ГЛАВА 8

ПРЕСМЯТАНЕ НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

А. Интегралът като функция на горната си граница

Нека $f(t) \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогава $f(t) \in \mathcal{R}[a,x]$, $\forall[a,x] \subset [a,b]$, $a \le x \le b$ (вж. гл. 6, св. 7°), т.е. съществува $\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$, който има напълно определена стойност при дадено x.

Дефиниция 1 *Функцията*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b] \tag{8.1}$$

*се нарича **интеграл като функция на горната си граница**.*

При какви условия $F(x)$ е *непрекъсната, диференцируема* и как се намира нейната *производна*:

Теорема 1 *Ако $f(t) \in \mathcal{R}[a,b]$, то $F(x) \in C[a,b]$.*

Теорема 2 *Ако $f(t) \in \mathcal{R}[a,b]$ и $f(t)$ е непрекъсната в точка $x_0 \in [a,b]$, то $F(x)$ е диференцируема в точка x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Следствие 1. Ако $f(t) \in C[a,b]$, $\forall x \in [a,b]$, то $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ е диференцируема във всяка точка $x \in [a,b]$ и $F'(x) = f(x)$, т.е. $F(x)$ е *примитивна функция* на $f(t)$ в $[a,b]$ (всяка функция $f(t) \in [a,b]$ има примитивна функция в $[a,b]$).

Теорема 3 ***(Основна теорема на интегралното смятане)*** *Ако $f(x) \in C[a,b]$ и $F(x)$ е примитивна функция на $f(x)$ в $[a,b]$, то в сила е равенството*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{8.2}$$

Това равенство се нарича *формула на Нютон-Лайбниц*, която дава връзка между определен и неопределен интеграл и правило за пресмятане на определен интеграл.

Пример 8.1. Решете интеграла $\int\limits_0^2 x^2 \mathrm{d}x$.

Решение. Съответният неопределен интеграл има решение $\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$ и тогава по формула (8.2) имаме

$$\int\limits_0^2 x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - 0 = \frac{8}{3}.$$

Числото 8/3 геометрически интерпретира лице на криволинеен триъгълник образуван от правите $x = 2$, $y = 0$ и параболата с уравнение $y = x^2$. (вж. модул 5, гл. 4, с. 37)

Пример 8.2. Решете интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Решение. От $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C$ и по формула (8.2) имаме

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x\Big|_0^1 = \mathrm{arctg}1 - \mathrm{arctg}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 8.3. Решете интеграла $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. От $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ и по формула (8.2) имаме

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1/2}^{1/2} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin(-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3}.$$

Б. Интегриране по части при определен интеграл

Формулата за интегриране по части при определен интеграл се дава със следната теорема

Теорема 4 *Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ са непрекъснати в $[a,b]$ и имат интегруеми производни $u'(x)$ и $v'(x)$ в $[a,b]$, то*

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \tag{8.3}$$

Пример 8.4. Решете интеграла $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\mathrm{d}x$.

Решение. След като внесем $\cos x$ под знака на диференциала, интегрираме по части по формула (8.3)

$$I = \int_0^{\pi/2} x\mathrm{d}\sin x = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} \sin x\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0.\sin 0 + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + (\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Пример 8.5. Решете интеграла $\int\limits_0^1 xe^x\mathrm{d}x$.

Решение. Внасяме e^x под знака на диференциала и интегрираме по части по формула (8.3)

$$I = \int_0^1 x\mathrm{d}e^x = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\mathrm{d}x = 1.e - 0.e^0 - e^x\Big|_0^1 = e - (e - e^0) = 1.$$

Може да се докаже ($m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$):

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^m x\mathrm{d}x$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} \cdot \frac{\pi}{2} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}, & m = 2n \\ \dfrac{2.4.6...(2n)}{1.3.5...(2n+1)} \cdot \frac{\pi}{2} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{\pi}{2}, & m = 2n+1. \end{cases} \tag{8.4}$$

Формулите (8.4) се наричат *формули на Валис* ($I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \pi/2$).

В. Смяна на променливите при определен интеграл

Нека е даден интегралът $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ и извършим подходяща смяна на интеграционната променлива $x = \varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. В много случаи пресмятането на интеграла се опростява.

Теорема 5 *Нека са изпълнени условията:*

а) $f(x) \in C[a,b]$, *т.е.* $f(x)$ *е непрекъсната в* $[a,b]$;

б) $\varphi(t) \in C^1[\alpha,\beta]$, *т.е.* $\varphi(t)$ *има непрекъсната производна в* $[\alpha,\beta]$;

в) $a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) \le \varphi(\beta) = b$, *т.е.* $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$. *Тогава*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{8.5}$$

Приложение 1. Нека $f(x)$ е *четна* функция, т.е. $f(-x) = f(x)$. Графиката на $f(x)$ е симетрична спрямо Oy. Тогава

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x. \tag{8.6}$$

Доказателство. $\int\limits_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x$. В първия интеграл правим смяна $x = -t$, при $x = -a \to t = a$; при $x = 0 \to t = 0$; $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Тогава

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_a^0 f(-t)(-\mathrm{d}t) + \int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int\limits_a^0 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^a f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Приложение 2. Нека $f(x)$ е *нечетна* функция, т.е. $f(-x) = -f(x)$. Графиката на $f(x)$ е симетрична спрямо O. Тогава

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{8.7}$$

Доказателство. $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$. В първия интеграл правим смяна $x = -t$, при $x = -a \to t = a$; при $x = 0 \to t = 0$; $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Тогава

$$I = \int\limits_{a}^{0} f(-t)(-\mathrm{d}t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_{a}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Пример 8.6. Решете интеграла $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 x + x^2 \sin x)\mathrm{d}x$.

Решение. $I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\mathrm{d}x + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \sin x\mathrm{d}x = I_1 + I_2$. Подинтегралната функция в I_1 е $f_1(x) = \cos^2 x$. $f_1(-x) = \cos^2(-x) = \cos^2 x = f_1(x)$ По формула (8.6) имаме

$$I_1 = 2\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2 x\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\mathrm{d}x = (x + \frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Подинтегралната функция в I_2 е $f_2(x) = x^2 \sin x$. $f_2(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = -x^2 \sin x = -f_2(x)$ Следователно по формула (8.7) имаме $I_2 = 0$.

$$\Longrightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Теорема 6 *Ако $f(x)$ е* ***периодична*** *функция с период T, т.е. $f(x+T) = f(x)$, $T > 0$, то $\forall a \in \mathbb{R}$ е изпълнено*

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx. \tag{8.8}$$

Теорема 7 $\int\limits_{0}^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} f(\cos x)dx.$

Доказателство. Полагаме $x = \pi/2 - t \Longrightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ и $(0, \pi/2) \to (\pi/2, 0)$.

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\pi/2}^{0} f[\sin(\pi/2 - t)]\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x. \tag{8.9}$$

Пример 8.7. Решете интегралите $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}$ и $I_2 = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x}$.

Решение. Полагаме $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$; $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; при $x = 0 \Longrightarrow$ $t = 0$, при $x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = 1$.

$$\Longrightarrow I_1 = \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}}{3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{4+2t^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(t/\sqrt{2})}{1+(t/\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

По формула (8.9) имаме $I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Теорема 8

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx \tag{8.10}$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx \tag{8.11}$$

Доказателство. (8.10): Полагаме $x = \pi - t$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, при $x = 0 \Longrightarrow t = \pi$, при $x = \pi \Longrightarrow t = 0$.

$$\Longrightarrow I = \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\sin(\pi - t))\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} (\pi - t)f(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} tf(\sin t)\mathrm{d}t = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t - I.$$

$$\Longrightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t \Longrightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

(8.11): Доказахме, че $I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$. В този интеграл полагаме $x = \pi/2 - t$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, при $x = 0 \Longrightarrow t = \pi/2$, при $x = \pi \Longrightarrow t = -\pi/2$.

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\int_{\pi/2}^{-\pi/2} f\Big(\sin(\frac{\pi}{2} - t)\Big)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\pi/2} f(\cos t)\mathrm{d}t = \pi\int_0^{\pi/2} f(\sin t)\mathrm{d}t = \pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

При доказателството използвахме, че $f(\cos t)$ е четна функция (формула (8.6)) и че $\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x$ (формула (8.9)).

Пример 8.8. Решете интеграла $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Решение. Прилагаме формула (8.10) от теорема 8:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1+\cos^2 x}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\mathrm{arctg}(\cos x)\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}(\mathrm{arctg}(-1) - \mathrm{arctg}1) = -\frac{\pi}{2}\Big(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Г. Геометрични приложения на определения интеграл

Определеният интеграл се прилага за пресмятане на лица на равнинни области, дължини на дъги на равнинни линии, обеми на някои тела и лица на ротационни повърхнини. Тези въпроси са разгледани в модул 5, гл. 4.

Пример 8.9. Решете интеграла $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\mathrm{d}x$.

Решение. $I = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x} dx = \int\limits_0^{\pi} |\cos x| dx$. $|\cos x| = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \pi/2] \\ -\cos x, & x \in (\pi/2, \pi]. \end{cases}$

$$\Longrightarrow I = \int\limits_0^{\pi/2} \cos x dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 - (-1) = 2.$$

Пример 8.10. Да се реши $\int\limits_0^{16} \dfrac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}$.

Решение.

$$I = \int\limits_0^{16} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x}}{x + 9 - x} dx = \frac{1}{9}\left[\int\limits_0^{16} \sqrt{x+9} d(x+9) + \int\limits_0^{16} \sqrt{x} dx\right]$$
$$= \frac{1}{9}\left[\frac{(x+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^{16} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^{16}\right] = \frac{2}{27}(125 - 27 + 64) = 12.$$

Пример 8.11. Решете $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{x + x^3}$.

Решение.

$$I = \int\limits_1^2 \frac{1 + x^2 - x^2}{x(1+x^2)} dx = \int\limits_1^2 \frac{1 + x^2}{x(1+x^2)} dx - \int\limits_1^2 \frac{x^2 dx}{x(1+x^2)} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x} - \int\limits_1^2 \frac{x dx}{1 + x^2}$$
$$= \ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}.$$

Пример 8.12. Решете интеграла $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$.

Решение.

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos x de^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} \sin x de^{2x}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} + \frac{e^\pi}{4} - \frac{1}{4}I$$

$$\Longrightarrow \frac{5}{4}I = \frac{e^\pi - 2}{4} \Longrightarrow I = \frac{e^\pi - 2}{5}.$$

Пример 8.13. Решете интеграла $\displaystyle\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\mathrm{d}x.$

Решение. Полагаме $x - 2 = t^3$, $x = t^3 + 2$ ($t = \sqrt[3]{x-2}$), $\mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t$. При $x = 3 \Longrightarrow t = 1$, при $x = 29 \Longrightarrow t = 3$.

$$I = \int\limits_1^3 \frac{t^2}{3+t^2}3t^2\mathrm{d}t = 3\int\limits_1^3 \frac{t^2+3-3}{3+t^2}t^2\mathrm{d}t = 3\int\limits_1^3 \frac{t^2+3}{3+t^2}t^2\mathrm{d}t - 9\int\limits_1^3 \frac{t^2+3-3}{3+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= 3\int\limits_1^3 t^2\mathrm{d}t - 9\int\limits_1^3 \mathrm{d}t + 27\int\limits_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} = 3\frac{t^3}{3}\Big|_1^3 - 9t\Big|_1^3 + 9\int\limits_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{1+(t/\sqrt{3})^2}$$

$$= (27-1) - 9(3-1) + 9\sqrt{3}\mathrm{arctg}(t/\sqrt{3})\Big|_1^3$$

$$= 8 + 9\sqrt{3}(\mathrm{arctg}\sqrt{3} - \mathrm{arctg}(1/\sqrt{3})) = 8 + 9\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 8 + 3\sqrt{3}\frac{\pi}{2}.$$

Пример 8.14. Решете интегралите: а) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \sin^6\frac{x}{2}\mathrm{d}x$, б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \cos^7 2x\mathrm{d}x$.

Решение. а) Полагаме $x = 2t$, $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$ ($t = x/2$). При $x = 0 \Longrightarrow t = 0$, при $x = \pi \Longrightarrow t = \pi/2$.

$$\Longrightarrow I = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 t\mathrm{d}t = 2\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{16}$$

(вж. формула (8.4) - формули на Валис).

б) Полагаме $2x = t$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/2$ ($x = t/2$). При $x = 0 \Longrightarrow t = 0$, при $x = \pi/4 \Longrightarrow t = \pi/2$.

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^7 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{2.4.6}{1.3.5.7} = \frac{8}{35}$$

(вж. формула (8.4) - формули на Валис).

Пример 8.15. Пресметнете $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Решение. Подинтегралната функция е периодична с период $\pi/2$. Според теорема 6

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 4\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= 4\Big[\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x(\mathrm{tg}^4 x + 1)} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x(1 + \mathrm{ctg}^4 x)}\Big]$$

$$= 4\Big[\int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \mathrm{tg}^2 x)\mathrm{d}\,\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}^4 x + 1} + \int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{(1 + \mathrm{ctg}^2 x)\mathrm{d}\,\mathrm{ctg}x}{1 + \mathrm{ctg}^4 x}\Big]$$

$$= 4\Big[\int_0^1 \frac{(1+t^2)\mathrm{d}t}{1+t^4} + \int_0^1 \frac{(1+t^2)\mathrm{d}t}{1+t^4}\Big]$$

$$= 8\int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t = 4\int_0^1 \frac{t^2 + 1 + t\sqrt{2} + t^2 + 1 - t\sqrt{2}}{(t^2 + t\sqrt{2} + 1)(t^2 - t\sqrt{2} + 1)}\mathrm{d}t$$

$$= 4\Big[\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}}\Big]$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}}\Big[\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(t\sqrt{2} - 1)}{(t\sqrt{2} - 1)^2 + 1} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(t\sqrt{2} + 1)}{(t\sqrt{2} + 1)^2 + 1}\Big]$$

$$= 4\sqrt{2}\Big[\mathrm{arctg}(t\sqrt{2} - 1) + \mathrm{arctg}(t\sqrt{2} + 1)\Big]\Big|_0^1 = 4\sqrt{2}\mathrm{arctg}\frac{t\sqrt{2} - 1 + t\sqrt{2} + 1}{1 - (2t^2 - 1)}\Big|_0^1$$

$$= 4\sqrt{2}\mathrm{arctg}\frac{t\sqrt{2}}{1 - t^2}\Big|_0^1 = 4\sqrt{2}(\frac{\pi}{2} - 0) = 2\sqrt{2}\pi.$$

Забележка. $\mathrm{arctg}\alpha + \mathrm{arctg}\beta = \mathrm{arctg}\dfrac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}$.

ЗАДАЧИ

Решете *интегралите*:

1. $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ Отг. 2

2. $\displaystyle\int_{1/2}^{(3^{\frac{1}{2}})/2} \frac{x^3 dx}{(\frac{5}{8}-x^4)\sqrt{\frac{5}{8}-x^4}}$ Отг. $4/3$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+1}$ Отг. $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$

4. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$ Отг. $\pi/6$

5. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$ Отг. 2

6. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x+\cos^3 x}\,dx$ Отг. $4/3$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$ Отг. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

8. $\displaystyle\int_{(2^{\frac{1}{2}})/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx$ Отг. $8/15$

9. $\displaystyle\int_{(8^{\frac{1}{2}})/3}^{8^{\frac{1}{2}}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}$ Отг. $\dfrac{\sqrt{6}}{27}+\dfrac{\pi\sqrt{2}}{48}$

10. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ Отг. $\pi/6$

11. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$ Отг. $\ln\dfrac{7+2\sqrt{7}}{9}$

12. $\displaystyle\int_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$ Отг. $\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$

13. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{6-5\sin x+\sin^2 x}\mathrm{d}x$ Отг. $\ln\frac{4}{3}$

14. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{1}{8}(3-\pi-\ln 2)$

15. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos x(2+\sin 2x)}$ Отг. $\frac{1}{4}\ln 3-\dfrac{\pi}{12\sqrt{3}}$

16. $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ Отг. $\ln\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}$

17. $\displaystyle\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos^2 x)}$ Отг. $\frac{1}{4}\ln\frac{12}{5}-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$

18. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} |x|\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$ Отг. $\ln 2+1-\pi/2$

19. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos^2 x)}$ Отг. $\frac{1}{4}\ln\frac{9}{5}$

20. $\displaystyle\int\limits_0^{1} \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$ Отг. $\pi/2-2/3$

21. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\cos x\mathrm{d}x}{8\cos^3 x+\sin^3 x}$ Отг. $\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{3\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\pi}{24\sqrt{3}}$

22. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\cos x\mathrm{d}x}{4\cos x+3\sin x}$ Отг. $\dfrac{3}{13}\ln\dfrac{7\sqrt{2}}{8}+\dfrac{\pi}{3}$

23. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{(\cos x+1)\sin x}{(\cos^2 x+2)^2}\mathrm{d}x$ Отг. $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

24. $\displaystyle\int\limits_0^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$ Отг. $4\pi/3-\sqrt{3}$

25. $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^{-x}\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{1}{9}\ln\frac{2}{5}+\frac{4}{15}$

26. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\mathrm{d}x$ Отг. $\ln\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\pi/3$

27. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin 2x\mathrm{d}x}{\cos^3 x-2\sin^2 x-1}$ Отг. $\dfrac{1}{7}\ln\dfrac{3}{19}+\dfrac{6\sqrt{3}}{7}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{4}{\sqrt{3}}-\dfrac{\pi}{3}\right)$

28. $\displaystyle\int_1^{5^{\frac{1}{3}}} \frac{x^2\mathrm{d}x}{13-6x^3+x^6}$ Отг. $\pi/12$

29. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$ Отг. $\ln\frac{3}{2}$

30. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ Отг. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{8}{5}-\dfrac{1}{10}\ln 2$

31. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ Отг. $\sqrt{3}-2+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3^3(1+\sqrt{2})^4}{(3+2\sqrt{3})^3}$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ Отг. $\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{\pi+1}{6}-\dfrac{2}{3}\ln 2$

33. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$ Отг. $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}-\dfrac{\pi}{2}-\ln\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}$

34. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\mathrm{d}x}{2-\sin^2 x-\cos x}$ Отг. $2\pi\sqrt{3}/9$

35. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$ Отг. $\ln\dfrac{3-2\sqrt{3}}{2e-1+2\sqrt{e^2+e+1}}$