Correction des exercices du TD3

21 mars 2020

Exercice 1

2B, 4N.
$X(\Omega) = \{2, \dots,\ 5\}$
Soient :
B_i : "la ième boule tiré est blanche",
N_i : "la ième boule tiré est noir".

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2)\\ &= \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2|B_1)\\ &= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 3) &= \mathbb{P}(B_1 \cap N_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2 \cap B_3)\\ &= \frac{8}{15}\end{aligned}$$

On continue ainsi de suite et on obtient finalement

k	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$

Exercice 2

$X(\Omega) = \{1,\ 2,\ 3\}$
$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{3}$
$\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{4}$
$\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{6}$
$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=0}^{3} i\cdot\mathbb{P}(X=i)=\frac{4}{3}$

Exercice 3

X prend ses valeurs dans $\{0,\ldots,n\}$
Calcul de l'ésperance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}) \quad \text{par linéarité}\end{aligned}$$

Posons $Y=\mathbb{1}_{A_i}$, on a alors $Y(\Omega)=\{0,\ 1\}$
$\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(A_i)=p_i$
$\mathbb{P}(Y=0)=1-p_i$
$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\mathbb{A}})=p_i$ Ainsi, $\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i$.

Calcul de la variance
$\mathrm{Var}(X)=(E(X^2))-\mathbb{E}(X)^2$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}[(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i})^2]\\ &= \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}^2 + 2\sum_{1\leq i<k\leq n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{A_j})]\end{aligned}$$

$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}^2)=1^2\mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_i}=1)=p_i$
Posons $W=\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{A_j}$, on a,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W=1) &= P(\{\mathbb{1}_{A_i}=1\}\cap\{\mathbb{1}_{A_j}=1\})\\ &= \mathbb{P}(A_i\cap A_j)=q_ij\end{aligned}$$

Et $\mathbb{P}(W=0)=1-q_ij$
Ainsi, $\mathbb{E}(W)=q_ij$, donc

$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} q_ij - (\sum_{j=1}^{n} p_i)^2$$