Лекция 2
Тема: Симплекс метод за решаване на задачи от линейното оптимиране.

Всяка точка от допустимото множество на задачата на линейното оптимиране се нарича *допустимо решение* на задачата.

Допустимо решение, за което целевата функция приема максимума (минимума) си се нарича *оптимално решение* на задачата.

Нека за системата (*), която има *n* неизвестни и *m* уравнения е изпълнено $rangA = m, (m < n)$ от (1.11), тогава неизвестните се разделят на две групи: базисни неизвестни, които са m броя и свободни неизвестни (параметри) - $(n-m)$ броя.

Базисно решение на система (*) е това, в което свободните променливи са равни на нула.

Оптимално базисно решение на задачата на линейното оптимиране (ЗЛО)

$$\min(\max) \quad z = c_1x_1 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n$$

(*)
$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + ... a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

(**)
$$x_1 \geq 0, ..., x_j \geq 0, ..., x_n \geq 0,$$

се нарича всяко неотрицателно базисно решение, за което целевата функция приема максимума (минимума) си.

Една задача на линейното оптимиране е решена, тогава когато е намерено единственото оптимално базисно решение или са намерени всички оптимални базисни решения или се докаже, че съответната задача няма оптимално решение.

Симплекс методът е универсален и краен метод за решаване на задачи от линейното оптимиране. Той съдържа три основни етапи.

Етап 1. Намиране на начално допустимо базисно решение.

Етап 2. Проверка критерий за оптималност.

Етап 3. Преход към друго базисно решение.

За *намиране на начално допустимо базисно решение* е необходимо стандартният вид на задачата на линейното оптимиране да се запише в *стандартно-каноничен вид*, който е

(2.1)
$$\min(\max) \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

(2.2)
$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij}x_j = \beta_i, \ (\beta_i \geq 0, i = 1, ..., m)$$

(2.3)
$$x_j \geq 0, \ (j = 1, ..., n).$$

Известен метод за привеждане на система (*) във вид (2.2) е методът на Гаус-Жордан.

Началното базисна решение е $X_{1\times n}{}^{t} = \left\| \beta_1 ... \beta_i ... \beta_m 0...0 \right\|^{t}$.

Критерий за оптималност: Допустимото базисно решение е оптимално, ако всички числа

(2.4) $$\Delta_j = \begin{cases} 0, & (j = 1, 2, ..., m) \\ \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij} - c_j, & (j = m+1, ..., n) \end{cases}$$

са неотрицателни при $\max z$ и са неположителни при $\min z$.

За по-лесно пресмятане и получаване на резултатите, при прилагане на симплекс метода, се съставя симплекс таблица - *табл.2.1*.

Таблица 2.1.

		c_j	$c_1 \;...\; c_l \;...\; c_m \quad c_{m+1} \;...\; c_k \;...\; c_n$
$c_б$	$x_б$	x_j \ b_i	$x_1 \;...\; x_l \;...\; x_m \quad x_{m+1} \;...\; x_k \;...\; x_n$
c_1	x_1	β_1	$1 \cdots 0 \cdots 0 \quad \alpha_{1m+1} \cdots \alpha_{1k} ... \alpha_{1n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_l	x_l	β_l	$0 \cdots 1 \cdots 0 \quad \alpha_{l\,m+1} \cdots \alpha_{l\,k} ... \alpha_{l\,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	β_m	$0 \cdots 0 \cdots 1 \quad \alpha_{1m+1} \cdots \alpha_{1k} ... \alpha_{1n}$
Индексен ред		$z_0 = \sum_{l=1}^{m} c_l x_l$	$0 ..... 0 .... 0 \quad \Delta_{m+1} \;...\; \Delta_k \;...\; \Delta_n$

Когато критерият за оптималност е нарушен, т.е. съществува Δ_k <0 (Δ_k >0) при максимум z (при минимум z), тогава преминаваме към друго базисно решение, като една от свободните неизвестни заема мястото на една от базисните неизвестни.

Критерий за влизане в базиса: Променливата x_k влиза в базиса, ако е изпълнено

(2.5) Δ_k <0 за $\max z$ или Δ_k >0 $\min z$.

Стълбът над Δ_k (*табл.3.1*) се нарича *ключов, главен, разрешаващ*.

Критерий за излизане от базиса: Излиза от базиса тази променлива x_l, за която е изпълнено

(2.6) $$\theta = \min \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ik}} \right\}, \alpha_{ik} > 0.$$

Редът на променливата x_l се нарича *ключов, главен, разрешаващ.*

Числото, което стои на ключовия ред и ключовия стълб $\alpha_{lk} > 0$ се нарича *ключово число*.

Симплекс таблицата се преобразува, като най-напред ключовият ред се дели на ключовото число и се получават елементите

(2.7) $$\beta_l^* = \frac{\beta_l}{\alpha_{lk}}, \quad \alpha_{lj}^* = \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}}, \left(j = 1, \ldots, n \right).$$

След това останалите редове $\left(i \neq l \right)$ се преобразуват така, че елементите над и под ключовото число в ключовия стълб да са равни на нула или по

(2.8) $$\beta_i^* = \beta_i - \frac{\beta_l}{\alpha_{lk}} \alpha_{ik}, \quad \alpha_{ij}^* = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}} \alpha_{ik}, \left(j = 1, \ldots n, i = 1, \ldots, m, i \neq l \right).$$

Преобразованията са краен брой и са най-много $C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Теорема 3.1. Ако в ключовия стълб всички елементи са неположителни $\left(\alpha_{ik} \leq 0 \right)$, то целевата функция на дадената задача е неограничена, т.е. задачата на линейното оптимиране няма оптимално решение.

3.1. Фирма произвежда изделията A, B и C. Налице са 600 единици електроенергия, 480 единици стомана и 750 единици алуминий. Разходните норми и печалбата от единица изделие са дадени в *табл.3.2.*

Таблица 3.2

	A	B	C
Ел.енергия	2	3	3
Стомана	3	2	1
Алуминий	4	1	2
Печалба	9	8	4

Да се намери такъв производствен план, който реализира най-голяма печалба.

Решение: Означаваме с x_1, x_2 и x_3 съответните количества от изделията A, B и C. Печалбата от единица изделие съответно е $c_1 = 9$, $c_2 = 8$, $c_3 = 4$. Математическият модел на задачата е:

$$\max z = 9x_1 + 8x_2 + 4x_3$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 600 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 480 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 750 \end{array} \right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Въвеждаме допълнителни неизвестни x_4, x_5 и x_6 в ограничителните условия, за да превърнем неравенствата в равенства. Стандартно-каноничната форма на дадената задача е:

$$\max z = 9x_1 + 8x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 600 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 480 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 750 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \forall j = 1,..,6.$$

Образуваме симплекс таблицата – *табл. 3.3.*

Таблица 3.3.

			c_j	9	8	4	0	0	0
	$c_Б$	$x_Б$	b_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
I.	0	x_4	600	2	3	3	1	0	0
	0	x_5	480	3	2	1	0	1	0
	0	x_6	750	4	1	2	0	0	1
	$z_1 = 0.600 + 0.480 + 0.750 = 0$			-9	-8	-4	0	0	0
II.	0	x_4	280	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0
	9	x_1	160	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
	0	x_6	110	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1
	$z_2 = 0.280 + 9.160 + 0.110 = 1440$			0	-2	-1	0	3	0
III.	8	x_2	168	0	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0
	9	x_1	48	1	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0
	0	x_6	390	0	0	3	1	-2	1
	$z_3 = 8.168 + 9.48 + 0.390 = 1776$			0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{5}$	0

В *част I.* записваме разширената матрица на системата. Определяме базисните неизвестни. В този случай те са x_4, x_5 и x_6, тъй като минорът, образуван от техните координати, представлява детерминантата на единична матрица от трети ред. Началното базисно решение е $X_0(0,0,0)$. Попълваме следните резултати в първия индексен ред: Пресмятаме първата стойност на целевата функция $z_1 = \sum_{i=1}^{3} c_Б b_i = 0.600 + 0.480 + 0.750 = 0$. За всяко неизвестно x_j определяме съответното число Δ_j, пресметнато по (3.4):

$\Delta_1 = (0.2 + 0.3 + 0.3) - 9 = -9 < 0$;
$\Delta_2 = (0.3 + 0.2 + 0.1) - 8 = -8 < 0$;
$\Delta_3 = (0.3 + 0.1 + 0.2) - 4 = -4 < 0$;
$\Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0$, защото това са числата на базисните неизвестни.
Критерият за оптималност е нарушен, тъй като се търси максимум, а първите три числа са отрицателни. Най-малкото отрицателно число съответства на променливата x_1. Следователно първият стълб от таблицата е ключов стълб и на следващата стъпка x_1 ще влезе в базиса. За да определим ключовия ред, образуваме по (3.6) отношенията $\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}, \alpha_{ik} > 0$ и избираме най-малкото от тях.

$$\theta = \min\left\{\frac{600}{2}; \frac{480}{3}; \frac{750}{4}\right\} = \frac{480}{3} = 160 .$$

θ се получава най-малко за втория ред, така че той става ключов. Следователно на втора стъпка x_5 трябва да напусне базиса. Елементът, който лежи едновременно в ключовия стълб и ключовия ред е 3 – това е ключовото число. Делим ключовият ред на ключовото число, т.е. делим втория ред на 3 по (3.7), така че в новата таблица на негово място да се получи единица. Сега трябва така да преобразуваме елементите над и под получената единица, че да станат равни на нула, по (3.8). За целта умножаваме преобразувания ключов ред с (-2) и го прибавяме към първия и съответно с (-4) и го събираме с третия. По този начин коефициентите пред новото базисно неизвестно x_1 стават част от минор, който съответства на детерминантата на единична матрица от трети ред.
В *част II.* правим аналогични изчисления. Попълваме втория индексен ред. Втората стойност на целевата функция е $z_2 = 0.280 + 9.160 + 0.110 = 1440$. Отново определяме числата, пресметнати по (3.4):
$\Delta_1 = \Delta_4 = \Delta_6 = 0$;

$$\Delta_2 = \left(0.\frac{5}{3} + 9.\frac{2}{3} + 0.\left(-\frac{5}{3}\right)\right) - 8 = -2 < 0;$$

$$\Delta_3 = \left(0.\frac{7}{3} + 9.\frac{1}{3} + 0.\frac{2}{3}\right) - 4 = -1 < 0;$$

$$\Delta_5 = \left(0.\left(-\frac{2}{3}\right) + 9.\frac{1}{3} + 0.\left(-\frac{4}{3}\right)\right) - 0 = 3 > 0 .$$

Критерият за оптималност (3.5) се нарушава от числата Δ_2 и Δ_3. Променливата, която ще влезе в базиса е x_2, тъй като $\Delta_2 < \Delta_3$. Следователно вторият стълб става ключов. Определяме променливата, която ще напусне базиса по (3.6), като изберем $\theta = \min\left\{\frac{280}{\frac{5}{3}}; \frac{160}{\frac{1}{3}}\right\} = \frac{280}{\frac{5}{3}} = 168$. Най-малкото отношение θ се получава в

първия ред (за x_4), така че той става ключов. Ключовото число е $\frac{5}{3}$. За да преминем към друго базисно решение, делим ключовия ред на $\frac{5}{3}$, а останалите преобразуваме по (3.8).
В *част III.* пресмятаме трети индексен ред. Новата стойност на целевата функция е $z_3 = 8.168 + 9.48 + 0.390 = 1776$. Пресмятаме числата по (3.4):

$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_6 = 0$;

$\Delta_3 = \left(8.\frac{7}{5} + 9.\left(-\frac{3}{5}\right) + 0.3\right) - 4 = \frac{3}{5} > 0$;

$\Delta_4 = \left(8.\frac{3}{5} + 9.\left(-\frac{2}{5}\right) + 0.1\right) - 0 = \frac{6}{5} > 0$;

$\Delta_5 = \left(8.\left(-\frac{2}{5}\right) + 9.\frac{3}{5} + 0.(-2)\right) - 0 = \frac{11}{5} > 0$.

Всички числа са неотрицателни, следователно критерият за оптималност е изпълнен и оптималното решение е намерено. $z_{\max} = z\left(X_{opt}\right) = 1776$, $X_{opt}(48;168;0)$.
Икономическата интерпретация на решението е, че максималната печалба се получава, ако от изделията A и B се произведат съответно по 48 и 168 единици, а изделията C не се произвеждат. Тогава количествата електроенергия и стомана ще се използват изцяло , а от алуминий ще останат неизползвани 390 единици.

3.2. Да се реши

$$\min z = -2x_1 - x_2 - 7x_3$$
$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 4 \\ x_1 + 4x_2 - 10x_3 \ge -7 \end{array}\right.$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Решение: Ограниченията трябва да се преобразуват така, че задачата да се приведе в стандартна форма. Умножаваме второто неравенство с (-1), за да получим положителнен свободен член и добавяме две нови променливи x_4 и x_5, за да има равенства в ограниченията.

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 - 4x_2 + 10x_3 \quad + x_5 = 7 \end{array}\right.$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

Можем да изберем x_4 и x_5 за базисни неизвестни, но тук ще подходим по друг начин. Разглеждаме системата уравнения и по метода на Гаус я привеждаме в триъгълна форма, като прибавим първото уравнение към второто.

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \qquad\quad = 4 \\ \quad - 2x_2 + 13x_3 + x_4 + x_5 = 11 \end{array}\right.$$

Сега избираме x_1 и x_5 за базисни неизвестни. Образуваме симплекс таблицата – *табл.3.4*.

Таблица 3.4.

	$c_Б$	$x_Б$	c_j / x_j / b_i	-2	-1	-7	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I.	-2	x_1	4	1	2	3	1	0
	0	x_5	11	0	-2	$\boxed{13}$	1	1
	$z_1 = -2.4 + 0.11 = -8$			-0	-3	1	-2	0
II.	-2	x_1	$\frac{19}{13}$	1	$\frac{32}{13}$	0	$\frac{10}{13}$	$-\frac{3}{13}$
	-7	x_3	$\frac{11}{13}$	0	$-\frac{2}{13}$	1	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$
	$z_2 = -2.\frac{19}{13} - 7.\frac{11}{13} = -\frac{115}{13}$			0	-5	0	$-\frac{27}{13}$	$-\frac{1}{13}$

В *част I.* попълваме първия индексен ред. За избрания базис, първата стойност на целевата функция е $z_1 = -2.4 + 0.11 = -8$. Числата, пресметнати по (3.4) са:

$\Delta_1 = \Delta_5 = 0$

$\Delta_2 = (-2.2 + 0.(-2)) - (-1) = -3 < 0$;

$\Delta_3 = (-2.3 + 0.13) - (-7) = 1 > 0$;

$\Delta_4 = (-2.1 + 0.1) - 0 = -2 < 0$.

Критерият за оптималност (3.5) е нарушен от Δ_3 и x_3 трябва да влезе в базиса. Образуваме по (3.6), $\theta = \min\left\{\frac{4}{3}; \frac{11}{13}\right\} = \frac{11}{13}$, която се получава за втори ред (т.е. за x_5), следователно x_5 напуска базиса и този ред става ключов. Ключовото число е 13, така че, по (3.7), делим ключовия ред на 13. Преобразуваме първи ред по (3.8) така, че елементът над получената единица да стане равен на нула.

В *част II.* пресмятаме втори индексен ред. Втората стойност на целевата функция е $z_2 = -2.\frac{19}{13} - 7.\frac{11}{13} = -\frac{115}{13}$. Числата по (3.4) са:

$\Delta_1 = \Delta_3 = 0$

$\Delta_2 = \left(-2.\left(-\frac{32}{13}\right) - 7.\left(\frac{-2}{13}\right)\right) - (-1) = -5 < 0$;

$\Delta_4 = \left(-2.\left(\frac{10}{13}\right) - 7.\frac{1}{13}\right) - 0 = -\frac{27}{13} < 0$;

$$\Delta_5 = \left(-2.\left(-\frac{3}{13} \right) - 7.\frac{1}{13} \right) - 0 = -\frac{1}{13} < 0 .$$

Критерият за оптималност (3.5) е изпълнен, следователно оптималното решение е намерено.

Окончателно: $z_{\min} = -\frac{115}{13}$, $X_{opt}\left(\frac{19}{13}; 0; \frac{11}{13} \right)$.