Лекция 4
Тема: Двойственост в линейното оптимиране

Основни понятия и формули

Всяка задача в линейното оптимиране може да се свърже, по определен начин с друга задача от линейното оптимиране, като двете задачи образуват *чифт двойнствени задачи* и от решението на едната задача може да се направи извод за решението на другата. В *табл. 4.1.* са дадени основните видове двойствени задачи.

Таблица 4.1.

		Изходна задача	Двойствена задача
I. Симетрични двойствени задачи	А)	$\max Z = CX$ $AX \le B$ $X \ge 0$	$\min G = Y^t B$ $Y^t A \ge C$ $Y \ge 0$
I. Симетрични двойствени задачи	Б)	$\min Z = CX$ $AX \ge B$ $X \ge 0$	$\max G = Y^t B$ $Y^t A \le C$ $Y \ge 0$
II.Несиметрични двойствени задачи	А)	$\max Z = CX$ $AX = B, B \ge 0$ $X \ge 0$	$\min G = Y^t B$ $Y^t A \ge C$
II.Несиметрични двойствени задачи	Б)	$\min Z = CX$ $AX = B, B \ge 0$ $X \ge 0$	$\max G = Y^t B$ $Y^t A \le C$

Матриците в горната таблица са: $C_{1\times n} = \left\| c_1 ... c_j ... c_n \right\|$,

$$X_{n\times 1} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad A_{m\times n} = \begin{Vmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mj} \dots a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad B_{m\times 1} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix}, \quad Y_{m\times 1} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{Vmatrix}$$

и Y^t е транспонираната матрица на матрицата Y.

Задачите от вид I.Б), II.А) и II.Б) могад да се сведат до задача I.А).

Теорема 4.1. (основно неравенство) Ако чифт двойствени задачи I.А) имат произволни допустими решения $\bar{X}$ и $\bar{Y}$, то е вярно неравенството

(4.1) $$C\bar{X} \le \bar{Y}^t B.$$

Теорема 4.2. (достатъчно условие за оптималност) Ако за допустими решения X^* и Y^* на чифт двойствени задачи I.А) е вярно равенството

(4.2) $$CX^* = Y^{*t} B,$$

то X^* и Y^* са оптималните решения, съответно на изходната и на двойствената задача.

Теорема 4.3. (основна теорема) Ако едната от чифт двойствени задачи има оптимално решение X^*, то и другата също има оптимално решение и то е

(4.3) $$Y^{*t} = C^* A_x^{-1},$$

където A_x^{-1} е обратната матрица на матрицата A_x, образувана от елементите на матрицата А, които са коефициенти пред променливите от първоначалния базис. Екстремните стойности на чифт двойствени задачи са равни. Ако целевата функция на едната от двойствените задачи е неограничена, то другата задача е противоречива.

Правила за решаване на задачи

1. Правила за съставяне на двойствената задача на дадена задача:
   - Ако в изходната задача се търси $\max(\min)$, то в двойствената задача се търси $\min(\max)$.
   - Броят на неизвестните n в изходната задача е равен на броя на ограниченията в двойствената задача.
   - Броят на ограниченията m в изходната задача е равен на броя на неизвестните в двойствената задача.
   - Коефициентите на целевата функция в изходната задача са в двойствената задача.
   - Свободните членове на ограниченията в изходната задача са коефициенти на целевата функция в двойствената задача.
   - При задача с $\max(\min)$ неравенствата в ограниченията са от вида $\leq(\geq)$, а в уравненията свободните членове са неотрицателни.
   - Ако $i-$тото ограничение в изходната задача е неравенство (уранение), то $i-$тата променлива в двойствената задача е неотрицателна (произволна по знак).
   - Ако $j-$тата променлива в изходната задача е неотрицателна (произволна по знак), то $j-$тото ограничение в двойствената задача е неравенство (уравнение).
2. Решаване на чифт двойствени задачи:
   - По симплекс метода се решава едната задача.
   - Екстремните стойности се приравняват на двете задачи или се прилага последната част на Теорема 4.3.
   - За определяне на оптималното решение на другата задача се използва (4.3), като C^* са коефициентите пред последния оптимален базис и A_x^{-1} е матрицата от тези стълбове на последната симплекс таблица, в която се е преобразувала единичната матрица от първата симплекс таблица.

Задачи и въпроси

Да се състави двойствената задача на всяка от изходните задачи:

4.1.

$$\max z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 - x_3 \le 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \end{array}\right.$$

$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0$$

Решение: Преобразуваме задачата така, че да се получи стандартния вид на задача, в случая когато търсеният екстремум е максимум. Второто ограничение умножаваме с (-1), за да осигурим неотрицателност на свободния член.

$$\max z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \end{array}\right.$$

$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0$$

Съставяме следната помощна таблица *4.2.*

Таблица 4.2.

y_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	b_i
y_1	2	5	1	1
y_2	1	-3	1	6
c_j	3	-2	5	

Според правилата, в двойствената задача видът на търсеният екстремум е "минимум". Броят на ограниченията в изходната задача е 2, следователно толкова е броят на променливите в двойствената задача. Системата от ограничителни условия трябва да се състои от неравенства тип "$\ge$", но тъй като втората променлива x_2 в изходната задача е с произволен знак, то второто ограничение в двойствената задача трябва да бъде равенство. В изходната задача второто ограничение е равенство, така че в двойствената задача втората променлива y_2 трябва да бъде с произволен знак.

Двойствената задача има вида:

$$\min G = y_1 + 6y_2$$

$$\left|\begin{array}{l} 2y_1 + y_2 \ge 3 \\ 5y_1 - 3y_2 = -2 \\ -y_1 + y_2 \ge 5 \end{array}\right.$$

$$y_1 \ge 0, y_2 - \textit{произволна}$$

4.2.

$$\min z = 6x_1 + 5x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \leq 6 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Решение: Екстремумът, който се търси е "минимум", следователно неравенствата в системата ограничителни условия трябва да са от вида "$\geq$". Затова трябва да умножим второто ограничение с (-1). Получаваме стандартният вид на задачата:

$$\min z = 6x_1 + 5x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \geq -6 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Съставяме помощна таблица *4.3.*

Таблица 4.3.

y_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
y_1	1	2	1	2	3
y_2	-2	3	5	1	-6
y_3	1	1	-3	2	4
c_j	6	5	-1	0	

Броят на ограниченията в двойствената задача е четири, защото това е броят на неизвестните в изходната задача. Екстремумът, който трябва да се търси в двойствената е "максимум", следователно неравенствата в ограниченията са от вида "$\leq$". Тъй като втората променлива (x_2) в изходната задача е с произволен знак, то ограничението със същия номер в двойствената задача трябва да е равенство. Според правилата третата променлива (y_3) в двойствената задача е с произволен знак, защото съответното ограничение в изходната задача е равенство.

Двойствената задача е:

$$\max G = 3y_1 - 6y_2 + 4y_3$$
$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 6 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 = 5 \\ y_1 + 5y_2 - 3y_3 \leq -1 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 0 \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 - \textit{произволна}$$

4.3.

$$\min z = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -6 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Решение: Задачата е от несиметричен тип, тъй като системата ограничителни условия съдържа само равенства. В този случай задължително трябва да е изпълнено условието за неотрицателност на свободните членове. Затова умножаваме третото равенство с (-1) и получаваме:

$$\min z = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Освен това всички променливи в двойствената задача ще бъдат произволни по знак.

Видът на търсения екстремум в двойствената задача е "максимум", следователно всички ограничения в системата ограничителни условия трябва да бъдат неравенства от тип "$\leq$". Те ще бъдат четири на брой, колкото е броят на променливите в изходната задача.

Съставяме помощната таблица *4.4.*

Таблица 4.4.

y_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
y_1	1	2	1	2	3
y_2	-2	3	5	1	-6
y_3	1	1	-3	2	4
c_j	6	5	-1	0	

Двойствената задача е:

$$\max G = 9y_2 + 6y_3$$
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 \leq -3 \\ 2y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 1 \\ y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leq 3 \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 \leq -1 \end{cases}$$
$$y_1, y_2, y_3 - \textit{произволни по знак}$$

4.4.

$$\max z = 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

$$\begin{vmatrix} 2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \le 9 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \ge 1 \\ -4x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = -6 \end{vmatrix}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_4 \ge 0$$

4.5.

$$\max z = x_1 + 12x_2 + 13x_3$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - 5x_2 - x_3 \ge 1 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 9 \end{vmatrix}$$

$$x_1 \ge 0$$

4.6.

$$\min z = 7x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\begin{vmatrix} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 \le 8 \end{vmatrix}$$

$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0$$

4.7.

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 5x_3$$

$$\begin{vmatrix} x_2 \le 5 \\ 9x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 54 \\ -x_2 - x_3 \ge -9 \end{vmatrix}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Да се състави двойствената задача на всяка от изходните задачи. Да се намери оптималното решение на двете взаимно двойствени задачи:

4.7.

$$\min z = 19x_1 + 13x_2 + 15x_3 + 18x_4$$

$$\begin{vmatrix} 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 \ge 7 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 5 \end{vmatrix}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

Решение: Изходната задача е в стандартен вид, така че съставяме помощната таблица *4.5.*

Таблица 4.5.

y_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
y_1	2	2	0	3	7
y_2	3	1	3	0	5
c_j	19	13	15	18	

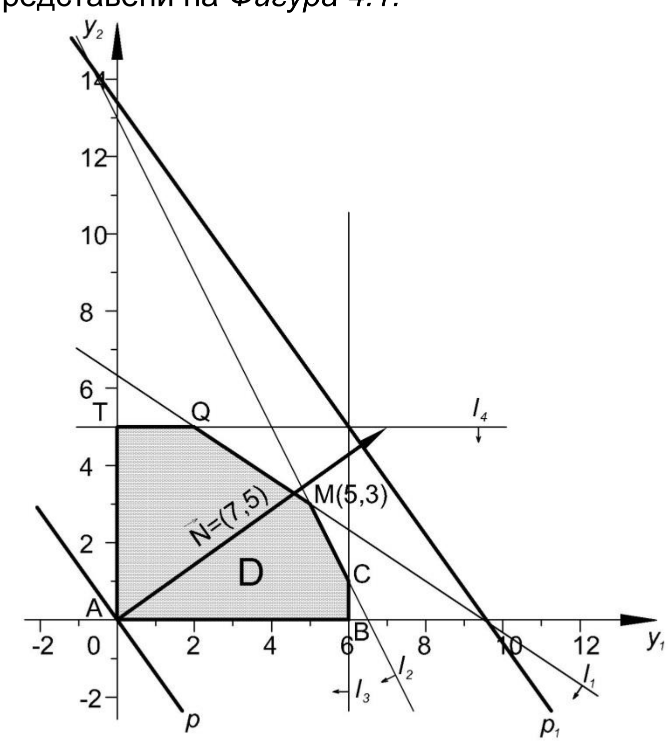
Двойствената задача е:

$$\max G = 7y_2 + 5y_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \max G = 7y_2 + 5y_3$$

$$\left|\begin{array}{l} 2y_1 + 3y_2 \le 19 \\ 2y_1 + y_2 \le 13 \\ 3y_2 \le 15 \\ 3y_1 \le 18 \end{array}\right. \quad \text{, откъдето получаваме} \quad \left|\begin{array}{l} 2y_1 + 3y_2 \le 19 \\ 2y_1 + y_2 \le 13 \\ y_2 \le 5 \\ y_1 \le 6 \end{array}\right.$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$$

За да намерим оптималното решение на двойката взаимно двойствени задачи, трябва да ги решим по подходящ начин. Тъй като двойствената задача зависи само от двете променливи y_1 и y_2, е удобно да приложим графичния метод. Построенията са представени на *Фигура 4.1.*



Фигура 4.1.

На *Фигура 4.1.* се вижда, че максимумът на целевата функция G се достига в точка C, която е пресечна точка на правите l_1 и l_2. Координатите на тази точка са решение на системата:

$$\left|\begin{array}{l} 2y_1 + 3y_2 = 19 \\ 2y_1 + y_2 = 13 \end{array}\right.$$

Оттук получаваме $y_1^M = 5$, $y_2^M = 3$, $G_{\max} = G(3;5) = 7.5 + 5.3 = 50$. От *Теорема 4.3.* следва, че $z_{\min} = G_{\max} = 50$, $Y_{opt}(5;3)$. За да намерим X_{opt} трябва да решим изходната задача.

Привеждаме задачата в стандартен вид:

$$\min z = 19x_1 + 13x_2 + 15x_3 + 18x_4$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_6 = 5 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,..,6$$

Тъй като няма променливи, които да образуват базис, то се налага да решим задачата по метода на изкуствения базис. Във всяко от уравненията добавяме по една неотрицателна изкуствена неизвестна, които ще бъдат изходното допустимо базисно решение. М-задачата има вида:

$$\min z = 19x_1 + 13x_2 + 15x_3 + 18x_4 + Mx_7 + Mx_8$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 + x_7 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_6 + x_8 = 5 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,..,8$$

Съставяме симплекс таблица *4.6.*

Решаваме М-задачата по правилата на симплекс метода. След първите две итерации изкуствените неизвестни напускат базиса, затова не правим изчисленията в съответните им стълбове.

Оптималното решение на изходната задача се получава на четвъртата стъпка. В четвъртият индексен ред характеристиките на всички неизвестни са неположителни. Критерият за оптималност е в сила.

Получената оптимална стойност на целевата функция в изходната задача е $z_{\min} = 50$. Минимумът на z се достига в точка $X_{opt}\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};0;0\right)$.

Окончателно:

$$z_{\min} = G_{\max} = 50\,;$$
$$Y_{opt}(5;3)\,;$$
$$X_{opt}\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};0;0\right).$$

Таблица 4.6.

	$c_Б$	$x_Б$	c_j / b_i \ x_j	19 x_1	13 x_2	15 x_3	18 x_4	0 x_5	0 x_6	M x_7	M x_8
	M	x_7	7	2	2	0	3	-1	0	1	0
I.	M	x_8	5	3	1	3	0	0	-1	0	1
	$z_1 = 12M$			$5M-19$	$3M-13$	$3M-15$	$3M-18$	$-M$	$-M$	0	0

	M	x_7	$\frac{11}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	-2	$\boxed{3}$	-1	$\frac{2}{3}$	1	-
II.	19	x_1	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	-
	$z_2=\frac{11}{3}M+\frac{95}{3}$			0	$\frac{4}{3}M-\frac{20}{3}$	$-2M+$	$3M-18$	$-M$	$\frac{2}{3}M-\frac{19}{3}$	0	-
	18	x_4	$\frac{11}{9}$	0	$\boxed{\frac{4}{9}}$	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	-	-
III.	19	x_1	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	-	-
	$z_3=\frac{161}{3}$			0	$\frac{4}{3}$	-8	0	-6	$-\frac{4}{3}$	-	-
	13	x_2	$\frac{11}{4}$	0	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	-	-
IV.	19	x_1	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-	-
	$z_4=50$			0	0	-6	-3	-5	-3	-	-

4.8.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 \le 4 \\ 3x_2 - 4x_3 - x_4 = -6 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,..,4$$

Решение: Привеждаме изходната задача е в стандартен вид като умножим третото ограничение с (-1). Получаваме

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 \le 4 \\ -3x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,..,4$$

Съставяме помощната таблица *4.6.*

Таблица 4.6.

y_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
y_1	1	2	-1	0	2
y_2	0	1	-1	0	4
y_3	0	-3	4	1	6

c_j	2	3	0	0

Двойствената задача е:

$$\min G = 2y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$\left| \begin{array}{l} y_1 \geq 2 \\ 2y_1 + y_2 - 3y_3 \geq 3 \\ -y_1 - 2y_2 + 4y_3 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$y_2 \geq 0, y_1, y_2 - \textit{произволни}$$

Графичният метод не е удобен за нито една от двете задачи. За да намерим оптималното решение ще приложим симплекс метода за изходната задача. Привеждаме я в канонична форма:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + x_5 = 4 \\ -3x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \end{array} \right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,..,5$$

Променливите, които образуват базис са $(x_1; x_5; x_4)$.От изчисленията в симплекс таблица *4.7.* се вижда, че критерият за оптималност е изпълнен на третата стъпка и екстремалната стойност е $z_{\max} = \frac{42}{5}$. Този екстремум се достига в точка $X_{opt}\left(0; \frac{14}{5}; \frac{18}{5}; 0\right)$.

Таблица 4.7.

	$c_Б$	$x_Б$	c_j / x_j / b_i	2	3	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I.	2	x_1	2	1	2	-1	0	0
	0	x_5	4	0	1	-2	0	1
	0	x_4	6	0	-3	$\boxed{4}$	1	0
	$z_1 = 4$			0	1	-2	0	0
II.	2	x_1	$\frac{7}{2}$	1	$\boxed{\frac{5}{4}}$	0	$\frac{1}{4}$	0
	0	x_5	7	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

	0	x_3	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0
	$z_2 = 7$			0	-2	0	$\frac{1}{2}$	0
III.	3	x_2	$\frac{14}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0
	0	x_5	$\frac{42}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{3}{5}$	1
	0	x_3	$\frac{18}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	0
	$z_3 = \frac{42}{5}$			$\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{3}{5}$	0

От *Теорема 4.3.* следва, че $z_{\max} = G_{\min} = \frac{42}{5}$. За да намерим оптималното решение Y_{opt} прилагаме формулата $Y^{*t} = C^* A_x^{-1}$. В този случай $C^* = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $A_x^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{Vmatrix}$.

Умножаваме двете матрици и получаваме $Y_{opt} = \left(3.\frac{4}{5}; 0; 3.\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{12}{5}; 0; \frac{3}{5}\right)$.

Окончателно:

$$z_{\max} = G_{\min} = \frac{42}{5};$$

$$X_{opt}\left(0; \frac{14}{5}; \frac{18}{5}; 0\right);\ Y_{opt} = \left(\frac{12}{5}; 0; \frac{3}{5}\right).$$

4.9.

$$\max z = 12x_1 + 18x_2 - 5x_3$$

$$\begin{vmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 18 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -21 \end{vmatrix}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,..,3$$

Отг.: $z_{\max} = G_{\min} = 114$,

$X_{opt}(2; 5; 0)$; $Y_{opt} = (4; 2)$

4.10.
$$\min z = 6x_1 - x_2 + 8x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 \ge 2 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 \le -3 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,..,3$$

Отг.: $z_{\min} = G_{\max} = 17$,
$X_{opt}\left(\frac{11}{10}; 0; \frac{13}{10}\right)$; $Y_{opt} = (4;3)$

4.11.
$$\max z = 30x_1 + 40x_2 + 10x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 80 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 90 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 160 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,..,3$$

Отг.: $z_{\max} = G_{\min} = 1000$,
$X_{opt}(20;10;0)$; $Y_{opt} = \left(5; \frac{20}{3}; 0\right)$

4.12.
$$\min z = 2x_1 + 5x_2 + 6x_3$$
$$\left| 2x_1 - x_2 + 4x_3 \ge 7 \right.$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,..,3$$

Отг.: $z_{\min} = G_{\max} = 7$,
$X_{opt}\left(\frac{7}{2}; 0; 0\right)$; $Y_{opt} = (1)$

4.13.
$$\min z = 15x_1 + 10x_2 + 10x_3$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 30 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 20 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,..,3$$

Отг.: $z_{\min} = G_{\max} = 155$,
$X_{opt}(9;0;2)$; $Y_{opt} = (0;1;7)$

4.14.
$$\min z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,..,3$$

Отг.: $z_{\min} = G_{\max} = 20$,

$X_{opt}(4; 2; 0)$; $Y_{opt} = \left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$

4.15.

$$\min z = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 5 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,..,3$$

Отг.: $z_{\min} = G_{\max} = 4$,

$X_{opt}(1; 2; 0)$; $Y_{opt} = (0; -1; 1)$

4.16.

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 50 \\ x_1 + x_4 \le 18 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 40 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,..,4$$

Отг.: $z_{\min} = G_{\max} = 114$,

$X_{opt}(1; 2; 0; 18)$; $Y_{opt} = \left(0; 3; \frac{3}{2}\right)$