Лекция 7
Тема: Задача за назначенията

Задача за назначенията: Нека за n работни места кандидатстват m броя кандидати, като едно работно място се заема от един кандидат и един кандидат заема само едно работно място. Известно е заплащането c_{ij}, което се получава, ако $i-$тият кандидат заема $j-$тото работно място. Целта е да се заплати минимална обща сума.

Една задача за назначения е зададена, ако е известна платежната матрица

(6.5) $$C_{m\times n}=\left\|\begin{matrix} c_{11}\cdots c_{1j}\cdots c_{1n}\\ \dots\dots\dots\dots\\ c_{i1}\cdots c_{ij}\cdots c_{in}\\ \dots\dots\dots\dots\\ c_{m1}\cdots c_{mj}\cdots c_{mn}\end{matrix}\right\|$$

Въвеждаме биномните променливи $x_{ij}\in\{0,1\},(i=1,...,m,\ j=1,...,n)$ и те означават дали $i-$тият кандидат заема $j-$тото работно място, ако да $x_{ij}=1$, иначе $x_{ij}=0$.

Математическият модел на задачата за назначения е:

(6.6) $$\min\quad F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

(6.7) $$\left|\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\quad (i=1,...,m)\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=1,\quad (j=1,...,n)\end{array}\right.$$

(6.8) $$x_{ij}\in\{0,1\},\ (i=1,...,m;\ j=1,...,n).$$

Първите m уравнения на (6.7) отговарят на условието, че всяко работно място може да бъде да бъде заето от точно един кандидат. Последните n уравнения на (6.7) отговарят на условието, че всеки кандидат трябва да бъде назначен точно на едно работно място.

По същество (6.6) – (6.8), това е модел на класическата транспортна задача (5.1) – (5.3), в която всички наличнсти и потребности са равни на единица $(a_i=b_j=1)$. Методите за решаване на транспортната задача могат да се приложат за задача (6.6) –(6.8), но задължително се получава на всяка стъпка «базисни нули», които затрудняват решаването.

Предвид Теорема 5.1., за да има решение (6.6) – (6.8), трябва да бъде изпълнено условието

(6.9) $$m=n.$$

От (6.9) следва, че платежната матрица (6.5) трябва да е квадратна.

1. Ако $m<n$, то се въвеждат $(n-m)$-броя фиктивни кандидати с нулево заплащане, т.е. матрицата (6.5) се допълва до квадратна с нулеви стълбове.
2. Ако $m>n$, то се въвеждат $(m-n)$-броя фиктивни работни места с нулево заплащане, т.е. матрицата (6.5) се допълва до квадратна с нулеви редове.

Две матрици са *еквивалентни*, ако едната е получена от другата, като към елементите на ред(стълб) се прибави едно и също число.

Унгарски метод за решаване на задачата за назначения

1. За квадратната платежна матрица $C_{n\times n}$ се определя минималното число $\alpha_i = \min\limits_{1\le j\le n}\{c_{ij}\}$ на всеки ред и се съставя еквивалентната ѝ матрица $C^{/}_{n\times n}$, като от елементите на съответния ред се извади това число α_i. Така във всеки ред има поне по една нула.

2. На матрица $C^{/}_{n\times n}$ се определя минималното число $\beta_j = \min\limits_{1\le i\le n}\{c_{ij}\}$ на всеки стълб и се съставя еквивалентната ѝ матрица $C^{//}_{n\times n}$, като от елементите на съответния стълб се извади това число β_j. Така и във всеки стълб има поне по една нула.

3. Определя се минималният брой покриващи линии (прави върху редовете и стълбовете на една матрица, които съдържат всички елементи равни на нула) на матрицата $C^{//}_{n\times n}$.

4. Ако минималният брой на покриващите линии е равен на реда n на матрицата $C_{n\times n}$, то задачата е решена. Оптималните назначения са тези, които отговарят на нулите, избрани по една от всеки ред и всеки стълб.

5. Ако минималният брой на покриващите линии е по-малък от реда на матрицата $C_{n\times n}$, то се избира минималният елемент μ от непокритите елементи и $C^{//}_{n\times n}$ се преобразува както следва: към двойно покритите елементи се прибавя μ, от непокритите елементи се изважда μ и еднократно покритите елементи се запазват. Следва точка **3.**

Правила за решаване на задача за назначенията

- Осигурява се условие (6.9), т. е. платежната матрица е квадратна.
- Спазва се последователността от т.1 до т.5 на унгарския метод.
- Ако се търси максимално заплащане, то унгарският метод се прилага за противоположната платежна матрица, т.е. за $\left(-C_{n\times n}\right)$.

6.17. *(Задача 1.17)* Голяма холдингова компания разкрива три свободни работни места на позиции - директор на отдел, технически сътрудник и началник снабдяване. За интервю са определени трима кандидати – Петров, Стоянова и Николов. По време на интервюто всеки кандидат е попитан каква заплата очаква за всяка от обявените позиции. Резултатите от интервюто (в лв) са представени в *табл.6.20.*

Таблица 6.20.

	Директор на отдел	*Технически сътрудник*	*Началник снабдяване*
Петров	2900	1300	2000
Стоянова	2800	1500	2000
Николов	2500	1700	2100

Предвид тази информация, отдел “Човешки ресурси” трябва да направи такова разпределение на работните места между тримата кандидати, че разходите на холдинга да бъдат минимални.
Да се реши тази задача на линейното оптимиране.
Решение: Платежната матрица е

$$C = \begin{Vmatrix} 2900 & 1300 & 2000 \\ 2800 & 1500 & 2000 \\ 2500 & 1700 & 2100 \end{Vmatrix}.$$

1. Определяме минималното число $\alpha_i = \min\limits_{1 \le j \le 3} \left\{ c_{3j} \right\}$ на всеки ред. Имаме $\alpha_i = \left\{ 1300; 1500; 1700 \right\}$. Съставяме еквивалентната матрица C', като от елементите на съответния ред се извади това число α_i. Получаваме

$$C^{/} = \begin{Vmatrix} 1600 & 0 & 700 \\ 1300 & 0 & 500 \\ 800 & 0 & 400 \end{Vmatrix}.$$

2. На матрицата $C^{/}$ определяме минималното число $\beta_j = \min\limits_{1 \le i \le 3} \left\{ c_{i3} \right\}$ на всеки стълб. $\beta_j = \left\{ 800; 0; 400 \right\}$. Съставяме еквивалентната й матрица $C^{//}$, като от елементите на съответния стълб се извади това число β_j. Имаме

$$C^{//} = \begin{Vmatrix} 800 & 0 & 300 \\ 500 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

3. Определяме минималния брой покриващи линии, които съдържат всички нулеви елементи на редуцираната платежна матрица $C^{//}$. Те са две, което е по-малко от размерността на матрицата C_{3x3}, така че оптималното решение не е намерено.

$$C^{//} = \begin{Vmatrix} 800 & 0 & 300 \\ 500 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Избираме минималното число μ измежду непокритите елементи. $\mu = \min\{800; 300; 500; 100\} = 100$. Изваждаме μ от непокритите, прибавяме го към двойно покритите, а еднократно покритите елементи оставяме без промяна. Получаваме следната матрица

$$C_1^{//} = \begin{Vmatrix} 700 & 0 & 200 \\ 400 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \end{Vmatrix}.$$

5. В новата матрица отново определяме минималният брой линии, които покриват всички нулеви елементи.

$$C_1^{//} = \begin{Vmatrix} 700 & 0 & 200 \\ 400 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \end{Vmatrix}.$$

6. Те са три на брой, колкото е и размерността на платежната матрица, следователно оптималното решение е намерено и то се намира измежду независимите нули на $C_1^{//}$. На първия ред е елемент $\langle 1, 2 \rangle$, на втория - $\langle 2, 3 \rangle$ и на третия - $\langle 3, 1 \rangle$. Окончателно, разпределението на работните места между кандидатите е дадено в *табл.6.21.*

Таблица 6.21.

	Директор на отдел	*Технически сътрудник*	*Началник снабдяване*
Петров		1	
Стоянова			1
Николов	1		

Минималните сумарни месечни разходи, които ще има холдингът са $F_{\min} = 1300 + 2000 + 2500 = 5800 \textit{лв}$.

6.18. Да се реши задачата за назначение на петима кандидати за пет работни места, ако платежната матрица е

$$C = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Отг.: $F_{\min} = 17$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$

6.19. За четири работни места P_1, P_2, P_3 и P_4 кандидатстват петима кандидати K_1, K_2, K_3, K_4 и K_5 с платежна матрица

$$C=\begin{Vmatrix} 17 & 3 & 8 & 2 \\ 3 & 15 & 3 & 4 \\ 8 & 6 & 17 & 2 \\ 4 & 9 & 12 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 16 \end{Vmatrix}.$$

Да се направи такова назначение, че да се осигури минимално заплащане при следните условия:

а) Кандидат №4 не може да заеме работно място №1 и кандидат №3 не може да заеме работно място №3;

б) Задължително да се назначат кандидати №1 и №4.

Решение: За да приложим унгарският метод, трябва да допълним платежната матрица до квадратна. Въвеждаме фиктивно работно място P_5 с нулеви разходи.

$$C=\begin{Vmatrix} 17 & 3 & 8 & 2 & 0 \\ 3 & 15 & 3 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & 17 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & 12 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 16 & 0 \end{Vmatrix}$$

а) Съгласно условието, трябва да се блокират връзките (K_4,P_1) и (K_3,P_3), като на съответните места в платежната матрица поставим разходи M, където $M \gg 0$. Получаваме

$$C=\begin{Vmatrix} 17 & 3 & 8 & 2 & 0 \\ 3 & 15 & 3 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & M & 2 & 0 \\ M & 9 & 12 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 16 & 0 \end{Vmatrix}$$

1. Минималното число на всеки ред е $\alpha_i=\{0;0;0;0;0\}$. Тогава еквивалентната матрица $C'=C$.

2. Минималното число на всеки стълб е $\beta_j=\{3;2;3;2;0\}$. Изваждаме всяка стойност на β_j от съответния стълб и получаваме

$$C^{//}=\begin{Vmatrix} 14 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & M-3 & 0 & 0 \\ M-3 & 7 & 9 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 14 & 0 \end{Vmatrix}.$$

3. Минималния брой покриващи линии, които съдържат всички нулеви елементи на редуцираната платежна матрица $C^{//}$ са четири.

$$C^{//}=\begin{Vmatrix} 14 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & M-3 & 0 & 0 \\ M-3 & 7 & 9 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 14 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Минималното число измежду непокритите елементи е $\mu=1$. Изваждаме го от непокритите, прибавяме го към двойно покритите, а еднократно покритите елементи оставяме без промяна. Получаваме

$$C_1^{//}=\begin{Vmatrix} 13 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & M-4 & 0 & 0 \\ M-4 & 6 & 8 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 15 & 1 \end{Vmatrix}.$$

5. В новата матрица отново определяме минималният брой линии, които покриват всички нулеви елементи.

$$C_1^{//}=\begin{Vmatrix} 13 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & M-4 & 0 & 0 \\ M-4 & 6 & 8 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 15 & 1 \end{Vmatrix}.$$

6. Те са пет на брой, колкото е и размерността на платежната матрица, следователно оптималното решение е намерено и то се намира измежду независимите нули на $C_1^{//}$. Започваме да ги определяме, като започнем от реда с най-малко нулеви елементи. Това е четвърти ред и там имаме нула на място $\langle 4,5\rangle$. В трети ред това е елемент $\langle 3,4\rangle$. В първия ред - елемент $\langle 1,2\rangle$, във втория - $\langle 2,1\rangle$ и на пети - $\langle 5,3\rangle$. Тъй като петото работно място е фиктивно, то не участва в крайния отговор. Окончателно, разпределението на работните места между кандидатите е

$$X_{opt}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Оптималната стойност на разходите се получава, като сумираме разходните норми, които съответстват на единиците от матрицата на разпределението X_{opt} в изходната платежна матрица C. Тогава $F_{\min}=3+3+2+3=11$.

б) За да се назначат задължително кандидати №1 и №4, трябва да се блокира връзката между всеки от тях и фиктивното работно място, за им се осигури реална работна позиция. Блокираме връзките (K_1, P_5) и (K_4, P_5), като на съответните места в платежната матрица поставим разходи M, където $M >> 0$. Получаваме

$$C = \left\| \begin{matrix} 17 & 3 & 8 & 2 & M \\ 3 & 15 & 3 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & 17 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & 12 & 5 & M \\ 7 & 2 & 3 & 16 & 0 \end{matrix} \right\|$$

1. Минималното число на всеки ред е $\alpha_i = \{2;0;0;4;0\}$. Тогава

$$C^{/} = \left\| \begin{matrix} 15 & 1 & 6 & 0 & M-2 \\ 3 & 15 & 3 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & 17 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & M-4 \\ 7 & 2 & 3 & 16 & 0 \end{matrix} \right\|$$

2. Минималното число на всеки стълб е $\beta_j = \{0;1;3;0;0\}$. Имаме

$$C^{//} = \left\| \begin{matrix} 15 & 0 & 3 & 0 & M-2 \\ 3 & 14 & 0 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 14 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & M-4 \\ 7 & 1 & 0 & 16 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

3. Минималния брой покриващи линии, които съдържат всички нулеви елементи на редуцираната платежна матрица $C^{//}$ са четири.

$$C^{//} = \left\| \begin{matrix} 15 & 0 & 3 & 0 & M-2 \\ 3 & 14 & 0 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 14 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & M-4 \\ 7 & 1 & 0 & 16 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

4. Минималното число измежду непокритите елементи е $\mu = 1$. Преобразуваме и получаваме

$$C_1^{//} = \left\| \begin{matrix} 15 & 1 & 4 & 0 & M-1 \\ 2 & 13 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 4 & 14 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & M-3 \\ 6 & 0 & 0 & 15 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

5. В новата матрица отново определяме минималният брой линии, които покриват всички нулеви елементи.

$$C_1^{//} = \begin{Vmatrix} 15 & 1 & 4 & 0 & M-1 \\ 2 & 13 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 4 & 14 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & M-3 \\ 6 & 0 & 0 & 15 & 0 \end{Vmatrix}.$$

6. Те са пет на брой, колкото е и размерността на платежната матрица, следователно оптималното решение е намерено и то се намира измежду независимите нули на $C_1^{//}$. В първия ред - елемент $\langle 1,4 \rangle$, в третия - $\langle 3,5 \rangle$, в четвъртия - $\langle 4,1 \rangle$, във втория - $\langle 2,3 \rangle$ и на петия - $\langle 5,2 \rangle$. Окончателно, разпределението на работните места между кандидатите е

$$X_{opt} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Условието е удовлетворено – кандидат №1 е назначен на работно място P_4, а кандидат №4 – на работно място P_1. Тогава $F_{\min} = 2+3+4+2 = 11$.

6.20. Пет души K_1, K_2, K_3, K_4 и K_5 кандидатстват за три работни места P_1, P_2 и P_3. На проведен тест са получени следните оценки за ефективността на тяхната дейност за всяко от местата:

K_i \ P_j	P_1	P_2	P_3
K_1	6	8	8
K_2	5	7	9
K_3	6	3	6
K_4	2	6	2
K_5	5	2	5

Да се намери такова разпределение на кандидатите, при което общата ефективност е най-голяма.

Решение: Допълваме платежната матрица до квадратна като въведем две фиктивни работни места P_4 и P_5 с нулеви коефициенти на ефективност. Тъй като поставената задача търси максимална стойност на целевата функция, то трябва да работим с матрицата $(-C)$:

$$\left(-C\right)=\begin{Vmatrix} -6 & -8 & -8 & 0 & 0 \\ -5 & -7 & -9 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & -6 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -5 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

1. Минималното число на всеки ред е $\alpha_i=\{-8;-9;-6;-6;-5\}$. Изваждаме числата α_i от съответните редове о получаваме:

$$\left(-C^{/}\right)=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 4 & 2 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 5 \end{Vmatrix}$$

2. Минималното число на всеки стълб е $\beta_j=\{0;0;0;5;5\}$. Имаме

$$\left(-C^{//}\right)=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

3. Минималния брой покриващи линии, които съдържат всички нулеви елементи на редуцираната платежна матрица $\left(-C^{//}\right)$ са четири.

$$\left(-C^{//}\right)=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Минималното число измежду непокритите елементи е $\mu=1$. Преобразуваме и получаваме

$$\left(-C_1^{//}\right)=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

5. В новата матрица отново определяме минималният брой линии, които покриват всички нулеви елементи.

$$\left(-C_1^{//}\right)=\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 2 & 2\\ 3 & 2 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0\end{matrix}\right\|.$$

6. Те са пет на брой, колкото е и размерността на платежната матрица, следователно оптималното решение е намерено и то се намира измежду независимите нули на $\left(-C_1^{//}\right)$. Това са елементи $\langle 1,2\rangle$, $\langle 2,3\rangle$, $\langle 3,1\rangle$, $\langle 4,4\rangle$ и $\langle 5,5\rangle$ (или $\langle 4,5\rangle$ и $\langle 5,4\rangle$). Окончателно

$$X_{opt}=\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\|,\ F_{\max}=8+9+6=23.$$

6.21. Да се намери най рационалното разпределение на пет багера от различен тип между пет обекта, ако са дадени времената, необходими за съответните изкопни работи (*табл.6.22.)*.

Таблица 6.22

O_j / B_i	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
B_1	47	13	71	23	39
B_2	66	33	7	63	63
B_3	85	70	86	20	4
B_4	92	71	17	97	87
B_5	13	26	59	97	45

Отг.: $F_{\min}=90$, $X_{opt}=\left\|\begin{matrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{matrix}\right\|$

6.22. За четири свободни работни места има четирима кандидати. Почасовото заплащане на всеки кандидат за всяко работно място е дадено с платежната матрица

$$C = \begin{Vmatrix} 14 & 5 & 8 & 7 \\ 2 & 12 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \end{Vmatrix}.$$

Да се направи такова назначение, че да се осигури минимално сумарно заплащане.

Отг.: $F_{\min} = 15$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$

6.23. Да се реши *Зад. 6.22*, като се направи назначение, което осигурява максимално сумарно заплащане

Отг.: $F_{\min} = 41$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$

6.24. Има три вида машини, които могат да извършват четири вида работа. Всяка машина може да извърши съответната работа за време c_{ij}, дадено с матрицата

$$C = \begin{Vmatrix} 3 & 5 & 12 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 2 & 6 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Да се направи назначение, което осигурява:
а) минимално сумарно времетраене на работата;
б) четвъртият вид работа задължително да се извърши.

Отг.: а) $F_{\min} = 9$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$;

б) $F_{\min} = 10$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$

6.25. Има три вида машини M_1, M_2 и M_3, които могат да извършват пет вида работа P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5. Всяка машина може да извърши съответната работа за време c_{ij}, дадено с матрицата $C = \begin{Vmatrix} 16 & 10 & 9 & 6 & 5 \\ 13 & 15 & 11 & 14 & 10 \\ 12 & 11 & 10 & 11 & 6 \end{Vmatrix}$.

Да се направи такова назначение, което осигурява минимално времетраене на работата при условие, че:

а) четвъртият вид работа P_4 задължително да се извърши и машина M_1 в момента не може да извършва работи P_2 и P_3;

б) машина M_3 не може да извърши работа P_5.

Отг.: а) $F_{\min} = 23$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

б) $F_{\min} = 26$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$