Лекция 8
Тема: Мрежови оптимизационни задачи.
Задача за минимален скелет.
Задача за мрежово планиране

Основни понятия и формули

Граф $G=\{V,D\}$ се нарича двуелементно множество, като единият от елементите V е непразно множество на *възли* (върхове), а другият D е множество на *дъги* (ребра).

Броят на елементите на V означаваме с $n=|V|$ и броят на елементите на D с $m=|D|$.

Елементите на D са двойки от елементите на V, т.е. $D_k \in D \Leftrightarrow D_k=\{V_i,V_j\}, V_i,V_j \in V$ и дъгата D_k е инцидентна с възлите V_i и V_j.

Ако дъгите на графа са наредени двойки $D_k=(V_i,V_j)$, където V_i е начален възел, т.е. $S(D_k)=V_i$ и V_j е краен възел на дъгата, т.е. $E(D_k)=V_j$, то графът е *ориентиран*. Ако дъгите са двуелементни множества от възли $D_k=\{V_i,D_j\}$, то графът е *неориентиран*.

Геометрично, даден граф се изобразява, като възлите са различни точки от равнината, а дъгите са линии или вектори, свързващи възлите.

Забележка 1. Всички възли както и дъгите, винаги могат да се преномерират, без да се променят решенията на формулираните задачи.

Дъга примка е тази, за която началния и крайния възел съвпадат.

Два *възела са съседни*, ако съществува дъга, която ги съединява.

Наредено множество от дъги $A=(D_1,...,D_i,...,D_p)$, $D_i \in D$ от графа $G=\{V,D\}$ се нарича *път*, ако е изпълнено

(7.1) $$S(D_{i+1})=E(D_i), \quad (i=1,...,p-1).$$

Ако още $S(D_1)=E(D_p)$, то множеството $A=(D_1,...,D_i,...,D_p)$ е *контур*.

Наредено множество от дъги $B=(D_1,...,D_i,...,D_p)$, $D_i \in D$ от графа $G=\{V,D\}$ се нарича *верига*, ако всеки две съседни дъги имат общ възел и друга дъга от това множество B не е инцидентна с него. Ако началната и крайната дъга на това множество имат общ възел, то $B=(D_1,...,D_i,...,D_p)$ е *контур*.

За неориентираните графи понятията път и верига съвпадат, както съвпадат контур и цикъл.

Свързан граф е този, в който всеки два възела са краища на верига и е изпълнено

(7.2) $$|D| \geq |V|-1.$$

Скелет $\hat{G}=\left\{V,\hat{D}\right\}$ на графа $G=\{V,D\}$ се нарича такава част от графа, за която са изпълнени условията:

1) участват всички възли;

2) броят на дъгите в $\hat{D}$ е с единица по-малък от броя на възлите, $\left|\hat{D}\right|=|V|-1$;

3) дъгите от $\hat{G}$ не образуват цикъл.

В *коскелета* $\hat{G}^c=\left\{V,D\setminus\hat{D}\right\}$ на графа $G=\{V,D\}$ със скелет $\hat{G}=\left\{V,\hat{D}\right\}$ участват всички възли и останалите дъги , които не участват в скелета.

Нека има две подмножества от възли $V'\subset V, V''\subset V$ за графа $G=\{V,D\}$ и е изпълнено $V'\bigcap V''=\varnothing$. *Коцикъл* на V' се нарича множеството от всички дъги, на които единия край е във V', а другия е във V''.

Триелементно множество $M=\{V,D,C\}$ се нарича *мрежа*, ако за графа $G=\{V,D\}$ са известни характеристики на дъгите – множеството *C* и $|C|=|D|=m$. За характеристика се приемат: дължина на път, разход на енергия, печалба, надеждност и др.

Задача за минимален скелет: За дадената мрежа $M=\{V,D,C\}$, да се намери скелет $\hat{G}_j=\left\{V,\hat{D}_j\right\}$на графа $G=\{V,D\}$, за който сумата от характеристиките на скелетните дъги да е минимална, т.е.

(7.3) $$\min S_j=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{c_k / D_k\in\hat{D}_j\right\}.$$

Обикновено тази задача се формулира за неориентирани графи.

Алгоритъм на Прим за решаване на задачата за минимален скелет.

Стъпка 1. Множеството на възлите V на графа $G=\{V,D\}$ се разделят на две, както следва $V_1'=\{V_i\}$ и $V_1''=V\setminus V_1'$.

Стъпка 2. Определя се коцикъла на V_1' и между дъгите от коцикъла се избира тази с минимална характеристика, която е $c_k\leftrightarrow D_k=\left\{V_i,V_j\right\}$.

Стъпка 3. Отново се разделя V на две, както следва $V_2'=\left\{V_i,V_j\right\}$ и $V_2''=V\setminus V_2'$, т.е. към множеството V_2' се включва и другия край на избраната дъга с минимална характеристика. Между дъгите от коцикъла на V_2' се избира тази с минимална характеристика и т.н. до коцикъла на V_{n-1}'.

Забележка 2. Ако изборът на минималната характеристика не е еднозначен, то се избира една произволна дъга с минимална характеристика.

Задача за мрежово планиране: Да се намери минималното време T за завършване на даден сложен процес, в който участват определен брой свързани операции $a_1,...,a_i,...,a_n$. Известно е съответно времетраенето $t_1,...,t_i,...,t_n,(t_i\geq 0)$ на операциите и се знае поредността на изпълнението им, т.е. кои операции са предходни, за да започне следващата операция.

Поставената задача може да се зададе с така наречената структурна таблица (*табл.7.2.*).

Таблица 7.2.

текущи операции	a_1	a_2	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_n
предходни операции	-	-	$\cdots$	a_2 a_{i-3}	$\cdots$	a_i $\vdots$ a_{n-1}
времетраене	t_1	t_2	$\cdots$	t_i	$\cdots$	t_n

Разглеждаме задача с наредена структурна таблица, за която е изпълнено: предходните операции са с индекси по-малки от тези на текущите операции, т.е. предходните операции вече са завършени.

Решаването на поставената задача може да се извърши графично, като се построи един граф, относно една координатна система. Нека YSt е координатна система, където $S \equiv O(0,0)$ е началото, St е абсцисната ос и SY е ординатната ос. Разположението на графа е в I и IV квадрант на YSt.

Графът се построява по следния начин:

1. Възел $V_0 \equiv S$ е началото на процеса.
2. На всяка операция a_i съответства дъга – вектор с проекция върху St равна на времетраенето ѝ t_i и тази дъга завършва във възел V_i.
3. Началото на всяка операция е най-отдалечения краен възел от S на предходните ѝ операции.
4. На построения граф, търсеното минимално време T за изпълнение на дадения процес е абсцисата на най-отдалечения възел $V_k\left(k \le n\right)$ от S.

Съществува поне един път с начален възел S и краен V_k, който се нарича *критичен път*. Операциите в него са *критични операции* и за тях резерва от време е равен на нула. Останалите операции са *некритични*.

Правила за решаване на задачи

Задача за минимален скелет

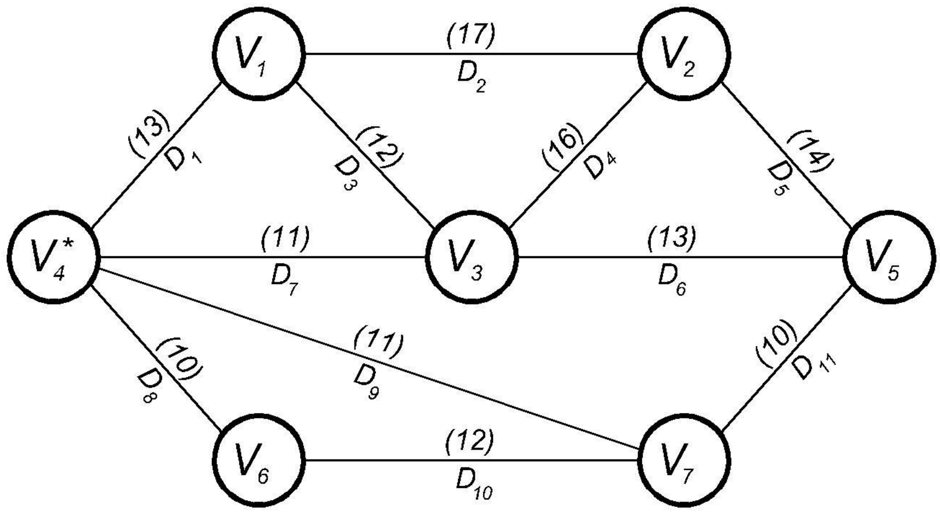
- Алгоритъм на Прим.

Задача за мрежово планиране

- Построяване на граф в равнината YSt.
- Определяне на $T_{\min}$ на процеса и определяне на критичните операции.

Задачи и въпроси

7.1. Да се намери минималният скелет и стойността му за даденият граф с начален възел V_4.



Фиг. 7.1.

Решение: 1. Определяме множествата V_1', състоящо се само от началният възел и V_1'', който съдържа всички останали възли.

$$V_1' = \{V_4\},\ V_1'' = \{V_1;V_2;V_3;V_5;V_6;V_7\}.$$

Коцикълът на V_1' при това деление се състои от всички дъги, чийто краища лежат в двете множества V_1' и V_1'':

$$CC^1 = \{D_1;D_7;D_9;D_8\}.$$

Характеристиките на тези дъги са: $c_1 = 13$, $c_7 = 11$, $c_9 = 11$ и $c_8 = 10$

Измежду тези дъги избираме тази с минимална характеристика. Това е дъга D_8 с характеристика $c_8 = 10$. Възелът, който е инцидентен с тази дъга и лежи в множеството V_1'' е V_6, така че той се включва в множеството V_1', а дъга D_8 става част от минималния скелет, който търсим.

2. Новото деление е $V_2' = \{V_4;V_6\}$, $V_2'' = \{V_1;V_2;V_3;V_5;V_7\}$.

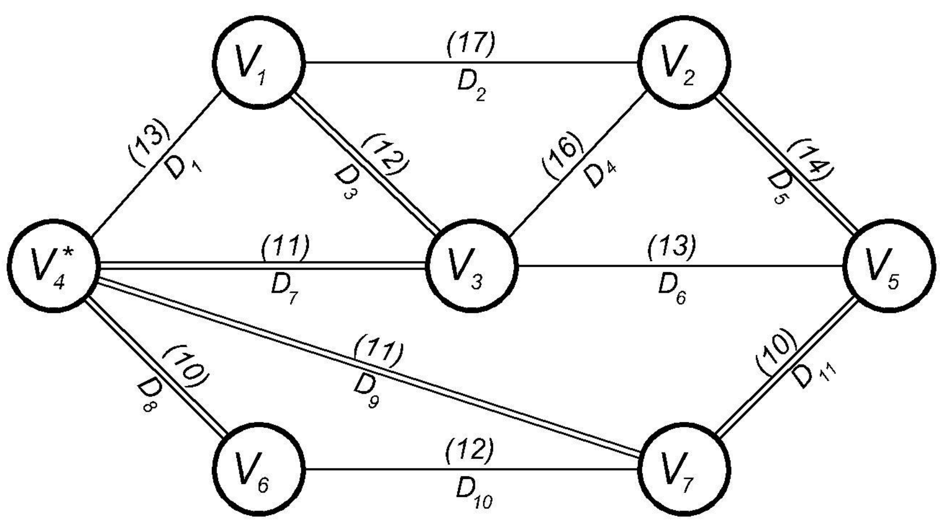
Коцикълът на V_2' е $CC^2 = \{D_1;D_7;D_9;D_{10}\}$. В този коцикъл има две дъги с равни минимални характеристики - D_7 и D_9, като $c_7 = c_9 = 11$. Избираме произволна от тях, например D_9, която става част от минималния скелет, а другият край на тази дъга – възелът V_7 присъединяваме към множеството V_2'.

3. $V_3' = \{V_4; V_6; V_7\}$, $V_3'' = \{V_1; V_2; V_3; V_5\}$, $CC^3 = \{D_1; D_7; D_{11}\}$. Дъгата с минимална характеристика, участваща в коцикъла CC^3 е D_{11} с характеристика $c_{11} = 10$. Фиксираме я като част от минималния скелет, а възелът V_5, инцидентен с нея включваме в множеството V_3'.

4. $V_4' = \{V_4; V_6; V_7; V_5\}$, $V_4'' = \{V_1; V_2; V_3\}$, $CC^4 = \{D_1; D_7; D_6; D_5\}$. Дъга D_7 има минимална характеристика $c_7 = 11$. Фиксираме я в минималния скелет, а другият край – възелът V_3 присъединяваме към множеството V_4'.

5. $V_5' = \{V_4; V_6; V_7; V_5; V_3\}$, $V_5'' = \{V_1; V_2\}$, $CC^5 = \{D_1; D_3; D_4; D_5\}$. Измежду дъгите, участващи в този коцикъл, тази с минимална характеристика е D_3 с $c_3 = 12$. Включваме дъгата D_3 в минималния скелет, а другият й край – възелът V_1 става част от множеството V_5'.

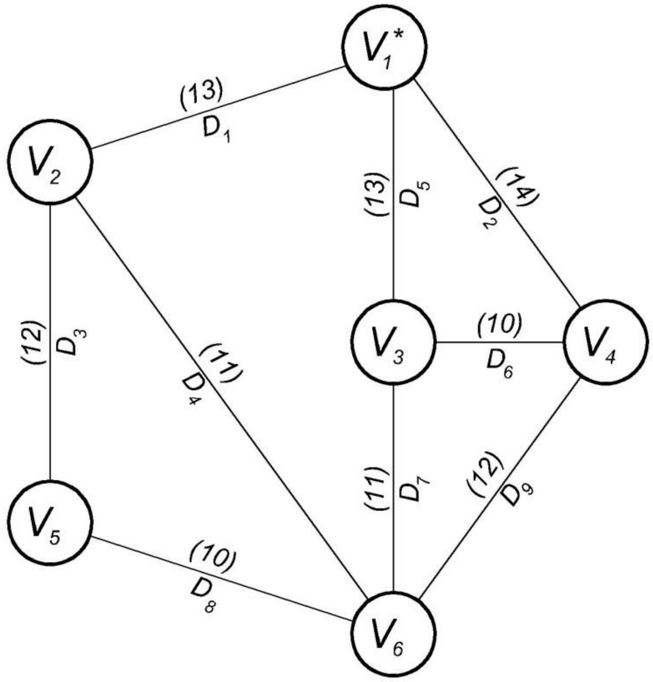
6. $V_6' = \{V_4; V_6; V_7; V_5; V_3; V_1\}$, $V_6'' = \{V_2\}$, $CC^6 = \{D_2; D_4; D_5\}$. Дъга D_5 има минимална характеристика $c_5 = 14$. Тази дъга става част от минималния скелет, а другият и край е възелът V_2, който се включва в множеството V_6', а множеството V_6'' остава празно. Следователно минималният скелет $S_{\min}$ е намерен и той се състои от дъгите $S_{\min} = \{D_8; D_9; D_{11}; D_7; D_3; D_5\}$ и стойността му се намира като се сумират характеристиките на дъгите, участващи в него. $S_{\min} = c_8 + c_9 + c_{11} + c_7 + c_3 + c_5 = 10 + 11 + 10 + 11 + 12 + 14 = 68$.



Фиг. 7.2.

Да се намери минималният скелет и стойността му за дадените графи. Началният възел е означен със символа $(*)$.

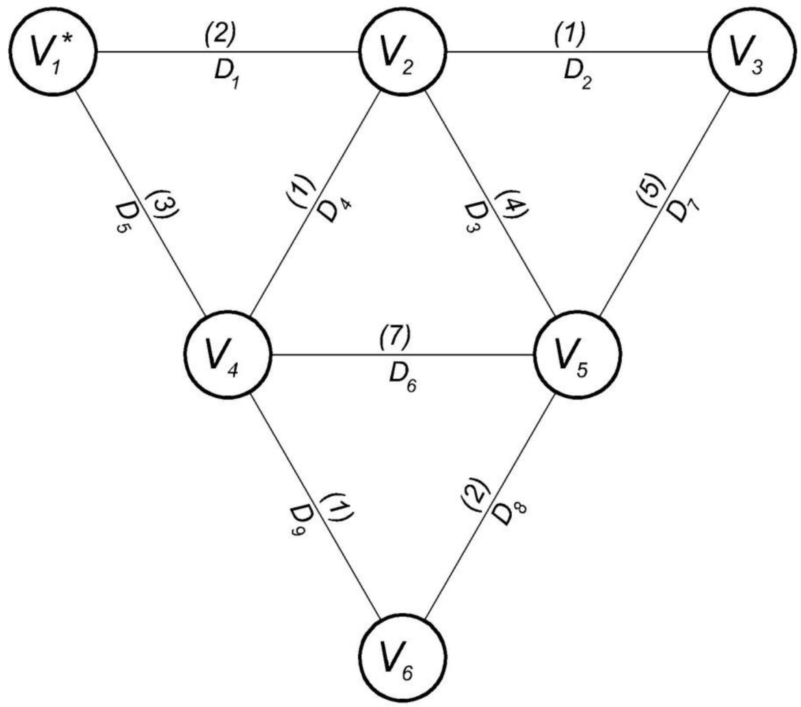
7.2.



Фиг. 7.3.

Отг. $S_{\min} = \{D_5; D_6; D_7; D_8; D_4\}$, $S_{\min} = 55$

7.3.

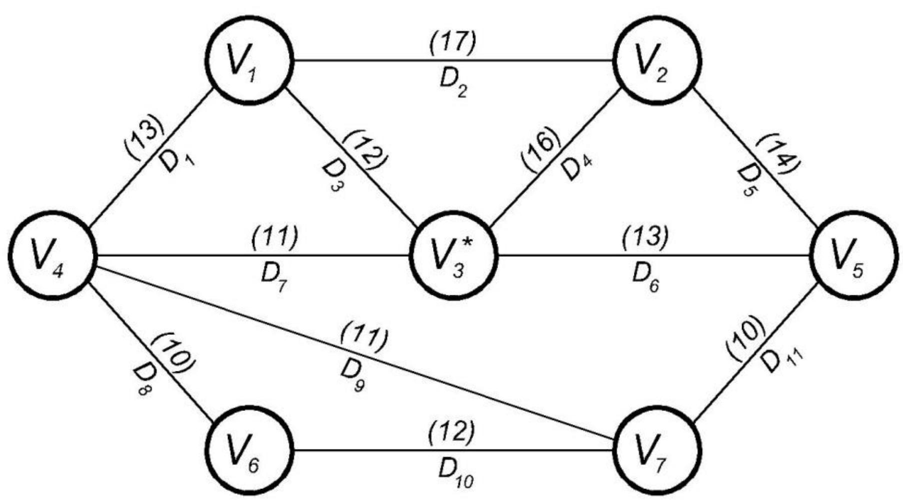


Фиг. 7.4.

Отг. $S_{\min} = \{D_1; D_4; D_9; D_2; D_8\}$, $S_{\min} = 7$

Да се намери стойността на минималният скелет за дадените графи. Началният възел е означен със символа $(*)$.

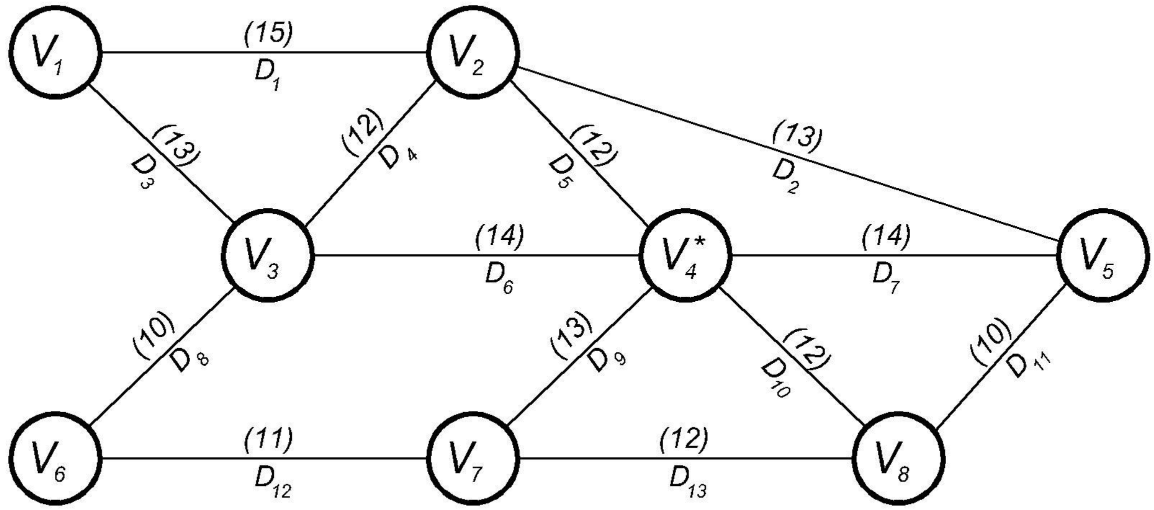
7.4.



Фиг. 7.5.

Отг. $S_{\min} = 68$

7.5.



Фиг. 7.6.

Отг. $S_{\min} = 81$

7.10. Да се построи графично мрежа за процеса, представен в *табл. 7.4*. Да се определи минималното време $T_{\min}$ за извършването му, критичния път и критичните операции.

Таблица 7.4.

a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
предходни операции	-	a_1	-	a_1 a_3	a_2 a_3	a_4
t_i	5	5	20	10	15	5

Решение:

1. Построяваме координатна система YSt с координатно начало точка $S \equiv O(0,0)$, която дава началото на процеса.

2. Операция a_1 няма предходна, така че нейното начало е точка S, а краят ѝ е възел V_1, който е свързан с точка S с дъга , чиято проекция върху абсцисната ос St е равна на 5 единици, колкото е времетраенето на тази операция. Означаваме тази дъга с името на операцията, която ѝ съответства - a_1.

3. Операция a_2 започва след като a_1 е завършила, така че краят на a_1 - възел V_1 става начало на a_2. Означаваме краят на a_2 с възел V_2, а дъгата, съединяваща V_1 и V_2 - с едноименната операция. Проекцията на дъгата a_2 върху абсцисната ос St е равна на 5 единици, т.е. абсцисата на възел V_2 е 10.

4. Операция a_3 няма предходна. Нейното начало също е точка $S \equiv O(0,0)$, краят й е възел V_3, а дъгата, която ги свързва има проекция върху оста St, равна на 20 единици.

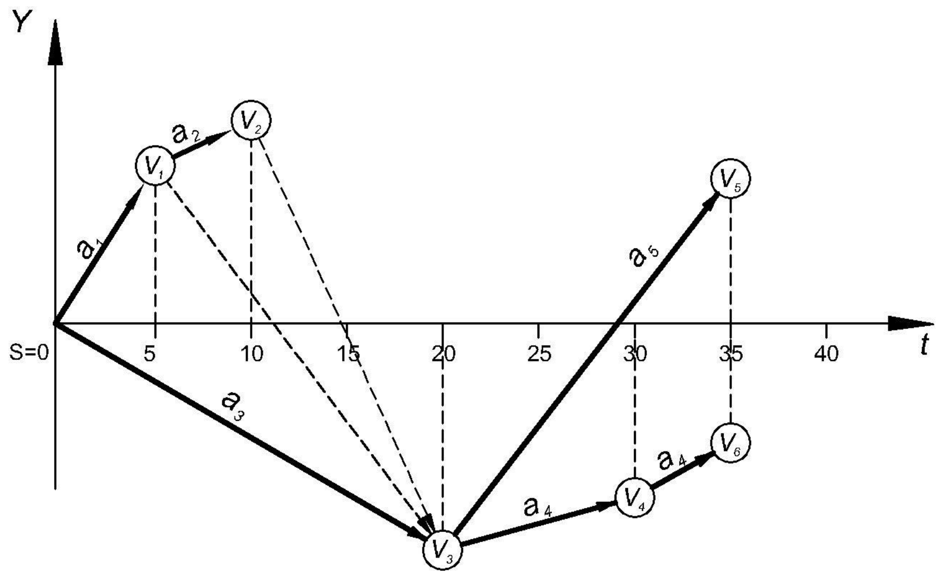
5. Операция a_4 започва след като са приключили операции a_1 и a_3. Нейното начало е възел V_3, тъй като той е най-отдалечения от координатното начало край на операциите, предхождащи a_4. Краят е възел V_4. Проекцията на дъгата a_4 върху абсцисната ос St е равна на 10 единици, т.е. абсцисата на възел V_4 е 30.

6. Операция a_5 започва след края на a_2 и a_3. Нейното начало отново е възел V_3 - той е най-отдалечен от точка S. Краят е възел V_5, чиято абсциса е 35, тъй като проекцията на дъгата a_5 върху St е равна на 15, кокото е времетраенето на операция a_5.

7. Операция a_6 започва след като е приключила операция a_4, така че нейното начало е възел V_4. Краят е възел V_6. Проекцията на дъгата a_6 върху абсцисната ос St е равна на 5 единици, т.е. абсцисата на възел V_6 е 35.

Има два възела V_5 и V_6, равноотдалечени на максимално разстояние от координатното начало. Абсцисите и на двата са 35, така че минималното време $T_{\min}$ за извършването на процеса, който изследваме е 35. За целта можем да минем по два пътя:

- Критичен път 1: $W_1 = (a_3, a_5)$, определен от критичните операции a_3 и a_5 с минимално време $T_{\min}(W_1) = t_3 + t_5 = 20 + 15 = 35$;
- Критичен път 2: $W_2 = (a_3, a_4, a_6)$, определен от критичните операции a_3, a_4 и a_6 с минимално време $T_{\min}(W_2) = t_3 + t_4 + t_6 = 20 + 10 + 5 = 35$.



Фиг. 7.9.

7.11. Да се построи графично мрежа за процеса, представен в *табл. 7.5*. Да се определи минималното време $T_{\min}$ за извършването му, критичния път и критичните операции.

Таблица 7.5.

a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
предходни операции	-	-	a_1 a_2	a_1 a_2	a_4	a_3 a_3
t_i	6	9	8	7	10	12

Отг. $W = (a_2, a_4, a_5, a_6)$, $T_{\min} = 38$

Като се построи графично мрежа да се определи минималното време $T_{\min}$ за извършване на следните процеси.

7.12.

Таблица 7.6.

a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
предходни операции	-	a_1	-	a_1 a_2 a_3	a_3	a_4 a_5	a_2 a_5	a_1 a_2 a_3	a_7
t_i	5	5	10	10	5	5	10	20	10

Отг. $T_{\min} = 35$

7.13.

Таблица 7.7.

a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
предходни операции	-	-	-	a_1 a_3	a_2 a_4	a_4 a_5	a_2 a_5 a_6	a_7	a_4 a_7 a_8	a_8 a_9
t_i	5	20	10	5	10	5	5	15	5	20

Отг. $T_{\min} = 80$

7.14.

Таблица 7.8.

a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
предходни операции	-	-	-	a_1 a_2	a_2 a_3	a_4	a_5 a_6	a_3 a_5 a_6	a_7	a_5 a_8
t_i	10	5	15	18	19	18	8	25	30	8

Отг. $T_{\min} = 84$