23 въпрос. Затихващи трептения

В предишния въпрос дадохме определение за свободни хармонични трептения – трептенията на хармоничен осцилатор, възникнали в резултат на първоначално външно въздействие, след което външната сила е отстранена.

Но на едно тяло, движещо се в някаква външна среда, винаги действат сили на съпротивление (дисипативни сили) от страна на средата, които забавят движението на тялото. Следователно трептенията на всяка реална трептяща система са ***затихващи трептения,*** т.е. амплитудата на трептене постепенно намалява големината си.

От механична гледна точка при малки скорости на движение на тялото, съпротивлението на средата се дава чрез ***силата на триене***

$$F_{\text{тр}} = -rv$$

където r е коефициента на съпротивление на средата, v е скоростта на движение на тялото. Знакът “минус” показва, че силата на триене е насочена в посока, противоположна на посоката на скоростта на тялото.

Следователно на реално трептящо тяло в някаква среда (напр. въздух) ще действат две сили: силата на триене $\vec{F}_{\text{тр}}$ и еластичната сила $\vec{F}_{\text{ел}}$, под действие на която тялото извършва трептенето. Прилагайки втория принцип на динамиката получаваме

$$ma = F_{\text{тр}} + F_{\text{ел}} = -rv - kx$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Като въведем означенията $2\beta = \frac{r}{m}$ и $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ получаваме

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

По определение трептения, които се описват с този израз, се наричат ***затихващи трептения***.

Решението на това диференциално уравнение може да се даде чрез

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

където $A = A_0 e^{-\beta t}$ е амплитудата на затихващото трептене,

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ е кръговата честота на трептенето.

Тук с ω_0 сме означили собствената честота на трептящата система (трептящото тяло), т.е. кръговата честота на свободното хармонично трептене.

Следователно при затихващите трептения амплитудата намалява по експоненциален закон. Степента на намаление на амплитудата се определя от величината β, наречена ***коефициент на затихване***.

За време

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

амплитудата на трептенето намалява e - пъти. Величината τ се нарича ***време на релаксация***.

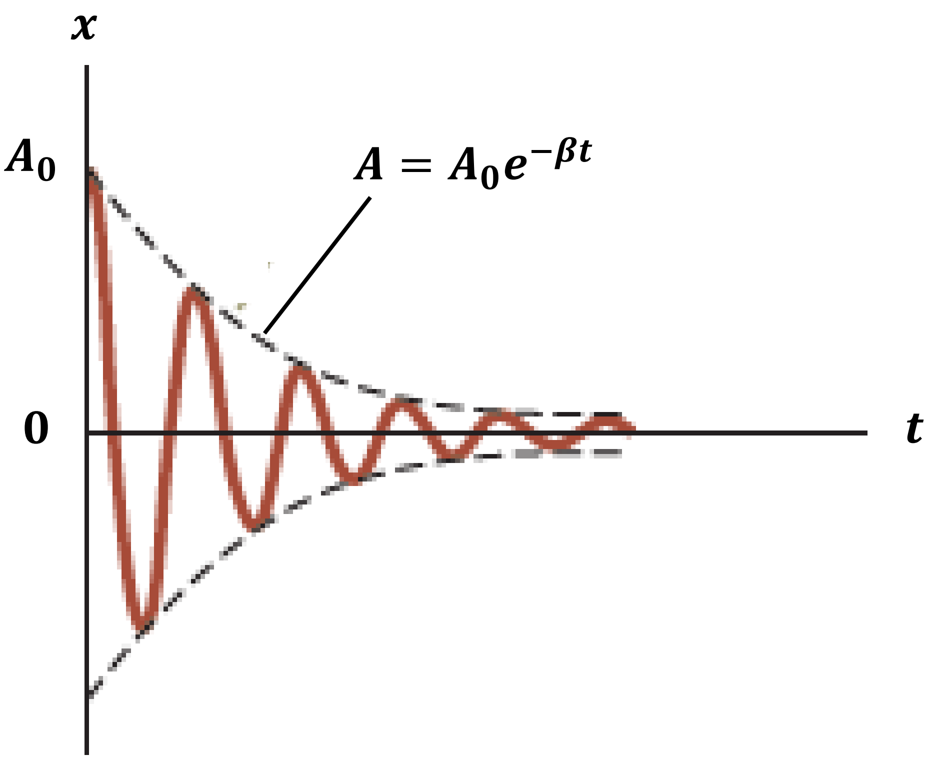
Периода на затихващите трептения е

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Затихващите трептения могат да се характеризират и с величината ***логаритмичен декремент на затихването*** $\boldsymbol{\delta}$**,** която показва колко пъти амплитудата намалява за време един период

$$\delta = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}}\right) = \ln\left(e^{\beta T}\right) = \beta T$$

Графично представяне на затихващите трептения



Пример 1: Уравнението на затихващо трептене има вида $x = 0{,}4\, e^{-0{,}2t} \cos(0{,}5t)$. На колко е равна кръговата честота на собствените му трептения?

Дадено: $A_0 = 0{,}4\ \mathrm{m}$, $\varphi = 0$, $\beta = 0{,}2\ \mathrm{s}^{-1}$, $\omega = 0{,}5\ \mathrm{s}^{-1}$

$\omega_0 = ?$

Решение: $x = A_0\, e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad \omega^2 = {\omega_0}^2 - \beta^2 \qquad {\omega_0}^2 = \omega^2 + \beta^2 = 0{,}5^2 + 0{,}2^2 = 0{,}29$$

$$\omega_0 = \sqrt{0{,}29} = 0{,}54\ \mathrm{s}^{-1}$$

Пример 2: Материална точка извършва затихващо трептене. На колко е равен коефициента на затихване, ако за време 33 s амплитудата на трептенето намалява два пъти?

Дадено: $\frac{A_1}{A} = \frac{1}{2}$, $\Delta t = t_1 - t = 33\ \mathrm{s}$

$\beta = ?$

Решение:

$$A = A_0\, e^{-\beta t} \qquad A_1 = A_0\, e^{-\beta t_1} \qquad \frac{A_1}{A} = \frac{A_0 e^{-\beta t_1}}{A_0 e^{-\beta t}} = e^{-\beta(t_1 - t)} = \frac{1}{2}$$

$$-\beta(t_1 - t) = \ln\frac{1}{2} = -0{,}69 \qquad t_1 - t = 33\ \mathrm{s} \qquad \beta = \frac{0{,}69}{33} = 0{,}021$$