Κεφάλαιο 6 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Ορισμοί

Έστω A ένας $n x n$ πίνακας με πραγματικά στοιχεία. Ο πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός λ καλείται **ιδιοτιμή** του πίνακα A εάν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα v με πραγματικά ή μιγαδικά στοιχεία τέτοιο ώστε

$$Av = \lambda v$$

Το μη μηδενικό διάνυσμα v καλείται **ιδιοδιάνυσμα** του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{bmatrix} 20 & -36 \\ 12 & -22 \end{bmatrix}$ παρατηρώ ότι $A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -36 \\ 12 & -22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ οπότε το $\lambda = 2$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A και το $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ το αντίστοιχο ιδιονιάνυσμα.

Επίσης $A\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -36 \\ 12 & -22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -8 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ οπότε το $\lambda = -4$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A και το $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ το αντίστοιχο ιδιονιάνυσμα.

Παράδειγμα

Έστω ένας 3×3 πραγματικός πίνακας A, τέτοιος ώστε $A\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $A\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ και $A\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Να βρείτε τις ιδιοτιμές, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

Επειδή $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 0$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ και την ιδιοτιμή $\lambda_3 = -2$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Έστω A ένας $n x n$ πίνακας με πραγματικά στοιχεία. Ο πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός λ είναι **ιδιοτιμή** του πίνακα A εάν και μόνο εάν

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0$$

Απόδειξη:

Εάν αριθμός λ είναι **ιδιοτιμή** του πίνακα A από τον ορισμό αυτό ισχύει εάν και μόνο εάν:

$$Av = \lambda v$$

Όπου το v είναι μη μηδενικό διάνυσμα, οπότε έχουμε τις ισοχυναμίες:

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left(A - \lambda \mathrm{I}\right) v = \mathbf{0}$$

Δηλαδή, το ομογενές σύστημα με πίνακα:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

έχει και άλλες λύσεις εκτός από την μηδενική λύση. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας του έχει μηδενική ορίζουσα (δείτε το κεφάλαιο των οριζουσών). Δηλαδή, οι ρίζες του $\det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα, μιας και αυτές είναι οι μοναδικές τιμές οι οποίες μηδενίζουν την ορίζουσα του συστήματος.

Το πολυώνυμο $p(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda \mathrm{I})$ ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**, η παραπάνω εξίσωση $\det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0$, **χαρακτηριστική εξίσωση** και οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα **χαρακτηριστικά μεγέθη**.

Εάν $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ τότε

$$p(\lambda) = (-1)^n \det\left(A - \lambda \mathrm{I}\right) = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός nxn πίνακα A είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n με μορφή:

$$p(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει n στο σύνολο πραγματικές και μιγαδικές ρίζες, οι οποίες είναι και οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, οπότε ο πίνακας A έχει n στο σύνολο πραγματικές ή μιγαδικές ιδιοτιμές.

Καθεμία από αυτές τις ρίζες μπορεί να εμφανίζονται παραπάνω από μία φορές στο ανάπτυγμά του πολυωνύμου σε γινόμενα πρωτοβάθμιων πολυωνύμων. Δηλαδή, ισχύει

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{r_m} = 0$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ οι m διακεκριμένες (διαφορετικές μεταξύ τους) ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (δηλαδή ιδιοτιμές του πίνακα) με πολλαπλότητα $r_1, r_2, ..., r_m$ αντίστοιχα όπου ισχύει $r_1 + r_2 + ... + r_m = n$.

Η πολλαπλότητα κάθε ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της αντίστοιχης ιδιοτιμής.

Εάν $\lambda = a + bi$ μία μιγαδική ιδιοτιμή τότε και η συζυγής της $\lambda = a - bi$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα. Επίσης το ιδιοδιάνυσμα της μίας ιδιοτιμής είναι το διάνυσμα με στοιχεία τα συζυγή στοιχεία του ιδιοδιανύσματος της άλλης.

Το σύνολο των ιδιοτιμών ενός πίνακα λέγεται **φάσμα** του πίνακα και συμβολίζεται συνήθως με $\sigma(A)$.

Εάν v είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε μία ιδιοτιμή ενός πίνακα A τότε το κv για κάθε k πραγματικό είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ίδια ιδιοτιμή του πίνακα A. Πράγματι $Av = \lambda v \Leftrightarrow A(kv) = \lambda(kv)$.

Εάν v_1, v_2 είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μία ιδιοτιμή ενός πίνακα A τότε το $\kappa v_1 + \mu v_2$ για κάθε k, μ πραγματικούς είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ίδια ιδιοτιμή του πίνακα A. Πράγματι

$$\left.\begin{array}{r} Av_1 = \lambda v_1 \Leftrightarrow A(kv_1) = \lambda(kv_1) \\ Av_2 = \lambda v_2 \Leftrightarrow A(\mu v_2) = \lambda(\mu v_2) \end{array}\right\} \Rightarrow A(kv_1 + \mu v_2) = \lambda(kv_1 + \mu v_2).$$

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα:

1. Υπολογίζουμε τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda \mathrm{I})$ λύνοντας την εξίσωση $p(\lambda) = 0$ ή ισοδύναμα την χαρακτηριστική εξίσωση $\det(A - \lambda I) = 0$.
2. Για κάθε μία από αυτές λύνουμε το ομογενές σύστημα $(A - \lambda I)v = 0$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του Α είναι η $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζες $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ οι οποίες είναι οι ιδιοτιμές του A. Για καθεμία από αυτές θα βρούμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα.

Για $\lambda = \lambda_1 = 1$ έχουμε:

$$(A - \lambda_1 I) \cdot \tilde{x} = \begin{bmatrix} 0-1 & -1 \\ 2 & 3-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -x_2.$$

Το σύστημα έχει λύση $x_1 = -x_2$ οπότε $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και οπότε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Για $\lambda = \lambda_2 = 2$ έχουμε: $(A - \lambda_2 I) \cdot \tilde{x} = \begin{bmatrix} 0-2 & -1 \\ 2 & 3-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = -2x_1$, Το σύστημα έχει λύση $x_2 = -2x_1$ οπότε $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ και οπότε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ρίζες τις ιδιοτιμές του **A**, $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$. Θα βρούμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα.

Για $\lambda = \lambda_1 = i$ έχουμε: $(A - \lambda_1 I) \cdot \tilde{x} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Το σύστημα έχει λύση $x_1 = ix_2$ οπότε $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ix_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ και οπότε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $v_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Για $\lambda = \lambda_2 = -i$ έχουμε: $(A - \lambda_1 I) \cdot \tilde{x} = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

Το σύστημα έχει λύση $x_1 = -ix_2$ οπότε $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ix_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ και οπότε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\tilde{x} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ βρείτε τα ιδιοποσά του πίνακα..

Από την χαρακτηριστική εξίσωση πολυώνυμο που προκύπτει βρίσκουμε τις ιδιοτιμές:

$$\det(A-\lambda \mathrm{I})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -1(-\lambda-0)-\lambda(\lambda^2-1)=0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2-2)=0$$

$\Leftrightarrow \lambda = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}.$

Για κάθε μια ιδιοτιμή λ, λύνουμε τώρα το 3×3 σύστημα $\left(A-\lambda\cdot I\right)\cdot\tilde{x}=0$ με γραμμοπράξεις και βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ως εξής:

Για λ = 0, βρίσκουμε ότι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[x_1, x_2, x_3]^T = x[1,0,-1]^T$, όπου $x \in \mathbb{R}-\{0\}$, δίνουν το ιδιοδιάνυσμα $[1,0,-1]^T$.

Παρόμοια, για λ=$\sqrt{2}$, οι λύσεις του $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ δίνουν τη λύση $x_2 = \sqrt{2}x_1 = \sqrt{2}x_3$, από όπου παίρνουμε $x_1 = x_3$ και τελικά το ιδιοδιάνυσμα $[1,\sqrt{2},1]^T$.

ενώ για λ=$-\sqrt{2}$, οι λύσεις του $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ δίνουν τη λύση $x_2 = -\sqrt{2}x_1 = -\sqrt{2}x_3$, από όπου παίρνουμε $x_1 = x_3$ και τελικά το ιδιοδιάνυσμα $[1,-\sqrt{2},1]^T$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Σύμφωνα με τη θεωρία η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα είναι

$$\det\left(A-\lambda I\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = ((3-\lambda)^2-(-2)\cdot(-2))(5-\lambda) =$$

$$(\lambda^2-6\lambda+9-4)(5-\lambda) = (\lambda^2-6\lambda+5)(\lambda-5) = -(\lambda-5)^2(\lambda-1)$$

Οπότε έχουμε δύο ιδιοτιμές την $\lambda = 1$ και τη διπλής αλγεβρικής πολλαπλότητας $\lambda = 5$.

Για $\lambda = 1$ τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$(A-1\cdot I)\cdot\tilde{x}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-1 & -2 & 0 \\ -2 & 3-1 & 0 \\ 0 & 0 & 5-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-2x_2=0 \\ -2x_1+2x_2=0 \\ 4x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2 \\ x_3=0 \end{cases}$$

Οπότε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτήν την ιδιοτιμή είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\mu\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για $\lambda=5$τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$(A-5\cdot I)\cdot\tilde{x}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-5 & -2 & 0 \\ -2 & 3-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1-2x_2=0 \\ -2x_1-2x_2=0 \\ 0x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_2 \\ x_3\ \alpha\upsilon\theta\alpha\acute{\iota}\rho\varepsilon\tau o \end{cases}$$

Οπότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε αυτήν την ιδιοτιμή είναι της μορφής $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής είναι τα $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Ιδιοχώροι

Έστω λ ιδιοτιμή του nxn πίνακα A και έστω

$$E_\lambda=\{v:\ Av=\lambda v\}$$

Το σύνολο αυτό είναι ένας υπόχωρός του $\mathbb{C}^n$ (ο χώρος με τα διανύσματα με μιγαδικά στοιχεία, και καλείται **ιδιόχωρος** του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Η διάσταση dimE_λ του ιδιοχώρου μίας ιδιοτιμής καλείται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής και ισούται με την μηδενικότητα του πίνακα A-λI. Η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι μικρότερη ή ίση από την αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής.

Επίσης ισχύουν:

1. Τα ιδιοδιανύσματα που παράγουν τον ιδιοχώρο μίας ιδιοτιμής είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους.

2. Έστω A ένας $n x n$ πίνακας με πραγματικά στοιχεία όπου $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ m διακεκριμένες (διαφορετικές μεταξύ τους) ιδιοτιμές του πίνακα στις οποίες αντιστοιχούν $v_1, v_2, ..., v_m$ ιδιοδιανύσματα. Τότε τα ιδιοδιανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
3. Έστω A ένας $n x n$ πίνακας με πραγματικά στοιχεία τότε ο πίνακας έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα εάν και μόνο εάν η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητά της.

Παράδειγμα

Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ είχαμε βρει

Για $\lambda = 1$τα ιδιοδιανύσματα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτήν την ιδιοτιμή είναι της μορφής $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Για $\lambda = 5$τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε αυτήν την ιδιοτιμή είναι της μορφής $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής είναι τα $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Οπότε για $\lambda = 5$ $E_2 = span \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ με διάσταση 2. Η γεωμετρική πολλαπλότητα αυτής της ιδιοτιμής είναι 2 όση και η αλγεβρική οπότε και τα τρία διανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παράδειγμα

Για τον $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα είναι

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Οπότε έχουμε ιδιοτιμή διπλής αλγεβρικής πολλαπλότητας.

Για $\lambda = 1$τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$(B-1\cdot I)\cdot\tilde{x}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1=0$ και το x_2 παίρνει αυθαίρετες τιμές οπότε για την ιδιοτιμή 1 έχουμε ιδιοδιάνυσμα $x_2\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ οπότε η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής είναι 1.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $A=\begin{bmatrix}-1 & -3 & -9\\ 0 & 5 & 18\\ 0 & -2 & -7\end{bmatrix}$

Σύμφωνα με τη θεωρία η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα είναι

$$\det\left(A-\lambda I\right)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & -3 & -9\\ 0 & 5-\lambda & 18\\ 0 & -2 & -7-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda & 18\\ -2 & -7-\lambda\end{vmatrix}=-(1+\lambda)^3$$

Οπότε έχουμε την τριπλής αλγεβρικής πολλαπλότητας $\lambda=-1$.
Για $\lambda=-1$ τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$(A+1\cdot I)\cdot\tilde{x}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0 & -3 & -9\\ 0 & 6 & 18\\ 0 & -2 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-3x_3\\ \\ x_1=\alpha\upsilon\theta\alpha\acute{\iota}\rho\varepsilon\tau o\end{cases}$$

Οπότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε αυτήν την ιδιοτιμή είναι της μορφής $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ -3x_3\\ x_3\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\ -3\\ 1\end{bmatrix}$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής είναι τα $\left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ -3\\ 1\end{bmatrix}\right\}$. Άρα η ιδιοτιμή έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 2 .

Ιδιότητες ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

Έστω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα A

$$p(\lambda)=(-1)^n\det(A-\lambda I)=\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+b_1\lambda+b_0$$

οπότε ισχύει

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{r_m}$$

και η ορίζουσα του πίνακα

$$\det\left(A\right)=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_m=(-1)^n b_0$$

Οπότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- $\det\left(A\right)=0$

- το 0 είναι ιδιοτιμή του πίνακα
- ο σταθερός όρος b_0 του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι 0.
- ο πίνακας είναι ιδιάζοντας και δεν αντιστρέφεται.

Το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου ενός τετραγωνικού πίνακα το ονομάζουμε **ίχνος του τετραγωνικού πίνακα A** (trace) και συμβολίζουμε:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Για τις ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού πίνακα ισχύει:

$$tr\left(A\right) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$$

Επίσης $\sigma(A)=\sigma(A^T)$.

Εάν A τριγωνικός τότε ιδιοτιμές είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

Εάν $Av=\lambda v$ και $Bv=\mu v$ τότε το $(A+B)v=(\lambda+\mu)v$ και $(AB)v=(\lambda\mu)v$.

Έτσι συμπεραίνουμε $A^2v=\lambda^2v$ και γενικεύοντας όταν λ ιδιοτιμή του A τότε λ^m ιδιοτιμή του A^m.

Επίσης εάν λ, v χαρακτηριστικά ποσά του A τότε λ^{-1}, v χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A^{-1}.

Παράδειγμα

Στο παράδειγμά μας όπου έχουμε 3×3 πραγματικό πίνακα A, τέτοιος ώστε

$A\left[1\ 1\ 1\right]^{\mathrm{T}} = \left[3\ 3\ 3\right]^{\mathrm{T}}$, $A\left[1\ 1\ 0\right]^{\mathrm{T}} = \left[0\ 0\ 0\right]^{\mathrm{T}}$ και $A\left[1\ 0\ -1\right]^{\mathrm{T}} = \left[-2\ 0\ 2\right]^{\mathrm{T}}$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathbf{A}$ είναι

$p(\lambda) = (-1)^3 \det\left(A - \lambda I\right) = \left(\lambda - 3\right)\left(\lambda - 0\right)\left(\lambda + 2\right) = \lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda$.

Δεν υπάρχει ο A^{-1} διότι $\det\left(\mathbf{A}\right) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$.

Οι ιδιοτιμές του A^8 είναι $\lambda_1^8 = 3^8$, $\lambda_2^8 = 0$ και $\lambda_3^8 = \left(-2\right)^8 = -256$.

Παράδειγμα

Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -6 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ δεδομένου ότι μία ιδιοτιμή του πίνακα A είναι 1 βρείτε τις υπόλοιπες ιδιοτιμές του.

Αφού $\lambda_1 = 1$ και γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$trace(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$

Αρχικά, υπολογίσουμε την

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&-2&1\\-3&2&1\\-6&-4&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-2&1\\-2&2&1\\0&-4&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-2&1\\0&0&2\\0&-4&6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0&2\\-4&6\end{vmatrix}=2(0+8)=16$$

Οπότε, οδηγούμαστε στο σύστημα

$$\left.\begin{matrix}1+\lambda_2+\lambda_3=9\\1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=16\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\lambda_3=8-\lambda_2\\\lambda_2\cdot\lambda_3=16\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\lambda_3=8-\lambda_2\\\lambda_2\cdot(8-\lambda)=16\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\lambda_3=8-\lambda_2\\\lambda_2{}^2-8\lambda_2+16=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}\lambda_3=8-\lambda_2\\(\lambda_2-4)^2=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\lambda_3=8-\lambda_2\\\lambda_2=4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_3=4\\\lambda_2=4\end{cases}$$

Ομοιότητα πινάκων – διαγωνοποίηση

Δύο $n x n$ πίνακες A,B καλούνται **όμοιοι** εάν υπάρχει αντιστρέψιμος $n x n$ πίνακας P τέτοιος ώστε $B=P^{-1}AP$.

Ισοδύναμος ορισμός είναι εάν ισχύει $PB=AP$. Φυσικά για τον $Q=P^{-1}$ *θα ισχύει* $BQ=QA$

Παράδειγμα

Έστω $A=\begin{bmatrix}2&1\\0&-1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4&-2\\5&-3\end{bmatrix}$ και $P=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$.

Ισχύει $PB=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-2\\5&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1\\1&-1\end{bmatrix}$ και $AP=\begin{bmatrix}2&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1\\1&-1\end{bmatrix}$

Παράδειγμα

Έστω $A=\begin{bmatrix}-6&-3&-25\\2&1&8\\2&2&7\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ και $P=\begin{bmatrix}2&4&3\\0&1&-1\\3&5&7\end{bmatrix}$.

Ισχύει $PA=\begin{bmatrix}2&4&3\\0&1&-1\\3&5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6&-3&-25\\2&1&8\\2&2&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&3\\0&-1&1\\6&10&14\end{bmatrix}$ και

$$DP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4&3\\0&1&-1\\3&5&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&3\\0&-1&1\\6&10&14\end{bmatrix}.$$

Εάν δύο $n x n$ πίνακες A,B καλούνται **όμοιοι** τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο οπότε και τις ίδιες ιδιοτιμές.

Ένας nxn πίνακας A καλείται **διαγωνοποιήσιμος** εάν υπάρχει διαγώνιος nxn πίνακας D όμοιος με τον A. Δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος nxn πίνακας P ώστε

$$D=P^{-1}AP.$$

Ένας nxn πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος εάν και μόνο εάν έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Δηλαδή είναι διαγωνοποιήσιμος εάν και μόνο εάν η γεωμετρική πολλαπλότητα της κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητά της.

Εάν $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ οι n ιδιοτιμές και $v_1, v_2, ..., v_n$ τα αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα τότε:

$$D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & 0 & . & & & & . \\ . & . & . & . & & & . \\ . & . & & . & . & & . \\ 0 & . & . & . & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

και ο πίνακας P έχει ως στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$P=[v_1, v_2, ..., v_n]$$

Για αυτούς τους πίνακες ισχύει

$$D=P^{-1}AP.$$

Ένας nxn πίνακας A με n διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι διαγωνοποιήσιμος.

Εφόσον ισχύει $D=P^{-1}AP$ ισχύει και $A=PDP^{-1}$ οπότε και

$$A^k=\left(PDP^{-1}\right)^k=\underbrace{PDP^{-1}PDP^{-1}\cdots PDP^{-1}}_{\kappa \text{ φορές}}=PD^kP^{-1}$$

Παράδειγμα

Στο γνωστό παράδειγμά μας όπου έχουμε 3×3 πραγματικό πίνακα A, τέτοιος ώστε $A[1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}=[3\ 3\ 3]^{\mathrm{T}}$, $A[1\ 1\ 0]^{\mathrm{T}}=[0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$ και $A[1\ 0\ -1]^{\mathrm{T}}=[-2\ 0\ 2]^{\mathrm{T}}$.

Επειδή οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες (δηλαδή όλες διαφορετικές), ο πίνακας Α είναι διαγωνοποιήσιμος. Ο δε πίνακας P, με στήλες τα ιδιοδιανύσματα, δηλαδή

$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$, είναι αντιστρέψιμος, διότι τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές.

Υπολογίζουμε τον $P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ και επαληθεύουμε την ισότητα.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

Από τη σχέση $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix} \Rightarrow A=P\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 3 & -3 & 3\\ 5 & -5 & 3\end{bmatrix}$

Παράδειγμα

Για τον $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ έχουμε δείξει ότι έχει διοτιμή λ=1 διπλής αλγεβρικής πολλαπλότητας με γεωμετρική πολλαπλότητα. Οπότε ο πίνακας δεν διαγωνοποιείται.

Παράδειγμα

Για τον $A=\begin{bmatrix}-1 & -3 & -9\\ 0 & 5 & 18\\ 0 & -2 & -7\end{bmatrix}$ έχουμε την τριπλής αλγεβρικής πολλαπλότητας $\lambda=-1$ με γεωμετρική πολλαπλότητα 2 . Συμπέρασμα δεν διαγωνοποιείται.

Παράδειγμα

Για τον πίνακα $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ είχαμε βρει:

Για την μονής αλγεβρικής πολλαπλότητας ιδιοτιμή $\lambda=1$ που αντιστοιχεί ιδιοδιάνυσμα της μορφής $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\mu\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$

Για την διπλής αλγεβρικής πολλαπλότητας ιδιοτιμή $\lambda = 5$τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν είναι της μορφής $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ οπότε ο ιδιοχώρος της συγκεκριμένης ιδιοτιμής είναι ο $E_2 = span\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ έχει διάσταση 2. Άρα η γεωμετρική πολλαπλότητα αυτής της ιδιοτιμής είναι 2 όση και η αλγεβρική οπότε και τα τρία διανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο πίνακας διαγωνοποιείται και $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Μπορούμε να το πιστοποιήσουμε χωρίς να βρούμε τον αντίστροφο αφού

$$AP = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, PD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

Έστω ο πραγματικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ υπολογίστε τον A^{2004}.

Σε προηγούμενο παράδειγμα είχαμε δει ότι ο πίνακας έχει δύο διαφορετικές ιδιοτιμές ($\lambda = \lambda_1 = 1$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\lambda = \lambda_2 = 2$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$).

Επειδή ο Α είναι ένας 2 2 πίνακας που έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, ο Α διαγωνοποιείται. Έστω $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (οι στήλες του P είναι ιδιοδιανύσματα του A).

Τότε $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$A^{2004} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2004} \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2004} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2^{2004} & 1-2^{2004} \\ -2+2^{2005} & -1+2^{2005} \end{bmatrix}$$

Θεώρημα Cayley-Hamilton

Έστω A ένας $n x n$ πίνακας με πραγματικά στοιχεία, τότε ο πίνακας αυτός επαληθεύει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, δηλαδή ισχύει:

$$p(A) = A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I = \mathbf{0}$$

Από αυτό το θεώρημα όταν $b_0 \neq 0$, δηλαδή το 0 μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα οπότε και $\det(A) \neq 0$ οπότε ο πίνακας αντιστρέφεται, μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο του A .

$$A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I = 0 \Leftrightarrow b_0 I = -A^n - b_{n-1}A^{n-1} - \cdots - b_1 A \Leftrightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{b_0}\left(-A^{n-1} - b_{n-1}A^{n-2} - \cdots - b_2 A - b_1 I\right)$$

Παράδειγμα

Έστω ο πραγματικός πίνακας A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Εκφράστε τον πίνακα A^{-2} ως πολυώνυμο του A.

Λύση

Τα χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Α είναι $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$. Αφού ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου δεν είναι μηδέν, το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα οπότε ο Α είναι αντιστρέψιμος.
Από το Θεώρημα Cayley – Hamilton έχουμε $A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0$ και πολλαπλασιάζοντας με τον A^{-1} παίρνουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(-A^2 + 2A + I\right).$$

Με ανάλογο τρόπο πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω με A^{-1} παίρνουμε

$$A^{-2} = \frac{1}{2}\left(-A + 2I + A^{-1}\right).$$

Άρα $A^{-2} = \frac{1}{2}\left(-A + 2I + \frac{1}{2}\left(-A^2 + 2A + I\right)\right) = -\frac{1}{4}A^2 + \frac{5}{4}I.$

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο αντίστροφος των πινάκων A και B με τη χρήση του θεωρήματος Caley-Hamilton

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

α) $p(\lambda)=(-1)^2\det\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-2=P\left(\lambda\right).$

Αφού ο σταθερός όρος δεν είναι μηδέν, το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A οπότε ο A είναι αντιστρέψιμος. Τότε

$P\left(\mathbf{A}\right)=\mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A}^2-5\mathbf{A}-2\mathbf{I}=\mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A}\left(\mathbf{A}-5\mathbf{I}\right)=2\mathbf{I}$

$$\Leftrightarrow\; \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-5\mathbf{I}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}-5\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}.$$

β)

$$p(\lambda)=(-1)^3\det\left(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}\right)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 2\\ 2 & -1-\lambda & 3\\ 4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-\left(\left(1-\lambda\right)\left(\lambda^2-2\lambda-6\right)+2\left(2+4+4\lambda\right)\right)=$$
$$=\lambda^3-3\lambda^2-12\lambda-6$$

Αφού ο σταθερός όρος δεν είναι μηδέν, το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του B οπότε ο B είναι αντιστρέψιμος. Άρα

$P\left(\mathbf{B}\right)=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{B}^3-3\mathbf{B}^2-12\mathbf{B}-6\mathbf{I}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{B}\left(\mathbf{B}^2-3\mathbf{B}-12\mathbf{I}\right)=6\mathbf{I}\Leftrightarrow$

$$\mathbf{B}^{-1}=\frac{1}{6}\left(\mathbf{B}^2-3\mathbf{B}-12\mathbf{I}\right)=$$
$$=\frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix}-3\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix}-12\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix}9 & 2 & 8\\ 12 & 4 & 10\\ 18 & 2 & 20\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0 & 6\\ 6 & -3 & 9\\ 12 & 3 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12 & 0 & 0\\ 0 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6}\\ 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

Για το παράδειγμα που είχαμε δει με $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ να υπολογισθεί ο πίνακας $A^{2006}-A^{-2}$.

Είχαμε δει ότι $\det\left(A-\lambda I\right)=\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1.$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε

$$P\left(\mathbf{A}\right)=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{A}^2+\mathbf{I}=\mathbf{0}\;\Leftrightarrow\;\mathbf{A}^2=-\mathbf{I},$$

οπότε

$$\mathbf{A}^{2006}-\mathbf{A}^{-2}=\left(\mathbf{A}^{2}\right)^{1003}-\left(\mathbf{A}^{2}\right)^{-1}=\left(-\mathbf{I}\right)^{1003}-\left(-\mathbf{I}\right)^{-1}=-\mathbf{I}+\mathbf{I}=\mathbf{0}\,.$$

<u>Άλλος τρόπος :</u> Αν $\mathbf{P}=\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ έχουμε $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{D}=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$.

Άρα

$$\mathbf{A}^{2006}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}^{2006}\cdot\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -i & i \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{και}$$

$$\mathbf{A}^{-2}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}^{-2}\cdot\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -i & i \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Τότε $\mathbf{A}^{2006}-\mathbf{A}^{-2}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\mathbf{0}$.

Ασκήσεις:

1. Έστω $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ μια γραμμική απεικόνιση με τύπο

$$f([x\ y\ z]^T)=[x+2y-2z \quad 2x+4y-4z \quad -2x-4y+4z]^T$$

α) Να βρεθεί ο πίνακας *A* της *f* ως προς τη συνήθη βάση $\left(e_1,e_2,e_3\right)$ του $\mathbb{R}$ και να βρεθούν τα χαρακτηριστικά του μεγέθη.

β) Δείξτε ότι ο πίνακας *A* διαγωνοποιείται και βρείτε μια διαγωνοποίησή του. Στη συνέχεια βρείτε έναν τύπο για τον πίνακα A^n.

Λύση: $f([1\,0\,0]^T)=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}=e_1+2e_2-2e_3$, $\quad f([0\,1\,0]^T)=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}=2e_1+4e_2-4e_3$ και

$f([0\,0\,1]^T)=\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}=-2e_1-4e_2+4e_3$. Άρα ο πίνακας *A* ισούται με $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$.

Θα βρούμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα αυτού.

Έχουμε $p(\lambda)=(-1)^3\det(A-\lambda I)=(-1)^3\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 4-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)$. Ιδιοτιμές είναι λοιπόν το 0 και το 9.

Ιδιοδιανύσματα για το 0: (Α-0 $\mathrm{I})\cdot\tilde{x}$=0 ή Α$\cdot\tilde{x}$=0

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-2z=0\\ 2x+4y-4z=0\\ -2x-4y+4z=0\end{cases}\Leftrightarrow\ \Leftrightarrow x=-2y+2z.$$ Άρα

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2y+2z\\ y\\ z\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

Ιδιοδιανύσματα για το 9: (Α-9 $\mathrm{I})\cdot\tilde{x}$=0

$$\begin{bmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-8x+2y-2z=0\\ 2x-5y-4z=0\\ -2x-4y-5z=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-8x+2y-2z=0\\ 2x-5y-4z=0\\ -9y-9z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-8x=4z\\ 2x=-z\\ y=-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-2x\\ y=2x\end{cases}$$

Άρα $\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ 2x\\ -2x\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -2\end{bmatrix}$.

Β) Θεωρούμε τον πίνακα P που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -2\end{bmatrix}$.

Τότε έπειτα από υπολογισμούς μπορούμε να βρούμε ότι:

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2/9 & 5/9 & 4/9\\ 2/9 & 4/9 & 5/9\\ 1/9 & 2/9 & -2/9\end{bmatrix}.$$

Οπότε,

$$A^n=P\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}^n P^{-1}=P\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 9^n\end{bmatrix}P^{-1}=9^{n-1}P\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}P^{-1}=$$

$$=9^{n-1}PDP^{-1}=9^{n-1}A=9^{n-1}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{bmatrix}$$

2. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(α) Να βρείτε έναν πίνακα P τέτοιον ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

(β) Να υπολογίσετε τον πίνακα A^{2003}

Λύση: (α) Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

$$\mathrm{p}(\lambda) = (-1)^3 \det(A-\lambda I) = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1-\lambda & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Οι ιδιοτιμές του είναι διακεκριμένες και συνεπώς ο πίνακας διαγωνιοποιείται. Ιδιοδιανύσματα: λ=0.

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=0 \\ 2x+y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x=\frac{1}{2}z \\ y=-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{4}z \\ y=\frac{1}{2}z \end{cases}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 0 είναι της μορφής

$$z\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \neq 0.$$

λ=1.

$$\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=0 \\ 2x=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 0 είναι της μορφής

$$z\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \neq 0.$$

λ=-1.

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=0 \\ 2x+2y=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 0 είναι της μορφής

$$z\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \neq 0.$$

Σχηματίζουμε από τα ιδιοδιανύσματα τον πίνακα P= $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Τότε $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Επαληθεύουμε ότι $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(β) $D^{2003} = (P^{-1}AP)^{2003} = P^{-1}A^{2003}P == \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^{2003} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2003} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Επομένως

$$A^{2003} = P\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

3. Έστω ο πραγματικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

(α) Εξετάστε αν ο πίνακας *A* διαγωνοποιείται. Αν ναι, να βρεθεί ένας πίνακας *P* τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

(β) Να βρεθεί τα χαρακτηριστικό πολυώνυμο του *A* και να υπολογίστε τον πίνακα A^n, $n = 1, 2, ...$

Λύση:

α) Υπολογίζοντας την ορίζουσα $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})$ βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$. Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του, συνεπώς $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$.

Επειδή ο *A* είναι ένας 2×2 πίνακας που έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, ο *A* διαγωνοποιείται. Τα ιδιοδιανύσματα είναι οι λύσεις των αντίστοιχων 2×2 συστημάτων της μορφής $\left(A - \lambda I\right)\cdot \tilde{x} = 0$ που μετά από γραμμοπράξεις δίνουν, για $\lambda = -1$ το ιδιοδιάνυσμα $\{\begin{bmatrix} -\mathrm{a} & \mathrm{a} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} / \mathrm{a} \in \mathrm{R} - \{0\}\}$ και για $\lambda = 1$ το $\{\begin{bmatrix} -3\mathrm{a} & \mathrm{a} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} / \mathrm{a} \in \mathrm{R} - \{0\}\}$.

Έστω ο πίνακας $P=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ οι στήλες του *P* είναι τα ιδιοδιανύσματα του *A*.

Κάνοντας τις πράξεις έχουμε ότι ο πίνακας $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ είναι πράγματι διαγώνιος.

β) Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που υπολογίσθηκε στο α) ερώτημα και το Θεώρημα Cayley-Hamilton, έχουμε

$$A^2-I=0\Rightarrow A^2=I$$

Πολλαπλασιάζοντας με *A* την τελευταία σχέση επανειλημμένα με *A* έχουμε,

$$A^2=\mathrm{I},\quad A^3=A,\quad A^4=A^2=\mathrm{I},\quad A^5=A,\quad A^6=A^2=\mathrm{I}$$

κλπ. Από εδώ παρατηρούμε (εύκολα αποδεικνύεται με επαγωγή) ότι για $n=1,2,...$ ισχύει $A^{\mathrm{n}}=\begin{cases}\mathrm{A}, & \text{όταν } \mathrm{n}=2\mathrm{k}+1,\ \mathrm{k}\in\mathbb{N}\\ \mathrm{I}, & \text{όταν } \mathrm{n}=2\mathrm{k},\ \mathrm{k}\in\mathbb{N}\end{cases}$

4. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

1. Δείξτε ότι ο πίνακας *A* διαγωνοποιείται και εκτελέστε την διαγωνοποίησή του.
2. Δείξτε ότι ο πίνακας *B* δεν διαγωνοποιείται.
3. Να υπολογιστεί ο A^n και με βάση το αποτέλεσμα αυτό να υπολογίστε το $I+A+A^2+...+A^{2004}$.

Λύση

Σύμφωνα με τη θεωρία έχουμε:

1. Για τον A το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι

$$p(\lambda)=(-1)^2\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)+3\cdot 0=(\lambda+1)(\lambda-1)$$

Οπότε έχουμε ιδιοτιμές 1 και -1. (Σημείωση: Επειδή ο πίνακας είναι τριγωνικός, θα μπορούσαμε να πούμε άμεσα ότι οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία).

Για $\lambda=1$ τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$(A-1\cdot I)\cdot\tilde{x}=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow x_1=0$ και το x_2 παίρνει αυθαίρετες τιμές οπότε για την ιδιοτιμή 1 έχουμε ιδιοδιάνυσμα $\mu\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\mu\neq 0.$

Για $\lambda=1$ τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$(A+1\cdot I)\cdot\tilde{x}=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow x_1=-\frac{2}{3}x_2$ και το x_2 παίρνει αυθαίρετες τιμές

οπότε για την ιδιοτιμή -1 έχουμε ιδιοδιάνυσμα $\mu\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\end{bmatrix},\mu\neq 0.$

Η ορίζουσα του πίνακα $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι διαφορετική από το μηδέν (-2/3) οπότε οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.
Η διαγωνοποίηση του A επιτυγχάνεται με τους πίνακες

$P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ όπου $P^{-1}AP = D$.

2. Για τον B το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι

$$p(\lambda) = (-1)^2 \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1) + 3\cdot 0 = (\lambda-1)^2$$

Οπότε έχουμε ιδιοτιμή διπλή 1.
Για $\lambda = 1$ τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$(B - 1\cdot I)\cdot \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0$ και το x_2 παίρνει αυθαίρετες τιμές οπότε για την ιδιοτιμή 1 έχουμε ιδιοδιάνυσμα $\mu\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ οπότε ο πίνακας δεν διαγωνοποιείται δεν διαγωνοποιείται γιατί η διάσταση του ιδιοχώρου της διπλής ιδιοτιμής είναι 1.

3. Έχουμε ότι $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$

όπου $D^k = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{bmatrix}$ οπότε για n άρτιο $D^n = I$ και για n περιττό $D^n = D$

Συνεπώς
Για n άρτιο $A^n = PIP^{-1} = I$
Για n περιττό $A^n = PDP^{-1} = A$
Οπότε

$$I + A + A^2 + ... + A^{2004} = 1002A + 1003I$$

$$= 1002\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 1003I = \begin{bmatrix} -1002+1003 & 0 \\ 3\cdot 1002 & 1002+1003 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3006 & 2005 \end{bmatrix}$$

Σημείωση Για τον υπολογισμό του A^n μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον εξής συλλογισμό. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το $\lambda^2 - 1$. Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε $A^2 - I = 0$, δηλαδή $A^2 = 1$.