22 въпрос. Хармонично трептене. Енергия на хармоничното трептене.

Под трептене ще разбираме процеси, които се характеризират с повторяемост или периодичност във времето. От математиката е известно, че произволна периодична функция удоволетворява условието

$$f(t + T) = f(t)$$

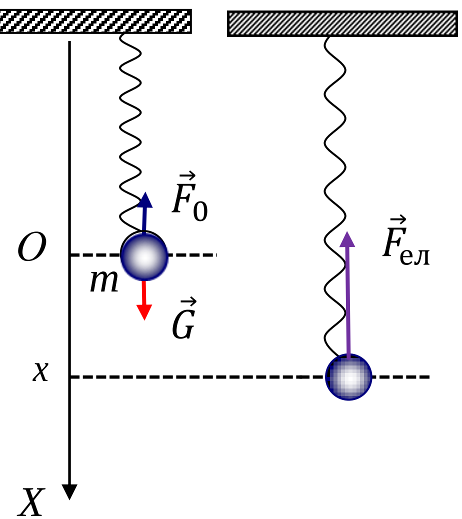
където T е периода, т.е. интервала от време през който стойностите на функцията се повтарят.

В зависимост от физичната им природа трептенията могат да бъдат механични, електромагнитни и т.н. В зависимост от характера на въздействието върху трептящата система трептенията могат да бъдат свободни (хармонични), затихващи, принудени и т.н.

Фурие е доказал, че въпреки многообразието им, всяко трептене може да се разглежда като суперпозиция на краен или безкраен брой прости хармонични трептения.

По определение трептяща система, в която възвръщащата сила е правопропорционална на отместването от равновесното положение, взето със знак "минус" извършва хармонични трептене. Такава система се нарича ***хармоничен осцилатор.***

Като пример за хармоничен осцилатор и възвръщаща сила ще разгледаме движението на пружинно махало, което представлява тяло с маса m, окачено на пружина с коефициент на еластичност (коефициент на твърдост) k. Положението на тялото отчитаме спрямо ос ОХ, положителната посока, на която е избрана надолу. В равновесно положение т. O силата на тежестта $\vec{G}$ на тялото се уравновесява от сила $\vec{F}_0$, възникваща при разтягане на пружината. Ако под действие на външна сила тялото се изтегли надолу на разстояние x, относно равновесното му положение и след това външната сила се премахне, то тялото ще започне да извършва хармонично трептене под действие на възвръщаща сила, насочена винаги към равновесното положение на тялото.



Тази сила се нарича ***еластична сила*** $\vec{F}_{\text{ел}}$, големината на която се дава с израза

$$F_{\text{ел}} = -kx$$

Съгласно втория принцип на динамиката

$$F_{\text{ел}} = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

и следователно

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Това уравнение е диференциално уравнение от втори ред, решението на което може да се запише във вида

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos\Phi(t)$$

където A е максималното отклонение на тялото от равновесното му положение, наречено амплитуда на трептенето,

$\Phi(t) = (\omega t + \varphi)$ е фазата на трептенето,

φ е началната фаза, т.е. фазата на трептенето в началния момент $t = 0$,

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ е кръговата честота на трептенето.

Тъй като движението на тялото е периодично с период T, можем да запишем

$$[\omega(t+T)+\ \varphi]=(\omega t+\ \varphi)+2\pi$$

Тук сме използвали, че периода на косинусовата функция е 2π. Следователно

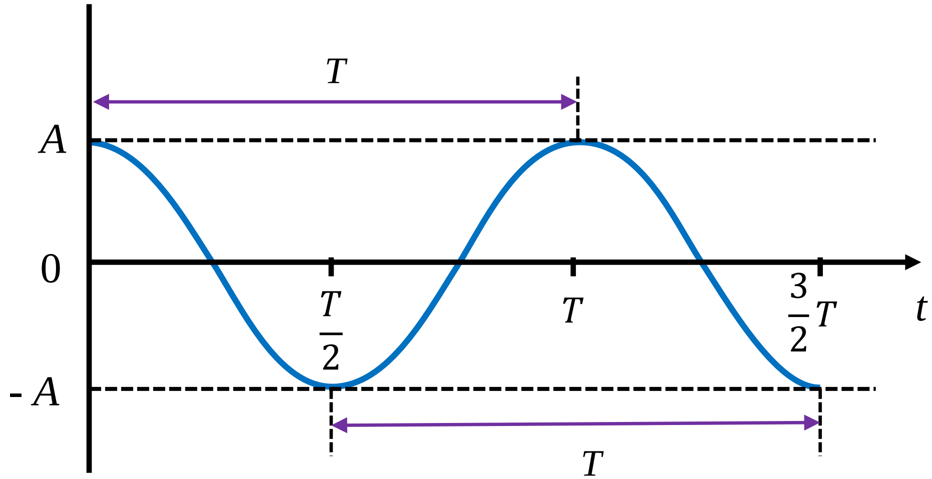
$$\omega T=2\pi \quad \text{или} \quad T=\frac{2\pi}{\omega}$$

Реципрочната стойност на периода се нарича линейна честота (или честота) на трептенето

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$$

и се измерва в [s^{-1}].

Графично хармоничното трептене може да се изобрази чрез косинусоида. Това позволява хармоничното трептене да се определя и като движение, траекторията на което е косинусоида.



Ще отбележим, че честотата и периода на трептенето не зависят от амплитудата, а само от свойствата на трептящото тяло (трептящата система).

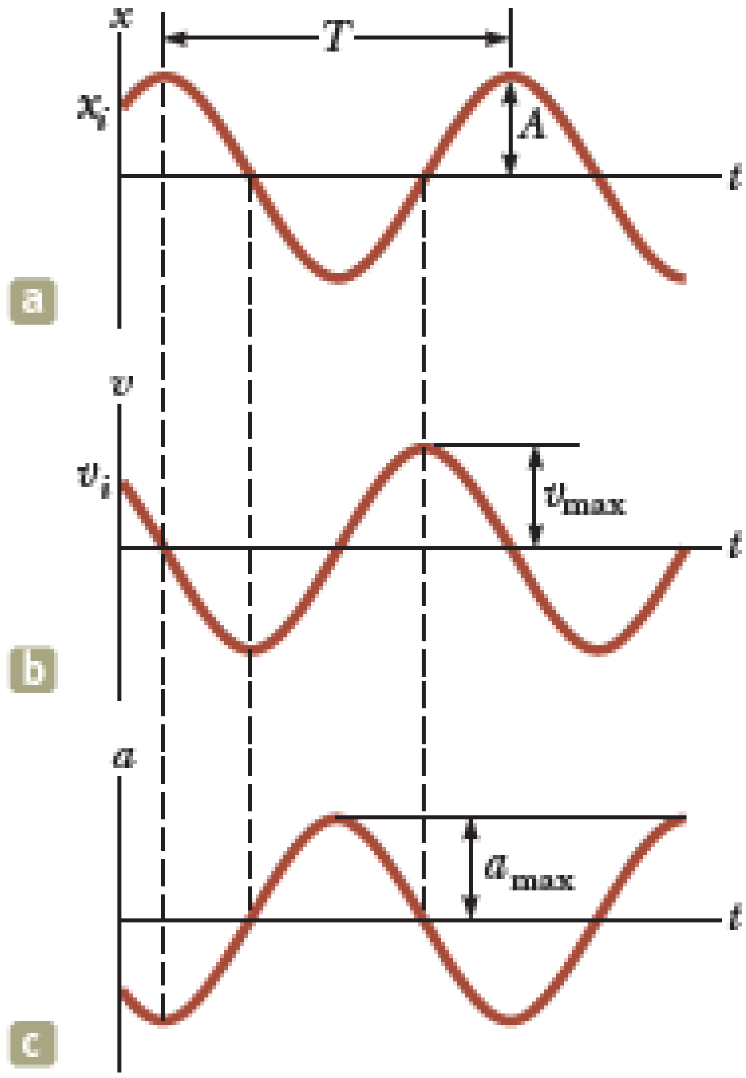
Скоростта на трептенето се дава чрез израза

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

Ускорението е

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

Скоростта и ускорението на трептящото тяло също могат да се представят графично.



Пример 1: Материална точка извършва трептения по закона $x = 12\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right)$, x е в сантиметри. Кое от следните твърдения е вярно?

А) амплитудата на трептенето е 6 cm; Б) периодът е 3 s;

В) фазата е π/3; Г) началната фаза е π/2.

$$x = A\cos(\omega t + \ \varphi)$$

$$A = 12\text{ cm} = 0{,}12\text{ m},\ \ \omega = \frac{\pi}{3}\text{ s}^{-1},\ \ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\times 3}{\pi} = 6\text{ s},\ \ \varphi = \frac{\pi}{2}\text{ rad}$$

$$\Phi = \omega t + \varphi = \frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{3}$$

Верният отговор е Г).

Пример 2: Амплитудата на хармонично трептене е 50 cm, честотата му е 0,25 Hz и началната фаза е нула. След колко време отместването ще бъде 25 cm?

Дадено: $A = 50\text{ cm}\,,\ \nu = 0{,}25\text{ Hz}\,,\ \varphi = 0$

$t = ?$, ако $x = 25\text{ cm}$

Решение:

$$x = A\cos(\omega t + \ \varphi) \qquad \omega = 2\pi\nu = 2\pi \times 0{,}25 = 0{,}5\pi$$

$$25 = 50\cos(0{,}5\pi t)$$

$$\cos(0{,}5\pi t) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} \qquad 0{,}5\pi t = \ 60^0 = \frac{\pi}{3} \qquad t = \frac{\pi}{3\times 0{,}5\pi} = \frac{2}{3}\ s$$

Вече казахме, че хармоничното трептене на разглежданото от нас пружинно махало възниква вследствие на еднократно отклонение на трептящото тяло от равновесното му положение и премахване на външната сила. Такива трептения се наричат свободни хармонична трептения под действието на еластичната сила, възникваща при разтягане или свиване на пружината. Но еластичната сила $\vec{F}_{\text{ел}}$ е консервативна сила. Следователно за потенциалната енергия на тялото можем да използваме израза

$$E_p = -\int F.dx = -\int_0^x -kxdx = \frac{1}{2}kx^2$$

Пълната енергия на трептящото тяло е

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

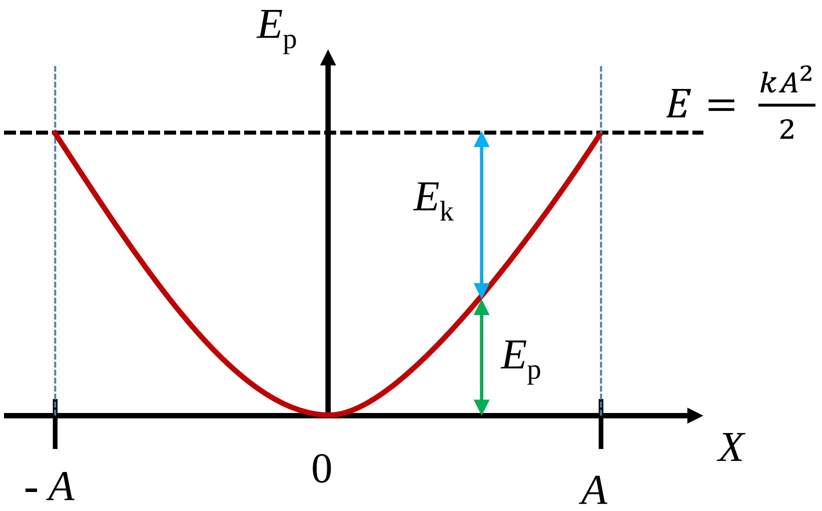
В случая на хармоничен осцилатор силите на триене се пренебрегват, т.е. в трептящата система действат само консервативни сили и следователно е изпълнен закона за запазване на пълната механична енергия (E = const).
Но в двете крайни точки от движението на трептящото тяло ($x = \pm A$) скоростта на тялото е равна на нула и следователно неговата пълна енергия е равна на максималната му потенциална енергия. Можем да кажем, че в тези точки пълната механична енергия на хармоничния осцилатор е пропорционална на квадрата на амплитудата на трептенето.

$$E = E_{p\mathrm{max}} = \frac{kA^2}{2}$$

В равновесното положение ($x = 0$) потенциалната енергия на тялото е нула и следователно неговата пълна енергия е равна на максималната му кинетична енергия.

$$E = E_{k\mathrm{max}} = \frac{mv_{max}^2}{2}$$

Това превръщане на кинетичната енергия на трептящото тяло в потенциална енергия и обратно може да се представи графично



Пример 3: Тяло, окачено на пружина с коефициент на еластичност 2 кN/m, извършва хармонично трептене с амплитуда 7,1 cm. Определете кинетичната енергия на тялото при фаза π/4 rad.

Дадено: $k = 2\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} = 2 \times 10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, $\mathrm{A} = 7{,}1\ \mathrm{cm} = 0{,}071\ \mathrm{m}$, $\Phi = \frac{\pi}{4}\ \mathrm{rad}$

$E_k =$?

Решение:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(-\omega A \sin\Phi)^2}{2} = \frac{m\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}A\sin\Phi\right)^2}{2} = \frac{m \times \left(\frac{k}{m}\right)A^2 \times (\sin\Phi)^2}{2}$$

$$E_k = \frac{kA^2 \times \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2}{2} = \frac{2 \times 10^3 \times 0{,}071^2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} = 2{,}5\ \mathrm{J}$$