

Correction des exercices du TD5

20 mars 2020

Exercice 4

Question 1

Convergence simple :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(1) = 0$$

$$\forall x \neq 1 \text{ clairement } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

Convergence uniforme :

On suppose $\varepsilon < 1$

Si $1 - \varepsilon < x$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x^n(1 - x) \leq 1 - x < \varepsilon$$

Si $x \leq 1 - \varepsilon$, on a :

$$x^n(1 - x) \leq (1 - \varepsilon)^n(1 - x) \leq (1 - \varepsilon)^n$$

Si on prend donc n_0 tel que $(1 - \varepsilon)^{n_0} < \varepsilon$ on a : $x^n(1 - x) < \varepsilon, \forall n \geq n_0$

Ainsi $\forall n \geq n_0, \forall x \in [0, 1], f_n(x) < \varepsilon$

Question 2

$$g_n(x) = x^n \sin(\pi x) = x^n \sin(\pi - \pi x) = x^n \sin(\pi(1 - x))$$

De plus $\forall x \geq 0, \sin(x) \leq x$ Donc :

$$\sin(\pi(1 - x)) \leq \pi(1 - x)$$

$$\implies x^n \sin(\pi(1 - x)) \leq \pi x^n(1 - x), \forall x \in [0, 1]$$

$$\implies 0 \leq g_n(x) \leq f_n(x) \forall x \in [0, 1]$$

On sait que $f_n \xrightarrow{u} 0$, alors

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0, \forall x |f_n(x)| < \varepsilon$ Ainsi $\forall x, \forall n \geq n_0$
 $|g_n(x)| \leq |f_n(x)| < \varepsilon$ Donc $g_n \xrightarrow{u} 0$

Exercice 7

Question 1

$f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx) \quad x > 0, \quad |f_n(x)| = |e^{-nx}| |\sin(2nx)| \leq e^{-nx}$ et
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx} = 0$

Donc $f_n \xrightarrow{s} 0$ **Convergence uniforme** Supposons que $f_n \xrightarrow{u} 0$, alors soit
 $\varepsilon < e^{-\frac{\pi}{4}}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
 $\forall n \geq n_0, \forall x \in [0, +\infty[|f_n(x)| < \varepsilon$, Or, prenons $x = \frac{\pi}{4n_0}$, on a alors :

$$\begin{aligned} & |e^{-n_0 \frac{\pi}{4n_0}} \sin(2n_0 \frac{\pi}{4n_0})| \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}} \geq \varepsilon \end{aligned}$$

Donc $f_n \not\xrightarrow{u} 0$ sur $]0, +\infty[$ et donc également sur $[0, +\infty[$. Mais $f_n \xrightarrow{u} 0$ sur
 $[a, +\infty[$, $a > 0$ car soit $\varepsilon > 0, |f_n(x)| \leq e^{-nx} \leq e^{-na}$
Donc si on prend n_0 tel que $e^{-n_0 a} < \varepsilon$, on a bien $|f_n(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_0, \forall x \in$
 $[a, +\infty[$

Question 2

Clairement $f_n(x) \xrightarrow{s} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc f_n converge simplement vers une fonction non continue alors que f_n est
continue $\forall n \in \mathbb{N}$.

Il vient, f_n ne converge pas uniformément

Exercice 14

Question 1

Montrons que $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x_k) = f(x)$. Fixons $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad |f_k(x_k) - f(x)| &= |f_k(x_k) - f(x_k) + f(x_k) - f(x)| \\ &\leq |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \end{aligned}$$