Лекция 3
Тема: Метод на изкуствения базис. М-задача.

Задачата на линейното оптимиране лесно се записва в стандартно-каноничен вид, като се състави М-задачата и се въведат изкуствени променливи $x_{n+i}\left(i=1,...,m\right)$, които образуват базис.

М-задачата се формулира по следния начин:

(3.9) $$\min(\max)\quad \overline{z}=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j+\left(-\right)M\sum_{i=1}^{m}x_{n+i}$$

(3.10) $$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{n+i}=b_i,\ (b_i\geq 0, i=1,...,m)$$

(3.11) $$x_j\geq 0,\ (j=1,...,n+m).$$

Числото М е достатъчно голямо положително в сравнение с коефициентите $c_j\left(j=1,...,n\right)$.

Забележка. Ако в дадено уравнение от ограниченията има базисна променлива, то в това уравнение не се въвежда изкуствена променлива.

Теорема 3.2. Ако в оптималното решение на М-задачата всички изкуствени променливи са равни на нула, то е намерено и оптималното решение на дадената задача.

Теорема 3.3. Ако в оптималното решение на М-задачата съществува изкуствена променлива с положителна стойност, то дадената задача е противоречива.

Теорема 3.4. Ако М-задачата няма оптимално решение, то и дадената задача няма оптимално решение.

Правила за решаване на задачи

- Дадената задачата се записва в стандартна форма:
  1. всички свободни членове са неотрицателни;
  2. всички ограничения са равенства;
  3. всички неизвестни са неотрицателни.
- Определят се базисните неизвестни и ако липсват се съставя М-задачата.
- Съставя се първата симплекс таблица и се пресмята индексният ред.
- Проверява се критерият за оптималност (3.4) и ако е изпълнен се прави извод за решението на дадената задача по Теореми 3.1, 3.2, 3.3, 3.4.
- Ако критерият за оптималност (3.4) не е изпълнен, то по (3.5) и (3.6) се определя новия базис и ключовото число.
- Симплекс таблицата се преобразува по (3.7) и (3.8). Отново се пресмята индексния ред и се проверява критерият за оптималност.
- Преобразуванията на симплекс таблицата продължават до изпълнение на критерия за оптималност в индексния ред.

3.3. Да се реши задачата на линейното оптимиране:

$$\min z = -x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Решение: Неравенствата в системата ограничителни условия трябва да се преобразуват в равенства. Във второто и третото ограничение добавяме, съответно неотрицателните балансиращи неизвестни x_4 и x_5. Получаваме следната задача:

$$\min z = -x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \qquad = 2 \\ x_1 - 2x_2 \quad + x_4 \quad = 2 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_5 = 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

Този вид на задачата, обаче, не позволява определяне на изходно допустимо базисно решение, без да се нарушат условията на неотрицателност на коефициентите $b_i, i = 1,2,3$. Тъй като липсва базисно неизвестно в първото уравнение, там добавяме изкуствена променлива x_6, като по този начин формулираме М-задача на общата задача на линейното оптимиране, както (3.9)-(3.11).

$$\min \overline{z} = -x_1 + x_2 + Mx_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_6 = 2 \\ x_1 - 2x_2 \quad + x_4 \qquad = 2 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_5 \quad = 5 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,...6, M >> 0.$$

Базисните неизвестни са $(x_6; x_4; x_5)$. Образуваме симплекс таблицата- *табл. 3.5.*

Таблица 3.5.

	$c_Б$	$x_Б$	c_j	-1	1	0	0	0	M
			b_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
I.	M	x_6	2	2	-1	-1	0	0	1
	0	x_4	2	1	-2	0	1	0	0
	0	x_5	5	1	1	0	0	1	0
	$z_1 = 2M$			2M+1	-M-1	-M	0	0	0

II.	-1	x_1	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	-
	0	x_4	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1	0	-
	0	x_5	4	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	-
	$z_2=-1$			0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	-
III.	-1	x_1	2	1	-2	0	1	0	-
	0	x_3	2	0	-3	1	2	0	-
	1	x_5	3	0	$\boxed{3}$	0	-1	1	-
	$z_3=-2$			0	1	0	-1	0	-
IV	-1	x_1	4	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	-
	0	x_3	5	0	0	1	1	1	-
	1	x_2	1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-
	$z_4=-3$			0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-

Попълваме първи индексен ред. Стойността на целевата функция е $z_1=2M$ и не е оптимална, защото числото $\Delta_1=2M+1>0$ нарушава критерия за оптималност (3.5). Променяме базисното решение, като в него влиза x_1. Тъй като изкуствената променлива x_6 напуска базиса, то изчисленията в съответния стълб може да не се извършват.

Решението на задачата следва правилата на симплекс метода за намиране на оптимална стойност на целева функция в случая, когато търсеният екстремум е минимум. Намереното решение е оптимално, както за М-задачата, така и за изходната задача – Теорема 3.2. Оптималното решение се намира на четвъртата стъпка и е $z_{\min}=-3$ при $X_{opt}(4;1;5)$.

3.4. Да се реши задачата:

$$\max z=3x_1+4x_2+2x_3$$

$$\begin{vmatrix} x_1+2x_2+3x_3=12 \\ 2x_1+x_2+x_3=6 \\ 3x_1+3x_2+x_3\le 9 \end{vmatrix}$$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$$

Решение: Преобразуваме последното ограничение в равенство с помощта на балансиращата променлива $x_4 \geq 0$, а в първите две ограничения въвеждаме изкуствените променливи $x_5 \geq 0$ и $x_6 \geq 0$, за да получим базис. Съставяме съответната М-задача, както (3.9) – (3.11) :

$$\max \overline{z} = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - Mx_5 - Mx_6$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad + x_5 \quad = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad + x_6 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,..,6, M >> 0.$$

Началните базисни променливи са $(x_5; x_6; x_4)$. Образуваме симплекс таблицата - *табл. 3.6*.

В *част I.* критерият за оптималност е нарушен. Имайки предвид, че $M >> 0$, то по (3.5), трябва променливата x_3 да влезе в базиса, а по (3.6) напуска базиса x_5. Тъй като x_5 е изкуствена неизвестна, то не се налага да се правят по-нататъшни изчисления в съответния стълб.

Решението на задачата следва правилата на симплекс метода за намиране на оптимална стойност на целева функция в случая, когато търсеният екстремум е максимум.

Критерият за оптималност е в сила на четвърта стъпка. Намереното решение е оптимално както за М-задачата, така и за изходната задача – Теорема 3.2. и то е $z_{\max} = 13$ при $X_{opt}(1;1;3)$.

Таблица 3.6.

	$c_Б$	$x_Б$	c_j	3	4	2	0	-M	-M
			b_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
I.	-M	x_5	12	1	2	3	0	1	0
	-M	x_6	6	2	1	1	0	0	1
	0	x_4	9	3	3	1	1	0	0
	$z_1 = -18M$			-3M-1	-3M-4	-4M-2	0	0	0
II.	2	x_3	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	-	0
	-M	x_6	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	-	1
	0	x_4	5	$\frac{8}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	1	-	0

	$z_2 = 8 - 2M$			$-\frac{7}{3}-\frac{5}{3}M$	$-\frac{8}{3}-\frac{1}{3}M$	0	0	-	0
III	2	x_3	$\frac{18}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0	-	-
	3	x_1	$\frac{6}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	-	-
	0	x_4	$\frac{9}{5}$	0	$\boxed{\frac{9}{5}}$	0	1	-	-
	$z_3 = \frac{54}{5}$			0	$-\frac{11}{5}$	0	0	-	-
IV	2	x_3	3	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	-	-
	3	x_1	1	1	0	0	$-\frac{1}{9}$	-	-
	4	x_2	1	0	1	0	$\frac{5}{9}$	-	-
	$z_4 = 13$			0	0	0	$\frac{11}{9}$	-	-