8 въпрос. Идеален газ. Уравнение за състоянието на идеалния газ.
Основно уравнение на молекулно-кинетичната теория.

Термодинамиката и ***молекулната физика*** изучават един и същ кръг явления – макроскопични процеси, т.е. такива процеси, които са свързани с огромен брой на участващите в тях атоми и молекули. Напр.: 1 mol газ съдържа $6{,}024 \times 10^{23}$ частици, 1 g вода съдържа $3{,}3 \times 10^{22}$ частици. Тези раздели на физиката се различават по подхода към изучаваните явления. Термодинамиката е аксиоматична наука, изводите й са основани на общи принципи (начала), които се явяват обобщение на опитните факти. Молекулната физика изхожда от представата за атомно-молекулния строеж на веществата и разглежда топлината като хаотично движение на атомите и молекулите.

В този и следващите въпроси ще разглеждаме основно газовете. Подобно на понятията материална точка и идеално твърдо тяло ще въведен ново идеализирано понятие – идеален газ. По определение ***идеален газ*** се нарича газ, за който са изпълнени следните условия:

1) молекулите на газа имат пренебрежимо малък собствен обем в сравнение с размерите на съда, в който газа е поставен;

2) молекулите на газа НЕ взаимодействат помежду си;

3) ударите между молекулите на газа и стените на съда, в който газа е поставен, са абсолютно еластични.

За идеалните газове са в сила опитно изведените закони на:

1) Бойл-Мариот: $pV = \text{const}$ (при m = const и T = const),

където p е налягането, V – обема, T – температурата и m – масата на газа.

2) Гей-Люсак: $V = V_0(1 + \alpha t)$ (при m = const и p = const),

където t е температурата на газа в ºC, $\alpha = \frac{1}{273}\ \text{K}^{-1}$, V_0 е обема на газа при температура 0 °C (273 K).

Връзката между единиците за температура е: $T[\text{K}] = t[°\text{C}] + 273$.

3) Шарл: $p = p_0(1 + \alpha t)$ (при m = const и V = const),

където p_0 е налягането газа при температура 0 °C.

Тези опитни закони показват, че състоянието на идеалния газ може да се характеризира с помощта на три параметъра – налягане, обем и температура. Уравнението, което свързва тези три параметъра във функционална зависимост се нарича ***уравнение за състоянието на идеалния газ***.

Преди да дадем уравнението за състоянието на газа, ще дадем и ***закона на Авогадро:*** 1 mol от който и да е газ при нормални условия (t = 0 °C и p = 1 atm) заема един и същ обем:

$$V_m = 0{,}0224\ \mathrm{m}^3 = 22{,}4 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3.$$

Връзката между единиците за налягане е: 1 atm = $1{,}013 \times 10^5$ Pa.

Тогава ***уравнението за състоянието на* 1 mol *идеален газ*** има вида

$$pV_m = RT \qquad (1)$$

където R е ***газовата константа***.

Нейната числова стойност е

$$R = \frac{pV_m}{T} = \frac{1{,}013 \times 10^5[\mathrm{Pa}] \times 0{,}0224\ \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{mol}}\right]}{273{,}16[\mathrm{K}]} \approx 8{,}31\ \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol.\,K}}\right]$$

Ако разглеждаме m kg газ, то ***уравнението за състоянието на идеалния газ*** има вида

$$pV = \frac{m}{\mu}RT = \nu RT \qquad (2)$$

където $\nu = \frac{m}{\mu}$ е броят на моловете газ, μ е моларната маса на газа. Уравнението (2) се нарича още уравнение на Клайперон-Менделеев.

Уравнение (2) може да се запише и чрез константата на Болцман –

$$k_Б = \frac{R}{N_A} = \frac{8{,}31\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol.K}}\right]}{6{,}024\times 10^{23}[\mathrm{mol}^{-1}]} = 1{,}38\times 10^{-23}\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right]$$

където $N_A = 6{,}024\times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$ е ***числото на Авогадро***, т.е. броят на молекулите, съдържащи се в 1 mol газ.

Като се има предвид, че моларната маса (масата на 1 mol газ) на газа $\mu = m_0 N_A$, където m_0 е масата на една молекула от газа, то

$$pV = \frac{m}{\mu}RT = \frac{m}{m_0 N_A}RT = \frac{m}{m_0}\frac{R}{N_A}T = Nk_Б T$$

където $N = \frac{m}{m_0}$ е броят на молекулите в m kg газ. ($m = m_0 N$, т.е. масата на газа е равна на броя на молекулите N умножен по масата на една молекула m_0).

Пример 1: Определете обема на 1 mol на газ при нормални условия. Приемете, че газа е идеален.

Дадено: $\nu = 1\ \mathrm{mol},\ t = 0\ °C = 273\ \mathrm{K}$,

$p = 1\ \mathrm{atm} = 1{,}013 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$

$V = ?$

Решение: От основното уравнение на идеалния газ (израза (2)) получаваме

$$V = \frac{\nu RT}{p} = \frac{1 \times 8{,}31 \times 273}{1{,}013 \times 10^5} = 22{,}4 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$$

Пример 2: Колко молекули се съдържат в 5 g въглероден диоксид (CO_2)? Моларната маса на CO_2 е $\mu = 44 \times 10^{-3}$ kg/mol.

Дадено: $m = 5\ \mathrm{g} = 5 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg}$, $\mu = 44 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}$

N = ?

Решение: Знаем, че броят на молекулите в в m kg газ е

$$N = \frac{m}{m_0}$$

Масата m_0 на една молекула на газа можем да определим от израза

$$\mu = m_0 N_A \qquad \Longrightarrow \qquad m_0 = \frac{\mu}{N_A}$$

Следователно

$$N = \frac{m}{m_0} = \frac{mN_A}{\mu} = \frac{5 \times 10^{-3} \times 6{,}024 \times 10^{23}}{44 \times 10^{-3}} = 6{,}8 \times 10^{22}$$

Основна роля в молекулно-кинетичната теория на идеалния газ играе средната кинетична енергия $\bar{E}_{0k}$ на молекулите на газа. Разглеждаме газ, съставен от N на брой молекули. Масата на една молекула означаваме с m_0. Молекулите се движат с различни скорости: $v_1, v_2, v_3, \dots, v_i, \dots, v_N$. Тук с v_1 сме означили скоростта на първата молекула, с v_2 – скоростта на втората молекула, с v_i – скоростта на произволна i-та молекула. Кинетичните енергии на отделните молекули ще се дават чрез

$$E_1 = \frac{m_0 {v_1}^2}{2}, E_2 = \frac{m_0 {v_2}^2}{2}, \dots, E_i = \frac{m_0 {v_i}^2}{2}, \dots, E_N = \frac{m_0 {v_N}^2}{2}$$

Средната кинетична енергия $\bar{E}_{0k}$ на молекулите на газа е средно аритметичната стойност на кинетичните енергии на отделните молекули

$$\bar{E}_{0k} = \frac{E_1 + E_2 + \cdots + E_i + \cdots + E_N}{N} =$$

$$= \frac{1}{N}\left(\frac{m_0 {v_1}^2}{2} + \frac{m_0 {v_2}^2}{2} + \cdots + \frac{m_0 {v_i}^2}{2} + \cdots + \frac{m_0 {v_N}^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{m_0}{2}\left(\frac{{v_1}^2 + {v_2}^2 + \cdots + {v_i}^2 + \cdots + {v_N}^2}{N}\right) = \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}}\rangle^2}{2}$$

Или

$$\bar{E}_{0k} = \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}}\rangle^2}{2} \qquad (4)$$

Тук с $\langle v_{\text{кв}}\rangle^2 = \frac{{v_1}^2+{v_2}^2+\cdots+{v_i}^2+\cdots+{v_N}^2}{N}$ сме означили средната стойност на квадратите на скоростите на отделните молекули.

Връзката между налягането на газа $\boldsymbol{p}$ и средната кинетична енергия $\boldsymbol{\bar{E}_{0k}}$ на молекулите на газа се нарича ***основно уравнение на молекулно-кинетичната теория на идеалния газ***. Ще дадем ***израза за това уравнение за едноатомен газ*** без да го извеждаме

$$p = \frac{2}{3} n \bar{E}_{0k} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \bar{E}_{0k} \qquad (5)$$

където $n = \frac{N}{V}$ е концентрацията на газа, т.е. броя на молекулите в единица обем.

Уравнение (5) може да се запише във вида

$$pV = \frac{2}{3} N \bar{E}_{0k}$$

Но от уравнението за състоянието на идеалния газ (2) имаме, че

$$pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Като приравним десните страни на тези два израза получаваме

$$\frac{2}{3} N \bar{E}_{0k} = \frac{m}{\mu} RT$$

или

$$\bar{E}_{0k} = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT \frac{1}{N} = \frac{3}{2} \frac{1}{N_A} RT = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} k_Б T \qquad (6)$$

Тук сме използвали, че

$$\frac{m}{\mu} \frac{1}{N} = \frac{m}{m_0 N_A N} = \frac{m_0 N}{m_0 N_A N} = \frac{1}{N_A}$$

($\mu = m_0 N_A$ и $m = m_0 N$).

От израза (4) за средната кинетична енергия на молекулите на газа имаме

$$\bar{E}_{0k} = \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2}$$

Като приравним десните страни на изразите (4) и (6) получаваме

$$\frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} k_{\text{Б}} T \quad \Rightarrow \quad \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3 k_{\text{Б}} T}{m_0}} = \sqrt{\frac{3 k_{\text{Б}} T}{\mu / N_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

където $\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_N^2}{N}}$ е ***средната квадратична скорост*** на движение на молекулите на газа.

Следователно средната квадратична скорост $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ е правопропорционална на температурата на газа. При по-високи температури молекулите ще се движат с по-големи скорости.

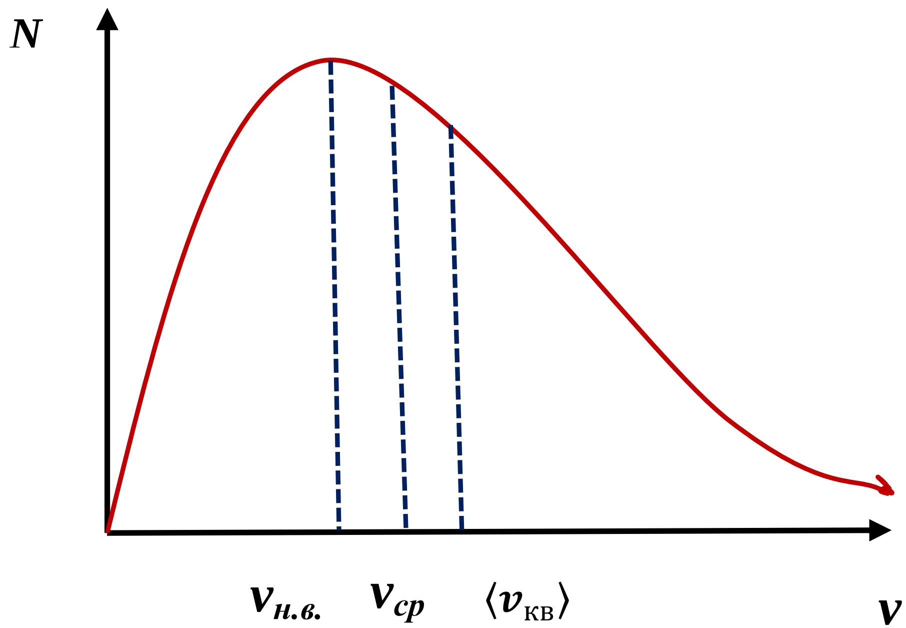
В молекулно-кинетичната теория на газовете се въвеждат още две характерни за молекулите на газа скорости – средна скорост $v_{\text{ср}}$ на топлинното движение на молекулите (средна аритметична скорост) и най-вероятна скорост $v_{\text{н.в.}}$.

Средна скорост $\boldsymbol{v}_{\text{ср}}$ на топлинното движение на молекулите се нарича средната аритметична стойност на скоростта на движение на молекулите на газа. Може да се покаже, че тя е равна на

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8k_{\text{Б}}T}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

Най-вероятната скорост $\boldsymbol{v}_{\text{н.в.}}$ на молекулите на газа е скоростта, с която се движат най-много молекули. Може да се покаже, че тя е равна на

$$v_{\text{н.в.}} = \sqrt{\frac{2k_{\text{Б}}T}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$



На графиката е показана зависимостта на броя на молекулите на газа като функция на тяхната скорост. Най-вероятна скорост $v_{\text{н.в.}}$ съответства на максимума на кривата, т.е. най-голям брой молекули имат такава скорост. Вижда се, че най-голяма стойност има средно-квадратичната скорост, а най-малка – най-вероятната скорост.

Пример 3: При какво налягане се намира газ с плътност 1,5 kg/m^3, ако средната квадратична скорост на молекулите му е 600 m/s?

Дадено: $\rho = 1{,}5$ kg/m^3 , $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 600$ m/s

$p = ?$

Решение: От основното уравнение на идеалния газ (израза (2)) получаваме

$$p = \frac{m}{\mu} RT \frac{1}{V} = \frac{RT}{\mu} \frac{m}{V} = \frac{RT}{\mu} \rho$$

където $\rho = \frac{m}{V}$ е плътността на газа.

Средната квадратична скорост на движение на молекулите на газа е

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3k_{\text{Б}}T}{m_0}} = \sqrt{\frac{3k_{\text{Б}}T}{\mu/N_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

От този израз получаваме, че

$$\frac{RT}{\mu} = \frac{\langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{3}$$

Следователно

$$p = \frac{RT}{\mu} \rho = \frac{\langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{3} \rho = \frac{600^2}{3} \times 1{,}5 = 180000 \text{ Pa} = 0{,}18 \times 10^6 \text{ Pa} = 0{,}18 \text{ MPa}$$

Пример 4: Как ще се измени обема на газ при увеличаване на налягането му четири пъти, ако средната скорост на топлинно движение на молекулите му остава постоянна?

Дадено: $p_2 = 4p_1, \quad v_{\text{ср}} = const$

$\frac{V_2}{V_1} = ?$

Решение: Средната скорост на топлинно движение на молекулите на газа е правопропорционална на температурата на газа

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8k_{\text{Б}}T}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

Следователно при $v_{\text{ср}} = \text{const}$, температурата на газа също е постоянна, т.е. $T = \text{const}$. Тогава от основното уравнение на идеалния газ (израза (2)) получаваме

$$pV = \frac{m}{\mu}RT = const$$

В този случай можем да запишем

$$p_1V_1 = p_2V_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1}{4p_1} = \frac{1}{4}$$

Следователно обемът на газа намалява четири пъти.

Пример 5: Определете концентрацията на молекулите на едноатомен газ при температура 27 ^{0}C и налягане 95 kPa.

Дадено: $T = 27^0\text{C} = 300\ \text{K}$, $p = 95\ \text{kPa} = 95 \times 10^3\ \text{Pa}$

$n = ?$

Решение: Концентрацията на газа n участва в основното уравнение на молекулно-кинетичната теория (израза (5))

$$p = \frac{2}{3} n \bar{E}_{0k}$$

От израза (6) имаме

$$\bar{E}_{0k} = \frac{3}{2} k_\text{Б} T$$

Следователно

$$p = \frac{2}{3} n \bar{E}_{0k} = \frac{2}{3} n \frac{3}{2} k_\text{Б} T = n k_\text{Б} T$$

От тук

$$n = \frac{p}{k_\text{Б} T} = \frac{95 \times 10^3}{1{,}38 \times 10^{-23} \times 300} = 2{,}3 \times 10^{25}\ \text{m}^{-3}$$

Следователно при тези условия концентрацията на молекулите на газа е огромна - $2{,}3 \times 10^{25}$ молекули в 1 m^3.