ТЕМА ПО МАТЕМАТИКА 2 – Индустриален дизайн
17.09.2015г.
11.30ч.

1. **(10 точки)** Намерете локалните екстремуми на функцията $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

2. Решете интегралите

а/ **(5 точки)** $\int_1^2 xe^x dx$ и б/ **(5 точки)** $\int \dfrac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$.

3. **(10 точки)** Намерете екстремумите на функцията $f(x,y)=x^3+y^3-12xy+3$ и определете вида им .

4. **(10 точки)** Намерете общото решение на диференциалното уравнение:
$ydy=\dfrac{x^2+1}{x}dx$

5. **(10 точки)** Намерете лицето на фигурата, ограничена от параболата: $y=1-\dfrac{3}{4}x^2$ и оста Ox.

6. **(10 точки)** Изследвайте за сходимост чрез критерия на Коши числовия ред
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$.

Решения изпитна тема

(1) Локални екстремуми на

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$

а) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

в) $f'(x) = 0$

$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow$

$\ln x = 1$

$\underline{\underline{x = e}} \rightarrow$ стационарна точка

с) $f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} =$

$= \frac{-\cancel{x} - 2\cancel{x}(1 - \ln x)}{x^{\cancel{4}3}} = \frac{-1 - 2 + 2\ln x}{x^3}$

d) $f''(e) = \frac{-3 + 2\ln e}{e^3} = \frac{-1}{e^3} \neq 0.$

$\Rightarrow$ в т. $x = e$ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ има локален екстремум.

е) $f''(e) < 0 = -\frac{1}{e^3} \Rightarrow f(x)$ в т. $x = e$

има локален <u>максимум</u>!

2 а) $\int_1^2 x e^x dx \to$ интегриране по части

$$\int_1^2 x e^x dx = \int_1^2 x\, de^x = \left(x e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx \right) =$$

$$= \left(x e^x \Big|_1^2 - e^x \Big|_1^2 \right) = 2e^2 - \cancel{e} - e^2 + \cancel{e} =$$

$$= e^2$$

б) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx =$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x =$$
$$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) =$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$\to \int \frac{\sin 2x}{1 + \frac{\cos 2x + 1}{2}} dx = \int \frac{\sin 2x}{\frac{2 + \cos 2x + 1}{2}} dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x + 3} d2x = -\int \frac{d(\cos 2x + 3)}{\cos 2x + 3} =$$

$$= -\ln|\cos 2x + 3| + C$$

3) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 12xy + 3$

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 12y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 12x$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \to 3x^2 - 12y = 0$

b) $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \to 3y^2 - 12x = 0 \to x = \frac{3y^2}{12} = \frac{y^2}{4}$

$\cancel{3}\,\frac{y^4}{16} - \cancel{12}^{\,4}\,y = 0$

$y(y^3 - 64) = 0$

$\boxed{y_1 = 0} \to x_1 = 0$ стационарная точка

$y^3 = 64$

$\boxed{y_2 = \sqrt[3]{64} = 4} \to x_2 = 4$ стационарная точка

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$ $\qquad \Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12$ $\qquad \Delta = 6x \cdot 6y - 12 \cdot 12$

$\Delta_{x=0,\,y=0} = -144 < 0$

$\Delta_{x_2=4,\, y_2=4} \to \cancel{6}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{6}\cdot 4 - \cancel{12}\cdot\cancel{12} =$

$\cancel{2} \quad \cancel{2}$

$= 432 > 0$

$24\cdot 24 - 12\cdot 12$

$\begin{array}{r} 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array} - 144 = 432$

$\Rightarrow$ т. $x=4, y=4$ е екстремална

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=4,\, y=4} = 6x = 6\cdot 4 = 24 > 0$$

$\Rightarrow$ в т. $x=4, y=4$ $f(x,y)$ има min

d) $f_{min} = 4^3 + 4^3 - 12\cdot 4\cdot 4 + 3 =$

$= 64 + 64 - 192 + 3 =$

$= 128 + 3 - 192 = -61$

(4) $y\,dy = \frac{x^2+1}{x}\,dx \to$ уравнение

с отделящи се променливи

$$\int y\,dy = \int \frac{x^2+1}{x}\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \int \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}\,dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + \ln x$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x$$

6 Лице на фигура ограничена от парабола

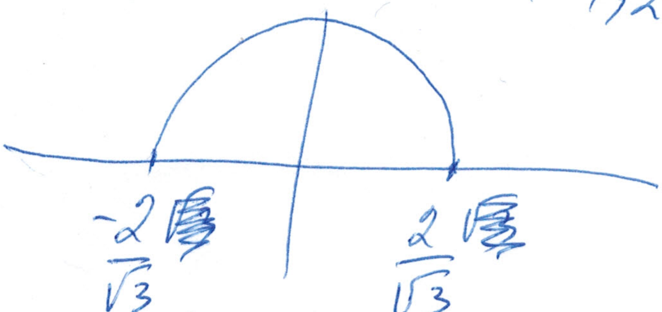
$y = 1 - \frac{3}{4}x^2$ и оста x

$y = 0 \rightarrow \quad 1 - \frac{3}{4}x^2 = 0$

$4 - 3x^2 = 0$

$x^2 = \frac{4}{3}$

$x_{1,2} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$



$$S = \int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left(1 - \frac{3}{4}x^2\right) dx = \int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} dx - \int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{3x^2}{4} dx =$$

$$= x \Big|_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} - \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}} \Big|_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3\right) =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\cancel{4}}\left(\frac{\cancel{8}^{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{\cancel{8}^{2}}{3\sqrt{3}}\right) =$$

6

6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{3n} \to$ сходящ? по Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ редът е сходящ!