ОЦЕНЯВАНЕ ПАРАМЕТРИТЕ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕТО НА ВЕЙБУЛ ОТ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ ДАННИ

I. Кратка теоретична част

Разпределението на Вейбул е едно от най-гъвкавите и широко използваните разпределения в областта на изпитванията на здравината и надеждността в електрониката. Вейбуловото разпределение (ВР) се явява, при определени условия, комбинация от разпределения, най-често използвани в анализите за надеждност. Това разпределение може да бъде намерено с два или три параметъра; наричани ***мащабен параметър*** (η), ***параметър на формата или Вейбулов наклон*** (β) и ***параметър на разположението или минимално време на живот*** (t_0). Съществуват редица методи за оценка на стойностите на тези параметри - графични и аналитични. Графичните методи включват чертане на вероятността и на честотата на отказите на Вейбулова хартия. Тези методи не са много точни, но те са сравнително бързи. Аналитичните методи включват метод на максималното правдоподобие, метод на най-малките квадрати и метод на моментите. Тези методи се считат за по-точни и надеждни в сравнение с графичния метод.

Някои основни характеристики на Вейбуловото разпределение

• То е непрекъснато разпределение

• Три-параметричното Вейбулово разпределение може да бъде сведено до двупараметрично разпределение чрез проста линейна трансформация, като t_0 параметърът се занули.

• В зависимост от стойността на параметъра на формата, Вейбуловото разпределение показва следните свойства показани в Таблица 1:

Таблица 1. Стойности на параметъра на формата и съответна трансформация на Вейбуловото разпределение

Параметър на формата	**Разпределение**	**Интензивност на отказите**
β < 1	Гама	намалява
β = 1	Експоненциално	константа
1 < β < 2	Логаритмично -нормално	нараства
β = 2	Релей	нараства линейно
β = 3,44	Нормално	нараства/намалява

Специфични приложения на Вейбуловото разпределение

• Заема важно място сред разпределенията на живота на електронни изделия, поради факта, че е с добра точност и се вземат под внимание надеждността на всеки един компонент.

• Механизмите на детската смъртност и отказите от износване са най-добре описани от това разпределение.

• Особено полезно в надеждностния анализ, поради своята гъвкавост за създаване на широк спектър от разпределения на живот на различни елементи.

Статистическите свойства на разпределението

Функцията на разпределението на Вейбул най-лесно се запомня, когато е написана като функция на надеждност:

$$R(t) = 1 - F(t) = exp\left[-\left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0}\right)^{\beta}\right]$$

Съответната функция на плътностите на вероятностите е:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta - t_0}\left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0}\right)^{\beta - 1} e^{-\left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0}\right)^{\beta}}$$

А функцията на интензивността на отказите е:

$$\alpha(t) = \frac{\beta}{\eta - t_0}\left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0}\right)^{\beta - 1}$$

Ако t_0 се приеме за нула, което често се прави, говорим за двупараметрично разпределение на Вейбул.

Експериментална оценка на надеждността

Експерименталната оценка на надеждността представлява определяне или контрол на надеждностните показатели по резултати от проведени за целта изпитвания или от наблюдаване поведението и/или процесите на деградация на електронната апаратура в процеса на експлоатация.

Експерименталната оценка съставлява съществена част от необходимите мероприятия по осигуряване на висока надеждност. Тя позволява да се установят истинските стойности на показателите на надеждността и да се обосноват необходимите мероприятия по тяхното повишаване. При провеждане на експериментална оценка на надеждността се използват методите на математическата статистика. Резултатите се получават с определена вероятност или достоверност.

Експерименталната оценка на надеждността има за цел една от следните процедури:

- определяне на фактическите стойности на показателите на надеждността;
- контрол за съответствие на проверяваното изделие спрямо дадено изискване.

Определителната и контролната задача за надеждността се различават съществено. При съпоставими изисквания към точността и достоверността необходимият обем изпитания при контролната процедура може да бъде много по-малък от този при определителната, ако истинската стойност на показателя на надеждността се различава съществено от необходимата. Планирането на контролната задача също се различава от това на определителната.

Фактическата надеждност на изделията съществено зависи от дестабилизиращите фактори на работната среда и от режима на функциониране. При проверка на надеждностните показатели трябва да се отчитат реалните условия на функциониране на изделията. Правилният избор на обектите, от които се събира информация при провеждане на изпитанията, е много важна задача.

II. Графични методи за оценяване параметрите на разпределението на Вейбул

Основната причина за широкото използване на графичните методи се крие в тяхната нагледност, при което лесно се откриват тенденции и аномалии. С оглед на използването на разграфена хартия в практиката се прави така, че когато данните имат разпределение на Вейбул, графиката да бъде права линия.

За двупараметричното разпределение на Вейбул, функцията на надеждност може да се запише по следния начин

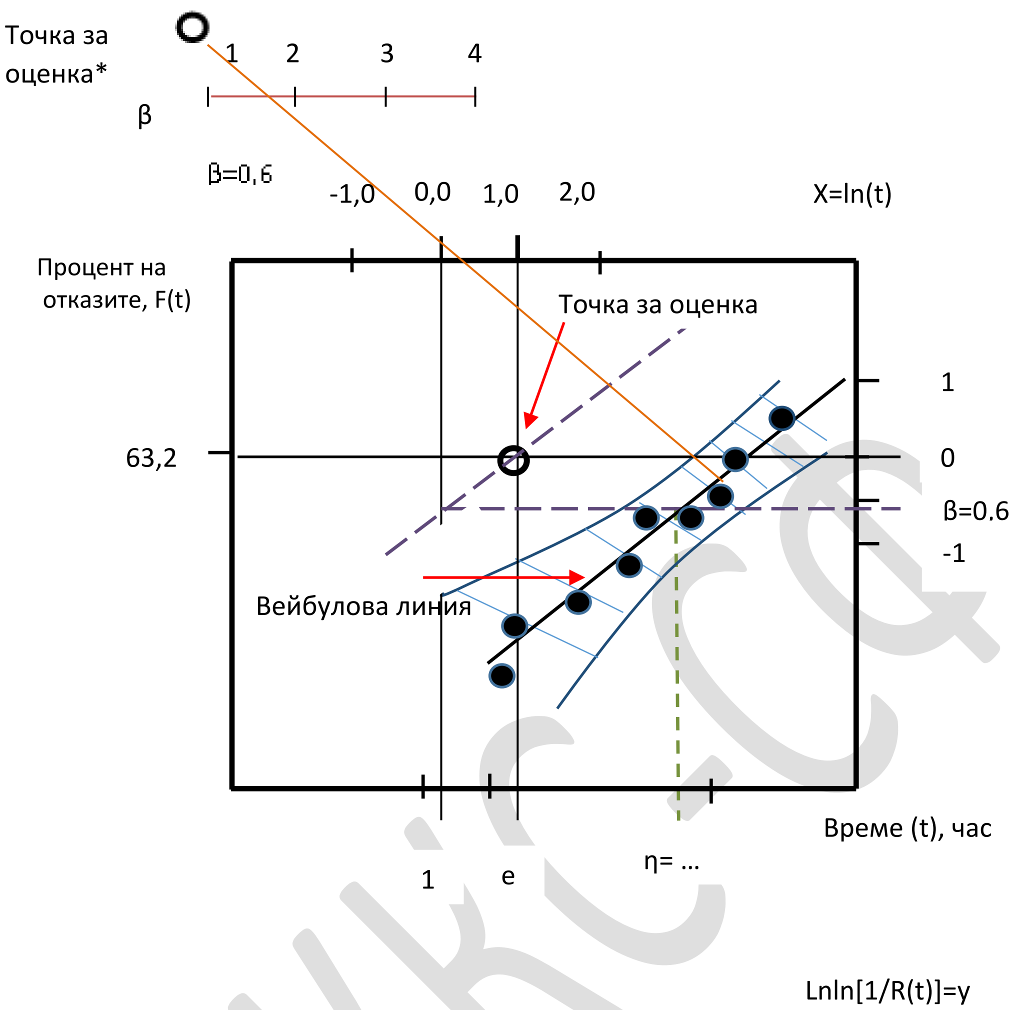
$$R(t) = e^{-(t/\eta)^{\beta}}$$

От нея се извежда

$$ln\left[\frac{1}{R(t)}\right] = \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}$$

$$lnln\left[\frac{1}{R(t)}\right] = \beta ln(t) - \beta ln(\eta)$$

$$y = bx + a$$



Фиг.1. Основен вид на Вейбуловата хартия

На фиг. 1 е показана координатна система с абциса x=ln(t) и y=lnln[1/R(t)]. В лявата част е дадена скала за интегралната функция на разпределение F(t)=1-R(t). В координатната система са нанесени теоретични точки, през които е прекарана права линия - Вейбулова линия. Параметрите на разпределението на Вейбул се намират по следния начин.

1. Линията на Вейбул се премества паралелно, така че да премине през “точката за оценка” (точката за оценка се намира в площтта на графиката). Тази точка има координати (x, y)=(1,0).

1а. Прекарва се перпендикулар от точката за оценка (когато тази точка е извън графиката) към вейбуловата права.

2. Новата линия пресича вертикалната линия, прекарана през x = 0 в точка с ордината y, която съответства на Вейбуловия параметър на формата β. Тази стойност може да се отчете от

скалата в дясната част на графиката, като се смени знакът на отчетената от ординатата стойност.

2а. Новата линия пресича скалата на стойности на параметъра на формата β. Тази стойност може да се отчете от скалата в горната част на графиката.

3. Мащабният параметър η се определя, като от пресечната точка на оригиналната линия на Вейбул с хоризонталната линия с ордината y=0 или с F(t)=1-R(t)=0,632 се прекара вертикална линия до пресичане на оста на времето t, от която се отчита η.

В някои от графиките, точката за оценка е поставена извън графиката и за отчитане на стойността на β е зададена специална скала. В действителност параметърът β може също да се намери, като се изчисли наклонът на линията на Вейбул, и по тази причина, параметърът на формата понякога се нарича Вейбулов наклон. Трябва да се отбележи, че логаритмичната скала за интегралната функция на разпределение създават един вид „разреждане“ на експерименталните данни, така че различни експериментатори могат да направят различни заключения при графичния анализ на данните. Друг по-точен подход е Вейбуловия цифров анализ.

III. Чертаене на Вейбулова графика

Да разгледаме случая, когато разполагате с измерените времена на живот на извадка от 8 импулсни захранвания, които са изследвани за целите на ново въведено топлинно трениране. Изпитването е продължило 5000 часа, при което всички са отказали. За да се нанесат данните върху Вейбулова хартия е необходимо да се изчисли за всяко време до отказ съответната стойност на интегралната функция на разпределение.

Първо данните представени на фиг. 2 се подреждат в последователност на нарастващите стойности.

Захранване№	1	2	3	4	5	6	7	8
Време на живот, h	3200	4700	1800	2400	3900	2800	4400	3600

Фиг. 2.Данни за времето на живот на импулсни захранвания

В извадка с размер n за всеки специалист е примамливо да оцени интегралната функция на разпределение посредством частното *i/n*, където *i* –пореден номер на ранга (*i* = 1, 2, 3…. 8 в примера). Като се разсъждава върху данните обаче, съвсем очевидно е, че въз основа на наблюдението на времето на живот в извадка с размер n = 10 не може да се смята, че 80% от общата съвкупност ще откаже по-рано от най-продължителното измерено време на живот от 4700h. Също не бива да се мисли, че в общата съвкупност няма да се появи отказ и преди най-краткотрайното време на живот, измерено в извадката – 1800h. С оглед да се получат достоверни стойности за времето на живот на цялата съвкупност трябва по някакъв начин да се потърси неизместена оценка за интегралната функция на разпределение. Такава се определя с помощта на ранговите разпределения. Стойностите на средния ранг се основават на непълна бета-функция и са табулирани. Средните рангове не са специфични само за Вейбуловия графичен метод, а могат еднакво добре да се използват и при другите непрекъснати разпределения. В повечето инженерни приложения не е необходимо да има таблици със стойности на средните рангове, за да се начертае Вейбуловата графика. От израза

$$\text{среден ранг}_i \approx \frac{i - 0{,}3}{n + 0{,}4}$$

се изчислява приблизителна стойност на средния ранг, приемлива дори и за извадки с малък обем. За по-големи извадки може да се използва, ако се желае приближението i/(n+1).

Данните за Вейбуловата графика се подреждат в таблица (Фиг.3). В последната колона се изчисляват стойностите на средния ранг, за размер на извадката n = 8.

Захранване №	Пореден ранг, №	Време на живот,h	Среден ранг, %
	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		

Фиг.3. Таблица за вейбулова графика

Времената на живот и съответните стойности на средния ранг се изчертават на Вейбулова хартия. Ако точките са пръснати около права линия (линията на Вейбул), то се прави заключение, че разпределението наистина е на Вейбул и параметрите β и η се отчетат от графиката, както е посочено по-напред. Вейбуловата линия е достатъчно да се нагласи на око. В редки случаи, където се изисква по-добро съгласуване с данните, е необходимо да се използва методът на най-малките квадрати.

IV. Доверителни граници при разпределение на Вейбул

За да бъдем точни, всеки анализ на данни от извадка, трябва да бъде придружен с указание за доверителните граници.

При нанасяне на данни върху Вейбулова хартия могат да се използват непараметрични доверителни граници, които се получават от разпределението на ранга. За целите на изследванията в упражнението ще се използват таблици за 5%- и за 95%-ни рангове. Те могат да се използват, за да се получи 90%-на доверителна област, около начертаната Вейбулова линия.

В таблицата се представят данни, взети от таблици, в зависимост от обема на извадката за 5% и 95% рангови стойности.

Ако Вейбуловата линия не преминава през първата точка на графиката, то тази точка се проектира хоризонтално върху Вейбуловата линия. Нагоре и надолу от проектираната точка се нанасят 95%-ни и 5%-ни рангови стойности. По същия начин се постъпва с всички други нанесени точки и накрая се очертава доверителната област (има форма на тромпет – щрихованата област на фиг. 3)

V. Цифров Вейбулов анализ

При извършване на анализа по цифров път се използва софтуера W_Nata.xls.

<u>Описание</u>

Вместо използването на рангове от таблици, както се прави при графичния подход, при цифровия се работи с метода на максималното правдоподобие. Построяването на вейбуловата права се извършва като се използва метода на най-малките квадрати.

Метод на най-голямо (максимално) правдоподобие

Забележка!

Кратката теоретична част за метода на максималното правдоподобие е показан само за информация. За повече информация линк: https://store.fmi.uni-sofia.bg/fmi/statist/personal/vandev/lectures/stat1/methods.htm#

Този метод е универсален и е получил широко разпространение. Предложен е в 1912 г. от английския статистик Р. Фишер.

Същността на метода се заключава в това, че се съставя т. нар. *функция на правдоподобието*, която изразява максималната вероятност да се получи реализирания в експерименталния резултат (статистическата извадка). За търсените точкови оценки се приемат стойностите на параметрите, които максимизират функцията на правдоподобие.

Нека от генералната съвкупност с плътност на разпределение на вероятностите $f(x, \Theta)$ е направена извадка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с обем n. Предполага се, че x е дискретна случайна величина, чийто закон на разпределение зависи от неизвестния параметър Θ. Например, може да се предполага, че случайната величина x има разпределение на Пуасон

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

където $\theta = \lambda$ е неизвестният параметър, който трябва да се оцени по данни на извадката. Резултатите от извадката може да се разглеждат като реализация на n-мерна случайна величина $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Предполага се, че съставляващите на тази случайна величина са независими. В този случай вероятността за това, че съставляващите ще приемат стойности, равни на наблюдаваните, е равна на

$$L = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) =$$

$$= P(x_1, \Theta_1) P(x_2, \Theta_2) \ldots P(x_n, \Theta_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i, \Theta) \qquad (4.1)$$

При непрекъсната случайна величина функцията на правдоподобието има следния вид:

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, \Theta_1) f(x_2, \Theta_2) \ldots f(x_n, \Theta_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \Theta) \qquad (4.2)$$

Изразът (4.2) определя плътността на разпределение на вероятностите на непрекъснатата случайна величина $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или плътността на разпределение на извадката.

За оценка на неизвестния параметър θ се избира такава функция $\hat{\Theta} = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, която максимизира функцията на правдоподобие. Следователно, като се използват правилата на диференциалното изчисление, се съставя система от m уравнения (m-брой на оценяваните параметри)

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots m) \qquad (4.3)$$

и се избира това решение, което максимизира функцията на правдоподобие.

Тъй като екстремумът на функциите L и ln$L$ се достига при едни и същи значения $\hat{\Theta} = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то с цел опростяване на изчисленията се използва логаритмичната функция. В този случай оценките на най-голямо правдоподобие се намират от системата уравнения

$$\frac{\partial \ln L}{\partial Q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots m). \tag{4.4}$$

ЗАДАЧИ ЗА ИЗПЪЛНЕНИЕ

А. Работа с Вейбулова хартия

1. Начертайте Вейбуловата линия за зададените от преподавателя данни, като работите с таблицата от Фиг.3

2. Определете параметрите на Вейбуловото разпределение и ги запишена в определените позиции на вейбуловата хартия.

3. Формулирайте заключение, дали разпределението на данните за време на живот е Вейбулово

4. Начертайте доверителните области за 95% и за 5% доверителни вероятности, като използвате приложените таблици с данни за рангове с различни доверителни вероятности

5. Определете с доверителна вероятност 95% и с 5%, какъв процент (част) от изделието ви ще откаже за 1 000 ч.

6. Намерете с доверителна вероятност 90% в какви граници 50% от съвкупността ще откаже

7. Определете с доверителна вероятност 90% за какво време ще откажат между 60% от съвкупността

8. Отговорете на въпроса - Полученото вейбулово разпределение трансформира ли се в друго разпределение? Обосновете отговора си.