Correction des exercices du TD5

Bouarah Romain Souffan Nathan

23 mars 2020

Exercice 4

Question 1

Convergence simple :
$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(1) = 0$
$\forall x \neq 1$ clairement $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$
Convergence uniforme :
On suppose $\varepsilon < 1$
Si $1 - \varepsilon < x$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x^n(1-x) \leq 1 - x < \varepsilon$$

Si $x \leq 1 - \varepsilon$, on a :

$$x^n(1-x) \leq (1-\varepsilon)^n(1-x) \leq (1-\varepsilon)^n$$

Si on prend donc n_0 tel que $(1-\varepsilon)^{n_0} < \varepsilon$ on a : $x^n(1-x) < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0$
Ainsi $\forall n \geq n_0,\ \forall x \in [0,1],\ f_n(x) < \varepsilon$

Question 2

$g_n(x) = x^n sin(\pi x) = x^n sin(\pi - \pi x) = x^n sin(\pi(1-x))$
De plus $\forall x \geq 0,\ sin(x) \leq x$ Donc :

$$\begin{aligned} & sin(\pi(1-x)) \leq \pi(1-x) \\ \implies & x^n sin(\pi(1-x)) \leq \pi x^n (1-x),\ \forall x \in [0,1] \\ \implies & 0 \leq g_n(x) \leq f_n(x) \forall x \in [0,1] \end{aligned}$$

On sait que $f_n \xrightarrow{u} 0$, alors
$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0,\ \forall x |f_n(x)| < \varepsilon$ Ainsi $\forall x,\ \forall n \geq n_0$
$|g_n(x)| \leq |f_n(x)| < \varepsilon$ Donc $g_n \xrightarrow{u} 0$

Exercice 7

Question 1

$f_n(x) = e^{-nx} sin(2nx)\ x > 0,\ |f_n(x)| = |e^{-nx}||sin(2nx)| \leq e^{-nx}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-nx} = 0$
Donc $f_n \xrightarrow{s} 0$ **Convergence uniforme** Supposons que $f_n \xrightarrow{u} 0$, alors soit $\varepsilon < e^{-\frac{\pi}{4}},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$tel que
$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in [0, +\infty[|f_n(x)| < \varepsilon$, Or, prenons $x = \frac{\pi}{4n_0}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
&|e^{-n_0 \frac{\pi}{4n_0}} sin(2n_0 \frac{\pi}{4n_0})| \\
=&e^{-\frac{\pi}{4}} sin(\frac{\pi}{2}) \\
=&e^{-\frac{\pi}{4}} \geq \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc $f_n \not\xrightarrow{u} 0 sur]0, +\infty[$ et donc également sur $[0, +\infty[$. Mais $f_n \xrightarrow{u} 0$ sur $[a, +\infty[,\ a > 0$ car soit $\varepsilon > 0,\ |f_n(x)| \leq e^{-nx} \leq -na$
Donc si on prend n_0 tel que $e^{-n_0 a} < \varepsilon$, on a bien $|f_n(x)| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in [a, +\infty[$

Question 2

Clairement $f_n(x) \xrightarrow{s} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Donc f_n converge simplement vers un fonction non continue alors que f_n est continue $\forall n \in \mathbb{N}$.
Il vient, f_n ne converge pas uniformément

Exercice 14

Question 1

Montrons que $\lim\limits_{k \to +\infty} f_k(x_k) = f(x)$. On a :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}\ |f_k(x_k) - f(x)| &= |f_k(x_k) - f(x_k) + f(x_k) - f(x)| \\ &\leq |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)|\end{aligned}$$

$(f_k)_{k\geq 0}$ converge uniformément vers f sur I donc :
— $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ k \geq n_0 \implies |f_k(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon$
— f est continue sur I donc $\lim\limits_{k \to +\infty} f(x_k) = f(x)$.
Finalement $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq n_1 \implies |f_k(x_k) - f(x)| < \varepsilon$

Question 2

Il suffit de trouver une suite $(x_k)_{k\geq 0}$ d'élements de I convergeant vers $x \in I$ et de montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} f_k(x_k) \neq f(x)$.

Exercice 22

$\alpha \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in [0,1]\ f_n(x) = n^\alpha x^n (1-x)$

Question 1

— $f_n(1) = 0$.
— $\forall x \in [0,1[$, par croissance comparée entre n^α et x^n, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.
Donc $(f_n)_{n>0}$ converge simplement vers 0 sur $[0,1]$.

Question 2

$a \in]0,1[$. Fixons n, étudions alors $f_n(x)$:

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1],\ f_n'(x) &= n^\alpha x^{n-1} n(1-x) - n^\alpha x^n \\ &= n^\alpha x^{n-1} [n(1-x) - x] \\ &= n^\alpha x^{n-1} [-(n+1)x + n]\end{aligned}$$

Donc $f_n'(x)$ est du même signe que $-(n+1)x + n$, donc f_n croissante sur $[0, \frac{n}{n+1}]$ puis décroissante sur $[\frac{n}{n+1}, 1]$.

Pour n assez grand, $\frac{n}{n+1}$ tend vers 1, donc $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ a < \frac{n}{n+1}$, donc $\forall n \geq N\ f_n(x) \leq f_n(a)$ et $f_n(a)$ tend vers 0 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} ||f_n|| = 0$.

Question 3

Sur $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} ||f_n||_\infty &= f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^\alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= n^\alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n^\alpha}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \end{aligned}$$

Remarquons que $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \sim \mathrm{e}^{-1}$ et $\frac{n^\alpha}{n+1} \sim n^{\alpha-1}$.
Donc $||f_n||_\infty \sim n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-1}$. Si $\alpha < 1$ alors $||f_n||_\infty$ converge vers 0.

Question 4

Avec $0 \leq \alpha < 1$, on a (f_n) qui converge uniformément vers f, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$$