Числови редове с неотрицателни и с положителни членове

Деф. 1 Символ от вида

(1) $$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

или кратко

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

където $u_k (k \in N)$ са числа, се нарича безкраен ред.

Сумата

(3) $$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

се нарича n-та парциална (частична) сума на реда (1).

Редицата

(4) $$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

се нарича редица от парциалните суми на реда (1)

Деф. 2 Редът (1) се нарича сходящ (конвергентен), когато е сходяща редицата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Числото $S = \lim_{n \to \infty} S_n$ се нарича сума на реда (1) и се пише

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

Редът (1) се нарича разходящ /дивергентен/, когато е разходяща редицата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Th.1 Необходимо условие редът (1) да е сходящ е $|S_n| \leq M$.

Th.2 Необходимо условие редът (1) да е сходящ е $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Th.3 Н.Д.У. редът (1) да е сходящ е за $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, такова че щом $n > N(\varepsilon)$ тогава $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ за $\forall p \in N$

Th.4 Нека са дадени редовете $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, $u_k \geq 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$, $v_k \geq 0$ и за $n > n_0$ е изпълнено $0 \leq u_n \leq v_n$. Тогава

1) ако $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ е сходящ, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ също е сходящ (миноранта на $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$)

2) ако $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ е разходящ, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ също е разходящ (мажоранта на $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$)

<u>Сл.1</u> Нека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\vartheta_n} = \ell \neq 0,\ \vartheta_n \neq 0$, тогава редовете $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\vartheta_k$ имат еднакъв характер

<u>Сл.2</u> Нека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\vartheta_n} = 0,\ \vartheta_n \neq 0$, тогава

1) ако $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\vartheta_k$ е сх. $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ е сх.

2) ако $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ е разх. $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}\vartheta_k$ е разх.

<u>Сл.3</u> Нека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\vartheta_n} = \infty,\ \vartheta_n \neq 0$, тогава

1) ако $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ е сх. $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}\vartheta_k$ е сх.

2) ако $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\vartheta_k$ е разх. $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ е разх.

---

1 Да се изследва относно сходимост реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

<u>Реш</u> Да допуснем, че редът е сходящ. Тогава редицата от парциалните му суми

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

е сходяща. Нейната подредица

$$S_2, S_4, S_6, \ldots, S_{2n}, \ldots$$

трябва също да бъде сходяща и да клони към същата граница, поради което разликата $S_{2n} - S_n$ трябва да клони към нула. 4

Това обаче не е вярно, защото

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots \frac{1}{2n} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Получихме противоречие. Следователно редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ.

---

② Да се изследва относно сходимост реда

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

<u>Реш</u> $S_n = 1 + q + q^2 + + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

1) $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$$

$\Rightarrow$ (1) е сходящ

2) $|q| > 1$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \infty \Rightarrow (1) \text{ е разх.}$$

3) $q=1$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} 1 = n, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

$\Rightarrow$ (1) е разходящ

4) $q=-1$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} = \begin{cases} 1, & n - \text{нечетно} \\ 0, & n - \text{четно} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (1) е разходящ

---

③ Да се изследва относно сходимост реда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$$

Реш.

$$S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

$\Rightarrow$ редът е сходящ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$

4) Да се изследва относно сходимост р...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \quad (k \in \mathbb{R})$$

<u>Реш</u> 1) $k \le 1 \Rightarrow n^k \le n \Rightarrow \frac{1}{n^k} \ge \frac{1}{n}$

Тъй като $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разх., то $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ е разх.

2) $k \ge 2 \Rightarrow n^k \ge n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^k} \le \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \quad (n \ge 2)$

Тъй като $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ е сх., то $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ е сх.

---

5) Да се изследва относно сходимост реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$$

<u>Реш</u> $v_n = \frac{1}{n^2}$, $u_n = \sin\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

Тъй като $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ е сх., то $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$ е сх.

Критерии за сходимост и разходимост на редове с положителни членове

I Критерий на Даламбер.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad u_k > 0$$

1) ако $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1, \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е сх.

2) ако $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е разх.

<u>Правило</u> Ако $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при $l < 1$ редът е сходящ, а при $l > 1$ редът е разходящ.

II Критерий на Коши

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad u_k > 0$$

1) ако $\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1, \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е сх.

2) ако $\sqrt[n]{u_n} \geq 1, \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е разх

<u>Правило</u> Ако $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то при $l < 1$ редът е сходящ, а при $l > 1$ редът е разходящ.

III Критерий на Раабе-Дюамел

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad u_k > 0$$

Ако $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = l$, то при $l > 1$ редът е сходящ, а при $l < 1$ редът е разходящ.

IV Интегрален Критерий на Коши

Нека $f(x)$, $x \geq 1$, удовлетворява условията

1) $f(x)$ е непрекъсната

2) $f(x) \geq 0$

3) $f(x)$ е монотонно намаляваща.

Тогава редът $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграла $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ са едновременно сходящи или разходящи

Да се изследват за сходимост редовете

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

Реш

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ редът е сх. по кр на Даламбер

---

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Реш

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow$ редът е сх. по кр. на Даламбер

---

③ $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \, tg\frac{\pi}{2^n}$

Реш

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\, tg\frac{\pi}{2^{n+1}}}{3^n\, tg\frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} 3\, \frac{tg\frac{\pi}{2^{n+1}}\ \frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}\ 2\, tg\frac{\pi}{2^n}}$$

$= \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ редът е разх. по кр. на Даламбер

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n^2}$

Реш $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{\frac{n}{2}}}{n^2}} = \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} =$

$= \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = \sqrt{2} > 1$

$\Rightarrow$ редът е разх. по кр. на Коши

---

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

Реш $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$

$= \frac{e}{3} < 1 \Rightarrow$ сх. по кр. на Коши

$(-1)!! = 1$

$0!! = 1$

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$

Реш $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)!!\,(2n)!!\,(2n+1)}{(2n+2)!!\,(2n+3)\,(2n-1)!!} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ по кр. на Даламбер редът е неопределен

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2}>1$$

$\Rightarrow$ редът е сх. по кр на Раабе-Дюамел

---

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

Реш $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n)!!\,(2n+3)!!}{(2n+1)!!\,(2n+2)!!}-1\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+3}{2n+2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2}=\frac{1}{2}<1$$

$\Rightarrow$ редът е разх. по кр. на Раабе-Д.

---

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\quad(\alpha\in\mathbb{R}^{+})$

Реш $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}},\ x\in[1,\infty)$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\begin{cases}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^{\infty}=\frac{1}{1-\alpha}\left(\lim\limits_{x\to\infty}x^{1-\alpha}-1\right) & \text{при } \alpha\neq1\\ \left.\ln x\right|_1^{\infty}=\infty & \text{при } \alpha=1\end{cases}$$

1) $0 \le \alpha \le 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \infty \Rightarrow \text{редът е разходящ}$$

2) $\alpha > 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1} \Rightarrow \text{редът е сходящ}$$

---

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n(\ln^4 n + 1)}$

Реш $f(x) = \frac{\ln x}{x(\ln^4 x + 1)}$, $x \ge 1$

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x(\ln^4 x + 1)}\,dx = \int_1^\infty \frac{\ln x}{\ln^4 x + 1}\,d\ln x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{d\ln^2 x}{1 + \ln^4 x} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} \ln^2 x \Big|_1^\infty = \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow$ редът е сходящ