Лекция 6

Тема: **Съдържание:** Метод на потенциалите за решаване на класическата транспортна задача.
Задача за назначенията.

Основни понятия и формули

Критерий за оптималност на опорния план на транспортната задача при метода на потенциалите*.* Целевата функция F от (5.1) достига $\min$ стойност, тогава и само тогава, когато всички $\Delta_{ij} \leq 0$, където Δ_{ij} са

(6.1) $$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, \left(i = 1,...,m,\ j = 1,...,n\right).$$

Забележка: Когато на F в (5.1) се търси $\max$, тогава трябва да е изпълнено условието $\Delta_{ij} \geq 0$.

Числата $u_1,...,u_i,...,u_m,v_1,...,v_j,...,v_n$, в (6.1), се наричат потенциали и се определят от условието, че във всички запълнени клетки (базисни неизвестни) е изпълнено Δ_{ij} = 0. Така тези потенциали, които са $\left(m+n\right)$- броя, са решение на системата

(6.2) $$u_i + v_j - c_{ij} = 0,$$

която има ($m+n-1$) – броя уравнения.

Решението на система (6.2) зависи от един параметър и тъй като се търси само едно решение, тогава за един от потенциалите се приема произволна стойност (например $u_1 = 0$) и след това еднозначно се определят останалите.

Критерий за влизане в опорния план: Съществува свободна клетка (свободна променлива), за която е изпълнено условието

(6.3) $$\Delta_{lk} > 0.$$

Това означава, че целевата функция може да намали стойността си, ако променливата x_{lk} е базисна. На клетка $\langle l,k \rangle$ се намира обходната линия.

Обходна линия в разпределителната таблица, с начален опорен план на транспортната задача, се нарича затворена, начупена линия от хоризонтални и вертикални участъци, на която ъглите лежат само в запълнени клетки.

Свойство 1. Запълнена клетка няма обходна линия.

Свойство 2. Всяка свободна клетка има единствена обходна линия.

Свойство 3. Обходната линия се характеризира само от ъгловите си клетки, които са четен брой. Първата (свободна) клетка на обходната линия се означава със знак (+) и след това алтернативно се присвояват знаците $(-)$ и $(+)$ на останалите ъглови клетки, които за запълнени.

Критерий за излизане от опорния план: От (-) клетки на обходната линия на $\langle l,k \rangle$ излиза от опорния план тази, която има минимален товар.

Стойността на променливата x_{lk} е количеството товар, определено от

(6.4) $$\theta = \min\left\{\text{товари в } (-) \text{ клетки}\right\}.$$

Стойностите на променливите от новия опорен план се определят, като θ се прибавя към товара в $(-)$ клетки на обходната линия и θ се изважда от товара в $(+)$ клетки.

На всяка итерация в опорния план влиза само една и излиза също само една променлива, ето защо трябва да се забележи:

1. Ако условие (6.3) е изпълнено за няколко клетки, то се избира произволно една от тях.

2. Ако θ от (6.4) има една и съща минимална стойност в повече от една (-) клетки, то само една от тези клетки е свободна (излиза от базиса), а в останалите клетки, товарът е равен на нула - това са «базисни нули».

Правила за решаване на задачи

- Решава се система (6.2) – за запълнените клетки $(m+n-1)$-броят, отговарящи на опорния план.
- Проверява се критерия за оптималност (6.1). Ако е изпълнен, то е получено оптималното решение.
- Ако (6.1) не е изпълнено, то се намера обходната линия на свободната клетка с положителна стойност от (6.1).
- Определят се $(+)$ и $(-)$ клетките на обходната линия, както и θ от (6.4). За новия опорен план се решава отново система (6.2).

Задачи и въпроси

6.1. Да се реши транспортната задача, зададена с разпределителна таблица *(6.1)* по метода на потенциалите. Началното базисно решение да се намери по метода на двупосочното предпочитане.

Таблица 6.1.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	5	2	1	20
A_2	3	5	4	2	15
A_3	5	3	6	3	25
b_j	13	17	19	11	

Решение: Проверяваме дали е в сила балансиращото условие *(5.7)*.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 20+15+25=60\,,$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 13+17+19+11=60 .$$

По правилата на метода на двупосочното предпочитане получаваме $m+n-1=4+3-1=6$ пълни клетки, които са нанесени в *табл.6.2.*

Таблица 6.2.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	$*$ 9 $\boxed{2}$	$**$ 11 $\boxed{1}$	20
A_2	$*$ 13 $\boxed{3}$	$\boxed{5}$	2 $\boxed{4}$	$*$ $\boxed{2}$	15
A_3	$\boxed{5}$	$**$ 17 $\boxed{3}$	8 $\boxed{6}$	$*$ $\boxed{3}$	25
b_j	13	17	19	11	60 \ 60

Началният опорен план е матрицата $X_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 9 & 11 \\ 13 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 17 & 8 & 0 \end{Vmatrix}$. Стойността на целевата функция при този план е $F(X_0)=175$. За да определим дали това решение е оптимално трябва да се провери в сила ли е критерият за оптималност *(6.3)*. Въвеждаме потенциалите u_i, $i=1,...,3$ и v_j, $j=1,..,4$. За клетките с положителен товар по *(6.2)* определяме системата:

$$\left| \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ \Delta_{ij} = 0 \end{array} \right. ,$$

откъдето получаваме:

$$\left| \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ \Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + v_3 - 2 = 0 \Rightarrow v_3 = 2 \\ \Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + v_4 - 1 = 0 \Rightarrow v_4 = 1 \\ \Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 2 + v_1 - 3 = 0 \Rightarrow v_1 = 1 \\ \Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = u_2 + v_3 - 4 = 0 \Rightarrow u_2 = 2 \\ \Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 4 + v_2 - 3 = 0 \Rightarrow v_2 = -1 \\ \Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = u_3 + 2 - 6 = 0 \Rightarrow u_3 = 4 \end{array} \right.$$

Нанасяме резултатите в *табл. 6.3.*

Таблица 6.3.

A_i \ B_j		$v_1=1$	$v_2=-1$	$v_3=2$	$v_4=1$	a_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
$u_1=0$	A_1	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	$*$ $\boxed{2}$ 9	$**$ $\boxed{1}$ 11	20
$u_2=2$	A_2	$*$ $\boxed{3}$ 13	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$ 2	$*$ $\boxed{2}$	15
$u_3=4$	A_3	$\boxed{5}$	$**$ $\boxed{3}$ 17	$\boxed{6}$ 8	$*$ $\boxed{3}$	25
b_j		13	17	19	11	60 \ 60

С помощта на намерените потенциали пресмятаме числата Δ_{ij} за празните клетки:

$$
\left|
\begin{aligned}
&\Delta_{11}=u_1+v_1-c_{11}=0+1-6=-5<0\\
&\Delta_{12}=u_1+v_2-c_{12}=0-1-5=-6<0\\
&\Delta_{22}=u_2+v_2-c_{22}=2-1-5=-4<0\\
&\Delta_{24}=u_2+v_4-c_{24}=2+1-2=1>0\\
&\Delta_{31}=u_3+v_1-c_{31}=4+1-5=0\\
&\Delta_{34}=u_3+v_4-c_{34}=4+1-3=2>0
\end{aligned}
\right.
$$

Критерият за оптималност е нарушен от клетки $\langle 2,4\rangle$ и $\langle 3,4\rangle$, следователно намереното решение X_0 не е оптимално и трябва да подобрим базиса. Клетката, която най-силно нарушава критерия за оптималност е $\langle 3,4\rangle$. Тя дава начало на обходна линия от вида:

$$\overset{(+)}{\langle 3,4\rangle}\to\overset{(-)}{\langle 1,4\rangle}\to\overset{(+)}{\langle 1,3\rangle}\to\overset{(-)}{\langle 3,3\rangle}\to\overset{(+)}{\langle 3,4\rangle}$$

Таблица 6.4.

A_i \ B_j		$v_1=1$	$v_2=-1$	$v_3=2$	$v_4=1$	a_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
$u_1=0$	A_1	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	$(+)$ $\boxed{2}$ 9	$(-)$ $\boxed{1}$ 11	20
$u_2=2$	A_2	$\boxed{3}$ 13	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$ 2	$\boxed{2}$	15
$u_3=4$	A_3	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$ 17	$(-)$ $\boxed{6}$ 8	$(+)$ $\boxed{3}$	25
b_j		13	17	19	11	60 \ 60

Върховете на обходната линия са:

- Клетки с $(+)$ - $\langle 3,4\rangle$ и $\langle 2,3\rangle$;
- Клетки с $(-)$ - $\langle 2,4\rangle$ и $\langle 3,3\rangle$.

Сега по (6.4) определяме $\theta = \min\{\langle 1,4\rangle ; \langle 3,3\rangle\} = \min\{8;11\} = 8$. Количеството товар $\theta = 8$ се изважда от клетките с $(-)$ и се прибавя към клетките с $(+)$. Получаваме ново разпределение на товарите, представено в *табл. 6.5.* Новият опорен план е матрицата $X_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 9+8 & 11-8 \\ 13 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 17 & 8-8 & 0+8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 17 & 3 \\ 13 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 17 & 0 & 8 \end{Vmatrix}$. Стойността на целевата функция, пресметната за това решение е $F(X_1) = 159$. Наистина $F(X_1) < F(X_0)$, следователно сме подобрили стойността на F. Трябва да пресметнем потенциалите за новото разпределение, а след това и числата Δ_{ij}.

Таблица 6.5.

A_i \ B_j		$v_1=1$	$v_2=1$	$v_3=2$	$v_4=1$	a_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
$u_1=0$	A_1	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	$(+)$ $\boxed{2}$ 17	$(-)$ $\boxed{1}$ 3	20
$u_2=2$	A_2	$\boxed{3}$ 13	$\boxed{5}$	$(-)$ $\boxed{4}$ 2	$(+)$ $\boxed{2}$	15
$u_3=2$	A_3	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$ 17	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$ 8	25
b_j		13	17	19	11	60 / 60

За пълните клетки:

$$\left| \begin{aligned} & u_1 = 0 \\ & \Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + v_3 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; v_3 = 2 \\ & \Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + v_4 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; v_4 = 1 \\ & \Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 2 + v_1 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; v_1 = 1 \\ & \Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = u_2 + v_3 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; u_2 = 2 \\ & \Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 2 + v_2 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; v_2 = 1 \\ & \Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = u_3 + 1 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; u_3 = 2 \end{aligned} \right.$$

За празните клетки:

$$\left| \begin{aligned} & \Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 1 - 6 = -5 < 0 \\ & \Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 1 - 5 = -4 < 0 \\ & \Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 2 + 1 - 5 = -2 < 0 \\ & \Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 2 + 1 - 2 = 1 > 0 \\ & \Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 2 + 1 - 5 = -2 < 0 \\ & \Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 2 + 2 - 6 = -2 < 0 \end{aligned} \right.$$

Тъй като $\Delta_{24} > 0$, то критерият за оптималност е нарушен и решението X_1 не е оптимално. Построяваме обходната линия на клетка $\langle 2,4\rangle$:

$$\overset{(+)}{\langle 2,4\rangle} \to \overset{(-)}{\langle 1,4\rangle} \to \overset{(+)}{\langle 1,3\rangle} \to \overset{(-)}{\langle 2,3\rangle} \to \overset{(+)}{\langle 2,4\rangle}$$

Върховете на обходната линия са:

- Клетки с $(+)$ - $\langle 1,3\rangle$ и $\langle 2,4\rangle$;
- Клетки с $(-)$ - $\langle 1,4\rangle$ и $\langle 2,3\rangle$.

По (6.4) определяме $\theta = \min\{\langle 1,4\rangle;\langle 2,3\rangle\} = \min\{3;2\} = 2$. Преразпределяме товарите като $\theta = 2$ се изважда от клетките с $(-)$ и се прибавя към клетките с $(+)$. Получаваме нов опорен план - матрицата $X_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 17+2 & 3-2 \\ 13 & 0 & 2-2 & 0+2 \\ 0 & 17 & 0 & 8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 19 & 1 \\ 13 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 17 & 0 & 8 \end{Vmatrix}$. Стойността на целевата функция, пресметната за това решение е $F(X_2) = 157$. В *табл. 6.6* е нанесено новото разпределение на товарите, както и потенциалите, пресметнати за него.

Таблица 6.6.

A_i \ B_j		$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 2$	$v_4 = 1$	a_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
$u_1 = 0$	A_1	[6]	[5]	[2] 19	[1] 1	20
$u_2 = 1$	A_2	[3] 13	[5]	[4]	[2] 2	15
$u_3 = 2$	A_3	[5]	[3] 17	[6]	[3] 8	25
b_j		13	17	19	11	60 \ 60

За пълните клетки:

$$\left| \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ \Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + v_3 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; v_3 = 2 \\ \Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + v_4 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; v_4 = 1 \\ \Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 1 + v_1 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; v_1 = 2 \\ \Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = u_2 + 1 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; u_2 = 1 \\ \Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 2 + v_2 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; v_2 = 1 \\ \Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = u_3 + 1 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; u_3 = 2 \end{array} \right.$$

За празните клетки:

$$\left|\begin{array}{l}\Delta_{11}=u_1+v_1-c_{11}=0+2-6=-4<0\\ \Delta_{12}=u_1+v_2-c_{12}=0+1-5=-4<0\\ \Delta_{22}=u_2+v_2-c_{22}=1+1-5=-3<0\\ \Delta_{23}=u_2+v_3-c_{23}=1+2-4=-1<0\\ \Delta_{31}=u_3+v_1-c_{31}=2+2-5=-1<0\\ \Delta_{33}=u_3+v_3-c_{33}=2+2-6=-2<0\end{array}\right.$$

Тъй като всички числа $\Delta_{ij}\le 0$, то критерият за оптималност е в сила и оптималното решение е намерно. Окончателно $F_{\min}=F\left(X_2\right)=157$ и целевата функция достига минимума си в $X_{opt}=X_2=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 19 & 1\\ 13 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 17 & 0 & 8\end{Vmatrix}$.

6.2. Да се реши транспортната задача, зададена с разпределителна таблица *6.7* по метода на потенциалите при условие, че връзката между склад A_2 и потребител B_3 е блокирана и потребител B_4 напълно задоволи потребностите си. Началното базисно решение да се намери по метода на двупосочното предпочитане.

Таблица 6.7.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	8	7	4	7	70
A_2	3	5	6	4	40
A_3	9	2	5	3	20
b_j	80	30	50	40	

Решение: Проверяваме дали е в сила балансиращото условие *(5.7)*.

$$\sum_{i=1}^{3}a_i=70+40+20=130,$$

$$\sum_{j=1}^{4}b_j=80+30+50+40=200.$$

За да балансираме транспортната задача трябва да въведем фиктивен склад A_4 с 70 единици продукция. Трябва да се блокира връзката $\left(A_2;B_3\right)$ и да се осигури напълно задоволяване на потребностите на потребител B_4. Това става като приемем, че транспортните разходи в съответните клетки са значително по-големи в сравнение с останалите. Въвеждаме в клетки $\langle 2,3\rangle$ и $\langle 4,4\rangle$ транспортни разходи равни на M , където $M >> 0$. В получената разпределителна таблица *6.8* по метода на двупосочното предпочитане намираме начален опорен план. Броят на пълните клетки е $m+n-1=4+4-1=7$. Началният опорен план е матрицата

$$X_0=\begin{Vmatrix} 0 & 10 & 50 & 10 \\ 10 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Стойността на целевата функция, пресметната за този план е $F\left(X_0\right)=10.7+50.4+10.7+10.3+30.4+20.2+70.0=530$.

Таблица 6.8.

A_i \ B_j		$v_1=6$	$v_2=7$	$v_3=4$	$v_4=7$	a_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
$u_1=0$	A_1	8	7 10	4 * 50	7 10	70
$u_2=-3$	A_2	3 * 10	5	M	4 30	40
$u_3=-5$	A_3	9	2 * 20	5	3 *	20
$u_3=-6$	A_4	0 * * 70	0 * *	0 * *	M	70
b_j		80	30	50	40	200 \ 200

За да проверим в сила дали е в сила критерият за оптималност *(6.3)*, въвеждаме потенциалите u_i , $i=1,...,3$ и v_j , $j=1,..,4$. Пресмятаме:

За пълните клетки:

$$\left|\begin{array}{l} u_1=0 \\ \Delta_{12}=u_1+v_2-c_{12}=0+v_2-7=0 \Rightarrow v_2=7 \\ \Delta_{13}=u_1+v_3-c_{13}=0+v_3-4=0 \Rightarrow v_3=4 \\ \Delta_{14}=u_1+v_4-c_{14}=0+v_4-7=0 \Rightarrow v_4=7 \\ \Delta_{24}=u_2+v_4-c_{24}=u_2+7-4=0 \Rightarrow u_2=-3 \\ \Delta_{21}=u_2+v_1-c_{21}=-3+v_1-3=0 \Rightarrow v_1=6 \\ \Delta_{32}=u_3+v_2-c_{32}=u_3+7-2=0 \Rightarrow u_3=-5 \\ \Delta_{41}=u_4+v_1-c_{41}=u_4+6-0=0 \Rightarrow u_4=-6 \end{array}\right.$$

За празните клетки:

$$\begin{vmatrix} \Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 6 - 8 = -2 < 0 \\ \Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -3 + 7 - 5 = -1 < 0 \\ \Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -3 + 4 - M = 1 - M < 0 \\ \Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -5 + 6 - 9 = -8 < 0 \\ \Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = -5 + 4 - 5 = -6 < 0 \\ \Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = -5 + 7 - 3 = -1 < 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = -6 + 6 - 0 = 0 \\ \Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -6 + 4 - 0 = -2 < 0 \\ \Delta_{44} = u_4 + v_4 - c_{44} = -6 + 7 - M = 1 - M < 0 \end{vmatrix}$$

Тъй като всички числа $\Delta_{ij} \le 0$, то критерият за оптималност е в сила и оптималното решение е намерно. Окончателно $F_{\min} = F\left(X_0\right) = 530$ и целевата функция достига минимума си в $X_{opt} = X_0$.

6.3. Да се реши транспортната задача, зададена с разпределителна таблица *6.9* по метода на потенциалите при условие, че връзката между склад A_1 и потребител B_3 е блокирана и склад A_3 напълно се освободи от продукцията си. Началното базисно решение да се намери по метода на двупосочното предпочитане.

Таблица 6.9.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	6	4	5	30
A_2	8	3	2	50
A_3	7	5	6	40
A_4	5	2	2	20
b_j	40	30	20	

Решение: Проверяваме дали е в сила балансиращото условие *(5.7)*.

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 30 + 50 + 40 + 20 = 140,$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 40 + 30 + 20 = 90.$$

За да балансираме транспортната задача трябва да въведем фиктивен потребител B_4 с 50 единици потребности. Трябва да се блокира връзката $\left(A_1; B_3\right)$ и да се осигури условието склад A_3 напълно да се освободи от продукцията си.

Въвеждаме в клетки $\langle 1,3 \rangle$ и $\langle 3,4 \rangle$ транспортни разходи равни на M, където $M >> 0$. В получената разпределителна таблица *6.10* по метода на двупосочното предпочитане намираме начален опорен план. Броят на пълните клетки е $m+n-1=4+4-1=7$. Началният опорен план е матрицата $X_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 10 & 0 & 20 & 20 \\ 30 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

Стойността на целевата функция, пресметната за този план е $F(X_0) = 30.0+10.8+20.2+20.0+30.7+10.5+20.2 = 420$.

Въвеждаме потенциалите u_i, $i=1,...,4$ и v_j, $j=1,..,4$.

Таблица 6.10.

B_j / A_i		$v_1=8$	$v_2=6$	$v_3=2$	$v_4=0$	a_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
$u_1=0$	A_1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{M}$	$**$ 30 $\boxed{0}$	30
$u_2=0$	A_2	$(-)$ 10 $\boxed{8}$	$(+)$ $\boxed{3}$	$*$ 20 $\boxed{2}$	$**$ 20 $\boxed{0}$	50
$u_3=-1$	A_3	$(+)$ 30 $\boxed{7}$	$(-)$ $*$ 10 $\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{M}$	40
$u_3=-4$	A_4	$\boxed{5}$	$*$ 20 $\boxed{2}$	$*$ $\boxed{2}$	$**$ $\boxed{0}$	20
b_j		40	30	20	50	140 / 140

Получаваме:

За пълните клетки:

$$\left| \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ \Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + v_4 - 0 = 0 \;\Rightarrow\; v_4 = 0 \\ \Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{14} = u_2 + v_4 - 0 = 0 \;\Rightarrow\; u_2 = 0 \\ \Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 0 + v_1 - 8 = 0 \;\Rightarrow\; v_1 = 8 \\ \Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 0 + v_3 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; v_3 = 2 \\ \Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = u_3 + 8 - 7 = 0 \;\Rightarrow\; u_3 = -1 \\ \Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -1 + v_2 - 5 = 0 \;\Rightarrow\; v_2 = 6 \\ \Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = u_4 + 6 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; u_4 = -4 \end{array} \right.$$

За празните клетки:

$$\left|\begin{array}{l}\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 8 - 6 = 2 > 0 \\ \Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 6 - 4 = 0 > 0 \\ \Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 2 - M = 2 - M < 0 \\ \Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 0 + 6 - 3 = 3 > 0 \\ \Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = -1 + 2 - 6 = -5 < 0 \\ \Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = -1 + 0 - M = -1 - M < 0\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}\Delta_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = -4 + 8 - 5 = -1 < 0 \\ \Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -4 + 2 - 2 = -4 < 0 \\ \Delta_{44} = u_4 + v_4 - c_{44} = -4 + 0 - 0 = -4 < 0\end{array}\right.$$

Трябва да намерим по-добро решение, защото критерият за оптималност не е изпълнен. Клетката, която най-силно го нарушава е клетка $\langle 2,2 \rangle$. За нея построяваме обходна линия:

$$\overset{(+)}{\langle 2,2 \rangle} \to \overset{(-)}{\langle 3,2 \rangle} \to \overset{(+)}{\langle 3,1 \rangle} \to \overset{(-)}{\langle 2,1 \rangle} \to \overset{(+)}{\langle 2,2 \rangle}$$

Върховете на обходната линия са:

- Клетки с $(+)$ - $\langle 2,2 \rangle$ и $\langle 3,1 \rangle$;
- Клетки с $(-)$ - $\langle 2,1 \rangle$ и $\langle 3,2 \rangle$.

По (6.4) определяме $\theta = \min\{\langle 2,1 \rangle ; \langle 3,2 \rangle\} = \min\{10;10\} = 10$. Преразпределяме товарите като $\theta = 10$ се изважда от клетките с $(-)$ и се прибавя към клетките с $(+)$. Получаваме нов опорен план - матрицата $X_1 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 10-10 & 0+10 & 20 & 20 \\ 30+10 & 10-10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 10 & 20 & 20 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \end{array} \right\|$. Стойността на целевата функция, пресметната за това решение е $F(X_1) = 390$. При това разпределение на товарите, обаче, броят на пълните клетки е 6, което е по-малко от $m + n - 1 = 7$. Затова избираме една от празните клетки, която натоварваме с нулев товар (базисна нула) и я считаме за пълна. Нека това е клетка $\langle 1,1 \rangle$.

В *табл. 6.11* е нанесено новото разпределение на товарите, както и потенциалите, пресметнати за него.

Таблица 6.11.

B_j / A_i		$v_1=8$	$v_2=6$	$v_3=2$	$v_4=0$	a_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
$u_1=0$	A_1	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{4}$	$\boxed{M}$	$\boxed{0}$ 30	30
$u_2=0$	A_2	$\boxed{8}$	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{0}$ 20	50
$u_3=-1$	A_3	$\boxed{7}$ 40	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{M}$	40
$u_4=-4$	A_4	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$	20
b_j		40	30	20	50	140 / 140

За новият опорен план пресмятаме:
За пълните клетки:

$$\left|\begin{array}{l} u_1=0 \\ \Delta_{11}=u_1+v_1-c_{11}=0+v_1-6=0 \ \Rightarrow\ v_1=6 \\ \Delta_{14}=u_1+v_4-c_{14}=0+v_4-0=0 \ \Rightarrow\ v_4=0 \\ \Delta_{24}=u_2+v_4-c_{24}=u_2+0-0=0 \ \Rightarrow\ u_2=0 \\ \Delta_{22}=u_2+v_2-c_{22}=0+v_2-3=0 \ \Rightarrow\ v_2=3 \\ \Delta_{23}=u_2+v_3-c_{23}=0+v_3-2=0 \ \Rightarrow\ v_3=2 \\ \Delta_{31}=u_3+v_1-c_{31}=u_3+6-7=0 \ \Rightarrow\ u_3=1 \\ \Delta_{42}=u_4+v_2-c_{42}=u_4+3-2=0 \ \Rightarrow\ u_4=-1 \end{array}\right.$$

За празните клетки:

$$\left|\begin{array}{l} \Delta_{12}=u_1+v_2-c_{12}=0+3-4=-1<0 \\ \Delta_{13}=u_1+v_3-c_{13}=0+2-M=2-M<0 \\ \Delta_{21}=u_2+v_1-c_{21}=0+6-8=-2<0 \\ \Delta_{32}=u_3+v_2-c_{32}=1+3-5=-1<0 \\ \Delta_{33}=u_3+v_3-c_{33}=1+2-6=-3<0 \\ \Delta_{34}=u_3+v_4-c_{34}=1+0-M=1-M<0 \\ \Delta_{41}=u_4+v_1-c_{41}=-1+6-5=0 \\ \Delta_{43}=u_4+v_3-c_{43}=-1+2-2=-1<0 \\ \Delta_{44}=u_4+v_4-c_{44}=-1+0-0=-1<0 \end{array}\right.$$

Всички клетки имат числа $\Delta_{ij}\le 0$, $i=1,...,4$, $j=1,..,4$, следователно критерият за оптималност е в сила и оптималното решение е намерено. Тое матрицата

$$X_{opt} = X_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 10 & 20 & 20 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$ а минималната стойност на целевата функция е $F_{\min} = F(X_1) = 390$.

6.4. В складове A_1 и A_2 има съответно 150т и 90 т гориво. Градовете B_1, B_3 и B_3 имат съответно потребности 60т, 70т и 110т. Стойността на превоза за 1т гориво от склад A_1 до градовете B_1, B_3 и B_3 е съответно 60лв, 100лв и 40 лв, а от склад A_2 до градовете B_1, B_3 и B_3 - съответно 120лв, 20лв и 80лв. Да се намери оптимален план на разпределение, който осигурява минимални сумарни транспортни разходи.

Отг.: $F_{\min} = 10200 лв$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 60 & 0 & 90 \\ 0 & 70 & 20 \end{Vmatrix}$

6.5. Да се реши транспортната задача, зададена с разпределителна таблица *6.12* по метода на потенциалите. Началното базисно решение да се намери по метода на двупосочното предпочитане.

Таблица 6.12.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	5	3	100
A_2	2	7	4	400
A_3	2	3	7	700
b_j	300	300	600	

Отг.: $F_{\min} = 4100$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 400 \\ 300 & 300 & 100 \end{Vmatrix}$

6.6. Да се реши транспортната задача, зададена с разпределителна таблица *6.13* по метода на потенциалите. Началното базисно решение да се намери по метода на северозападния ъгъл.

Таблица 6.13.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	2	2	3	11
A_2	4	5	6	11	11
A_3	5	7	9	12	11
A_4	10	8	12	13	11
b_j	17	9	10	8	

Отг.: $F_{\min} = 235$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 5 & 6 \\ 6 & 0 & 5 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$

6.7. Да се реши транспортната задача, зададена с разпределителна таблица *6.14* по метода на потенциалите. Началното базисно решение да се намери по метода на двупосочното предпочитане.

Таблица 6.14.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	4	5	20
A_2	4	6	6	20
A_3	5	7	3	31
A_4	7	8	5	20
b_j	25	26	30	

Отг.: $F_{\min} = 332$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 5 & 15 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 30 \\ 0 & 10 & 0 \end{Vmatrix}$

6.8. Да се реши транспортната задача, зададена с разпределителна таблица *6.15* по метода на потенциалите. Началното базисно решение да се намери по метода на северозападния ъгъл.

Таблица 6.15.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	6	12	9	60
A_2	3	3	4	5	80
A_3	1	10	1	2	100
A_4	5	11	8	6	150
b_j	50	70	90	140	

Отг.: $F_{\min} = 1290$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 130 \end{Vmatrix}$

6.9. Да се реши транспортната задача, зададена с разпределителна таблица *6.15* по метода на потенциалите при условие, че складове A_1 и A_4 напълно се освободят от продукцията си.

Отг.: $F_{\min} = 1410$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 30 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 10 \\ 20 & 0 & 0 & 130 \end{Vmatrix}$

6.10. Да се реши транспортната задача, зададена с разпределителна таблица *6.15* по метода на потенциалите при условие, че склад A_4 напълно се освободи от продукцията си и връзките между склад A_2 и потребител B_1 и между склад A_3 и потребител B_3 са блокирани.

Отг.: $F_{\min} = 1560$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 10 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 80 & 70 \end{Vmatrix}$

6.11. Да се реши транспортната задача, зададена с разпределителна таблица *6.16* по метода на потенциалите.

Таблица 6.16.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	6	5	7
A_2	4	8	7	6
b_j	8	9	4	

Отг.: $F_{\min} = 74$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{Vmatrix}$

6.12. Да се реши транспортната задача, зададена с разпределителна таблица *6.17* по метода на потенциалите.

Таблица 6.17.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	7	9	3	150
A_2	15	6	8	7	100
A_3	3	11	2	5	50
b_j	100	50	200	50	

Отг.: $F_{\min} = 1350$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 100 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 50 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \end{Vmatrix}$

6.13. Да се реши транспортната задача, зададена с разпределителна таблица *6.17* по метода на потенциалите, при условие, че потребител B_3 изцяло задоволи потребностите си.

Отг.: $F_{\min} = 1700$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 50 & 0 & 50 & 50 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \end{Vmatrix}$

6.14. Да се реши транспортната задача, зададена с разпределителна таблица *6.17* по метода на потенциалите, при условие, че потребител B_1 изцяло задоволи потребностите си и връзката между склад A_1 и потребител B_1 е блокирана.

Отг.: $F_{\min} = 2250$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 100 & 50 \\ 50 & 50 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$

6.15. Да се реши транспортната задача, зададена с разпределителна таблица *6.18* по метода на потенциалите.

Таблица 6.18.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	6	5	1	10
A_2	1	4	3	2	60
A_3	4	3	1	2	40
b_j	30	45	15	20	

Отг.: $F_{\min} = 210$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 30 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 15 & 0 \end{Vmatrix}$

6.16. Да се реши транспортната задача, зададена с разпределителна таблица *6.19* по метода на потенциалите.

Таблица 6.19.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	28	22	16	20
A_2	40	26	14	15
A_3	24	20	18	15
b_j	15	25	30	

Отг.: $F_{\min} = 860$, $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 15 & 0 \end{Vmatrix}$