Лекция 11

Тема: Случайни величини.
Функции на разпределение.
Числови характеристики

Основни понятия и формули

Случайна величина (*случайна променлива*) X е реална променлива, стойностите на която, в резултат на опит, са неизвестни преди опита

(10.1) $X = X(\omega), (\omega \in \Omega)$ или $X : \Omega \to \mathbb{R}$,

т.е. $X(\omega)$ е изображението на пространството от елементарни събития Ω върху множеството на реалните числа.

Дискретната случайна величина приема само краен или изброим брой стойности.

Непрекъсната случайна величина приема всяка реална стойност от интервал.

Случайните величини се характеризират напълно от *функциите на разпределение*

(10.2) $F(x) = p(X < x)$,

т.е. стойността на функцията на разпределение в точката x е равна на вероятността случайната величина X да е по-малка от x.

Дискретната случайна величина се характеризира и с ред на разпределение

X	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
p	p_1	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

(10.3) $x_i < x_{i+1}, (i = 1,...,n-1), \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Функцията на разпределение $F(x)$ за дискретната случайна величина X се пресмята по

(10.4) $F(x) = \sum_{x_i < x} p(X = x_i)$

и тя е стъпаловидна функция, като x_i – са точките на прекъсване от първи род (краен скок) и p_i – са големините на скоковете.

1. Свойства на функцията на разпределение $F(x)$:

1.1. $0 \le F(x) \le 1$;

1.2. $p(a \le X < b) = F(b) - F(a)$;

1.3. $x_i < x_{i+1} \Rightarrow F(x_i) \le F(x_{i+1})$, т.е. $F(x)$ е монотонно ненамаляваща функция;

1.4. $F(x)$ има най-много изброим брой точки на прекъсване от първи род;

1.5. $F(x)$ е непрекъсната отляво;

1.6. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1.$

Плътност на вероятностите (диференциална функция на разпределение) на непрекъсната случайна величина е

(10.5) $$f(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{p(x\le X<x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Графиката на $f(x)$ се нарича *крива на разпределение*.

2. Свойства на плътността на вероятностите $f(x)$:

2.1. $f(x)\ge 0$;

2.2. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$;

2.3. $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = p(a\le X<b)$;

2.4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.

Числовите характеристики на случайните велличини са дадени в *табл. 10.1.*

Таблица 10.1.

Наименование на числовата характеристика	X – дискретна случайна величина с ред на разпределение (10.3)	X – непрекъсната случайна величина с плътност на вероятностите (10.5)
Математическо очакване (първи начален момент) EX	$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
Дисперсия (втори централен момент) DX	$\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i-EX)^2 p_i$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-EX)^2 f(x)dx$
Средно квадратично отклонение (разсейване) σ_X	$\sqrt{DX}$	$\sqrt{DX}$
Мода M_O	$M_O=x_k \Rightarrow \max\limits_{1\le i\le n}\{p_i\}=p_k$	$f(M_O)=\max f(x)$
Медиана M_D	$p(X<M_D)=p(X\ge M_D)$	$p(X<M_D)=\frac{1}{2}$

3. *Свойства на математическото очакване* EX.

3.1. $EC=C$, където C е константна случайна величина;

3.2. $E(C.X)=C.EX$;

3.3. $E(X+Y)=EX+EY$;

3.4. $E(X.Y)=EX.EY$, където X и Y са независими случайни величини

4. *Свойства на дисперсията* DX .
4.1. $DC=0$, където C е константна случайна величина;
4.2. $D(C.X)=C^2.DX$;
4.3. $DX=EX^2-(EX)^2$;
4.4. $D(X+Y)=DX+DY$, където X и Y са независими случайни величини.

Правила за решаване на задачи

- Определят се законите на разпределение по (10.3), (10.4) и (10.5).
- Използват свойствата за $F(x)$ и $f(x)$.
- Пресмятат се основните числови характеристики от *табл.10.2*.
- Използват се свойствата на EX и DX .
- Други числови характеристики.

1. *Асиметрия* (мярка за симетричност на $f(x)$)

(10.6) $$A_X=\frac{E(X-EX)^3}{\sigma_X^3},$$

която характеризира степента на несиметричност на кривата $y=f(x)$ относно правата $x=EX$. Ако симетрична $y=f(x)$, то $A_x=0$ и обратно. Ако $A_X>0(A_X<0)$, то кривата е «по-разтегната» надясно (наляво) от правата $x=EX$.

2. *Ексцес*

(10.7) $$\varepsilon_X=\frac{E(X-EX)^4}{\sigma_X^4}-3,$$

който определя вида на кривата $y=f(x)$ в точката EX . Ако $\varepsilon_X>0(\varepsilon_X<0)$, то $y=f(x)$е по-остра (по-плоска) изпъкналост.

3. Коефициент *на вариация*

(10.8) $$\nu=\frac{\sigma_X}{EX},\quad EX\neq 0.$$

Задачи и въпроси

10.1. Дискретната случайна величина X е зададена с разпределение, показано в *табл.10.2*. Да се намери функцията на разпределение $F(x)$ и да се начертае графиката ѝ.

Таблица 10.2.

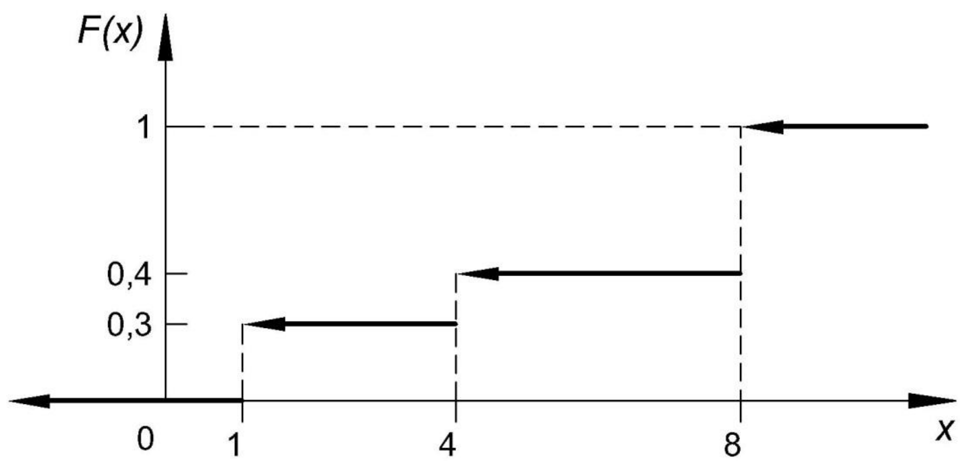
X	1	4	8

p_i	0,3	0,1	0,6

Решение: От (10.4) следва, че ако $x \le 1$, то $F(x) = \sum_{x \le 1} p_i = 0$. При $1 < x \le 4$ имаме $F(x) = \sum_{1 < x \le 4} p_i = 0,3$. Ако $4 < x \le 8$, то $F(x) = \sum_{4 < x \le 8} p_i = 0,3 + 0,1 = 0,4$. При $x > 8$ имаме $F(x) = \sum_{x > 8} p_i = 0,3 + 0,1 + 0,6 = 1$. Окончателно за функцията на разпределение $F(x)$ получаваме

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1; \\ 0,3, & \text{при } 1 < x \le 4; \\ 0,4, & \text{при } 4 < x \le 8; \\ 1, & \text{при } x > 8. \end{cases}$$

Графиката на $F(x)$ има вида:



Фиг.10.1.

10.2. Да се намери математическото очакване на сумата от числата на точките, които се падат на горната страна при хвърлянето на два зара.

Решение: Разглеждаме зар X и зар Y. Редът на разпределение на двата зара е показан съответно в *табл.10.3* и *табл.10.4*.

Таблица 10.3.

Зар X	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Таблица 10.4.

Зар Y	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тъй като заровете X и Y са независими, то от 3.3. следва че $E(X+Y) = EX + EY$.

$EX = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$.

Аналогично $EY = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$, откъдето получаваме, че $E(X+Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$.

10.3. Независимите дискретни случайни величини X и Y имат закони на разпределение, показани съответно в *табл.10.5* и *табл.10.6*.

Таблица 10.5.

X	-1	0	3
p_i	$0,2$	$0,1$	$0,7$

Таблица 10.6.

Y	5	2
p_i	$0,4$	$0,6$

Да се намерят:

а) EX;

б) EY;

в) $E(XY)$.

Решение: а) $EX = -1.0,2 + 0.0,1 + 3.0,7 = 1,9$;

б) $EY = 5.0,4 + 2.0,6 = 3,2$;

в) Тъй като по условие X и Y са независими случайни величини, то по (3.4) получаваме $E(XY) = EX.EY = 1,9.3.2 = 6,08$.

10.4. Да се намери дисперсията DX и средно квадратичното отклонение σ_X на дискретната случайна величина X, която се зададена със закон на разпределние, показан в *табл.10.7*.

Таблица 10.7.

X	2	4	6
p_i	$0,4$	$0,1$	$0,5$

Решение: Първо трябва да намерим математическото очакване на величините X. Имаме $EX = 2.0,4 + 4.0,1 + 6.0,5 = 4,2$. Ще намерим дисперсията DX по два начина:

I начин: Използваме формулата $DX = \sum_{i=1}^{3} (x_i - EX)^2 p_i$ от *табл.10.1*.

Последователно пресмятаме

$(x_1 - EX)^2 = (2 - 4,2)^2 = (-2,2)^2 = 4,84$,

$(x_2 - EX)^2 = (4 - 4,2)^2 = (-0,2)^2 = 0,04$,

$(x_3 - EX)^2 = (6 - 4,2)^2 = (1,8)^2 = 3,24$.

Записваме резултатите в *табл.10.8*.

Таблица 10.8.

$(x_i - EX)^2$	$4,84$	$0,04$	$3,24$
p_i	$0,4$	$0,1$	$0,5$

Тогава за дисперсията получаваме

$DX = 4,84.0,4 + 0,04.0,1 + 3,24.0,5 = 1,936 + 0,004 + 1,62 = 3,56$.

II начин: Използваме формула (4.3). Съставяме нова таблица - *табл.10.9*.

Таблица 10.9.

X	2	4	6
X^2	4	16	36
p_i	$0,4$	$0,1$	$0,5$

Пресмятаме $EX^2 = 4.0,4+16.0,1+36.0,5 = 1,6+1,6+18 = 21,2$. Тогава

$DX = EX^2 - (EX)^2 = 21,2-(4,2)^2 = 21,2-17,64 = 3,56$.

Оттук за средно квадратичното отклонение σ_X получаваме $\sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{3,56} \approx 1,8868$.

10.5. Кое число трябва да се добави към множеството от данни: 14, 15, 25, 11, 17, 20 така, че медианата на новополученото множество данни да е същата?

Отг. 16.

10.6. Кое число трябва да се добави към извадката 13, 8, 6, 20, 25, 13, 20 така, че новата извадка да има единствена мода, равна на медианата?

Отг. 13.

10.7 Непрекъснатата случайна величина X е зададена с функция на разпределение

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<a; \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}, & \text{при } -a\le x<a; \\ 1, & \text{при } x\ge a \end{cases}.$$

Да се определи:

а) $p\left(-\frac{a}{2}\le x<\frac{a}{2}\right)$;

б) плътността на вероятностите $f(x)$.

Решение: а) От формули 2.2 и 2.3 получаваме

$$p\left(-\frac{a}{2}\le x<\frac{a}{2}\right)=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = F\left(\frac{a}{2}\right)-F\left(-\frac{a}{2}\right)=$$

$$=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{a}.\frac{a}{2}\right)\right]-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{a}.\left(-\frac{a}{2}\right)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)-\left(-\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}.\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}$$

б) От (10.5) имаме, че $f\left(x\right)=F'\left(x\right)$. Тогава, ако $x<a$ имаме $f\left(x\right)=0'=0$. За всяко x, което е в интервала $-a\le x<a$ получаваме следната плътност на вероятностите

$f\left(x\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{\pi}.\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}.\frac{1}{a}=\frac{1}{a\pi}.\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}$. Ако $x\ge a$, то $f\left(x\right)=1'=0$. Окончателно

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\, x<a;\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & при -a\le x<a;\\ 0, & при\, x\ge a\end{cases}$$

10.8. За непрекъснатата случайна величина X с плътност на вероятностите $f(x)=\begin{cases}0, & при\, x<0;\\ \dfrac{1}{a}\sin x, & при\, 0\le x<\pi\\ 0, & при\, x\ge\pi\end{cases}$. Да се намерят:

а) коефициентът a;
б) функцията на разпределение $F(x)$;
в) $p\left(0\le x<\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение: а) От (2.4) следва, че $\int\limits_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int\limits_{0}^{\pi}f(x)dx+\int\limits_{\pi}^{\infty}f(x)dx=1$. Тогава получаваме $\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{a}\sin xdx+\int\limits_{\pi}^{\infty}0dx=1$. Следователно $\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{\pi}\sin xdx=1$, т.е. $-\frac{1}{a}\cos x\Big|_0^{\pi}=1$, откъдето $-\frac{1}{a}\left(\cos\pi-\cos 0\right)=1$ или $-\frac{1}{a}\left(-1-1\right)=1$. От последното равенство за коефициентът a получаваме $a=2$.

б) От (2.2) имаме

$F\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{x}f\left(x\right)dx=\int\limits_{0}^{x}\frac{1}{a}\sin xdx=\int\limits_{0}^{x}\frac{1}{2}\sin xdx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}\sin xdx=\frac{1}{2}\left(-\cos x\right)\Big|_0^x=-\frac{1}{2}\left(\cos x-1\right)$.

в) От (1.2) следва $p\left(0\le X<\frac{\pi}{4}\right)=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F\left(0\right)=$

$=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-1\right)+\frac{1}{2}\left(\cos 0-1\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)+\frac{1}{2}\left(1-1\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

10.9. За непрекъснатата случайна величина X с плътност на вероятностите $f(x)=A.e^{-|x|}$ да се определят:

а) коефициентът A;

б) математическото очакване EX;

в) дисперсията DX;

г) средно квадратичното отклонение σ_X;

д) коефициентът на асиметрия A_x;

е) ексцесът ε_X;

ж) коефициентът на вариация v.

Решение: Знаем, че $|x|=\begin{cases}-x, & при\, x<0\\ x, & при\, x\geq 0\end{cases}$.

а) От (2.4) следва, че $\int\limits_{-\infty}^{\infty} A.e^{-|x|}dx=1$. Тогава $\int\limits_{-\infty}^{0} A.e^{-(-x)}dx+\int\limits_{0}^{\infty} A.e^{-x}=1$. Получаваме, че $A.\left(e^{x}\Big|_{-\infty}^{0}-e^{-x}\Big|_{0}^{\infty}\right)=1$ или $A.(1-0-0+1)=1$, т.е $A=\frac{1}{2}$.

б) От *табл.10.1* следва, че

$$EX=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x.\frac{1}{2}.e^{-|x|}dx=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} x.e^{-(-x)}dx+\int\limits_{0}^{\infty} x.e^{-x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon_1\to-\infty}\int\limits_{\varepsilon_1}^{0} xde^{x}-\lim_{\varepsilon_2\to\infty}\int\limits_{0}^{\varepsilon_2} xde^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon_1\to-\infty} xe^{x}\Big|_{\varepsilon_1}^{0}-\lim_{\varepsilon_1\to-\infty} e^{x}\Big|_{\varepsilon_1}^{0}\Bigg|-\lim_{\varepsilon_2\to\infty} xe^{-x}\Big|_{0}^{\varepsilon_2}-\lim_{\varepsilon_2\to\infty} e^{-x}\Big|_{0}^{\varepsilon_2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(-1+1)=0.$$

в) От *табл.10.1* следва, че

$$DX=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2.e^{-|x|}dx=\frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon_1\to-\infty}\int\limits_{\varepsilon_1}^{0} x^2.e^{x}dx+\lim_{\varepsilon_2\to\infty}\int\limits_{0}^{\varepsilon_2} x^2.e^{-x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon_1\to-\infty}\int\limits_{\varepsilon_1}^{0} x^2de^{x}-\lim_{\varepsilon_2\to\infty}\int\limits_{0}^{\varepsilon_2} x^2de^{-x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon_1\to-\infty} x^2e^{x}\Big|_{\varepsilon_1}^{0}-\lim_{\varepsilon_1\to-\infty}\int\limits_{\varepsilon_1}^{0} e^{x}dx^2-\lim_{\varepsilon_2\to\infty} x^2e^{-x}\Big|_{0}^{\varepsilon_2}+\lim_{\varepsilon_2\to\infty}\int\limits_{0}^{\varepsilon_2} e^{-x}dx^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-2\lim_{\varepsilon_1\to-\infty}\int\limits_{\varepsilon_1}^{0} xde^{x}-2\lim_{\varepsilon_2\to\infty}\int\limits_{0}^{\varepsilon_2} xde^{-x}\right)=$$

$$=-\left(\lim_{\varepsilon_1\to-\infty} xe^{x}\Big|_{\varepsilon_1}^{0}-\lim_{\varepsilon_1\to-\infty}\int\limits_{\varepsilon_1}^{0} e^{x}dx-\lim_{\varepsilon_2\to\infty} xe^{-x}\Big|_{0}^{\varepsilon_2}+\lim_{\varepsilon_2\to\infty}\int\limits_{0}^{\varepsilon_2} e^{-x}dx\right)=$$

$$=-\left(-\lim_{\varepsilon_1\to-\infty} e^{x}\Big|_{\varepsilon_1}^{0}-\lim_{\varepsilon_2\to\infty} e^{-x}\Big|_{0}^{\varepsilon_2}\right)=1+1=2.$$

г) Средно квадратичното отклонение е $\sigma_X=\sqrt{DX}=\sqrt{2}$.

д) От (10.6) за коефициентът на асиметрия имаме $A_X=\dfrac{E\left(X-EX\right)^3}{\sigma_X^3}$. Първо пресмятаме $E\left(X-EX\right)^3=E\left(X\right)^3=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^3 f(x)dx=\dfrac{1}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^3e^{-\lfloor x\rfloor}dx\right)=0$, защото подинтегралната функция е нечетна, разглеждана в симетричен на нулата интервал.

е) От (10.7) следва $\varepsilon_X=\dfrac{E\left(X-EX\right)^4}{\sigma_X^4}-3$. Пресмятаме $E\left(X-EX\right)^4=E\left(X\right)^4=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^4.e^{-|x|}dx$. Тъй като подинтегралната функция е четна функция, която се интегрира в симетричен на нулата интервал, то получения интеграл е равен на

$$2\int\limits_0^{\infty}x^4.\frac{1}{2}.e^{-x}dx=-\lim_{\varepsilon\to\infty}e^{-x}x^4\Big|_0^{\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to\infty}\int\limits_0^{\varepsilon}e^{-x}dx^4=4\lim_{\varepsilon\to\infty}\int\limits_0^{\varepsilon}x^3e^{-x}dx=-4\lim_{\varepsilon\to\infty}\int\limits_0^{\varepsilon}x^3de^{-x}=$$

$$=-4\left(\lim_{\varepsilon\to\infty}x^3\,e^{-x}\Big|_0^{\varepsilon}-\lim_{\varepsilon\to\infty}\int\limits_0^{\varepsilon}e^{-x}.3x^2dx\right)=-12\lim_{\varepsilon\to\infty}\int\limits_0^{\varepsilon}x^2de^{-x}=$$

$$=-12\left(\lim_{\varepsilon\to\infty}x^2\,e^{-x}\Big|_0^{\varepsilon}-\lim_{\varepsilon\to\infty}\int\limits_0^{\varepsilon}e^{-x}.2xdx\right)=-24\lim_{\varepsilon\to\infty}\int\limits_0^{\varepsilon}xde^{-x}=-24\left(\lim_{\varepsilon\to\infty}xe^{-x}\Big|_0^{\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to\infty}e^{-x}\Big|_0^{\varepsilon}\right)=24.$$

Тогава за ексцеса получаваме $\varepsilon_X=\dfrac{24}{\left(\sqrt{2}\right)^4}-3=\dfrac{24}{4}-3=3$.

ж) От (10.8) следва, че коефициентът на вариация не се пресмята.

10.10. Да се намери законът на разпределение на дискретна случайна величина X, която може да приема само две стойности x_1 с вероятност $p_1=0,4$ и x_2, като $x_1<x_2$, ако са известни математическото очакване $EX=3,2$ и дисперсията $DX=0,96$.

10.11. Случайната величина X има следното разпределение:

Да се

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	1/25	2/25	3/25	4/25	5/25	4/25	3/25	2/25	1/25

намери функцията на разпределение $F(x)$ на X и да се начертае графиката ѝ.

10.12. Случайната величина X има плътност на вероятностите

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-6, & x\in[2;4],\\ 0, & x\notin[2;4].\end{cases}$$

Да се намерят EX, M_0, M_D на случайната величина X.

Отг. $EX=M_o=M_D=3$

10.13. Случайната величина X има плътност на вероятностите

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}\sin 3x, & x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right],\\ 0, & x\notin\left[0;\frac{\pi}{3}\right].\end{cases}$$

Да се намери вероятността случайната величина X да приема стойности от интервала $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)$.

Отг. $\frac{\sqrt{2}}{9}$

10.14. Дадена е плътността на вероятностите $f(x)$ за случайната величина X, определена с помощта на равенствата

$$f(x)=\begin{cases}a\sin x, & \text{при } 0\le x\le\pi;\\ 0, & \text{при } x<0 \text{ или } x>\pi.\end{cases}$$

Да се пресметнат:

а) коефициентът a;

б) функцията на разпределение $F(x)$ за случайната величина X. Да се начертаят графиките на $f(x)$ и $F(x)$;

в) вероятността случайната величина X да попадане в интервала $\left[0;\frac{\pi}{4}\right)$, т.е. $p\left(0\le X<\frac{\pi}{4}\right)$;

г) математическото очакване EX, дисперсията DX и медианата M_D.

Отг. а) $a=\frac{1}{2}$; б) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0\le x\le\pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$;

в) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $EX=\frac{\pi}{2}, DX=\frac{\pi^2}{4}-2, M_D=\frac{\pi}{2}$.

10.15. Плътността на вероятностите $f(x)$ за случайната величина X е

$$f(x)=\begin{cases} a\cos^2 x, & при\,|x|\le \pi/2 \\ 0, & при\,|x|>\pi/2. \end{cases}$$

Да се пресметнат:

а) коефициентът a;

б) вероятността случайната величина X да попадане в интервала $\left[\frac{\pi}{4};\infty\right)$, т.е. $p\left(X\ge\frac{\pi}{4}\right)$.

10.16. Случайната величина X има функция на разпределение

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при\, x\le 2 \\ 0,5x-1, & при\, 2<x\le 4 \\ 1, & при\, x>4 \end{cases}$$

Да се намери вероятността X да е:

а) по-малко от 0,2, $p(X<0,2)$;

б) по-малко от 3, $p(X<3)$;

в) не по-малко от 5, $p(X\ge 5)$.

Отг. а) 0; б) 0,5; в) 0

10.17. Да се определят константите a и b така, че функцията $F(x)=a+b.arctg\frac{x}{2}$ да е функция на разпределение на случайната величина X, приемаща стойности в интервала $(-\infty;\infty)$.

Отг. $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{\pi}$

10.18. Случайната величина X има функция на разпределение

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{2}.$$

Да се намери възможната стойност x_1 на случайната величина X при условие, че X приема с вероятност $\frac{1}{4}$ да попадне в интервала $(x_1;\infty)$.

Отг. $x_1=2$

10.19. Случайната величина X има плътност на вероятностите, зададена с формулата на Коши

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2}.$$

Да се пресметнат:
а) коефициентът a;
б) функцията на разпределение $F(x)$ за случайната величина X;
в) вероятността случайната величина X да попадане в интервала $\left(\sqrt{3};\infty\right)$, т.е. $p\left(X>\sqrt{3}\right)$;
г) да се намери вероятността $p(0\le X<2)$;
д) EX, M_o, M_D.

Отг. а) $\frac{1}{\pi}$; б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctgx$; в) $\frac{1}{6}$
г) $\frac{1}{4}$; д) $EX=M_o=M_D=0$

10.20. Плътността на вероятностите на случайната величина X е

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, & при\ \ 0\le x\le 2 \\ 0, & при\ \ 0<x\ \ или\ \ x>2. \end{cases}$$

Да се определи стойността на a и вероятността за това, че $\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{4}$.

10.21. Да се докаже свойство 4.2. $\left(DCX=C^2DX\right)$.

10.22. Да се докаже свойство 4.3. $\left(DX=EX^2-(EX)^2\right)$ при условие, че случайната величина X е непрекъсната.