基于网络分析启发式算法的组装方案优化设计

摘 要

随着科技飞速发展，各种智能化机器人相继问世，其中自来水管道清理机器人受到公司和消费者的青睐，如何在已知成本和需求量的情况下，合理的规划生产所需材料的购买是一个很棘手的问题。本文将通过解决以下问题，为企业提供合适的规划方案

针对问题一，要求解决在所购组件当天就可用于组装的条件下，进行每周生产计划的规划，使得总成本最小的问题。首先，我们通过物料守恒、关键设备使用时间等约束条件构造出**多层能力受限的批量生产模型**，再通过**基于网络分析动态规划的启发式算法**进行求解，最终得到需要最小成本为 **8475 元**的结论。

针对问题二，要求在组件必须隔一天才能够进行组装的条件下，继续求解第一问的最佳方案。我们在第一问的基础上，改变物料守恒、初值条件、终值条件的约束公式，得到**改进后的批量生产模型**，继续使用第一问中的启发式算法求解，最终得到需要最小成本为 **155861.5 元**的结论。

针对问题三，要求解决 30 周 210 天内必须有 7 天进行设备维修，且维修过后关键设备生产能力会有提升，维修间隔不能低于 6 天的条件下，求出满足需求量且总成本最小的维修方案的问题。我们在第二问模型的基础上引入 0-1 整型变量判断第 t 天是否进行维修，通过添加维修总数约束、维修停产约束、维修间隔约束，改变设备使用时间约束得到**具有持续性的批量生产模型**，通过启发式算法进行求解，得到维修日期为 **[67,77,83,91,113,174,193]**，最小成本为 **5594453 元**的结论。

针对问题四，要求解决在未知外部需求订单的情况下，通过历史周订单数据来制定生产计划，使得每天的交付率达到百分之 95 以上，每周的交付率达到百分之 85 以上的问题。首先，我们讲历史数据中的前 27 周作为训练集，后 3 周作为测试集，建立 **AR 时间序列模型**，得到当 AR 时间序列模型的阶为 6 时，预测需求量的**每日最大误差为百分之 8.13，每周最大误差为百分之 2.5，预测的下周每日需求量为[42,39,42,43,42,42,44]，总需求量为 294**。继续预测第 8 天的需求量为 43。然后将预测值带入问题二中改进的批量生产模型，用启发式算法进行求解，得到最小成本为 **156452.5 元**的结论。

本文还对模型进行了**灵敏度分析**，通过改变单位组件库存费用、组件的固有成本，重要设备的使用时长，得出了我们的模型对组件的固有成本和重要设备使用时长具有较高的鲁棒性，但对组件库存费用有很高灵敏度的结论。

关键词 多层能力受限的批量问题 生产计划 动态规划 基于网络分析的启发式算法 AR 时间序列

一、 问题重述

1.1 背景知识

随着科技飞速发展，各种智能化机器人相继问世，其中自来水管道清理机器人越来越受到公司和消费者的青睐，如何在已知成本和需求量的情况下，合理的规划生产所需材料的购买是一个急需解决的问题。

1.2 相关数据

1. 关于每天 WPCR 需求和关键设备工时限制。（见附件 1 表 5）
2. 每次生产准备费用和单件库存费用。（见附件 1 表 6）
3. 连续 30 周的 WPCR 需求数据。（见附件 1 表 7）

1.3 具体问题

1.3.1 问题一

若该工厂第一天（周一）开始时没有任何组件库存，也不希望第 7 天（周日）结束后留下任何组件库存。每天采购的组件马上就可用于组装，组装出来的组件也可以马上用于当天组装成 WPCR。若要求总成本最小，请问如何制定每周 7 天的生产计划？

1.3.2 问题二

事实上，组件 A、B、C 需要提前一天生产入库才能组装 WPCR，A1、A2、A3、B1、B2、C1、C2、C3 也需要提前一天生产入库才能组装 A、B、C。在连续多周生产情况下，需要统筹规划。比如在周一生产 WPCR 前一天（上周周日）必须事先准备好组件库存，而且在本周日必须留下必要的组件库存用以保障下周一的生产。每周的 WPCR 需求和关键设备工时限制以及每次生产准备费用和单件库存费用数据见表 5、表 6，请问如何制定每周 7 天的生产计划以求总成本最低？

1.3.3 问题三

接问题 2。为了保障生产的持续性，工厂需要在 30 周 210 天里必须设置 7 次停工检修，每次检修时间为 1 天。检修之后关键设备生产能力有所提高，检修后的第一天 A、B、C 生产总工时限制将会放宽 10%，随后逐日减少放宽 2%的比例，直至为 0（如

第一天放宽 10%，第二天就放宽 8%，...）。检修日的订单只能提前安排生产，当天不能生产任何组件。假设每周的关键设备工时限制以及每次生产准备费用和单件库存费用数据不变，任意两次检修之间要相隔 6 天以上，请问，检修日放在哪几天最为合适（总成本最小）？

1.3.4 问题四

在生产实际中，在未知 WPCR 外部需求订单的前提下，公司需要有一个稳妥的单周生产计划。接问题 2，表 7 数据视为历史周订单数据，在不知未来某周 7 天订单数且 继续追求周总成本最小的前提下，如何制定周生产计划，既能够保障每天的 WPCR 订单 均以 95%以上的概率保证正常交付，又能够以 85%以上的概率保证整周的 WPCR 订单能 正常交付？

二、 问题分析

2.1 研究现状综述

李嫦[1] 针对组装线生产计划和零部件库存策略问题,以最小化总成本为目标,建立具有能力限制的有限期两层动态批量数学模型,并根据该问题性质设计启发式求解算法,逐期优化两层系统的批量和总成本。

黄竣桥[2]将在大数据情况生产管理规划数据化及编程的问题归结为线性规划问题，研究了生产管理规划模型在各种场合的实用性，并探讨应用 Excel 的"规划求解"工具建立生产管理规划模型并求解,为生产决策提供依据。

马龙[3] 针对金属矿山企业的单位开采与运输成本大、优化求解结果偏差大问题，依据金属矿山企业编制开采计划的基本原则,以矿石开采与运输成本最小化为优化目标,利用整数规划方法,构建了金属矿山企业生产计划数学模型,提出了改进的量子粒子群优化算法,提高了算法的局部和全局搜索能力。

目前有大量关于移动通信网络站址优化问题的文献，但现有文献或多或少都有不足之处，需加以完善。

2.2 问题的总体分析和解题思路

本文主要在于多层、能力受限批量问题的优化研究，针对机器人组件生产方案的问题，我们团队将对此分成 4 个小问题进行研究。根据本文的研究思路，先给出整体的思路流程图

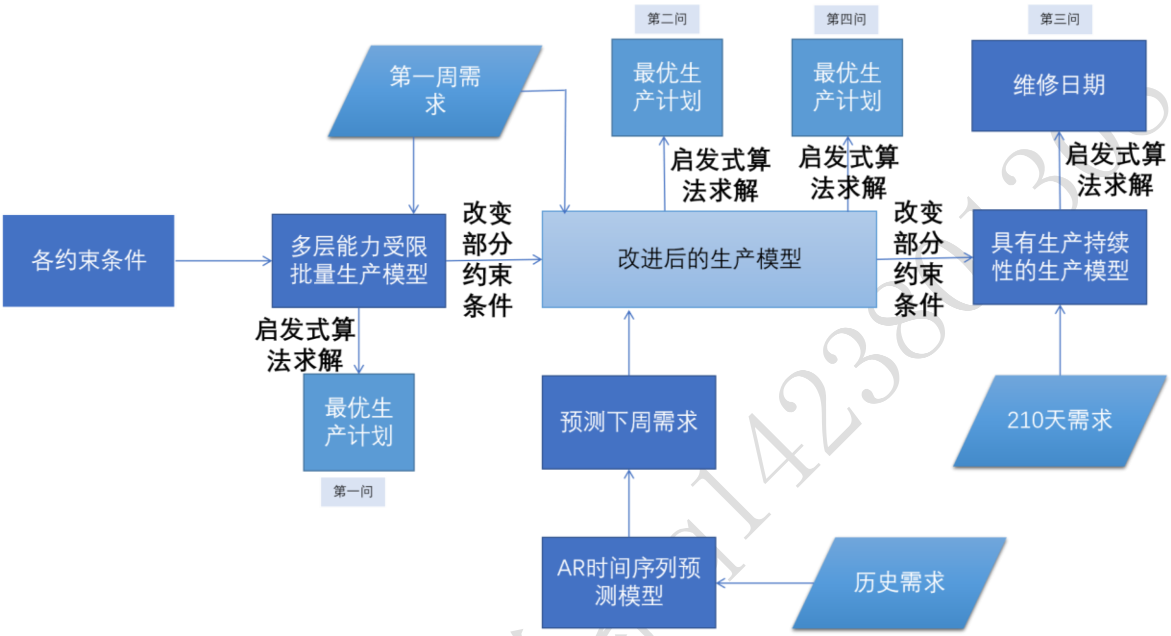

图 1 总体思路流程图

2.3 对问题的具体分析

2.3.1 对问题一的分析

要求在第一天没有组件库存且在周日不留下任何组件库存的条件下，求总成本最小的生产计划。该问题属于多层、能力受限的批量问题，我们先构建三层能力有限的批量模型，由于多层能力有限的批量问题一般不存在多项式时间算法，故我们使用基于网络分析的动态规划最优算法和启发式算法[4]来求得最优方案。

2.3.2 对问题二的具体分析

本问在第一问的基础上，为了更贴合实际需求，要求在组件必须隔一天才能够组装的条件下，继续求解第一问的最佳方案。我们只需改进部分约束即可，模型以及求解方法仍能够继续使用。

2.3.3 对问题三的具体分析

要求在第二问的条件下，添加 30 周 210 天内必须有 7 天休息，且休息过后关键设

备生产能力会有提升，休息间隔不能低于 6 天的约束条件，求满足完成 30 周需求量的最小总费用生产计划。我们引入新的变量 Ri 代表第 i 天是否维修，对第二问建立的生产计划的模型部分约束条件进行修改，再使用基于网络分析动态规划的启发式算法求解。

2.3.4 对问题四的具体分析

要求在未知外部需求订单的情况下，通过历史周订单数据来制定生产计划，使得每天的交付率达到百分之 95%以上，每周的交付率达到 85%以上。我们通过 AR 时间序列算法，将历史数据中 70%的数据作为训练集，30%的数据作为测试集，得到满足条件的参数关系后，带入第三问的模型中，并进行求解。

三、 模型假设

- 生产过程中，各组件生产准备费用和库存费用不变
- 生产过程中，仪器性能不发生改变，不产生故障
- 不考虑其他因素导致的成本，即最小成本只与题目给出的条件有关
- 节假日生产机器不停工

四、 符号说明

序号	符号	符号说明	单位
1	Ht	第 t 天的工时限制	小时
2	K_i	组件 i 的固有成本	个
3	n_i	不同组件	
4	$X_{t,i}$	第 t 天组件 i 购买或组装个数	个

序号	符号	符号说明	单位
5	D_t	第 t 天 WPCR 的需求	个
6	Y（$X_{t,i}$）	第 t 天 i 部件是否生产	0-1
7	C_i	i 部件单价	元
8	$M_{t,i}$	第 t 天 i 部件库存	个
9	P_i	部件 i 库存费用	元
10	$N_{i,n}$	组装 n 部件直接用到的 i 部件个数	个
11	h_i	生产一个 i 部件占用特殊机器的时间	小时
12	R_i	第 i 天是否休息	0-1
13	$D_{t,i}$	第 t 天 i 组件的需求量	个
14	Q_S	变量的相关系数	

五、 模型的建立与求解

5.1 问题一的分析与求解

5.1.1 对问题的分析

要求在第一天没有组件库存且在周日不留下任何组件库存的条件下，求总成本最小的生产计划。该问题属于多层、能力受限的批量问题，我们先构建三层能力受限的批量模型，由于多层能力有限的批量问题一般不存在多项式时间算法，故我们使用基于网络

分析的动态规划最优算法和启发式算法[4]，总体思路如图 2

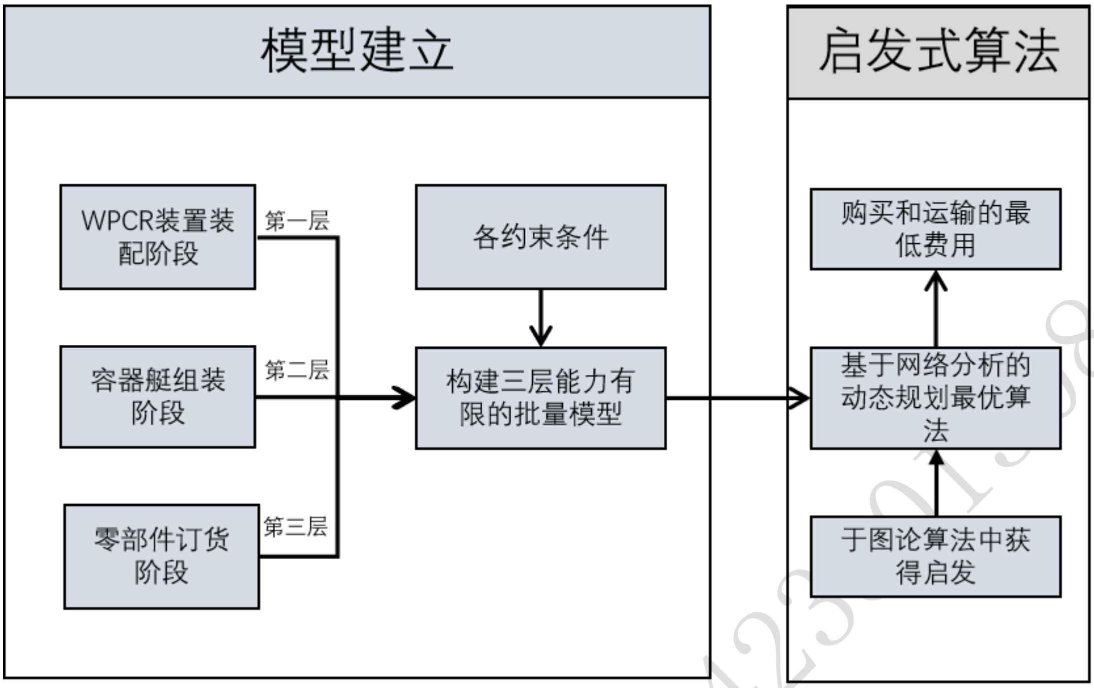

图 2 第一问流程图

5.1.2 三层能力受限的组装系统批量生产模型的建立[1]

针对该确定性有限期组装生产计划和零部件订货问题建立三层能力受限的组装系统批量模型如图 3

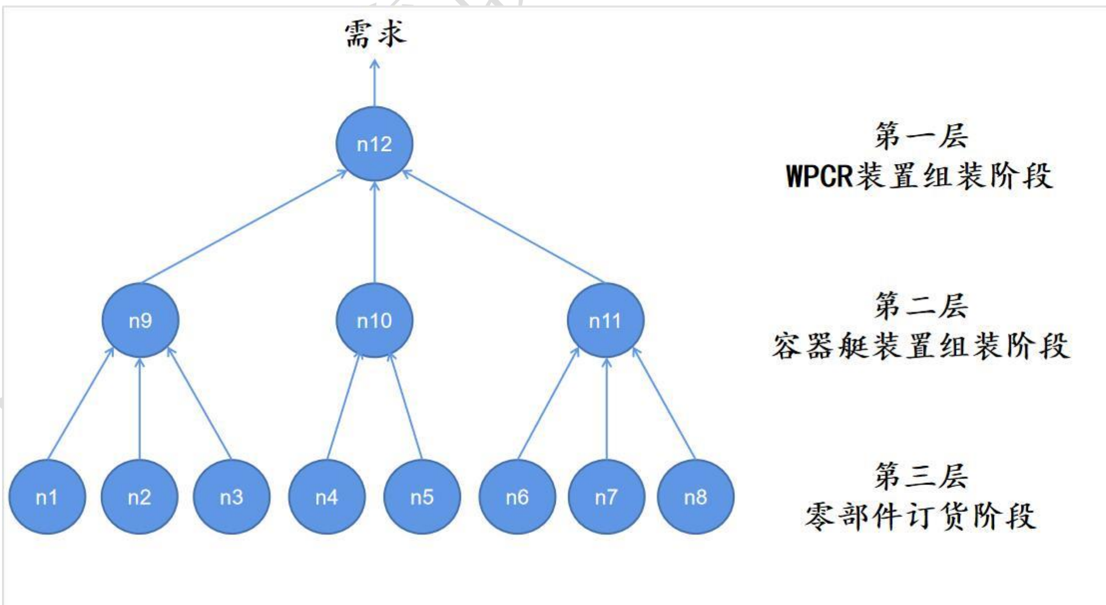

图 3 组装系统示意图

其中第一层是 WPCR 装置组装阶段，根据订单要求，制定生产计划，安排容器艇组装，无生产力限制。第二层是容器艇组装阶段，根据第一层的生产计划，制定各容器艇的生产计划，安排组装产量，有生产力限制。第三层是零部件订货阶段，根据第二层的

生产计划，制定各零部件的订货策略，零部件的订货量没有限制。

下面构造优化模型，目标函数为总成本 F 最小，即

$$\min\ F=\sum_{i=1}^{12}\cdot\sum_{t=1}^{7}\left\{K_i\times Y\left(X_{t,i}\right)+C_iX_{t,i}+M_{\mathrm{t,i}}P_{\mathrm{i}}\right\}$$

其中，K_t 是组件 i 生产所需的固有成本，Y（$X_{t,i}$）是 0-1 变量，定义如下

$$Y\left(X_{t,i}\right)=\begin{cases}1\ \mathrm{X}_{t,i}>0\\0\ \mathrm{X}_{t,i}=0\end{cases}$$

考虑到关键设备的使用时限，得到约束公式

$$\sum_{i=9}^{11}\mathrm{h}_iX_{t,i}\le H_t$$

由物料守恒关系，得到约束公式

$$\begin{cases}M_{t,1}=M_{(t-1),i}+X_{t,i}-\sum_{\mathrm{n}=9}^{11}N_{\mathrm{i,n}}X_{t,n}\left(i\neq12\right)\\M_{t,12}=M_{t,11}+X_{t,12}-D_t\end{cases}$$

由各部件组装个数应为正整数，得到约束公式

$$X_{t,n}\ge0$$

考虑到不能延期交货，及各部件每日的库存量不为负，得到约束公式

$$M_{t,i}\ge0$$

由题意可得，各组件的库存量终值和初值条件为

$$M_{7,1}=M_{0,1}=0$$

综上所述，建立的三层能力有限的组装系统批量模型为

$$\min\ F=\sum_{i=1}^{12}\cdot\sum_{t=1}^{7}\left\{K_i\times Y\left(X_{t,i}\right)+C_iX_{t,i}+M_{\mathrm{t,i}}P_{\mathrm{i}}\right\}$$

$$\begin{cases} M_{t,1} = M_{(t-1),i} + X_{t,i} - \sum_{\mathrm{n}=9}^{11} N_{\mathrm{i,n}} X_{t,n} \left(i \neq 12 \right) \\ \sum_{i=9}^{11} \mathrm{h}_i X_{t,i} \leq H_t \\ M_{t,12} = M_{t,11} + X_{t,12} - D_t \\ M_{t,i} \geq 0 \\ M_{7,1} = M_{0,1} = 0 \\ X_{t,n} \geq 0 \end{cases}$$

5.1.3 基于网络分析动态规划最优算法的启发式算法求解[1]

- 算法设计

模型为多期整数动态规划模型，不存在多项式最优解求解算法，我们通过分析最优解的性质，缩小解的搜索空间，提高算法效率。

题目要求的是计划结束后（周日）无库存，故可以将第一层的需求量 D_t 按照组装的需求关系变成第二层的需求量 $D_{t,i}$ 转换关系为

$$D_{t,i} = N_{i,12} \times D_t$$

其中 $N_{i,12}$ 为一个组件 12（WPCR）直接需要组件 i 的个数

求出 $D_{i,t}$ 后将第二层考虑为单层能力有限动态批量问题，求出第二层的最优生产计划，再综合考虑后求得再生点（库存为 0 的时间点）间最优生产计划。

- 算法描述

步骤一：通过构造网络，将组装生产计划问题转换为寻找最优路径问题，在网络中，以可能产生的量 X_j 为起点，构造边（X_j，X_{j+1}）,边的权作为第 j 期增加的成本。
边权计算公式为

$$\mathrm{w}(\mathrm{X}_j, X_{j+1}) = \sum_{i=9}^{11} K_i \times Y(A_{i,j+1} - A_{i,j}) + \sum_{i=9}^{11} C_i \times (A_{i,j+1} - A_{i,j}) + \sum_{\mathrm{i}=9}^{11} \mathrm{p_i} \times (\mathrm{A_{i,j+1}} - \sum_{\mathrm{t}=1}^{7} D_{\mathrm{t,i}})$$

其中 $A_{i,j}$ 代表 j 端点时组件 i 的总量，满足如下约束条件

$$\begin{cases} X_j = \sum_{i=9}^{11} A_{i,j} \\ X_j, A_{i,j} \geq 0 \end{cases}$$

步骤二：可用 Floyd 算法[5]求得最短路径，该路径即为第二层的最优生产计划，接下来再综合考虑组装阶段生产计划和零部件的生产成本。

➢ 算法求解

使用启发式算法对该三层能力有限的组装系统批量模型求解，所得结果如表 1

表 1 问题 1 的结果

日期	WPCR 组装数量	A 组装数量	B 组装装数量	C 组装数量	生产准备费用	库存费用
周一	39	177	156	195	1200	0
周二	36	108	144	180	1200	0
周三	40	120	160	200	1200	10
周四	38	114	152	192	1200	0
周五	37	111	148	185	1200	0
周六	46	138	184	230	1200	65
周日	27	81	108	135	1200	0
总和	263	789	1052	1315	8475	

由表可知，说明周四到周日的关键设备使用时限能够满足临时产出临时售卖，而由于周日的限制时间为 2100 和 1500h，其最大产率为 38 和 27，故需要在周三、周六额外屯 2、13 个 WPCR，以供交货。

5.2 问题二的分析与求解

5.2.1 对问题的分析

本问在第一问的基础上，为了更贴合实际需求，要求在组件必须隔一天才能够组装的条件下，继续求解第一问的最佳方案。我们只需改进部分约束即可，模型以及求解方法仍能够继续使用。总体流程图如图 4

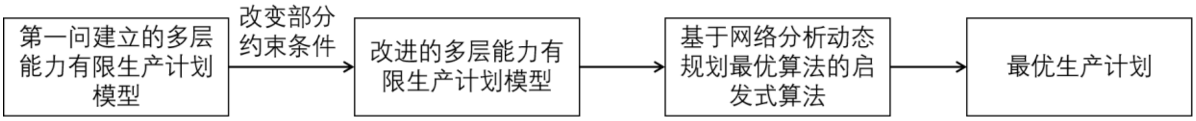

图 4 问题二思路流程图

5.2.2 改进的组装系统批量模型的建立与求解

由题意，目标函数以及约束条件中的关键设备使用时限约束、由各部件组装个数应为正整数约束、不可延期交货约束都不变。而物料守恒约束和初值终值约束条件需要改进。

由于组装不可使用当日购买或组装的器件，有如下物料守恒条件为

$$\begin{cases} M_{t_{1,i}} = M_{t,i} + X_{t,i} - \sum\limits_{\mathrm{i}=9}^{11} N_{i,n} X_{t,n} \left(t>1, i \neq 12\right) \\ M_{1,i} = X_{1,i} \left(i \neq 12\right) \\ M_{0,i} = 0 \ (i \neq 12) \\ M_{t,12} = X_{t,12} - D_t + M_{(t-1),12} \ (\mathrm{t}>1) \end{cases}$$

由第 7 天的囤货要满足第 8 天的需求量，新的终值约束条件为

$$M_{\mathrm{i},t} = N_{i,12} \times D_t$$

我们认为第一天的 WPCR 需求量在前一天已经刚好准备完成，即初值条件改进为

$$\begin{cases} M_{0,12} = D_1 \\ M_{0,i} = 0 \ (i \neq 12) \end{cases}$$

综上所述，改进的组装系统批量模型为

$$\min\ F = \sum_{i=1}^{12} \cdot \sum_{t=1}^{7} \left\{ K_i \times Y\left(X_{t,i}\right) + C_i X_{t,i} + M_{\mathrm{t,i}} P_{\mathrm{i}} \right\}$$

$$\begin{cases} M_{t_{1,i}} = M_{t,i} + X_{t,i} - \sum\limits_{i=9}^{11} N_{i,n} X_{t,n} \left(t>1, i \neq 12\right) \\ M_{1,i} = X_{1,i} \left(i \neq 12\right) \\ M_{0,i} = 0 \\ M_{0,12} = D_1 \\ M_{t,12} = X_{t,12} - D_t + M_{(t-1),12} \ (t>1) \\ \sum\limits_{i=9}^{11} \mathrm{h}_i X_{t,i} \leq H_{t,i} \\ M_{t,i} \geq 0 \\ X_{t,n} \geq 0 \end{cases}$$

使用基于网络分析的动态规划最优算法和启发式算法求解，得到结果如表 2

表 2 问题二答案

日期	WPCR 组装数量	A 组装数量	B 组装装数量	C 组装数量	生产准备费用	库存费用
周一	39	108	144	180	1200	27828
周二	36	129	172	215	1200	32381.5
5 周三	43	150	200	250	1200	24990
周四	50	114	152	190	1200	29834
周五	38	138	184	230	1200	32523
周六	46	150	200	250	700	1170
周日	50	0	0	0	240	195
总和	302	789	1052	1315	155861.5	

由上表可知，当组件不能当天生产当天组装，费用接近原来的 15 倍，主要原因是一个 WPCR 组件需要的零部件数量巨大，因此库存费用也极大，符合实际情况。

5.3 问题三的分析与求解

5.3.1 对问题的分析

要求在第二问的条件下，添加 30 周 210 天内必须有 7 天对设备进行维修，且维修过后关键设备生产能力会有提升，维修间隔不能低于 6 天的约束条件，求满足完成 30 周需求量的最小总费用生产计划。我们引入新的变量 R_i 代表第 i 天是否维修，对第二问建立的生产计划的模型部分约束条件进行修改，再使用基于网络分析动态规划的启发式

算法求解。总体思路如图 5

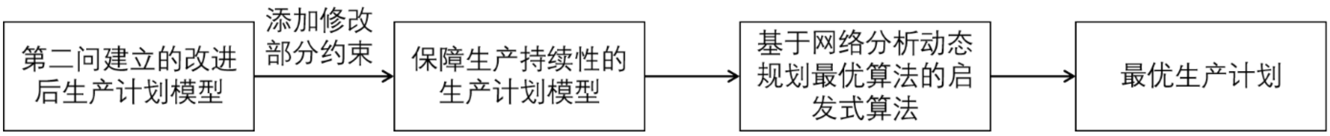

图 5 问题三的思路流程图

5.3.2 保障生产持续性的批量生产计划模型的建立与求解

由题意，我们引入一个 0-1 变量 R_i，定义如下

$$R_t=\begin{cases}1 & \text{第t天进行维修}\\ 0 & \text{第t天不进行维修}\end{cases}$$

由 210 天里总维修天数为 7 次，得到维修天数约束

$$\sum_{t=1}^{210} R_t = 7$$

为了保证维修间隔不低于 6 天，得到维修间隔约束

$$\sum_{j=0}^{5} R_{t+j} \le 1$$

由维修时不能进行任何组装生产，得到维修停产约束

$$\sum_{i=9}^{12} X_{t,i} R_t = 0$$

维修后关键设备使用时限会发生改变，改进后关键设备使用时限约束如下

$$\sum_{i=9}^{11} \mathrm{h}_i X_{t,i} \le H_t\left(1+\sum_{j=0}^{5}(0.1-0.02j)R_{t-j}\right)$$

规定当 Rt 下标为负时，其值为 0，即

$$R_i = 0 \ (i \le 0)$$

综上所述，具有持续性的组装系统批量模型为

$$\min\ F=\sum_{i=1}^{12}.\sum_{t=1}^{7}\left\{K_i\times Y\left(X_{t,i}\right)+C_iX_{t,i}+M_{\mathrm{t,i}}P_{\mathrm{i}}\right\}$$

$$\begin{cases}
M_{t_{1,i}}=M_{t,i}+X_{t,i}-\sum_{i=9}^{11}N_{i,n}X_{t,n}\left(t>1,i\neq 12\right)\\
M_{1,i}=X_{1,i}\left(i\neq 12\right)\\
\sum_{i=9}^{11}\mathrm{h}_iX_{t,i}\leq H_t(1+\sum_{j=0}^{5}(0.1-0.02j)R_t)\\
M_{0,i}=0\\
M_{0,12}=D_1\\
\sum_{t=1}^{210}R_t=7\\
M_{t,12}=X_{t,12}-D_t+M_{(t-1),12}\ \ (\mathrm{t}>1)\\
\sum_{i=9}^{12}X_{t,i}R_t=0\\
\sum_{j=0}^{5}R_{t+j}\leq 1\\
M_{t,i}\geq 0\\
X_{t,n}\geq 0
\end{cases}$$

带入基于网络分析的动态规划最优算法和启发式算法求解，得到结果如

表 3 问题三的答案

第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次	总成本
67	77	83	91	113	174	193	5594453

30 周总成本为第一周的 36 倍左右，分析可知，由于维修日不能进行组装，所以需要额外的存储费用来完成需求，符合实际情况。

5.4 问题四的分析与求解

5.4.1 对问题的分析

要求在未知外部需求订单的情况下，通过历史周订单数据来制定生产计划，使得每天的交付率达到百分之 95%以上，每周的交付率达到 85%以上。我们通过 AR 时间序列算法，将历史数据中 70%的数据作为训练集，30%的数据作为测试集，得到满足条件的参数关系后，带入第三问的模型中，并进行求解，总体思路流程图如图 6

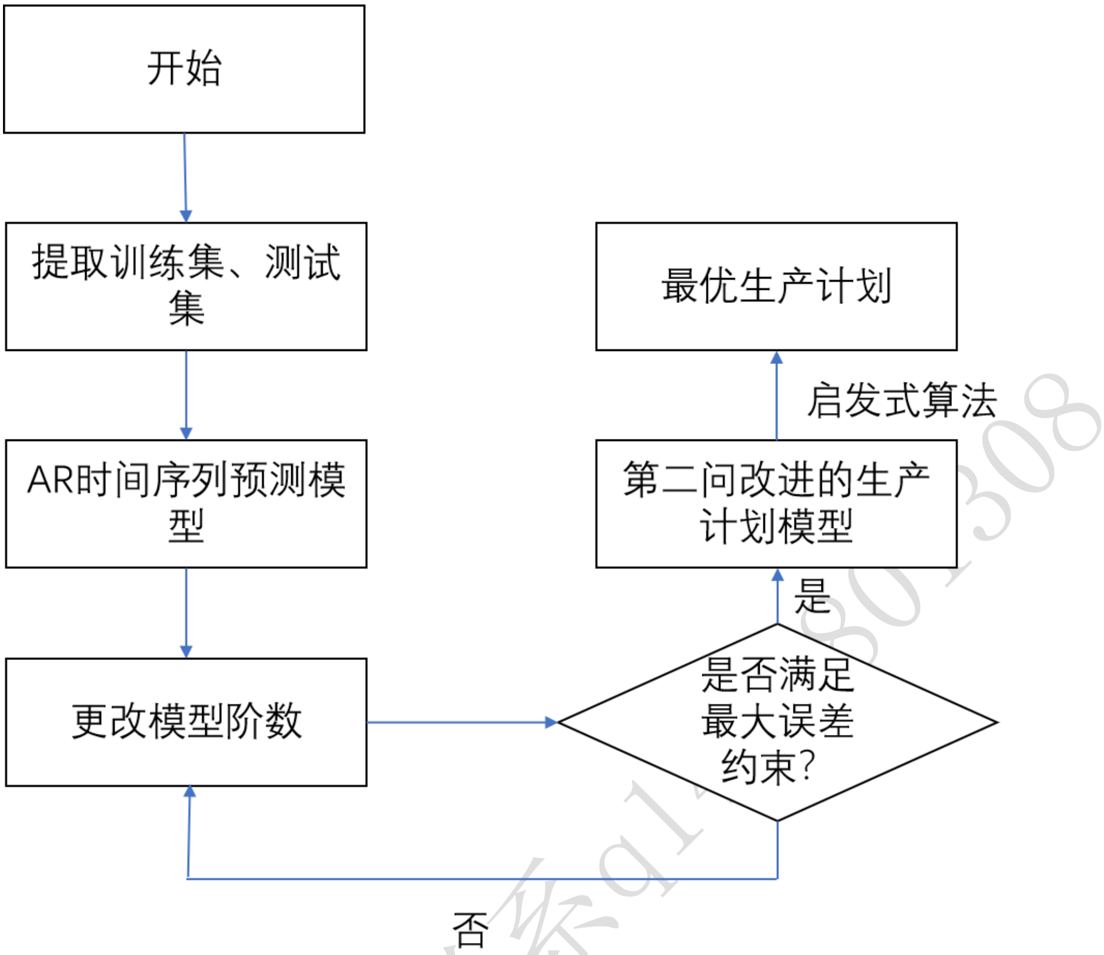

图 6 问题四流程图

5.4.2 基于 AR 时间序列算法的预测模型的建立与求解

➢ 时间序列原理

时间序列分析的首要步骤是建立合适的时间序列模型，表示一个线性系统，该系统的传递函数为：

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}$$

其中：$B(z)=\sum_{k=0}^{q}b_k z^{-k}$ 为系统的滑动平均分支，q 为滑动平均的阶数；$A(z)=\sum_{k=0}^{p}a_k z^{-k}$ 为系统的自回归分支，p 为自回归分支的阶数。

对于一个正常的且 0 为均值的时间序列其 $AR_{(p)}$ p 阶自回归模型为：

$$x_t=\phi_1 x_{t-1}+\phi_2 x_{t-2}+\ldots+\phi_p x_{p-1}+a_t$$

式中：x_t 为随机过程或时序的观测值；$\phi_i(1 \le i \le P)$，P 为自回归参数；a_t 为残差，白噪声序列；p 为模型阶数，$\theta_j(1 \le j \le q)$；q 为实数权重，滑动平均参数。

➢ 平稳性 Daniel 检验

Daniel 检验方法建立在 Spearman 相关系数的基础上的。对于二维总体的样本观测数据，Spearman 相关系数定义为这两组秩统计量的相关系数，即 Spearman 相关系数是

$$q_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})(S_i - \overline{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})^2 \sum_{i=1}^{n}(S_i - \overline{S})^2}}$$

对于 Spearman 相关系数，作假设检验

$$H_0 : \rho_{XY} = 0, H_1\text{：} \rho_{XY} \ne 0$$

当 H_0 成立时，统计量为

$$T = \frac{q_s\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-q_s^2}}$$

Daniel 检验方法：对于显著水平 α，由时间序列 α_1 计算 (t, R_t)，$t = 1,2,\ldots,n$ 的 Spearman 秩相关系数 q_s，若 $|T| > t_{\alpha/2}(n-2)$，则拒绝 H_0，认为序列非平稳。且当 $q_s > 0$ 时，认为序列有上升趋势；$q_s < 0$ 时，认为系列有下降趋势。又当 $|T| \le t_{\alpha/2}(n-2)$ 时，接受 H_0，可以认为 X_t 是平稳序列。

➢ AR 时间序列预测模型的求解

将前 27 周的数据作为训练集，后 3 周的数据作为测试集。其统计量 T、秩相关系数 q_s、最大相对误差与 AR 时间序列模型阶数 P 的关系如表 4

表 4 时间序列阶数与最大相对误差的关系

模型阶数 P	1	2	3	4	5	6	7
统计量 T	2.1316	2.1316	2.1316	2.1316	2.1316	2.1316	2.1316
秩相关系数 q_s	0.406	0.406	0.406	0.406	0.406	0.406	0.406
最大相对误差	14.80%	13.40%	13.70%	10.70%	12.5%	8.13%	9..01%

由表可知，$q_s>0$,T 大于显著水平为 0.1 的 t 分布临界值，模型稳定，且当 AR 时间序列阶乘选择 6 时，每日需求量最大误差为 8.13%，小于 10%，符合要求。故我们最终选

择的自回归模型 AR(6)对每日需求量 D_t 进行预测：

$$D_t = 0.1567D_{t-1} + 0.0066D_{t-2} + 0.2001D_{t-3} + 0.5187D_{t-4} - 0.1049D_{t-5} + 0.2499D_{t-6} + \varepsilon_t$$

此时测试集（后三周）的周需求量误差为[0.022,0.025,0.006],都远小于 15%，符合要求，每日的预测需求量与实际需求量数据如图：

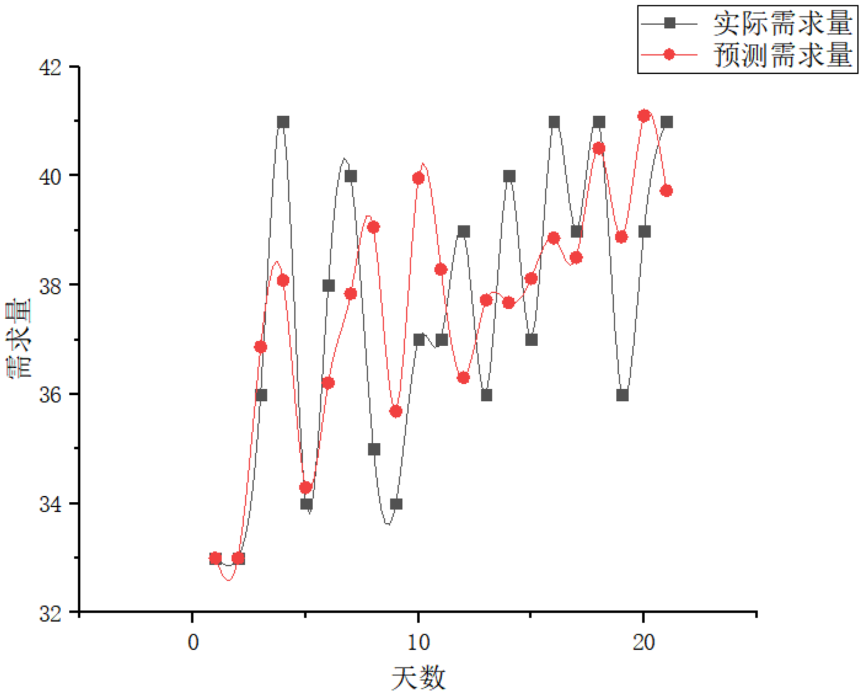

图 7 每日的预测需求量与实际需求量

将 30 周的需求量都作为训练集，带入时间预测模型 AR（6）中，得到后一周的需求量为[41.7824,38.7636,41.8572,42.9072,41.5623,41.8592,43.5079]，为保证不产生缺货情况，向上取整为[42,39,42,43,42,42,44]，将预测的周需求量作为输入带入 AR（6）模型中，得到第 8 天（下周周一）的需求量为 42.915，向上取整为 43。

将预测的需求量，带入问题二的改进的组装系统批量模型中，应用基于网络分析动态规划最优算法的启发式算法，最终结果如表 5

表 5 问题四最终结果

日期	预测需求量	WPCR 组装数量	A 组装数量	B 组装装数量	C 组装数量	生产准备费用	库存费用
周一	42	42	204	272	340	1200	28348
周二	39	68	129	172	215	1200	32440.5

日期	预测需求量	WPCR组装数量	A 组装数量	B 组装装数量	C 组装数量	生产准备费用	库存费用
周三	42	43	150	200	250	1200	25015
周四	43	50	114	152	190	1200	29868
周五	42	38	138	184	230	1200	32516
周六	42	46	150	200	250	700	1110
周日	44	50	0	0	0	240	215
总和	294	337	1011	1348	1685	156452.5	

本问的总费用 156452.5 与第二问的总费用 155861.5 相比大概多出 600 元，其需求量比第二问多了 11 个，相当于每多一个需求，成本加 50，符合实际情况。

六、模型的分析与改进

6.1 误差分析

启发式算法容易陷入局部最优，我们使用的基于网络分析动态规划最优算法的启发式算法将多层问题变成单层问题求解，缩小了搜索范围的同时可能也会错过最优解。

第四问中，AR 时间预测模型对需求量的预测不一定符合实际情况，存在一定的偏差，但结果仍在可接受范围内。

6.2 灵敏度分析与模型的改进

由于不同时间所需的启动成本，关键设备的最大允许时间以及组装成本可能不同，我们通过改变这些常量的值，对我们的模型进行灵敏度分析，得到结果如表 6

表 6 对模型的灵敏度分析

自变量变化率（%）	关键设备使用时间变化后的总成本	储存费用变化后的总成本	固有费用变化后的总成本
1	156452.5	157882.6	156521.9
2	156452.5	159312.7	156591.3
3	156452.5	160742.8	156660.7
4	156452.5	162172.9	156730.1
5	156452.5	163603	156799.5

由表可知，我们的模型对关键设备使用时间以及组件生产的固有成本具有较高的鲁棒性，但是对储存费用的灵敏度比较高。故可对模型添加储存费用变化约束。

七、 模型的评价和推广

7.1 模型的优点

- 本文对问题的求解有合理的猜想、假设、计算。
- 本文采用启发式算法，加快了解的效率
- 图文并茂。有流程图，结果图，思维导图等，可视化强。
- 多种软件相互配合，取长补短，本文通过 Origin，PPT，Matlab、Python 等软件，进行问题求解和结果可视化。
- 条理清晰，逻辑缜密，模型简单易懂，在求解的过程中逐步完善理论。

7.2 模型的缺点

1. 我们使用的基于网络分析动态规划最优算法的启发式算法将多层问题变成单层问题求解，缩小了搜索范围的同时可能也会错过最优解。

2. 基于 AR 时间序列的预测模型对需求量的预测不一定符合实际情况，存在一定的偏差。

7.3 模型的推广

7.3.1 横向推广

我们建立模型的过程中用到的方法可以推广到其他多层能力受限批量生产的领域，例如，生产车辆、食品生产等等，使用启发式算法与经典优化模型的组合求得最优生产计划，节约生产成本，具有普适性。

7.3.2 纵向推广

我们建立的模型不仅可以在生产成本不变的前提下进行生产计划优化，在生产成本随时间波动的条件下，也能得到不错的结果，可以用于价格波动频繁的生产场合，具有较高的鲁棒性。

八、 参考文献

[1] 李嫦, 赵磊, 赵晓波. 组装线生产计划和库存策略的优化 [J]. 清华大学学报(自

然科学版), 2010, 50(05): 669-72.

[2] 黄竣桥, 邝凯茵, 叶江河. 基于线性规划的生产计划优化研究 [J]. 中国储运, 2021, 11): 119-20.

[3] 马龙, 卢才武, 顾清华. 金属矿山企业生产计划优化方法 [J]. 运筹与管理, 2020, 29(09): 34-42.

[4] 谢金星, 姜启源, 邢文训, et al. 能力受限的批量问题的数学模型与算法新进展 [J]. 运筹学杂志, 1996, 15(01): 1-12.

[5] 唐爽权, 张博峰, 穆森, et al. 基于 Floyd 算法的最优路径规划问题 [J]. 科学技术创新, 2021, 24): 16-7.

九、 附录

部分规模较短的代码如下：

问题四 AR 时间序列预测代码

```
clear;clc
a=[43,35,32,39,33,33,36,41,34,38,40,35,34,37,37,39,36,40,37,41,39,41,36,39,44,41.78,38.7636,41.8572,42.9072,41.5623605947319,41.8592,43.5079]
Rt=tiedrank(a)
n=length(a);t=1:n;
Qs=1-6/(n*(n^2-1))*sum((t-Rt).^2)
T=Qs*sqrt(n-2)/sqrt(1-Qs^2)
t_0=tinv(0.975,n-2)
m=ar(a,6,'ls')
bhat=predict(m,a')
bhat(end+1)=forecast(m,a',1)
ahat=bhat'
delta=abs((ahat(1:end-1)-a)./a)
```