24 въпрос. Принудени трептения. Резонанс.

Всяка реална трептяща система в природата, вследствие на силите на триене и съответстващата им загуба на енергия, извършва затихващи трептения. Ако искаме трептенията да не затихват и да продължават произволно дълго време, трябва да компенсираме загубите на енергия в системата. Това може да стане като внасяме в системата енергия с помощта на външна сила, която трябва също да бъде периодична, т.е. да се изменя по синусов или косинусов закон

$$F_{\text{в}} = F_0 \cos(\omega t)$$

Кръговата честота ω на външната сила трябва да бъде различна от собствената честота ω_0 на трептящата система.

Под действието на външната сила в системата ще възникнат трептения в такт с изменението на силата. Такива трептения се наричат ***принудени трептения***, а външната сила – принуждаваща сила. За такава система вторият принцип на динамиката има вида

$$ma = F_{\text{ел}} + F_{\text{тр}} + F_{\text{в}}$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - rv + F_0\, cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2\beta\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Трябва да отбележим, че под действие на принуждаващата сила, трептящото тяло ще започне да трепти с честота ω, равна на честотата на силата $F_{в}$. Поради загубите на енергия, вследствие на силите на триене $F_{тр}$, ще се появи фазова разлика между собствената честота на трептене на тялото ω_0 и честотата на трептене ω. Ако означим тази фазова разлика с φ, решението на диференциалното уравнение може да се запише във вида

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

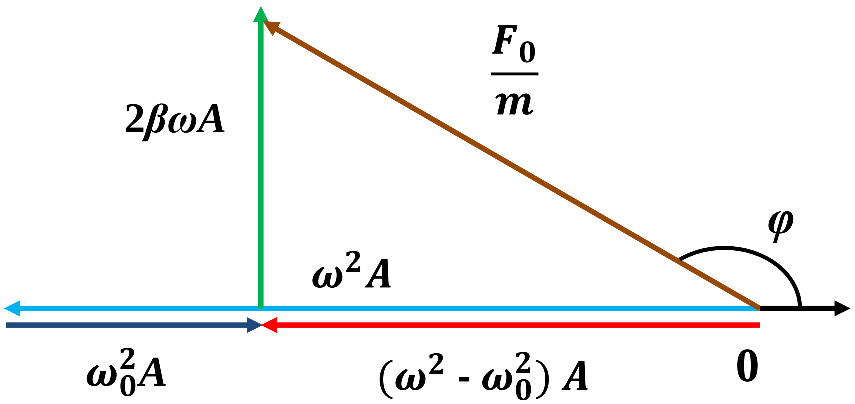
За да получим израз за амплитудата на принуденото трептене ще разгледаме израза $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2\beta\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$

Като имаме предвид, че $\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x$ израза придобива вида

$$\omega_0^2 x - \omega^2 x + 2\beta\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Това уравнение може да се реши нагледно чрез векторна диаграма

Разглеждаме случая, когато $\omega > \omega_0$



Разглеждаме момент от време $t = 0$, когато фазата на външната сила е равна на нула. Тогава $\frac{F_0}{m}$ се изобразява чрез вектора с дължина $\frac{F_0}{m}$.
Величината $\omega_0^2 x = \omega_0^2 A \cos(\omega t + \varphi)$ ще се изобрази с вектор с големина $\omega_0^2 A$, отместен на ъгъл φ от вектора $\frac{F_0}{m}$.
Величината $\omega^2 x = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$ е с противоположна посока на $\omega_0^2 A$ и сумирайки двете величини получаваме вектора $(\omega^2 - \omega_0^2)A$.
Скоростта, с която тялото трепти изпреварва по фаза отместването от равновесното положение с 90^0 и ще се изобрази с вектор $2\beta \frac{dx}{dt}$ с големина $2\beta\omega A$, перпендикулярен на векторите $\omega_0^2 A$ и $\omega^2 A$.

Следователно вектора $\frac{F_0}{m}$ е равен на сумата от трите вектора и можем да запишем

$$\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 = (2\beta\omega A)^2 + [A(\omega^2 - \omega_0^2)]^2 =$$
$$= 4\beta^2\omega^2A^2 + A^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2$$

От тук

$$A^2\left[\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right] = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2$$

Следователно амплитудата на принуденото трептене се дава чрез

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

За началната фаза се получава

$$\tan\varphi = \frac{2\beta\omega A}{A(\omega^2 - \omega_0^2)} = \frac{2\beta\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

От израза за амплитудата на принудените трептения се вижда, че тя зависи от амплитудата и честотата на принуждаващата сила. При някаква честота на принуждаващата сила знаменателя ще има минимална стойност, а амплитудата на принудените трептения ще има максимална стойност. Тази честота на принуждаващата сила се нарича ***резонансна честота*** $\boldsymbol{\omega}_{\text{рез}}$. Резонансната честота може се намери като приравним на нула производната

$$\frac{d}{d\omega}\left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right] = 0$$

$$\frac{d}{d\omega}\left[\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + \omega^4 + 4\beta^2\omega^2\right] = 0$$

$$-4\omega_0^2\omega + 4\omega^3 + 8\beta^2\omega = 0 \quad / \, (4\omega)$$

$$-\omega_0^2 + \omega^2 + 2\beta^2 = 0$$

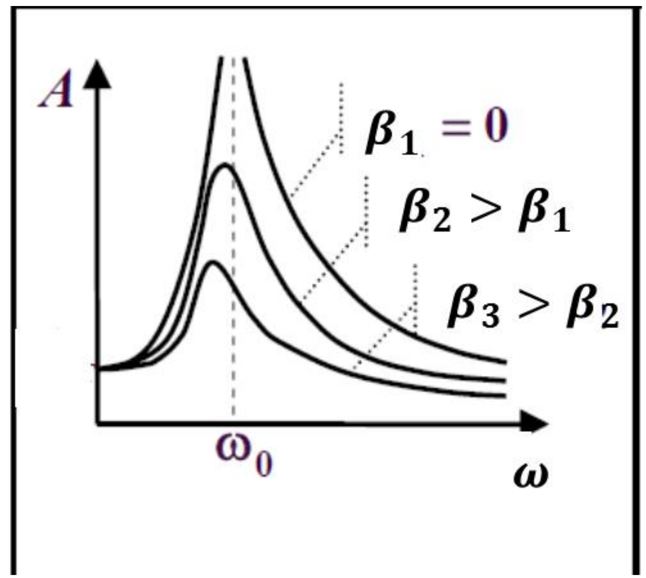
Следователно

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Явлението на рязко нарастване на амплитудата на принудените трептения, когато честотата ω на принуждаващата сила стане близка до собствената честота ω_0 на трептящата система, се нарича ***резонанс***.

При коефициент на затихване $\beta = 0$, когато няма сили на съпротивление, $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$, а $A_{\text{рез}}$ става безкрайно голяма.

На фигурата е показана зависимостта на амплитудата на трептенията от честотата на принуждаващата сила. Отделните криви съответстват на различни стойности на коефициента на затихване. Колкото по-малък е коефициента на затихване, толкова по-рязко се изменя амплитудата на принудените трептения.



Пример 1: Тяло с маса 500 g е окачено на пружина с коефициент на еластичност 200 N/m. На колко е равна честотата на принудените трептения, при която настъпва резонанс ?

Дадено: $m = 500\ \mathrm{g} = 0{,}5\ \mathrm{kg}$, $k = 200\ \mathrm{N/m}$

$\nu = ?$

Решение: $\omega_{\text{пр}} = \omega_0$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{0{,}5}} = 20\ \mathrm{s}^{-1} \qquad \nu_{\text{пр}} = \frac{\omega_{\text{пр}}}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{20}{2 \times 3{,}14} = 3\ \mathrm{Hz}$$