[3, 7, 8, 9, 12, 14, 17, 18]
```

On s'interroge sur ce qui s'est passé lors de l'exécution de `tri_insertion(notes)`.

**Question B.2** Donner le contenu de la liste `notes` après le premier passage dans la boucle `for`.

**Question B.3** Donner le contenu de la liste `notes` après le troisième passage dans la boucle `for`.

## Partie C : Tri fusion

L'algorithme de tri fusion suit le principe de « diviser pour régner ».

(1) Si le tableau à trier n'a qu'un élément, il est déjà trié. (2) Sinon, séparer le tableau en deux parties à peu près égales. (3) Trier les deux parties avec l'algorithme de tri fusion. (4) Fusionner les deux tableaux triés en un seul tableau.

source : Wikipedia

**Question C.1** Cet algorithme est-il itératif ou récursif ? Justifier en une phrase.

**Question C.2** Expliquer en trois lignes comment faire pour rassembler dans une main deux tas déjà triés de cartes, la carte en haut d'un tas étant la plus petite de ce même tas ; la deuxième carte d'un tas n'étant visible qu'après avoir retiré la première carte de ce tas.

À la fin du procédé, les cartes en main doivent être triées par ordre croissant. Une fonction fusionner a été implémentée en Python en s'inspirant du procédé de la question précédente. Elle prend quatre arguments : la liste qui est en train d'être triée, l'indice où commence la sous-liste de gauche à fusionner, l'indice où termine cette sous-liste, et l'indice où se termine la sous-liste de droite.

**Question C.3** Voici une implémentation de l'algorithme de tri fusion. Recopier et compléter les lignes 8, 9 et 10 surlignées (uniquement celles-ci).

```
1 from math import floor
2
3 def tri_fusion (liste, i_debut, i_fin):
4     """ trie par fusion la liste en paramètre depuis i_debut jusqu'à i_fin """
5
```

```

6     if i_debut < i_fin:
7         i_partage = floor((i_debut + i_fin) / 2)
8         tri_fusion(liste, i_debut, ..... )
9         tri_fusion(liste, ....., i_fin)
        fusionner(liste, ....., ....., .....)

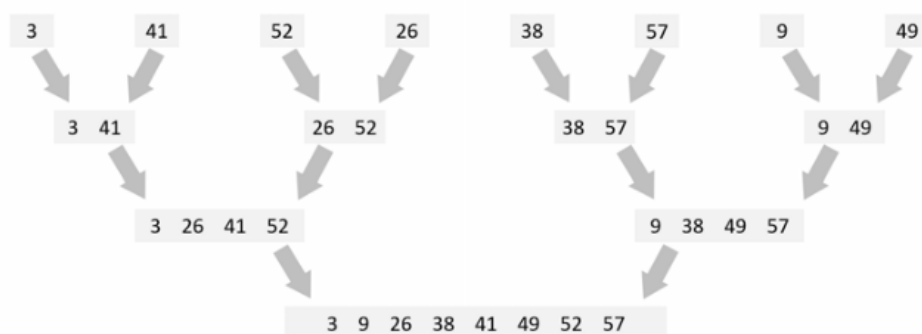
```

Remarque : la fonction floor renvoie la partie entière du nombre passé en paramètre.

**Question C.4** Expliquer le rôle de la première ligne du code de la question 3.

## Partie D : Comparaison du tri par insertion et du tri fusion

Voici une illustration des étapes d'un tri effectué sur la liste `[3, 41, 52, 26, 38, 57, 9, 49]`.



**Question D.1** Quel algorithme a été utilisé : le tri par insertion ou le tri fusion ? Justifier.

**Question D.2** Identifier le tri qui a une complexité, dans le pire des cas, en  $O(n^2)$  et identifier le tri qui a une complexité, dans le pire des cas, en  $O(n \log 2n)$ .

Remarque :  $n$  représente la longueur de la liste à trier.

**Question D.3** Justifier brièvement ces deux complexités.

## Sujet n°3 : FRANCE CANDIDAT LIBRE SUJET 1

*Cet exercice traite de manipulation de tableaux, de récursivité et du paradigme « diviser pour régner ».*

Dans un tableau Python d'entiers `tab`, on dit que le couple d'indices  $(i, j)$  forme une inversion lorsque  $i < j$  et `tab[i] > tab[j]`. On donne ci-dessous quelques exemples.

- Dans le tableau `[1, 5, 3, 7]`, le couple d'indices  $(1, 2)$  forme une inversion car `5 > 3`. Par contre, le couple  $(1, 3)$  ne forme pas d'inversion car `5 < 7`. Il n'y a qu'une inversion dans ce tableau.
- Il y a trois inversions dans le tableau `[1, 6, 2, 7, 3]`, à savoir les couples d'indices  $(1, 2)$ ,  $(1, 4)$  et  $(3, 4)$ .
- On peut compter six inversions dans le tableau `[7, 6, 5, 3]` : les couples d'indices  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$  et  $(2, 3)$ .

On se propose dans cet exercice de déterminer le nombre d'inversions dans un tableau quelconque.

Questions préliminaires

**Question 1** Expliquer pourquoi le couple  $(1, 3)$  est une inversion dans le tableau `[4, 8, 3, 7]`.

**Question 2** Justifier que le couple  $(2, 3)$  n'en est pas une.

## Partie A : Méthode itérative

Le but de cette partie est d'écrire une fonction itérative `nombre_inversion` qui renvoie le nombre d'inversions dans un tableau. Pour cela, on commence par écrire une fonction `fonction1` qui sera ensuite utilisée pour écrire la fonction `nombre_inversion`.

**Question A.1** On donne la fonction suivante.

```
def fonction1(tab, i):
    nb_elem = len(tab)
    cpt = 0
    for j in range(i+1, nb_elem):
        if tab[j] < tab[i]:
            cpt += 1
    return cpt
```

a. Indiquer ce que renvoie la `fonction1(tab, i)` dans les cas suivants.

- Cas n°1 : `tab = [1, 5, 3, 7]` et `i = 0`.
- Cas n°2 : `tab = [1, 5, 3, 7]` et `i = 1`.
- Cas n°3 : `tab = [1, 5, 2, 6, 4]` et `i = 1`.

b. Expliquer ce que permet de déterminer cette fonction.

**Question A.2** En utilisant la fonction précédente, écrire une fonction `nombre_inversion(tab)` qui prend en argument un tableau et renvoie le nombre d'inversions dans ce tableau. On donne ci-dessous les résultats attendus pour certains appels.

```
>>> nombre_inversions([1, 5, 7])
0
>>> nombre_inversions([1, 6, 2, 7, 3])
3
>>> nombre_inversions([7, 6, 5, 3])
6
```

**Question A.3** Quelle est l'ordre de grandeur de la complexité en temps de l'algorithme obtenu ? Aucune justification n'est attendue.

## Partie B : Méthode récursive

Le but de cette partie est de concevoir une version récursive de la fonction `nombre_inversion`. On définit pour cela des fonctions auxiliaires.

**Question B.1** Donner le nom d'un algorithme de tri ayant une complexité meilleure que quadratique. Dans la suite de cet exercice, on suppose qu'on dispose d'une fonction `tri(tab)` qui prend en argument un tableau et renvoie un tableau contenant les mêmes éléments rangés dans l'ordre croissant.

**Question B.2** Écrire une fonction `moitie_gauche(tab)` qui prend en argument un tableau `tab` et renvoie un nouveau tableau contenant la moitié gauche de `tab`. Si le nombre d'éléments de `tab` est impair, l'élément du centre se trouve dans cette partie gauche. On donne ci-dessous les résultats attendus pour certains appels.

```
>>> moitie_gauche([])
[]
>>> moitie_gauche([4, 8, 3])
[4, 8]
>>> moitie_gauche([4, 8, 3, 7])
[4, 8]
```

Dans la suite, on suppose qu'on dispose de la fonction `moitie_droite(tab)` qui renvoie la moitié droite sans l'élément du milieu.

**Question B.3** On suppose qu'une fonction `nb_inv_tab(tab1, tab2)` a été écrite. Cette fonction renvoie le nombre d'inversions du tableau obtenu en mettant bout à bout les tableaux `tab1` et `tab2`, à condition que `tab1` et `tab2` soient triés dans l'ordre croissant. On donne ci-dessous deux exemples d'appel de cette fonction :

```
>>> nb_inv_tab([3, 7, 9], [2, 10])
3
>>> nb_inv_tab([7, 9, 13], [7, 10, 14])
3
```

En utilisant la fonction `nb_inv_tab` et les questions précédentes, écrire une fonction récursive `nb_inversions_rec(tab)` qui permet de calculer le nombre d'inversions dans un tableau. Cette fonction renverra le même nombre que `nombre_inversions(tab)` de la partie A. On procédera de la façon suivante :

- Séparer le tableau en deux tableaux de tailles égales (à une unité près).
- Appeler récursivement la fonction `nb_inversions_rec` pour compter le nombre d'inversions dans chacun des deux tableaux.
- Trier les deux tableaux (on rappelle qu'une fonction de tri est déjà définie).
- Ajouter au nombre d'inversions précédemment comptées le nombre renvoyé par la fonction `nb_inv_tab` avec pour arguments les deux tableaux triés.

**Question 2.** En utilisant les slices, complétez la fonction suivante.

```
def est_palindrome(ch):
    if len(ch) <= 1:
        return ...
    else:
        return ...
```

**Question 3.** Au moyen du mot clé `assert`, écrivez un bon jeu de tests pour cette fonction. Vérifiez que les tests passent avec succès.

**Question 4.** Expliquez pourquoi cet algorithme est un exemple de la méthode diviser pour régner.

**Question 5.** Utiliser Python tutor, exécutez en mode pas à pas le déroulement des appels récursifs de cette fonction pour la chaîne "ressasser". Si la chaîne de départ est un palindrome de longueur `n`, combien de comparaisons sont effectuées ? En déduite le coût en temps de cet algorithme (sa complexité) dans le pire des cas.

**Question 6.** Le slicing a un coût en mémoire caché. En effet, chaque appel `ch[1:-1]` induit la création d'une nouvelle chaîne qu'il faut stocker en mémoire. On peut le voir facilement avec Python tutor. Dans le pire cas, pour une chaîne de longueur `n` au départ, combien de chaînes doivent être créées pour répondre au problème ?

## Partie B

### Une deuxième version améliorée

En réalité, on peut se passer de la création de toutes ces chaînes intermédiaires en utilisant et en faisant varier (comme pour la recherche dichotomique) les indices `g` (pour gauche) et `d` (pour droite) des caractères restants. Voici une fonction `palindrome(ch, g, d)` qui renvoie `True` si la chaîne `ch[g..d]` (c'est-à-dire la chaîne `ch` limitée à ses caractères entre les positions `g` et `d`) est un palindrome et `False` sinon.

```
def palindrome(ch, g, d):
    if d - g < 1:
        return True
    else:
        return ch[g] == ch[d] and palindrome(ch, g+1, d-1)
```

**\*\*Question 7.** Quel appel à cette fonction faut-il faire pour tester si `mot` est un palindrome ?

```
mot = "ressasser"
# à compléter par le bon appel :
```

Pour éviter cette écriture un peu lourde, il suffit de créer une autre fonction `est_palindrome2(ch)` qui est chargée de lancer le premier appel à la fonction réursive `palindrome`. Complétez le code de la fonction `est_palindrome2(ch)`.

#### Question 8.

```
def est_palindrome2(ch):
    # à compléter
    pass
```

La fonction `est_palindrome2` est appelée une **fonction d'interface** qui permet d'ajouter des arguments à une fonction sans que l'utilisateur ait à s'en préoccuper.

**Question 9.** Vérifiez avec Python tutor qu'avec cette version, il n'y a qu'une chaîne `ch` à mémoriser (celle de départ). On obtient un algorithme avec un coût mémoire inférieur à la première version.

## III. Les tris : tri par sélection et tri par insertion - Tri fusion

### Tri par sélection

**Tri par sélection** Voici l'algorithme du tri par sélection écrit en français : - Rechercher le plus petit élément du tableau, et l'échanger avec l'élément d'indice 0 ; - Rechercher le second plus petit élément du tableau, et l'échanger avec l'élément d'indice 1 ; - Continuer de cette façon jusqu'à ce que le tableau soit entièrement trié Le tri par sélection parcourt ainsi le tableau de la gauche vers la droite, en maintenant sur la gauche une partie déjà triée et à sa place définitive.

	8
	5
	2
	6
	9
	3
	1
	4
	0
	7

--\$

[Animation explicative du tri par sélection](#)

**Exercice Question 1** Appliquez l'algorithme de tri par sélection sur le tableau suivant. Vous écrirez l'état du tableau à l'issue de chaque itération.  $T = [8, 3, 11, 7, 9, 2]$

**Question 2.** Déterminer la complexité de cette algorithme : Combien de comparaisons sont nécessaires pour trier par sélection un tableau de taille  $n$  dans le pire des cas ?

**Exercice Question 1.** Écrivez une fonction `echange(T, i, j)` qui échange les éléments d'indices `T[i]` et `T[j]` dans le tableau `T`.

**Question 2.** Écrivez une fonction `tri_par_selection(T)`, utilisant la fonction `echange`, qui trie par sélection le tableau `T` dans l'ordre croissant.

## Tri par insertion (rappels)

6 5 3 1 8 7 2 4

### Tri par insertion

Voici l'algorithme du tri par insertion écrit en français : - Prendre le deuxième élément du tableau et l'insérer à sa place parmi les éléments qui le précède - Prendre le troisième élément du tableau et l'insérer à sa place parmi les éléments qui le précède - Continuer de cette façon jusqu'à ce que le tableau soit entièrement trié. Le tri par sélection parcourt donc également le tableau de la gauche vers la droite, en maintenant une partie déjà triée sur la gauche. Au lieu de chercher la plus petite valeur dans la partie de droite, le tri par insertion va insérer la première valeur non encore triée au bon endroit dans la partie de gauche déjà triée.

**Exercice : Question 1.** Appliquez l'algorithme de tri par insertion sur le tableau suivant. Vous écrirez l'état du tableau à l'issue de chaque itération.  $T = [8, 3, 11, 7, 9, 2]$

**Question 2.** Combien de comparaisons et d'échanges sont nécessaires pour trier par insertion un tableau de taille  $n$  dans le pire des cas ?

**Exercice :** Écrivez une fonction `tri_par_insertion(T)` qui trie par insertion le tableau `T` dans l'ordre croissant.

## Tri fusion

### Principe

Voici un deuxième exemple d'application de cette stratégie : le *tri fusion*. On doit cet algorithme à [John Von Neumann](#).

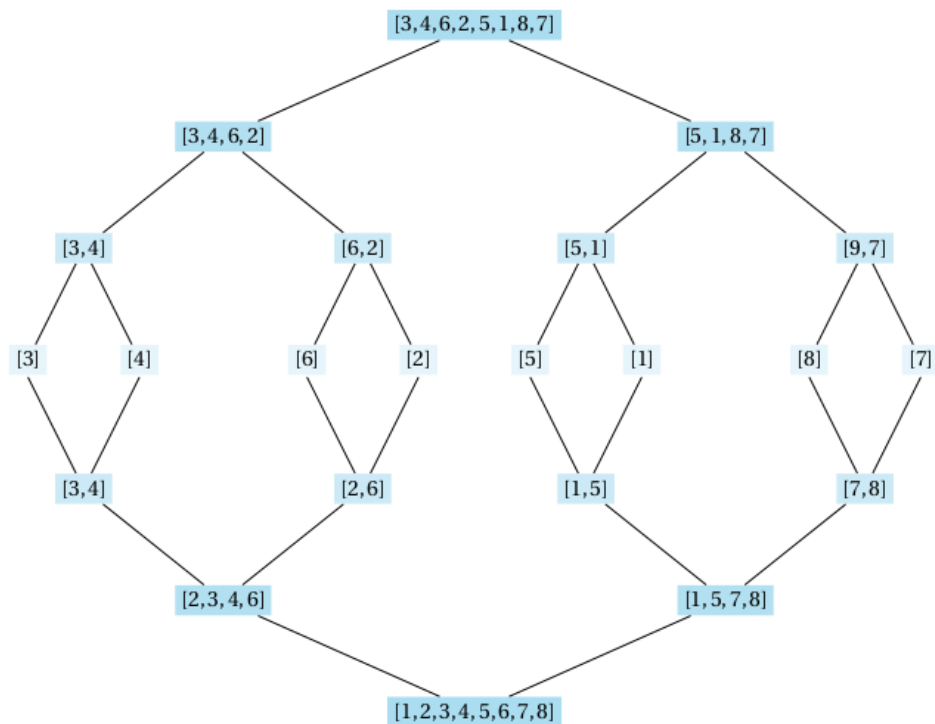
On dispose d'une liste d'entiers que l'on veut trier dans l'ordre croissant.

6 5 3 1 8 7 2 4

1. On scinde cette liste en deux listes de longueurs « à peu près égales ».
2. On trie ces listes en utilisant... le tri fusion. (on tri donc le manière récursive)

3. On *fusionne* les deux listes triées par ordre croissant pour ne plus en obtenir qu'une.

**Un exemple**



[lien video](#)

*Une chorégraphie du tri fusion*

## Code correspondant

Voici comment coder le tri fusion :

On a tout d'abord besoin d'une fonction `scinde` qui renvoie la première moitié et la deuxième moitié de la liste qu'on lui passe en argument.

```
def scinde(L):
    """prend une liste L et renvoie un couple de
    deux listes de taille identique (à l'unité près)
    de sorte que leur réunion soit la liste L de départ """
    lg= len(L)
    if lg < 2:
        return L, []
    else:
        p = lg // 2
        q = lg - p
        L1, L2 = [0] * q, [0] * p
        for i in range(lg):
            if i < q:
                L1[i] = L[i]
            else:
                L2[i - q] = L[i]
        return L1, L2
```

### Version avec slice

```
def scinde(lst: list) -> tuple:
    return lst[:len(lst) // 2], lst[len(lst) // 2:]
```



Ensuite, on a besoin d'une fonction `fusion` qui, étant donnée deux listes triées, les fusionne.

```
def fusion(L1, L2):
    '''réalise la fusion de deux listes triées,
    le résultat est une liste triée'''
    n1, n2 = len(L1), len(L2)
    n = n1 + n2
    L = [0] * n
    i, i1, i2 = 0, 0, 0
    while i1 < n1 and i2 < n2:
        if L1[i1] < L2[i2]:
            L[i] = L1[i1]
            i1 += 1
        else:
            L[i] = L2[i2]
            i2 += 1
        i += 1
    # ici on a vidé l'une ou l'autre des deux listes
    # s'il faut encore vider L1
    while i1 < n1:
        L[i] = L1[i1]
        i1 += 1
        i += 1
    # s'il faut encore vider L2
    while i2 < n2:
        L[i] = L2[i2]
        i2 += 1
        i += 1
    return L
```

Enfin, la fonction `tri_fusion`.

```
def tri_fusion(L):
    if len(L) < 2:
        return L
    else:
        L1, L2 = scinde(L)
        return fusion(tri_fusion(L1), tri_fusion(L2))
```

## Complexité du tri fusion

→ La partie “diviser” est de complexité constante.

Pour pouvoir majorer le nombre maximum d'itérations, si le tableau contient  $P$  valeurs, et si on a un entier  $n$  tel que  $P \leq 2^n$ , alors puisque qu'à chaque itération, on sélectionne une moitié de ce qui reste :

- au bout d'une itération, une moitié de tableau aura au plus  $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$  éléments,
- un quart aura au plus  $2^{n-2}$
- et au bout de  $k$  itérations, la taille de ce qui reste à étudier est de taille au plus  $2^{n-k}$ .
- En particulier, si l'on fait  $n$  itérations, il reste au plus  $2^{n-n} = 1$  valeur du tableau à examiner. On est sûr de s'arrêter cette fois-ci

On a donc montré que si l'entier  $n$  vérifie  $P \leq 2^n$ , alors l'algorithme va effectuer au plus  $n$  itérations. La plus petite valeur est obtenue pour  $n = \log_2 P$ . Ainsi, la complexité de la fonction est de l'ordre du logarithme de la longueur de la liste ( $O(\log_2(n))$ ).

**Exemple** Pour un tableau de taille  $n = 64$  il faut :

$64/2=32, 32/2=16, 16/2=8, 8/2=4, 4/2=2, 2/2=1$  :

6 étapes.

$2^6 = 64$ .

Comme toujours quand on peut séparer le tableau en deux, la méthode diviser pour régner permet de ne réaliser que  $\log_2 n$  étapes. Mais...

#### → Complexité fusion

La partie fusion utilise une boucle qui parcourt plusieurs tableaux en même temps.

On réalise à chaque étape la même chose :

- lire deux valeurs,
- comparer,
- ranger la plus petite.

La complexité est linéaire.

Notons  $n$  la taille de la liste à trier et considérons comme seule *opération élémentaire* le fait d'accéder à un élément d'une liste.

**Complexité du tri fusion** Le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour trier une liste de taille  $n$  par la méthode du tri fusion est de l'ordre de  $n \times \log_2 n$ .

## IV. Application : Exercices de l'Epreuve Pratique

**Sujet 23 - Exercice 2** La fonction fusion prend deux listes `L1`, `L2` d'entiers triées par ordre croissant et les fusionne en une liste triée `L12` qu'elle renvoie. Le code Python de la fonction est

```
def fusion(L1,L2):
    n1 = len(L1)
    n2 = len(L2)
    L12 = [0]*(n1+n2)
    i1 = 0
    i2 = 0
    i = 0
    while i1 < n1 and ... :
        if L1[i1] < L2[i2]:
            L12[i] = ...
            i1 = ...
        else:
            L12[i] = L2[i2]
            i2 = ...
        i += 1
    while i1 < n1:
        L12[i] = ...
        i1 = i1 + 1
        i = ...
    while i2 < n2:
        L12[i] = ...
        i2 = i2 + 1
        i = ...
    return L12
```

Compléter le code.

Exemple :

```
>>> fusion([1,6,10],[0,7,8,9])
[0, 1, 6, 7, 8, 9, 10]
```

## Recherche dichotomique

### EX : Recherche dichotomique

1. Expliquer pourquoi la recherche dichotomique d'un élément dans une liste d'entiers triés dans l'ordre croissant peut être vue comme un exemple de stratégie « diviser pour régner ».
2. Programmer la recherche dichotomique de manière récursive.

## V. Exercices BAC

### Sujet n°1 : France 2021

*Cet exercice porte sur l'algorithme de tri fusion, qui s'appuie sur la méthode dite de « diviser pour régner ».*

**Question 1** a. Quel est l'ordre de grandeur du coût, en nombre de comparaisons, de l'algorithme de tri fusion pour une liste de longueur ? b. Citer le nom d'un autre algorithme de tri. Donner l'ordre de grandeur de son coût, en nombre de comparaisons, pour une liste de longueur . Comparer ce coût à celui du tri fusion. Aucune justification n'est attendue.

L'algorithme de tri fusion utilise deux fonctions `moitie_gauche` et `moitie_droite` qui prennent en argument une liste L et renvoient respectivement : - la sous-liste de L formée des éléments d'indice strictement inférieur à  $\text{len}(L)//2$  ; - la sous-liste de L formée des éléments d'indice supérieur ou égal à  $\text{len}(L)//2$ .

On rappelle que la syntaxe  $a//b$  désigne la division entière de a par b.

Par exemple,

```
>>> L = [3, 5, 2, 7, 1, 9, 0]
>>> moitie_gauche(L)
[3, 5, 2]
>>> moitie_droite(L)
[7, 1, 9, 0]
>>> M = [4, 1, 11, 7]
>>> moitie_gauche(M)
[4, 1]
>>> moitie_droite(M)
[11, 7]
```

L'algorithme utilise aussi une fonction `fusion` qui prend en argument deux listes triées L1 et L2 et renvoie une liste L triée et composée des éléments de L1 et L2. On donne ci-dessous le code python d'une fonction récursive `tri_fusion` qui prend en argument une liste L et renvoie une nouvelle liste triée formée des éléments de L.

```
def tri_fusion(L):
    n = len(L)
    if n<=1 :
        return L
    print(L)
    mg = moitie_gauche(L)
    md = moitie_droite(L)
    L1 = tri_fusion(mg)
    L2 = tri_fusion(md)
    return fusion(L1, L2)
```

**Question 2** Donner la liste des affichages produits par l'appel suivant.

```
tri_fusion([7, 4, 2, 1, 8, 5, 6, 3])
```

On s'intéresse désormais à différentes fonctions appelées par `tri_fusion`, à savoir `moitie_droite` et `fusion`.

**Question 3** Écrire la fonction `moitie_droite`.

**Question 4** On donne ci-dessous une version incomplète de la fonction `fusion`.

```

1  def fusion(L1, L2):
2      L = []
3      n1 = len(L1)
4      n2 = len(L2)
5      i1 = 0
6      i2 = 0
7      while i1 < n1 or i2 < n2 :
8          if i1 >= n1:
9              L.append(L2[i2])
10             i2 = i2 + 1
11          elif i2 >= n2:
12              L.append(L1[i1])
13              i1 = i1 + 1
14          else:
15              e1 = L1[i1]
16              e2 = L2[i2]
17
18
19
20      return L
```

Dans cette fonction, les entiers `i1` et `i2` représentent respectivement les indices des éléments des listes `L1` et `L2` que l'on souhaite comparer :

- Si aucun des deux indices n'est valide, la boucle `while` est interrompue ;
- Si `i1` n'est plus un indice valide, on va ajouter à `L` les éléments de `L2` à partir de l'indice `i2` ;
- Si `i2` n'est plus un indice valide, on va ajouter à `L` les éléments de `L1` à partir de l'indice `i1` ;
- Sinon, le plus petit élément non encore traité est ajouté à `L` et on décale l'indice correspondant.

Écrire sur la copie les instructions manquantes des lignes 17 à 22 permettant d'insérer dans la liste `L` les éléments des listes `L1` et `L2` par ordre croissant.

## Sujet n°2 : BAC Polynésie 2021

*Cet exercice traite principalement du thème « algorithmique, langages et programmation ». Le but est de comparer le tri par insertion (l'un des algorithmes étudiés en 1ère NSI pour trier un tableau) avec le tri fusion (un algorithme qui applique le principe de « diviser pour régner »).*

## Partie A : Manipulation d'une liste en Python

**Question A.1** Donner les affichages obtenus après l'exécution du code Python suivant.

```

notes = [8, 7, 18, 14, 12, 9, 17, 3]
notes[3] = 16
print(len(notes))
print(notes)
```

**Question A.2** Écrire un code Python permettant d'afficher les éléments d'indice 2 à 4 de la liste `notes`.

## Partie B : Tri par insertion

Le tri par insertion est un algorithme efficace qui s'inspire de la façon dont on peut trier une poignée de cartes. On commence avec une seule carte dans la main gauche (les autres cartes sont en tas sur la table) puis on pioche la carte suivante et on l'insère au bon endroit dans la main gauche.

**Question B.1** Voici une implémentation en Python de cet algorithme. Recopier et compléter les lignes 6 et 7 surlignées (uniquement celles-ci).

```
1 def tri_insertion(liste):
2     """ trie par insertion la liste en paramètre """
3     for indice_courant in range(1,len(liste)):
4         element_a_inserer = liste[indice_courant]
5         i = indice_courant - 1
6         while i >= 0 and liste[i] > ..... :
7             liste[.....] = liste[.....]
8             i = i - 1
9             liste[i + 1] = element_a_inserer
```

On a écrit dans la console les instructions suivantes :

```
notes = [8, 7, 18, 14, 12, 9, 17, 3]
tri_insertion(notes)
print(notes)
```

On a obtenu l'affichage suivant :

```
[3, 7, 8, 9, 12, 14, 17, 18]
```

On s'interroge sur ce qui s'est passé lors de l'exécution de `tri_insertion(notes)`.

**Question B.2** Donner le contenu de la liste notes après le premier passage dans la boucle for.

**Question B.3** Donner le contenu de la liste notes après le troisième passage dans la boucle for.

## Partie C : Tri fusion

L'algorithme de tri fusion suit le principe de « diviser pour régner ».

(1) Si le tableau à trier n'a qu'un élément, il est déjà trié. (2) Sinon, séparer le tableau en deux parties à peu près égales. (3) Trier les deux parties avec l'algorithme de tri fusion. (4) Fusionner les deux tableaux triés en un seul tableau.

source : Wikipedia

**Question C.1** Cet algorithme est-il itératif ou récursif ? Justifier en une phrase.

**Question C.2** Expliquer en trois lignes comment faire pour rassembler dans une main deux tas déjà triés de cartes, la carte en haut d'un tas étant la plus petite de ce même tas ; la deuxième carte d'un tas n'étant visible qu'après avoir retiré la première carte de ce tas.

À la fin du procédé, les cartes en main doivent être triées par ordre croissant. Une fonction fusionner a été implémentée en Python en s'inspirant du procédé de la question précédente. Elle prend quatre arguments : la liste qui est en train d'être triée, l'indice où commence la sous-liste de gauche à fusionner, l'indice où termine cette sous-liste, et l'indice où se termine la sous-liste de droite.

**Question C.3** Voici une implémentation de l'algorithme de tri fusion. Recopier et compléter les lignes 8, 9 et 10 surlignées (uniquement celles-ci).

```
1 from math import floor
2
3 def tri_fusion (liste, i_debut, i_fin):
4     """ trie par fusion la liste en paramètre depuis i_debut jusqu'à i_fin """
5
```

```

6     if i_debut < i_fin:
7         i_partage = floor((i_debut + i_fin) / 2)
8         tri_fusion(liste, i_debut, ..... )
9         tri_fusion(liste, ....., i_fin)
        fusionner(liste, ....., ....., .....)

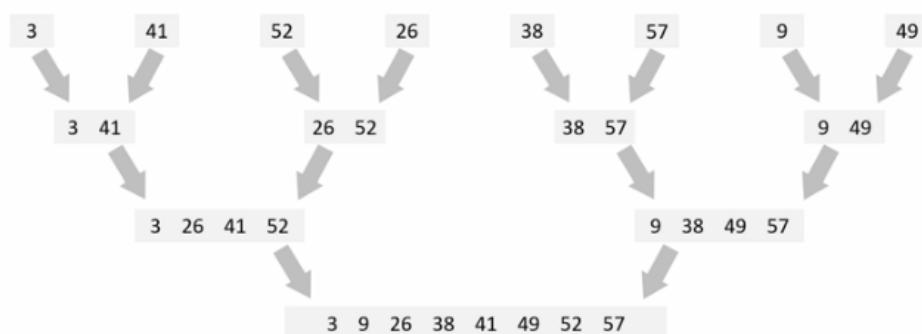
```

Remarque : la fonction floor renvoie la partie entière du nombre passé en paramètre.

**Question C.4** Expliquer le rôle de la première ligne du code de la question 3.

## Partie D : Comparaison du tri par insertion et du tri fusion

Voici une illustration des étapes d'un tri effectué sur la liste [3, 41, 52, 26, 38, 57, 9, 49].



**Question D.1** Quel algorithme a été utilisé : le tri par insertion ou le tri fusion ? Justifier.

**Question D.2** Identifier le tri qui a une complexité, dans le pire des cas, en  $O(n^2)$  et identifier le tri qui a une complexité, dans le pire des cas, en  $O(n \log 2n)$ .

Remarque :  $n$  représente la longueur de la liste à trier.

**Question D.3** Justifier brièvement ces deux complexités.

## Sujet n°3 : FRANCE CANDIDAT LIBRE SUJET 1

Cet exercice traite de manipulation de tableaux, de récursivité et du paradigme « diviser pour régner ».

Dans un tableau Python d'entiers `tab`, on dit que le couple d'indices  $(i, j)$  forme une inversion lorsque  $i < j$  et `tab[i] > tab[j]`. On donne ci-dessous quelques exemples.

- Dans le tableau [1, 5, 3, 7], le couple d'indices (1,2) forme une inversion car  $5 > 3$ . Par contre, le couple (1,3) ne forme pas d'inversion car  $5 < 7$ . Il n'y a qu'une inversion dans ce tableau.
- Il y a trois inversions dans le tableau [1, 6, 2, 7, 3], à savoir les couples d'indices (1, 2), (1, 4) et (3, 4).
- On peut compter six inversions dans le tableau [7, 6, 5, 3] : les couples d'indices (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3) et (2, 3).

On se propose dans cet exercice de déterminer le nombre d'inversions dans un tableau quelconque.

Questions préliminaires

**Question 1** Expliquer pourquoi le couple (1, 3) est une inversion dans le tableau [4, 8, 3, 7].

**Question 2** Justifier que le couple (2, 3) n'en est pas une.

## Partie A : Méthode itérative

Le but de cette partie est d'écrire une fonction itérative `nombre_inversion` qui renvoie le nombre d'inversions dans un tableau. Pour cela, on commence par écrire une fonction `fonction1` qui sera ensuite utilisée pour écrire la fonction `nombre_inversion`.

**Question A.1** On donne la fonction suivante.

```
def fonction1(tab, i):
    nb_elem = len(tab)
    cpt = 0
    for j in range(i+1, nb_elem):
        if tab[j] < tab[i]:
            cpt += 1
    return cpt
```

a. Indiquer ce que renvoie la `fonction1(tab, i)` dans les cas suivants.

- Cas n°1 : `tab = [1, 5, 3, 7]` et `i = 0`.
- Cas n°2 : `tab = [1, 5, 3, 7]` et `i = 1`.
- Cas n°3 : `tab = [1, 5, 2, 6, 4]` et `i = 1`.

b. Expliquer ce que permet de déterminer cette fonction.

**Question A.2** En utilisant la fonction précédente, écrire une fonction `nombre_inversion(tab)` qui prend en argument un tableau et renvoie le nombre d'inversions dans ce tableau. On donne ci-dessous les résultats attendus pour certains appels.

```
>>> nombre_inversions([1, 5, 7])
0
>>> nombre_inversions([1, 6, 2, 7, 3])
3
>>> nombre_inversions([7, 6, 5, 3])
6
```

**Question A.3** Quelle est l'ordre de grandeur de la complexité en temps de l'algorithme obtenu ? Aucune justification n'est attendue.

## Partie B : Méthode récursive

Le but de cette partie est de concevoir une version récursive de la fonction `nombre_inversion`. On définit pour cela des fonctions auxiliaires.

**Question B.1** Donner le nom d'un algorithme de tri ayant une complexité meilleure que quadratique. Dans la suite de cet exercice, on suppose qu'on dispose d'une fonction `tri(tab)` qui prend en argument un tableau et renvoie un tableau contenant les mêmes éléments rangés dans l'ordre croissant.

**Question B.2** Écrire une fonction `moitie_gauche(tab)` qui prend en argument un tableau `tab` et renvoie un nouveau tableau contenant la moitié gauche de `tab`. Si le nombre d'éléments de `tab` est impair, l'élément du centre se trouve dans cette partie gauche. On donne ci-dessous les résultats attendus pour certains appels.

```
>>> moitie_gauche([])
[]
>>> moitie_gauche([4, 8, 3])
[4, 8]
>>> moitie_gauche([4, 8, 3, 7])
[4, 8]
```

Dans la suite, on suppose qu'on dispose de la fonction `moitie_droite(tab)` qui renvoie la moitié droite sans l'élément du milieu.

**Question B.3** On suppose qu'une fonction `nb_inv_tab(tab1, tab2)` a été écrite. Cette fonction renvoie le nombre d'inversions du tableau obtenu en mettant bout à bout les tableaux `tab1` et `tab2`, à condition que `tab1` et `tab2` soient triés dans l'ordre croissant. On donne ci-dessous deux exemples d'appel de cette fonction :

```
>>> nb_inv_tab([3, 7, 9], [2, 10])
3
>>> nb_inv_tab([7, 9, 13], [7, 10, 14])
3
```

[/media/michael/TRAVAIL/2.NSI/siteGithub/TermNSI/docs/diviserregner/TD20\\_Diviser\\_pour\\_Regner\\_Diapo.pdf](/media/michael/TRAVAIL/2.NSI/siteGithub/TermNSI/docs/diviserregner/TD20_Diviser_pour_Regner_Diapo.pdf) En utilisant la fonction `nb_inv_tab` et les questions précédentes, écrire une fonction récursive `nb_inversions_rec(tab)` qui permet de calculer le nombre d'inversions dans un tableau. Cette fonction renverra le même nombre que `nombre_inversions(tab)` de la partie A. On procédera de la façon suivante :

- Séparer le tableau en deux tableaux de tailles égales (à une unité près).
  - Appeler récursivement la fonction `nb_inversions_rec` pour compter le nombre d'inversions dans chacun des deux tableaux.
  - Trier les deux tableaux (on rappelle qu'une fonction de tri est déjà définie).
  - Ajouter au nombre d'inversions précédemment comptées le nombre renvoyé par la fonction `nb_inv_tab` avec pour arguments les deux tableaux triés.
-