ГЛАВА 3

ИНТЕГРИРАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

Дефиниция 1 *Дроб от вида*

$$R(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}, \quad (3.1)$$

където $f(x)$ и $\varphi(x)$ са полиноми съответно от степен n и m, се нарича дробна рационална функция ($a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$).

Рационалните функции са *два вида*:

а) *цели*, при $\varphi(x) = 1$, т.е. $R(x)$ е полином;

б) *дробни*, като при $n \geq m$ рационалната дроб е *неправилна*, а при $n < m$ – *правилна*.

А. Интегриране на цяла рационална функция

Интегрирането на *цяла* рационална функция (*полином*) става непосредствено:

$$\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)\mathrm{d}x$$
$$= a_0\frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1\frac{x^n}{n} + \cdots + a_{n-1}\frac{x^2}{2} + a_nx + C\,.$$

И така, интеграл от полином на n-та степен е полином от $(n+1)$-ва степен.

Б. Интегриране на дробна рационална функция

Разглеждаме *дробна* рационална функция (3.1):

а) ако $n \geq m$, *делим* $f(x)$ на $\varphi(x)$ и получаваме

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = g_{n-m}(x) + \frac{r_{m-1}(x)}{\varphi(x)}, \quad (3.2)$$

където $g_{n-m}(x)$ и $r_{m-1}(x)$ се наричат съответно *частно* (от степен $(n-m)$) и *остатък* (от степен най-много $(m-1)$). Тогава

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x = \int g(x)\mathrm{d}x + \int \frac{r(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x + C\,.$$

б) ако $n < m$, рационалната функция $R(x)$ е правилна и тогава:

1. Намираме нулите на $\varphi(x)$ и нека a е λ-кратна нула, b е μ-кратна нула, ..., $(\alpha \pm i\beta)$ е k-кратна комплексна двойка,...

2. От *алгебрата* е известно разлагането на $R(x)$:

$$R(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_\lambda}{(x-a)^\lambda}+\frac{A_{\lambda-1}}{(x-a)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_\mu}{(x-b)^\mu}+\frac{B_{\mu-1}}{(x-b)^{\mu-1}}+\cdots$$

$$+\frac{B_1}{x-b}+\cdots+\frac{M_k x+N_k}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_{k-1}x+N_{k-1}}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_1 x+N_1}{x^2+px+q}+\cdots$$

и решаваме съответните интеграли.

Следователно, интегрирането на правилна рационална дроб се свежда до интегрирането на *елементарни* рационални дроби от вида:

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \tag{3.3}$$

където $n \in \mathbb{N}$, а A, M, N, a, p, $q \in \mathbb{R}$, като $\mathfrak{D} = p^2 - 4q < 0$, защото нулите на $x^2 + px + q$ са комплексни.

I. Разглеждаме интеграл от вида $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x$.

а) при $n = 1 \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$;

б) при $n > 1 \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = A\int (x-a)^{-n}\mathrm{d}(x-a) = A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n}+C.$

II. Разглеждаме интеграл от вида $I = \displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x.$

Полагаме $x = t - \dfrac{p}{2} \Longrightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ $\left(t = x + \dfrac{p}{2}\right)$ и заместваме (ако знаменателят е от вида $ax^2 + bx + c = 0$, полагаме $x = t - \dfrac{b}{2a}$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ и заместваме).

$$I = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left[\left(t-\frac{p}{2}\right)^2+p\left(t-\frac{p}{2}\right)+q\right]^n}\mathrm{d}t = \int \frac{Mt-\frac{Mp}{2}+N}{\left(t^2-pt+\frac{p^2}{4}+pt-\frac{p^2}{2}+q\right)^n}\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{Mt-\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\left(t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}\mathrm{d}t = M\int \frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}$$

$$= M\bar{I} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_n\,.$$

За интеграла $\bar{I} = \displaystyle\int \frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}$, $a^2 = q - \dfrac{p^2}{4}$, имаме:

$$* \text{ при } n=1 \Longrightarrow \bar{I}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t^2+a^2)}{t^2+a^2}=\frac{1}{2}\ln|t^2+a^2|=\ln\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2};$$

$$* \text{ при } n>1 \Longrightarrow \bar{I}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int(t^2+a^2)^{-n}\mathrm{d}(t^2+a^2)$$

$$=\frac{(t^2+a^2)^{1-n}}{2(1-n)}=\frac{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\right]^{1-n}}{2(1-n)}.$$

За интеграла $I_n=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}$ имаме:

$$** \text{ при } n=1 \Longrightarrow I_1=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}=\frac{a}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{a};$$

$$** \text{ при } n>1 \Longrightarrow I_n=\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}$$

(вж. пр. 2.24).

Пример 3.1. Решете *интегралите*

а) $\displaystyle\int\frac{x^2-2x+3}{x+2}\mathrm{d}x$

б) $\displaystyle\int\frac{x^4-3x^2+1}{x^3-7x+6}\mathrm{d}x$

в) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$

г) $\displaystyle\int\frac{x^2-x+14}{(x-2)(x-4)^2}\mathrm{d}x$

д) $\displaystyle\int\frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}\mathrm{d}x.$

Решение. а) Подинтегралната функция е *неправилна* рационална дроб $(n=2, m=1)$ и *делим* числителя на знаменателя:

$$\begin{array}{rl}
x^2-2x+3 & \underline{|\;x+2\;} \\
-\underline{x^2+2x\quad} & x-4 \\
{}''\;-4x+3 & \\
-\underline{-4x-8} & \\
{}''\;\;11 &
\end{array}$$

Така частното при делението $g_1(x)=x-4$ е полином от първа степен, а остатъкът $r_0(x)=11$ е полином от нулева степен. Тогава от (3.2) имаме

$$\frac{x^2-2x+3}{x+2}=x-4+\frac{11}{x+2}$$

$$\Longrightarrow I=\int x\mathrm{d}x-4\int\mathrm{d}x+11\int\frac{\mathrm{d}(x+2)}{x+2}=\frac{x^2}{2}-4x+11\ln|x+2|+C.$$

б) Както в точка а) *делим* числителя на знаменателя ($n = 4$, $m = 3$):

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 3x^2 + 1 & x^3 - 7x + 6 \\ \hline -\, x^4 - 7x^2 + 6x & x \\ \hline //\; 4x^2 - 6x + 1 & \end{array}$$

Така получаваме частно и остатък съответно $g_1(x) = x$ и $r_2(x) = 4x^2 - 6x + 1$. Тогава от (3.2) имаме

$$I = \int x\mathrm{d}x + \int \frac{4x^2 - 6x + 1}{x^3 - 7x + 6}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + I_1 .$$

При I_1 подинтегралната функция е *правилна* рационална дроб и *разлагаме знаменателя* на множители от първа или втора степен (най-често с правилото на Хорнер).

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 1 & 0 & -7 & 6 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & -6 & 0 & \Longrightarrow x_1 = 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & & \Longrightarrow x_2 = 2 \\ -3 & 1 & 0 & & & \Longrightarrow x_3 = -3 \end{array}$$

Тогава

$$\frac{4x^2 - 6x + 1}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$4x^2 - 6x + 1 = A(x-2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-2)$$

* полагаме $x = 1 \Longrightarrow -1 = -4A \Longrightarrow A = \frac{1}{4}$,

* полагаме $x = 2 \Longrightarrow 5 = 5B \Longrightarrow B = 1$,

* полагаме $x = -3 \Longrightarrow 55 = 20C \Longrightarrow C = \frac{11}{4}$.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow I_1 &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{x-1} + \int \frac{\mathrm{d}(x-2)}{x-2} + \frac{11}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x+3)}{x+3} \\ &= \frac{1}{4}\ln|x-1| + \ln|x-2| + \frac{11}{4}\ln|x+3|. \end{aligned}$$

Тогава $I = \dfrac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln\Big((x-2)^4|(x-1)(x+3)^{11}|\Big) + C$.

в) От $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$

$$\Longrightarrow 1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1).$$

* Полагаме $x = -1 \Longrightarrow 1 = 3A \Longrightarrow A = \frac{1}{3}$.

* Разкриваме скобите и по метода на неопределените коефициенти написваме система, от която определяме неизвестните константи B и C:

$$1 = Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{array} \right.$$

От $A+B=0 \Longrightarrow B=-A=-\dfrac{1}{3}$, а от $A+C=1 \Longrightarrow C=1-A=\frac{2}{3}$.

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}I_1 .$$

Интегралът I_1 е от вида (3.3, II), $p=-1$, $q=1$. Затова полагаме $x=t+\dfrac{1}{2} \Longrightarrow$ $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ и заместваме:

$$I_1 = \int \frac{t+\frac{1}{2}-2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)-\left(t+\frac{1}{2}\right)+1}\mathrm{d}t = \int \frac{t-\frac{3}{2}}{t^2+t+\frac{1}{4}-t-\frac{1}{2}+1}\mathrm{d}t = \int \frac{t-\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t$$

$$= \int\frac{t\mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\frac{3}{4}\left(1+\frac{4t^2}{3}\right)} = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{3.4}{2.3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} .$$

От $x=t+\dfrac{1}{2} \Longrightarrow t=x-\dfrac{1}{2}$ и като заместим

$$\Longrightarrow I_1 = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}$$
$$= \ln\sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Тогава

$$I = \ln\sqrt[3]{x+1} - \frac{1}{3}\ln\sqrt{x^2-x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

г) От $\dfrac{x^2-x+14}{(x-2)(x-4)^2} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{(x-4)^2} + \dfrac{C}{x-4}$

$$\Longrightarrow x^2-x+14 = A(x-4)^2 + B(x-2) + C(x-2)(x-4)$$

$*$ полагаме $x = 2 \Longrightarrow 16 = 4A \Longrightarrow A = 4$,
$*$ полагаме $x = 4 \Longrightarrow 26 = 2B \Longrightarrow B = 13$.
$*$ Разкриваме скобите и написваме система, от която намираме коефициента C:

$$x^2 - x + 14 = Ax^2 - 8Ax + 16A + Bx - 2B + Cx^2 - 6Cx + 8C$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} A + C = 1 \quad \Longrightarrow C = 1 - A = -3 \\ -8A + B - 6C = -1 \\ 16A - 2B + 8C = 14 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow I &= 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} + 13\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-4)^2} - 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x-4} \\
&= 4\int \frac{\mathrm{d}(x-2)}{x-2} + 13\int (x-4)^{-2}\mathrm{d}(x-4) - 3\int \frac{\mathrm{d}(x-4)}{x-4} \\
&= 4\ln|x-2| + 13\frac{(x-4)^{-1}}{-1} - 3\ln|x-4| + C \\
&= \ln\frac{(x-2)^4}{|(x-4)^3|} - \frac{1}{13(x-4)} + C.
\end{aligned}$$

д) Подинтегралната функция е *правилна* рационална дроб, а знаменателят е $x^5 + 2x^3 + x = x(x^2+1)^2$. От

$$\frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{(x^2+1)^2} + \frac{Px+Q}{x^2+1}$$

$$\Longrightarrow 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1 = A(x^2+1)^2 + (Mx+N)x + (Px+Q)(x^2+1)x$$

$$\begin{array}{lcr}
* \text{ полагаме } x = 0 & \Longrightarrow & 1 = A, \\
* \text{ полагаме } x = i & \Longrightarrow & 3i^4 + i^3 + 4i^2 + 1 = (Mi+N)i \\
 & & 3 - i - 4 + 1 = Mi^2 + Ni \\
 & & 0 - 1.i = -M + iN
\end{array}$$

$*$ От системата $\left| \begin{array}{l} 0 = -M \\ -1 = N \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} M = 0 \\ N = -1 \end{array} \right.$.

Разкриваме скобите, написваме система, от която намираме коефициентите P и Q:

$$3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1 = Ax^4 + 2Ax^2 + A + Mx^2 + Nx + Px^4 + Px^2 + Qx^3 + Qx$$

$$\left| \begin{array}{l} A + P = 3 \quad \Longrightarrow P = 3 - A = 2 \\ \quad Q = 1 \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow I=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{2x+1}{x^2+1}=\ln|x|-I_2+\int\frac{2xdx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}$$
$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2(x^2+1)}+\ln|x^2+1|+\operatorname{arctg}x+C$$
$$=\ln|x(x^2+1)|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2(x^2+1)}+C\,.$$

Забележка. $I_2=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2(x^2+1)}$, вж. 2, пр. 2.11).

Пример 3.2. Решете *интегралите*

а) $\int\frac{2x+11}{x^2+6x+13}dx$ б) $\int\frac{2x^3+x^2+5x+1}{x^4-x^3+4x^2-3x+3}dx$

в) $\int\frac{x^4+2x^2+4}{(x^2+1)^3}dx$ г) $\int\frac{dx}{x(x^5+1)^2}$

д) $\int\frac{dx}{x^4+1}$.

Решение. а) Дискриминантата на квадратния тричлен $x^2+6x+13$ е отрицателна, следователно той не може да се разложи. Отделяме точен квадрат:

$$x^2+6x+13=x^2+6x+9+4=(x+3)^2+4\,.$$

Полагаме $x+3=t\Longrightarrow x=t-3$, $dx=dt$.

$$\Longrightarrow I=\int\frac{2(t-3)+11}{t^2+4}dt=\int\frac{2tdt}{t^2+4}+5\int\frac{dt}{t^2+4}=\int\frac{d(t^2+4)}{t^2+4}+\frac{5}{2}\int\frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}$$
$$=\ln(t^2+4)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\ln(x^2+6x+13)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C\,;$$

б) Знаменателят на подинтегралната функция се разлага по следния начин:

$$x^4-x^3+4x^2-3x+3=x^4-x^3+x^2+3x^2-3x+3$$
$$=x^2(x^2-x+1)+3(x^2-x+1)=(x^2+3)(x^2-x+1)$$
$$\Longrightarrow\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1}$$
$$2x^3+x^2+5x+1=(Ax+B)(x^2-x+1)+(Mx+N)(x^2+3)$$

* За $x=3\sqrt{i}$: $-i\sqrt{3}-2=-2Ai\sqrt{3}-2B+3A-Bi\sqrt{3}$

$$\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}-\sqrt{3}=-2A\sqrt{3}-B\sqrt{3}\\-2=3A-2B\end{array}\right.\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}2A+B=1\\3A-2B=-2\end{array}\right.\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}A=0\\B=1.\end{array}\right.$$

* За $x = 0$: $1 = B + 3N \Longrightarrow N = 0$,
* За $x = 1$: $9 = B + 4M \Longrightarrow M = 2$;

$$\Longrightarrow I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3} + \int \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} + \int \frac{2x\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + I_1$$

При решаване на I_1 полагаме $x - \dfrac{1}{2} = t$, $x = t + \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ и получаваме

$$I_1 = \int \frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{2t\mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$= \ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$$

в) Подинтегралната функция се разлага на сума от елементарни дроби по следния начин:

$$\frac{x^4+2x^2+4}{(x^2+1)^3} = \frac{(x^4+2x^2+1)+3}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^3} + \frac{3}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{3}{(x^2+1)^3}$$

$$\Longrightarrow I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3} = I_1 + 3I_3, \quad I_1 = \operatorname{arctg} x.$$

$$I_3 = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{(x^2+1)^3}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{x\mathrm{d}(x^2+1)}{(x^2+1)^3} = I_2 + \frac{1}{4}\int x\mathrm{d}\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

$$= I_2 + \frac{x}{4(x^2+1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{4}I_2 + \frac{x}{4(x^2+1)^2}.$$

$$I_2 = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\mathrm{d}((x^2+1)}{(x^2+1)^2} = I_1 + \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\frac{1}{x^2+1}$$

$$= I_1 + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = I_1 + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

$$\Longrightarrow I = I_1 + 3\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}I_1 + \frac{x}{2(x^2+1)}\right) + \frac{x}{4(x^2+1)^2}\right]$$

$$= I_1 + \frac{9}{8}I_1 + \frac{9}{4(x^2+1)} + \frac{3x}{4(x^2+1)^2} + C$$
$$= \frac{17}{8}\text{arctg}x + \frac{9x}{8(x^2+1)} + \frac{3x}{4(x^2+1)^2} + C = \frac{17}{8}\text{arctg}x + \frac{3x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2} + C\,.$$

Забележка. Интегралът I_3 може да се реши и чрез рекурентната формула, изведена в пример 2.24 (при $a = 1$):

$$I_3 = \frac{2.3-3}{2(3-1)}I_2 + \frac{x}{2(3-1)(x^2+1)^2} = \frac{3}{4}\left[\frac{2.2-3}{2(2-1)}I_1 + \frac{x}{2(2-1)(x^2+1)}\right]$$
$$= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}I_1 + \frac{x}{2(x^2+1)}\right];$$

г) Разлагането на подинтегралната функция на сума от елементарни дроби е трудно, затова преобразуваме интеграла така:

$$I = \int \frac{dx}{x(x^5+1)^2} = \int \frac{5x^4dx}{5x^5(x^5+1)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5)}{x^5(x^5+1)^2}\,.$$

Полагаме $x^5 = t$ и получаваме:

$$5I = \int \frac{dt}{t(t+1)^2} = \int \frac{(1+t)-t}{t(t+1)^2}dt = \int \frac{dt}{t(t+1)} - \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2}$$
$$= \int \frac{(1+t)-t}{t(t+1)}dt + \frac{1}{t+1} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{d(t+1)}{t+1} + \frac{1}{t+1}$$
$$= \ln|t| - \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + C = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + \frac{1}{t+1} + C$$
$$\Longrightarrow I = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5}{x^5+1}\right| + \frac{1}{x^5+1} + C\,;$$

д) Интегралът може да се реши по два начина:

I начин: Знаменателят на подинтегралната функция се разлага на два квадратни тричлена с отрицателни дискриминанти:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^4+2x^2+1)-2x^2} = \frac{1}{(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2}$$
$$= \frac{1}{(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{Mx+N}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,.$$

$$1 = (Ax+B)(x^2+x\sqrt{2}+1) + (Mx+N)(x^2-x\sqrt{2}+1)$$
$$1 = Ax^3 + Ax^2\sqrt{2} + Ax + Bx^2 + Bx\sqrt{2} + B + Mx^3 - Mx^2\sqrt{2} + Mx$$
$$+ Nx^2 - Nx\sqrt{2} + N$$
$$1=(A+M)x^3+(A\sqrt{2}+B-M\sqrt{2}+N)x^2+(A+B\sqrt{2}+M-N\sqrt{2})x+(B+N)$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} A+M=0 \\ A\sqrt{2}+B-M\sqrt{2}+N=0 \\ A+B\sqrt{2}+M-N\sqrt{2}=0 \\ B+N=1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{ll} A=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, & B=\frac{1}{2} \\ M=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, & N=\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow I=\int \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}x+\dfrac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x+\int \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}x+\dfrac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}=I_1+I_2$$

$$x^2\pm x\sqrt{2}+1=\left(x^2\pm 2\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\left(x\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}.$$

За решаване на I_1 полагаме $x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=t$, $x=t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

$$\Longrightarrow I_1=\int \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2t\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}\left(t^2+\frac{1}{2}\right)}{t^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}(t\sqrt{2})}{(t\sqrt{2})^2+1}$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}t\sqrt{2}+C$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{2}-1)+C\,.$$

За I_2 полагаме $x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=t$, $x=t-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

$$I_2=\int \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(t-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2t\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}\left(t^2+\frac{1}{2}\right)}{t^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}(t\sqrt{2})}{(t\sqrt{2})^2+1}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}t\sqrt{2}+C$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(x\sqrt{2}+1)+C.$$

$$\Longrightarrow I=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(x\sqrt{2}-1)$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

Забележка. $\operatorname{arctg}\alpha+\operatorname{arctg}\beta=\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}.$

II начин: Полагаме $x=\operatorname{tg}t$, $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}.$

$$I=\int\frac{\mathrm{d}t}{(\operatorname{tg}^4 t+1)\cos^2 t}=\int\frac{\cos^2 t}{\sin^4 t+\cos^4 t+2\sin^2 t\cos^2 t-2\sin^2 t\cos^2 t}\mathrm{d}t$$
$$=\int\frac{\cos^2 t}{(\sin^2 t+\cos^2 t)^2-\frac{1}{2}\sin^2 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 2t}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2t}\mathrm{d}(2t)$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(2t)}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2t}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(\sin 2t)}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2t}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(2t)}{\frac{1}{2}\sin^2 2t+\cos^2 2t}$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\dfrac{\sin 2t}{\sqrt{2}}}{1-\dfrac{\sin 2t}{\sqrt{2}}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{1}{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 2t+1}\frac{\mathrm{d}(2t)}{\cos^2 2t}+A$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\operatorname{tg}2t}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\dfrac{\operatorname{tg}2t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}+A=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}2t}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2t}{\sqrt{2}-\sin 2t}+C.$$

$$x=\operatorname{tg}t,\quad \operatorname{tg}2t=\frac{2\operatorname{tg}t}{1-\operatorname{tg}^2 t}=\frac{2x}{1-x^2},\quad \sin 2t=\frac{2\operatorname{tg}t}{1+\operatorname{tg}^2 t}=\frac{2x}{1+x^2}$$
$$\Longrightarrow I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+C.$$

ЗАДАЧИ

I. Решете *интегралите*:

1. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x-2}$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C;$
2. $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{2x^3-3x-2}$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{10}\ln\frac{(x-2)^4}{|2x+1|}+C;$
3. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\frac{|(x-1)(x+3)^3|}{(x+2)^4}+C;$
4. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-13x^2+36}$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{20}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+\frac{1}{30}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C;$
5. $\displaystyle\int\frac{(5x-3)\mathrm{d}x}{(x-2)(3x^2+2x-1)}$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{15}\ln\frac{|(x-2)^7(3x-1)^3|}{(x+1)^{10}}+C;$

6. $\int \frac{x+1}{x^4-2x^3-3x^2+4x+4}dx$ Отг. $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right| - \frac{1}{3(x-2)} + C$;

7. $\int \frac{(9-7x)dx}{x^4-5x^3+3x^2+9x}$ Отг. $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x-3} + C$;

8. $\int \frac{xdx}{2x^3+13x^2+24x+9}$ Отг. $\frac{1}{25}\ln\left|\frac{x+3}{2x+1}\right| - \frac{3}{5(x+3)} + C$;

9. $\int \frac{x^2-5x-9}{x^2-5x+6}dx$ Отг. $x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$;

10. $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+16}{x^3-6x^2+12x-8}dx$ Отг. $\frac{x^2}{2} - \frac{8}{(x-2)^2} + C$;

11. $\int \frac{3x^3-5x+8}{x^2-4}dx$ Отг. $\frac{3x^2}{2} + \frac{11}{2}\ln|x-2| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + C$;

12. $\int \frac{2x-5}{x^2+8x+20}dx$ Отг. $\ln(x^2+8x+20) - \frac{13}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+4}{2} + C$;

13. $\int \frac{x^2-2x-5}{(x-1)(x^2+2)}dx$ Отг. $\frac{3}{2}\ln(x^2+2) - 2\ln|x-1| + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$;

14. $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-1}dx$ Отг. $\frac{1}{4}\ln|(x-1)^3(x+1)| - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x + C$;

15. $\int \frac{x^5+1}{x^6+x^4}dx$ Отг. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathrm{arctg}\, x + \frac{3x^2-1}{3x^3} + C$;

16. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$ Отг. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$;

17. $\int \frac{2xdx}{x^4+1}$ Отг. $\mathrm{arctg}(x^2) + C$;

18. $\int \frac{xdx}{x^4+x^3-x^2+x-2}$ Отг. $\frac{1}{60}\ln\frac{(x-1)^{10}(x+2)^8}{(x^2+1)^9} + \frac{1}{10}\mathrm{arctg}\, x + C$.

19. $\int \frac{x-5}{x^3-11x^2+44x-60}dx$ Отг. $\frac{1}{5}\ln\frac{x^2-8x+3}{(x-3)^2} - \frac{3}{10}\mathrm{arctg}\frac{x-4}{2} + C$;

20. $\int \frac{x+1}{x^3+3x^2+3x+2}dx$ Отг. $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{(x+2)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$;

21. $\int \frac{x^3dx}{x^3-2x^2+x-2}$ Отг. $x + \frac{1}{5}\ln(x-2)^8(x^2+1) - \frac{1}{5}\mathrm{arctg}\, x + C$;

22. $\int \frac{x^5+x^4+x^3+1}{x^4+x^2}dx$ Отг. $\frac{(x+1)^2}{2} - 2\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{x} + C$;

23. $\int \frac{x^2}{x^2-6x+10}dx$ Отг. $x + 3\ln(x^2-6x+10) + 8\mathrm{arctg}(x-3) + C$;

24. $\int \frac{x^4-3x^3+x^2+4x-1}{x^3-3x^2+x-3}dx$ Отг. $\frac{x^2}{2} + \frac{17}{20}\ln\frac{(x-3)^2}{x^2+1} + \frac{9}{10}\mathrm{arctg}\, x + C$;

25. $\int \frac{x-3}{(x-2)^2(x^2-x+1)}dx$

Отг. $\frac{1}{3}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{3(x-2)} - \frac{4}{3\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$;

26. $\int \frac{x^3+x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}dx$ Отг. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathrm{arctg}\, x + \frac{5}{2(x^2+1)} + C$;