Correction des exercices du TD4

21 mars 2020

Exercice 1

Soient Φ_A et Φ_B les formes bilinéaires respectivement associées à A et B, on a :

$$\begin{aligned}\Phi_A(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + y_1z_2 + z_1y_2 + 2z_1z_2\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\Phi_B(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\end{pmatrix} B \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\\ &= x_1x_2 + 4x_1z_2 + y_1y_2 + y_1z_2 + 4z_1x_2 + z_1y_2\end{aligned}$$

Exercice 5

Question 1

$\phi(e_1, e_1) = \phi(e_2, e_2) = \frac{\pi}{2}$
$\phi(e_1, e_2) = 0$
$\phi(e_1, e_3) = 0$
$\phi(e_2, e_3) = 2$ De plus ϕ est clairement symétrique ainsi, soit M la matrice de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3), on a :

$$M = \begin{pmatrix}\frac{\pi}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\pi}{2} & 2\\ 0 & 2 & \pi\end{pmatrix}$$

Question 2

Soit $f = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base(e_1, e_2, e_3), ϕ orthogonale à e_1 et e_3, alors :

$0 = \phi(f, e_1) = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a\frac{\pi}{2} \implies a = 0$

Et

$0 = \phi(f, e_3) = \begin{pmatrix} 0 & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \pi \end{pmatrix} = 2b + c\pi \implies b = -\frac{\pi}{2}c$

Donc $f \in F \iff f = -\lambda\frac{\pi}{2}e_2 + \lambda$, ainsi une base de F est $(sin(x), 1)$