ГЛАВА 4

ИНТЕГРАЛИ НА НЯКОИ КЛАСОВЕ ИРАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

Основен подход за интегриране на ирационални функции е избирането на такава смяна на интеграционната променлива $x = \varphi(t)$, чрез която пресмятането на интеграла се свежда до интеграл на рационална функция.

I клас

Интеграли от вида

$$\begin{aligned} &\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\mathrm{d}x, \qquad \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\mathrm{d}x, \\ &\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\mathrm{d}x, \qquad \int R(x, \sqrt{ax - x^2})\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.1}$$

където $R(x, u)$ е *рационална функция* на два аргумента:

$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$	$\begin{cases} x = a\sin t, & \mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t \\ x = a\cos t, & \mathrm{d}x = -a\sin t\mathrm{d}t \end{cases}$
$R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$	$\begin{cases} x = a\mathrm{tg}\, t, & \mathrm{d}x = \dfrac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \\ x = a\mathrm{ctg}\, t, & \mathrm{d}x = \dfrac{-a}{\sin^2 t}\mathrm{d}t \end{cases}$
$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$	$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\sin t}, & \mathrm{d}x = -\dfrac{a\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t \\ x = \dfrac{a}{\cos t}, & \mathrm{d}x = \dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \end{cases}$
$R(x, \sqrt{ax - x^2})$	$\begin{cases} x = a\sin^2 t, & \mathrm{d}x = 2a\sin t\cos t\mathrm{d}t \\ x = a\cos^2 t, & \mathrm{d}x = -2a\sin t\cos t\mathrm{d}t \end{cases}$

Пример 4.1. Решете интеграла $\int x^2\sqrt{4 - x^2}\mathrm{d}x$.

Решение.

1^0. *Смяна на интеграционната променлива*: От $4 - x^2 = 2^2 - x^2 \Longrightarrow a = 2$. Полагаме $x = 2\sin t \Longrightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t\mathrm{d}t$.

2^0. *Заместване в интеграла*:

$$
\begin{aligned}
I &= \int 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}2\cos t\mathrm{d}t = 16\int \sin^2 t\cos t\sqrt{1-\sin^2 t}\mathrm{d}t \\
&= 16\int \sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t = 4\int \sin^2 2t\mathrm{d}t = 4\int \frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t \\
&= 2\int \mathrm{d}t - \frac{2}{4}\int \cos 4t\mathrm{d}(4t) = 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + C \\
&= 2t - \sin 2t\cos 2t + C = 2t - 2\sin t\cos t(1-2\sin^2 t) + C.
\end{aligned}
$$

3^0. *Връщане към първоначалния аргумент*: От $x = 2\sin t \Longrightarrow \sin t = \frac{1}{2}x \Longrightarrow$ $t = \arcsin\frac{x}{2}$, $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2/4} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$. Тогава

$$
\begin{aligned}
I &= 2\arcsin\frac{x}{2} - 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\left(1-2\frac{x^2}{2}\right) + C \\
&= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}(1-x^2)\sqrt{4-x^2} + C.
\end{aligned}
$$

Пример 4.2. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-1}}$.

Решение.

1^0. *Смяна на интеграционната променлива*: От $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 \Longrightarrow a = 1$. Полагаме $x = \dfrac{1}{\sin t} \Longrightarrow \mathrm{d}x = -\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t$.

2^0. *Заместване в интеграла*:

$$
\begin{aligned}
I &= -\int \frac{\sin^3 t\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}}{\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 t}-1}}\mathrm{d}t = -\int \frac{\sin t\cos t}{\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}}\mathrm{d}t = -\int \frac{\sin^2 t\cos t}{\cos t}\mathrm{d}t \\
&= -\int \frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \cos 2t\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sin 2t - t + C \\
&= \frac{1}{2}\sin t\cos t - t + C.
\end{aligned}
$$

3^0. *Връщане към първоначалния аргумент*: От $x = \dfrac{1}{\sin t} \Longrightarrow \sin t = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow$ $t = \arcsin\dfrac{1}{x}$, $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. Тогава

$$
I = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \arcsin\frac{1}{x} + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2} - \arcsin\frac{1}{x} + C.
$$

Пример 4.3. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}\mathrm{d}x$.

Решение.

1^0. *Смяна на интеграционната променлива*: От $4+x^2 = 2^2+x^2 \Longrightarrow a = 2$. Полагаме $x = 2\mathrm{tg}t \Longrightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{2}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$.

2^0. *Заместване в интеграла*:

$$I = 2\int \frac{\sqrt{4+4\mathrm{tg}^2 t}}{2^6\mathrm{tg}^6 t\cos^2 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\int \frac{\cos^6 t\frac{1}{\cos t}}{\sin^6 t\cos^2 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\int \frac{\cos^3 t}{\sin^6 t}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{16}\int \frac{(1-\sin^2 t)\mathrm{d}(\sin t)}{\sin^6 t} = \frac{1}{16}\int \sin^{-6} t\mathrm{d}(\sin t) - \frac{1}{16}\int \sin^{-4} t\mathrm{d}(\sin t)$$
$$= \frac{-1}{16.5\sin^5 t} + \frac{1}{16.3\sin^3 t} + C == \frac{-1}{80\sin^5 t} + \frac{1}{48\sin^3 t} + C.$$

3^0. *Връщане към първоначалния аргумент*: От $x = 2\mathrm{tg}t \Longrightarrow \mathrm{tg}t = x/2$. Тогава $\sin t = \dfrac{\mathrm{tg}t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}} = \dfrac{x/2}{\sqrt{1+x^2/4}} = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

$$\Longrightarrow I = \frac{(x^2-6)(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}{120x^5} + C.$$

Пример 4.4. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$.

Решение.

1^0. *Смяна на интеграционната променлива*: От $x - x^2 = 1x - x^2 \Longrightarrow a = 1$. Полагаме $x = 1\sin^2 t$, $\mathrm{d}x = 2\sin t\cos t\mathrm{d}t$.

2^0. *Заместване в интеграла*:

$$I = \int \frac{2\sin t\cos t\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^4 t}} = \int \frac{2\sin t\cos t}{\sin t\cos t}\mathrm{d}t = 2\int \mathrm{d}t = 2t + C.$$

3^0. *Връщане на първоначалната променлива*: От $x = \sin^2 t \Longrightarrow \sin t = \sqrt{x}$, $t = \arcsin\sqrt{x}$

$$\Longrightarrow I = 2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

II клас

Интеграл от вида

$$\int R(x, x^{p_1/q_1}, x^{p_2/q_2}, \dots, x^{p_m/q_m})\mathrm{d}x, \tag{4.2}$$

където $R(x, u_1, u_2, \dots, u_m)$ е рационална функция, а $p_m, q_m \in \mathbb{N}$.

Полагаме $x = t^m$, където $m = \text{НОК}(q_1, q_2, \dots, q_m)$, т.е. $m/q_1 = l_1$, $m/q_2 = l_2, \dots, m/q_m = l_m$ (деление без остатък) и като намерим $\mathrm{d}x = mt^{m-1}\mathrm{d}t$ заместваме:

$$I = \int R(t^m, t^{l_1 p_1}, t^{l_2 p_2}, \dots, t^{l_m p_m}) m t^{m-1}\mathrm{d}t,$$

т.е. получаваме интеграл от рационална функция на новата променлива t.

Пример 4.5. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x}{x\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)}$.

Решение. Написваме $I = \displaystyle\int \frac{x^{1/3}\mathrm{d}x}{x(x^{1/2} + x^{1/3})}$, полагаме $x = t^6$ $(t = \sqrt[6]{x})$, където $m = \text{НОК}(3, 2, 3) = 6$, $\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$ и заместваме:

$$\begin{aligned}
I &= 6\int \frac{t^2 t^5\mathrm{d}t}{t^6(t^3 + t^2)} = 6\int \frac{t^7\mathrm{d}t}{t^8(t+1)} = 6\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = 6\int \frac{(t+1) - t}{t(t+1)}\mathrm{d}t \\
&= 6\int \frac{t+1}{t(t+1)}\mathrm{d}t - 6\int \frac{t\mathrm{d}t}{t(t+1} = 6\int \frac{\mathrm{d}t}{t} - 6\int \frac{\mathrm{d}(t+1)}{t+1} \\
&= 6(\ln|t| - \ln|t+1|) + C = 6\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C = 6\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x} + 1}\right| + C.
\end{aligned}$$

III клас

Интеграл от вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_m/q_m}\right]\mathrm{d}x, \tag{4.3}$$

където $R(x, u_1, \dots, u_m)$ е рационална функция, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (const.), $ad - bc \neq 0$, $p_m, q_m \in \mathbb{N}$.

Полагаме $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^m$, където $m = \text{НОК}(q_1, \dots, q_m)$, намираме x, dx и след заместване получаваме интеграл от рационална функция.

Пример 4.6. Решете интеграла $\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Решение. Написваме

$$I = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Полагаме $\frac{1-x}{1+x} = t^2$ $\left(t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$, намираме x, $\mathrm{d}x$ и заместваме (при $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, подкоренната величина е отрицателна, разглеждаме $-1 < x < 1$):

$$1 - x = t^2 + t^2x \Longrightarrow 1 - t^2 = (1+t^2)x \Longrightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-2t(1+t^2) - 2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = \frac{-4t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2},$$

$$\Longrightarrow I = -4\int \frac{t^2(1+t^2)}{1-t^2}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = -4\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}.$$

От

$$\frac{t^2}{(1-t)(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2},$$

като положим последователно $t = 1, -1, i$, получаваме $A = B = \frac{1}{4}$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{2}$. Тогава

$$I = 4\cdot\frac{1}{4}\int\frac{d(1-t)}{1-t} - 4\cdot\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(1+t)}{1+t} + 4\cdot\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$= \ln|1-t| - \ln|1+t| + 2\mathrm{arctg}t + C = \ln\left|\frac{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right| + 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

Пример 4.7. Решете интеграла

$$\int \frac{2+\sqrt[6]{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[6]{x+2}}\mathrm{d}x.$$

Решение. Написваме $I = \int \frac{(2+\sqrt[6]{x+2})\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[6]{x+2}}$, полагаме $x + 2 = t^6$ $(t = \sqrt[6]{x+2})$, намираме x, $\mathrm{d}x$ и заместваме ($(x+2)$ е частен случай от дробно -

рационалната функция $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, при $a=d=1$, $b=2$, $c=0$):

$$x=t^6-2,\ \mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t \Longrightarrow I=6\int\frac{(2+t)t^5}{t^2+t}\mathrm{d}t=6\int\frac{t^5+2t^4}{t+1}\mathrm{d}t,$$

$$\frac{t^5+2t^4}{t+1}=t^4+t^3-t^2+t-1+\frac{1}{t+1}\quad\text{(вж. гл. 3, пр. 3.1.).}$$

$$\Longrightarrow I=6\int t^4\mathrm{d}t+6\int t^3\mathrm{d}t-6\int t^2\mathrm{d}t+6\int t\mathrm{d}t-6\int \mathrm{d}t+6\int\frac{d(t+1)}{t+1}$$

$$=6\frac{t^5}{5}+6\frac{t^4}{4}-6\frac{t^3}{3}+6\frac{t^2}{2}-6t+6\ln|t+1|+C$$

$$=\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x+2}\right)^5+\frac{3}{2}\left(\sqrt[6]{x+2}\right)^4-2\left(\sqrt[6]{x+2}\right)^3$$

$$+3\left(\sqrt[6]{x+2}\right)^2-6\sqrt[6]{x+2}+6\ln|\sqrt[6]{x+2}+1|+C.$$

IV клас

Интеграл от вида

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x, \tag{4.4}$$

където $R(x,u)$ е рационална функция на два аргумента, $a,b,c\in\mathbb{R}(\mathrm{const})$, $a\neq 0$

Интеграли от вида (4.4) се наричат *Абелеви* и се решават със субституции на Ойлер.

Първа субституция на Ойлер. Ако $a>0$, полагаме

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x\pm t. \tag{4.5}$$

Тук знаците могат да се вземат в произволна комбинация, най-често $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t$. Като повдигнем двете страни на квадрат получаваме:

$$x=\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{c}},\quad \mathrm{d}x=-2\frac{\sqrt{a}t^2-bt+c\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{c})^2}\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{c}}+t=-\frac{\sqrt{a}t^2-bt+c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{c}}.$$

$$\Longrightarrow I=-2\int R\left(\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}},-\frac{\sqrt{a}t^2-bt+c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}}\right)\frac{\sqrt{a}t^2-bt+c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{c}}\mathrm{d}t,$$

т.е. получаваме подинтегрална рационална функция $\overline{R}(t)$.

Пример 4.8. Решете интеграла $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. Коефициентът $a = 1 > 0$ и полагаме

$$* \quad \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{1}x + t \Longrightarrow x^2+x+1 = x^2+2tx+t^2$$

$$\Longrightarrow (1-2t)x = t^2-1 \Longrightarrow x = \frac{t^2-1}{1-2t} \quad (t = \sqrt{x^2+x+1}-x),$$

$$* \quad dx = \frac{2t(1-2t)+2(t^2-1)}{(1-2t)^2}\mathrm{d}t = -2\frac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}\mathrm{d}t,$$

$$* \quad \sqrt{x^2+x+1} = \frac{t^2-1}{1-2t}+t = \frac{t^2-1+t-2t^2}{1-2t} = -\frac{t^2-t+1}{1-2t},$$

$$* \quad x+\sqrt{x^2+x+1} = \frac{t^2-1}{1-2t} - \frac{t^2-t+1}{1-2t} = \frac{t-2}{1-2t}.$$

$$\Longrightarrow I = -2\int \frac{(t^2-t+1)(1-2t)}{(1-2t)^2(t-2)}\mathrm{d}t = \int \frac{2t^2-2t+2}{2t^2-5t+2}\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{2t^2-5t+2}{2t^2-5t+2}\mathrm{d}t + 3\int \frac{t\mathrm{d}t}{(t-2)(2t-1)} = t + 3I_1.$$

За да решим I_1 разлагаме подинтегралната функция в сума от елементарни дроби.

$$\frac{t}{(t-2)(2t-1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{2t-1}, \qquad t = A(2t-1)+B(t-2).$$

Полагаме

$$* \quad t = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{2} = B(\frac{1}{2}-2) \Longrightarrow B = -\frac{1}{3},$$

$$* \quad t = 2 \Longrightarrow 2 = 3A \Longrightarrow A = \frac{2}{3}.$$

$$\Longrightarrow I_1 = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}(t-2)}{t-2} - \frac{1}{3.2}\int \frac{\mathrm{d}(2t-1)}{2t-1}$$

$$= \frac{2}{3}\ln|t-2| - \frac{1}{6}\ln|2t-1| = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(t-2)^4}{2t-1}\right|$$

Тогава

$$I = t + \frac{3}{6}\ln\left|\frac{(t-2)^4}{2t-1}\right| + C$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x-2)^4}{2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1}\right| + C.$$

Втора субституция на Ойлер. Ако $c > 0$, полагаме

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} \pm xt. \tag{4.6}$$

за определеност нека $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}+xt$. Като повдигнем двете страни на квадрат, получаваме:

$$x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},\qquad \mathrm{d}x=2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}\mathrm{d}t,$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}.$$

След заместване на този израз в (4.4) отново получаваме рационална подинтегрална функция $\bar{R}(t)$.

Пример 4.9. Решете интеграла $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$.

Решение. Коефициентът $a=-1<0$, но $c=1>0$ и полагаме

$$\sqrt{1+x-x^2}=1+xt\Longrightarrow 1+x-x^2=1+2tx+t^2x^2$$
$$\Longrightarrow(1-2t)x=(t^2+1)x^2|:x\neq 0\Longrightarrow x=\frac{1-2t}{t^2+1},\quad \left(t=\frac{\sqrt{1+x-x^2}-1}{x}\right),$$
$$\mathrm{d}x=\frac{-2(t^2+1)-2t(1-2t)}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t=2\frac{t^2-t-1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t,$$
$$\sqrt{1+x-x^2}=1+\frac{t-2t^2}{t^2+1}=-\frac{t^2-t-1}{t^2+1},\quad x+1=\frac{1-2t}{t^2+1}+1=\frac{t^2-2t+2}{t^2+1}$$
$$\Longrightarrow I=-2\int\frac{(t^2-t-1)(t^2+1)^2\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2(t^2-2t+2)(t^2-t-1)}=-2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t+2}.$$

Знаменателят на подинтегралната функция е квадратен тричлен с дискриминанта $D=-4<0$ и не може да се разложи на реални множители. Инетегралът ще решим със субституцията на Хорнер. Полагаме

$$t=u-\frac{b}{2a}=u+\frac{2}{2},\quad \text{т.е.}\quad t=u+1\Longrightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}u$$
$$\Longrightarrow I=-2\int\frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2-2(u+1)+2}=-2\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}=-2\mathrm{arctg}u+C$$
$$=-2\mathrm{arctg}(t-1)+C\Longrightarrow I=-2\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+x-x^2}-1-x}{x}\right)+C.$$

Трета субституция на Ойлер. Ако квадратният тричлен от (4.4) има реални и различни корени x_1 и x_2, $(b^2-4ac>0)$, полагаме

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)\tag{4.7}$$
$$\Longrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)=t^2(x-x_1)^2\Longrightarrow ax-ax_2=t^2x-t^2x_1$$
$$\Longrightarrow x=\frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2a(x_2-x_1)t}{(a-t^2)^2}\mathrm{d}t,\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_2-x_1)t}{a-t^2}.$$

Заместваме тези изрази в (4.4) и получаваме рационална подинтегрална функция $\bar{R}(t)$.

Пример 4.10. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}$.

Решение. От $x^2-4x+3=0 \Longrightarrow x_1=3,\ x_2=1$ и полагаме $(a<0,\ c<0)$:

$$* \quad \sqrt{-(x-1)(x-3)} = t(x-1) \Longrightarrow -(x-1)(x-3) = t^2(x-1)^2$$

$$\Longrightarrow -x+3 = t^2x - t^2 \Longrightarrow x = \frac{t^2+3}{t^2+1},$$

$$* \quad \mathrm{d}x = \frac{2t(t^2+1)-2t(t^2+3)}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t = \frac{-4t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{-x^2+4x-3} = t\Big(\frac{t^2+3}{t^2+1}-1\Big) = \frac{2t}{t^2+1}, \quad x-2 = \frac{t^2+3}{t^2+1}-2 = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

$$\Longrightarrow I = -\frac{4}{2}\int \frac{t(t^2+1)^2\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2(1-t^2)t} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

$$= \frac{2}{2}\int \frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(t-1)}{t-1} - \int \frac{\mathrm{d}(t+1)}{t+1}$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t+1| + C = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

От $\sqrt{-(x-1)(x-3)} = t(x-1) \Longrightarrow t = \sqrt{\dfrac{-(x-1)(x-3)}{(x-1)^2}} = \sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$

$$\Longrightarrow I = \ln\left|\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}}\right| + C.$$

V клас

Интеграл от вида (*биномен*)

$$\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x, \tag{4.8}$$

като предполагаме, че m, n, p са рационални числа, поне едно от тях е дробно, $a, b \in \mathbb{R}$. Изразът $x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x$ се нарича *диференциален бином*.

Интегралът от вида (4.8) е решим *само* в три случая:

I случай. Ако p е цяло число, то (4.8) е от вида (4.2).

II случай. Ако $p = \frac{r}{s}$ е дробно число, но $\frac{m+1}{n}$ е *цяло*, то полагаме

$$a + bx^x = t^s, \tag{4.9}$$

където s е знаменателят на p и намираме

$$x = \left(\frac{t^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{(t^s - a)^{\frac{1}{n}-1}}{nb^{\frac{1}{n}}} st^{s-1}\mathrm{d}t.$$

Получените изрази заместваме в (4.8) и получаваме интеграл, в който подинтегралната функция е реална, защото $\frac{m+1}{n}$ е цяло число.

III случай. Ако $p = \frac{r}{s}$ и $\frac{m+1}{n}$ са *дробни числа*, но $(\frac{m+1}{n} + p)$ е *цяло число*, полагаме

$$\frac{a + bx^n}{x^n} = t^s. \tag{4.10}$$

Намираме

$$x = a^{\frac{1}{n}}(t^s - b)^{-\frac{1}{n}}, \qquad \mathrm{d}x = a^{\frac{1}{n}}(-\frac{1}{n})(t^s - b)^{-\frac{1}{n}-1}st^{s-1}\mathrm{d}t$$

и като заместим в (4.8) се получава интеграл от рационална функция.

И така, ако поне едно от числата p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ са цели, то (4.8) се решава с елементарни функции.

Пример 4.11. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1 + \sqrt[3]{x})^3}$

Решение. Записваме интеграла във вида (4.8): $I = \displaystyle\int x^{-1}(1 + x^{1/3})^{-3}\mathrm{d}x$, където $m = -1$, $n = 1/4$, $p = -3$. Тъй като p е цяло число, интегралът се свежда до (4.2):

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1 + x^{1/3})^3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1 + 3x^{1/3} + 3x^{2/3} + x)}.$$

Полагаме $x = t^3$ ($t = \sqrt[3]{x}$), $\mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t$ и заместваме:

$$I = \int \frac{3t^2\mathrm{d}t}{t^3(1 + 3t + 3t^2 + t^3)} = 3\int \frac{\mathrm{d}t}{t(1 + t)^3}.$$

Разлагаме в сума от елементарни дроби:

$$\frac{1}{t(1+t)^3} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1+t)^2} + \frac{D}{(1+t)^3}$$

$$
\begin{aligned}
1 &= A(1+t)^3 + Bt(1+t)^2 + Ct(1+t) + Dt \\
&= (A+B)t^3 + (3A+2B+C)t^2 + (3A+B+C+D)t + A
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \left|\begin{array}{l} A=1 \\ 3A+B+C+D=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ A+B=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \\ D=-1 \end{array}\right.
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow I &= 3\left[\int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} - \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^3}\right] \\
&= 3\left[\ln|t| - \ln|1+t| + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2(1+t)^2}\right] + C \\
&= 3\ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + \frac{3(2t+3)}{2(1+t)^2} + C = 3\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right| + \frac{3(2\sqrt[3]{x}+3)}{2(1+\sqrt[3]{x})^2} + C.
\end{aligned}
$$

Пример 4.12. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Решение. Написваме интеграла във вида (4.8) $I = \displaystyle\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}\mathrm{d}x$, където $m=-1/2, n=1/4, p=1/3$ $(s=3)$.

Тъй като p е *дробно число*, образуваме $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2$, което е *цяло число* (II случай).

Полагаме (вж. (4.9)) $1+x^{1/4} = t^3 \Longrightarrow x^{1/4} = t^3 - 1 \Longrightarrow x = (t^3-1)^4$ $(t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}})$, $\mathrm{d}x = 4(t^3-1)^3 3t^2\mathrm{d}t$ и заместваме:

$$
\begin{aligned}
I &= 12\int (t^3-1)^{-2}t^3(t^3-1)^3\mathrm{d}t = 12\int t^3(t^3-1)\mathrm{d}t = 12\int t^6\mathrm{d}t - 12\int t^3\mathrm{d}t \\
&= 12\frac{t^7}{7} - 12\frac{t^4}{4} + C = \frac{12}{7}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^7 - 3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^4 + C
\end{aligned}
$$

Пример 4.13. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Решение. Написваме интеграла във вида (4.8): $I = \displaystyle\int x^0(1+x^4)^{-1/4}\mathrm{d}x$, като $m=0$, $n=4$, $p=1/4$ $(s=4)$. Тъй като p е *дробно число*, образуваме $\frac{m+1}{n} = \frac{0+1}{4} = \frac{1}{4}$, което е също *дробно число*. Тогава образуваме $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ - цяло число (III случай).

Полагаме (вж. (4.10) $\dfrac{1+x^4}{x^4} = t^4 \Longrightarrow \dfrac{1}{x^4} + 1 = t^4 \Longrightarrow \dfrac{1}{x^4} = t^4 - 1 \Longrightarrow x^4 =$

$(t^4-1)^{-1} \Longrightarrow x = (t^4-1)^{-1/4}\left(t = \dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\right)$, $\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}(t^4-1)^{-5/4}4t^3\mathrm{d}t$ и заместваме

$$I = -\int\left(1+\frac{1}{t^4-1}\right)^{-\frac{1}{4}}(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}t^3\mathrm{d}t = -\int\left(\frac{t^4-1+1}{t^4-1}\right)^{-\frac{1}{4}}(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}t^3\mathrm{d}t$$
$$= -\int t^2(t^4-1)^{\frac{1}{4}}(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}\mathrm{d}t = -\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{t^4-1}.$$

Разлагаме подинтегралната функция на получения интеграл в сума от елементарни дроби:

$$\frac{t^2}{(t^2+1)(t-1)(t+1)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{t+1}$$
$$t^2 = (At+B)(t^2-1) + C(t^2+1)(t+1) + D(t^2+1)(t-1).$$

* Полагаме $t = 1 \Longrightarrow 1 = 4C \Longrightarrow C = 1/4$.
* Полагаме $t = -1 \Longrightarrow 1 = -4D \Longrightarrow D = -1/4$.
* Полагаме $t = i \Longrightarrow -1 = (Ai+B)(-2) \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}-2B=-1\\ -2A=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}B=1/2\\ A=0.\end{array}\right.$

$$\Longrightarrow I = -\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} - \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}t + \frac{1}{4}(\ln|t+1| - \ln|t-1|) + C$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\right) + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right| + C.$$

Пример 4.14. Решете интеграла $\displaystyle\int\sqrt{x}\sqrt[3]{\sqrt[5]{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Решение. Написваме интеграла във вида (4.8)

$$I = \int x^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{1}{15}}\mathrm{d}x,$$

като $m = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $p = \frac{1}{15}$ $(s = 15)$.

Тъй като p е *дробно число*, образуваме $\frac{m+1}{n} = \frac{\frac{1}{2}+1}{1} = \frac{3}{2}$, което е *дробно число*, а $\frac{m+1}{n} + p = \frac{3}{2} + \frac{1}{15} = \frac{47}{30}$ е също *дробно число*. Следователно даденият интеграл е *нерешим*.

Общи задачи

Пример 4.15. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}\mathrm{d}x.$

Решение. Интегралът се свежда до интеграл от вида (4.3):

$$I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{(x-1)^4(x+2)^4\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-1}}}.$$

Полагаме

$$\frac{x+2}{x-1}=t^4 \Longrightarrow x=\frac{t^4+2}{t^4-1}\ \left(t=\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}\right),\quad \mathrm{d}x=\frac{-12t^3\mathrm{d}t}{(t^4-1)^2}$$

$$\Longrightarrow I=\int \frac{-12t^3}{\dfrac{9t^4}{(t^4-1)^2}(t^4-1)^2t}\mathrm{d}t=-\frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\frac{4}{3t}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.$$

Пример 4.16. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}.$

Решение. Интегралът е от вида (4.1), но чрез предварително преобразуване може да се сведе до по-прост интеграл от ирационална функция:

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{x^2 2x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{2}\int \frac{x^2\mathrm{d}(x^2)}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Полагаме $x^2=z \Longrightarrow I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{z\mathrm{d}z}{\sqrt{z+2}}$ (интеграл от вида (4.3)). Правим второ полагане:

$$z+2=t^2,\quad z=t^2-2\quad (t=\sqrt{z+2}=\sqrt{x^2+2}),\quad \mathrm{d}z=2t\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow I=\frac{1}{2}\int \frac{(t^2-2)2t}{t}\mathrm{d}t=\int (t^2-2)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}-2t+C$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3}-2\sqrt{x^2+2}+C=\frac{x^2-4}{3}\sqrt{x^2+2}+C.$$

Пример 4.17. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}.$

Решение. Преобразуваме подинтегралната функция:

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(x+x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\left(\frac{-2}{x^3}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1/x^2)}{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1/x^2+1)}{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}.$$

Полагаме $\frac{1}{x^2}+1=t^2$, $x^2=\frac{1}{t^2-1}$ $\left(t=\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$.

$$\Longrightarrow I=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t^2)}{1+t}=-\frac{1}{2}\int\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t}=-\int\frac{t+1-1}{1+t}\mathrm{d}t=-\int\mathrm{d}t+\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

$$=-t+\ln|1+t|+C=\ln\left|1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right|-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+C$$

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

Пример 4.18. Да се реши $\int\sqrt[3]{x(1-x^2)}\mathrm{d}x$.

Решение. Записваме интеграла във вида

$$I=\int x^{1/3}(1-x^2)^{1/3}\mathrm{d}x$$

(интеграл от диференциален бином, $m=1/3$; $n=2$; $p=1/3$).

Правим субституцията $\frac{1}{x^2}-1=t^3$ $\left(\frac{m+1}{n}+p=1\right)$ (вж. (4.10). От

$$x=\frac{1}{\sqrt{t^3+1}}\quad\left(t=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}\right),\qquad \mathrm{d}x=-\frac{3t^2\mathrm{d}t}{2\sqrt{(t^3+1)^3}}$$

$$\Longrightarrow I=\int\frac{1}{\sqrt{(t^3+1)^{\frac{1}{3}}}}\left(1-\frac{1}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{3t^2\mathrm{d}t}{2\sqrt{(t^3+1)^3}}\right)$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{1}{\sqrt{(t^3+1)^{\frac{1}{3}}}}\frac{(t^3+1-1)^{\frac{1}{3}}}{(t^3+1)^{\frac{1}{3}}}\frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^3+1)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{3}{2}\int\frac{t^3\mathrm{d}t}{(t^3+1)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{t.3t^2\mathrm{d}t}{(t^3+1)^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{t\mathrm{d}(t^3+1)}{(t^3+1)^2}=\frac{1}{2}\int t\mathrm{d}\frac{1}{t^3+1}$$

$$=\frac{t}{2(t^3+1)}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}=\frac{t}{2(t^3+1)}-\frac{1}{2}I_1$$

$$I_1 = \frac{1}{3}\ln\frac{|t+1|}{\sqrt{t^2-t+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \quad \text{(вж. пример 3.1, в)}$$

$$\Longrightarrow I = \frac{t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{6}\ln\frac{|t+1|}{\sqrt{t^2-t+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,\ t = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}\ .$$

Пример 4.19. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{15}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

Решение. Тъй като

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}},$$

интегралът може да се запише по следния начин:

$$I = \int \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{14} \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \int\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{14}\mathrm{d}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{15}}{15} + C.$$

Пример 4.20. Да се реши $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}.$

Решение. Интегралът може да се разглежда като интеграл от диференциален бином ($m=-3/2$, $n=1$, $p=-3/2$), от вида $\displaystyle\int R(x,\sqrt{ax-x^2})\mathrm{d}x$ и като абелев. Ще решим интеграла по трите начина.

I начин. Интеграл от диференциален бином (вж. (4.8)).

$$I = \int x^{-3/2}(2-x)^{-3/2}\mathrm{d}x.$$

Тъй като $\dfrac{m+1}{n} + p = \dfrac{\frac{-3}{2}+1}{1} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \in \mathbb{Z}$ (вж. (4.10)), полагаме

$$\frac{2}{x} - 1 = t^2 \Longrightarrow x = \frac{2}{t^2+1} \quad \left(t = \sqrt{\frac{2-x}{x}}\right), \quad \mathrm{d}x = \frac{-4t\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

$$\Longrightarrow I = \int \left(\frac{t^2+1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(2-\frac{2}{t^2+1}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[-\frac{4t}{(t^2+1)^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{\sqrt{(t^2+1)^3}}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2t^2+2-2}{t^2+1}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[-\frac{4t}{(t^2+1)^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{-4}{2\sqrt{2}.2\sqrt{2}} \int \sqrt{(t^2+1)^3}\frac{\sqrt{(t^2+1)^3}}{t^3}\frac{t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int \frac{t^2+1}{t^2}\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}} + C$$
$$= \frac{1}{2}\frac{x-2+x}{\sqrt{x(2-x)}} + C = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}} + C.$$

II начин. Интеграл от вида $\int R(x, \sqrt{ax-x^2})\mathrm{d}x$, $a = 2$.

Полагаме (вж. (4.4))

$$x = 2\sin^2 t \ (t = \arcsin\sqrt{x/2}),\ \mathrm{d}x = 4\sin t\cos t\mathrm{d}t,\ \sqrt{2x-x^2} = 2\sin t\cos t.$$
$$\Longrightarrow I = \int \frac{4\sin t\cos t}{(2\sin t\cos t)^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t\cos^2 t} = \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t\cos^2 t}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}(\mathrm{tg}t - \mathrm{cotg}t) + C = \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{\sin t\cos t} + C = \frac{1}{2}\frac{\frac{x}{2} - \frac{2-x}{2}}{\sqrt{\frac{x}{2}\frac{2-x}{x}}} + C$$
$$= \frac{1}{4}\frac{x-2+x}{\frac{1}{2}\sqrt{x(2-x)}} + C = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}} + C.$$

III начин. Абелев интеграл с положителна дискриминанта на квадратния тричлен ($x_1 = 0$, $x_2 = 2$) (вж. (4.7)). Полагаме $\sqrt{x(2-x)} = tx$. От

$$x = \frac{2}{t^2+1}\left(t = \sqrt{\frac{2-x}{x}}\right),\ \mathrm{d}x = \frac{-4t\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2},\ \sqrt{2x-x^2} = \frac{2t}{t^2+1}.$$
$$\Longrightarrow I = \int \frac{-4t}{(t^2+1)^2\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^3}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int \frac{t^2+1}{t^2}\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-x}{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{2-x}} + C = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}} + C.$$

Пример 4.21. Решете $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\mathrm{d}x.$

Решение. Интегралът е абелев от вида (4.5), но може да се реши и по следния начин:

$$I = \int \frac{(2x+5)\mathrm{d}x}{\sqrt{9x^2+6x+1+1}} = \int \frac{(2x+5)\mathrm{d}x}{\sqrt{(3x+1)^2+1}}.$$

Полагаме $3x+1=t$, $x=(t-1)/3$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t/3$

$$\Longrightarrow I=\int\frac{\frac{2}{3}(t-1)+5}{\sqrt{t^2+1}}\frac{\mathrm{d}t}{3}=\frac{1}{9}\int\frac{2t+13}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t=\frac{1}{9}\int\frac{2t\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}+\frac{13}{9}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}$$
$$=\frac{2}{9}\sqrt{t^2+1}+\frac{13}{9}\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+C$$
$$=\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln|3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}|+C.$$

Пример 4.22. Решете $I=\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}\mathrm{d}x.$

Решение. Интегралът не може да се причисли към нито една от групите интеграли от ирационални функции. Затова преработваме подинтегралната функция:

$$I=\int\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}\sqrt{1+3\left(\frac{1}{x^2}\right)+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}}.$$

Полагаме $\dfrac{1}{x^2}=z\Longrightarrow I=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{(1-z)\mathrm{d}z}{z\sqrt{1+3z+z^2}}$. Този интеграл е абелев от вида (4.4). От $a=1>0$ следва полагането (вж. (4.5)): $\sqrt{1+3z+z^2}=t+z$,

$$z=\frac{t^2-1}{3-2t}\ \left(t=\frac{\sqrt{x^4+3x^2+1}-1}{x^2}\right),\quad \mathrm{d}z=\frac{2(-t^2+3t-1)}{(3-2t)^2}\mathrm{d}t,$$
$$\sqrt{1+3z+z^2}=\frac{-t^2+3t-1}{3-2t},\qquad 1-z=-\frac{t^2+2t-4}{3-2t}.$$
$$\Longrightarrow I=-\frac{1}{2}\int\frac{-(t^2+2t-4)}{3-2t}\cdot\frac{(3-2t)^2}{(t^2-1)(-t^2+3t-1)}\cdot\frac{2(-t^2+3t-1)}{(3-2t)^2}\mathrm{d}t$$
$$=\int\frac{t^2+2t-4}{(3-2t)(t-1)(t+1)}\mathrm{d}t.$$
$$\frac{t^2+2t-4}{(3-2t)(t-1)(t+1)}=\frac{A}{3-2t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t+1}\qquad\left(A=1,\ B=-\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{2}\right)$$
$$\Longrightarrow I=\int\frac{\mathrm{d}t}{3-2t}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}$$
$$=-\frac{1}{2}\ln|3-2t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln|t+1|+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{(t-1)(3-2t)}\right|+C,\qquad t=\frac{\sqrt{x^4+3x^2+1}-1}{x^2}.$$

ЗАДАЧИ

Решете *интегралите*:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ Отг. $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ Отг. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$ Отг. $-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C$

4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$ Отг. $\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

5. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$ Отг. $-4\arccos\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C$

6. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}dx$ Отг. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2(1+x^2)}+x}{\sqrt{2(1+x^2)}-x}\right| + C$

7. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$ Отг. $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C$

8. $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}$ Отг. $\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x\sqrt{15}+2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-2\sqrt{4x^2+1}}\right| + C$

9. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$ Отг. $\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2} + C$

Решете *интегралите*:

1. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$ Отг. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6\operatorname{arctg}(\sqrt[6]{x}) + C$

2. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$ Отг. $\frac{7}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt[6]{x}) - \frac{\sqrt[6]{x}}{2(1+\sqrt[3]{x})} + C$

3. $\int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$ Отг. $12\ln\left(\frac{\sqrt[12]{x}+1}{\sqrt[12]{x}}\right) - \frac{12}{\sqrt[12]{x}} + C$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ Отг. $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(1+\sqrt[4]{x}) + C$

5. $\int \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{1}{x}\right)dx$ Отг. $C - \sqrt{1-x^2} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \ln|x|$

6. $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ Отг. $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$

7. $\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$ Отг. $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2-x}} + \frac{2-x}{4}\sqrt{\frac{x}{2-x}} + C$

8. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x^2}$ Отг. $\arccos\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$

9. $\displaystyle\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\frac{dx}{x^3}$ Отг. $\displaystyle\frac{5}{4}\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^4}-\frac{5}{9}\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^9}+C$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}$ Отг. $\displaystyle -3\sqrt[6]{\frac{x-5}{x-7}}+C$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}$ Отг. $\displaystyle\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C$

12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}dx$

Отг. $\displaystyle\frac{3x+4}{3}-\frac{\sqrt[3]{(3x+4)^2}}{2}+\sqrt[3]{3x+4}-\ln|1+\sqrt[3]{3x+4}\,|+C$

13. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$ Отг. $\displaystyle\frac{3x+11}{15}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C$

14. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$ Отг. $\frac{3}{8}t^2-\frac{3}{4}t+\frac{3}{4}\ln|t+1|+C,\quad t=\sqrt[3]{x^4+1}$

15. $\displaystyle\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Отг. $\displaystyle\frac{-3x^4-4x^2-8}{15}\sqrt{1-x^2}+C$

16. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$ Отг. $\ln(\sqrt{1+x^2}+1)+C$

III. Решете *абелевите интеграли*:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ Отг. $\displaystyle\ln\left|1-\frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right|+C$

2. $\displaystyle\int \frac{(x-1)dx}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$ Отг. $\displaystyle\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}+C$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}$ Отг. $\displaystyle\ln\left|\frac{\sqrt{2x^2+2x+1}-1}{x}\right|+C$

4. $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$ Отг. $x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}|+C$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{3+2x-x^2}}$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3+2x-x^2}}{|x-1|}+C$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ Отг. $\displaystyle\frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(7x-x^2-10)^3}}$ Отг. $\displaystyle\frac{4x-14}{9\sqrt{7x-x^2-10}}+C$

8. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$

Отг. $\displaystyle\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{|1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}|}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}+C$

9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$ Отг. $C - \dfrac{1}{\sqrt{15}} \ln\left|\dfrac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|$

10. $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}$ Отг. $\dfrac{2(7x^2-34x+40)}{9(x-2)\sqrt{7x-10-x^2}} + C$

11. $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+x+2)\sqrt{4x^2+4x+3}}$

Отг. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{4x^2+4x+3}}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{35}} \ln \dfrac{|\sqrt{7(4x^2+4x+3)} - \sqrt{5}(2x+1)|}{\sqrt{x^2+x+2}} + C$

12. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\mathrm{d}x$

Отг. $\dfrac{2x^2+x+7}{6}\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}| + C$

13. $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$, $x > 3$ Отг. $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{1-x} - 2\arcsin\dfrac{1}{x-2} + C$

14. $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)\mathrm{d}x}{x\sqrt{62x^2-x^4-1}}$ Отг. $\arcsin\dfrac{x^2+1}{8x} + C$

IV. Решете *биномните интеграли*:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^6-1}}$ Отг. $\frac{1}{3}\ln|x^3+\sqrt{x^6-1}| + C$

2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$

Отг. $\frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\ln|t^2+t+1| + \dfrac{3}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,\ t = \sqrt[3]{1+x^2}$

3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ Отг. $\frac{1}{6}\ln\dfrac{t^2+t+1}{(t-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,\ t = \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$

4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$ Отг. $\dfrac{x}{5\sqrt{5-x^2}} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$ Отг. $-\frac{1}{10}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t + C,\ t = \dfrac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}$

6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} + C$

7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$ Отг. $\frac{1}{5}\ln\dfrac{|t-1|}{\sqrt{t^2+t+1}} + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,\ t = \sqrt[3]{1+x^5}$

8. $\displaystyle\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5} + C.$