(29) Интегриране на рационални функции

<u>Деф.</u>1 Израз от вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

където $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми, се нарича рационална функция на променливата x.

<u>Деф.</u>2 Рационалната функция

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

се нарича правилна, ако $\deg P(x) < \deg Q(x)$.

Теорема 1 Нека

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

е правилна рационална функция, такава че

$$Q(x) = (x-a)^k \dots (x-b)^l (x^2+px+q)^m \dots (x^2+rx+s)^n$$

$a, \dots, b, p, q, \dots, r, s \in \mathbb{R}$, $p^2-4q<0, \dots, r^2-4s<0$

Тогава

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \dots +$$

$$+ \frac{B_1}{x-b} + \dots + \frac{B_l}{(x-b)^l} +$$

$$+ \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \dots + \frac{C_mx+D_m}{(x^2+px+q)^m} + \dots$$

$$+ \frac{E_1x+F_1}{x^2+rx+s} + \dots + \frac{E_nx+F_n}{(x^2+rx+s)^n}$$

①

$$I = \int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}dx$$

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$x = (A+B)x^2 + (B+C)x + A + C$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=1 \\ A+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2}\int\left(-\frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x + C$$