ESCUELA DE ACTUARÍA

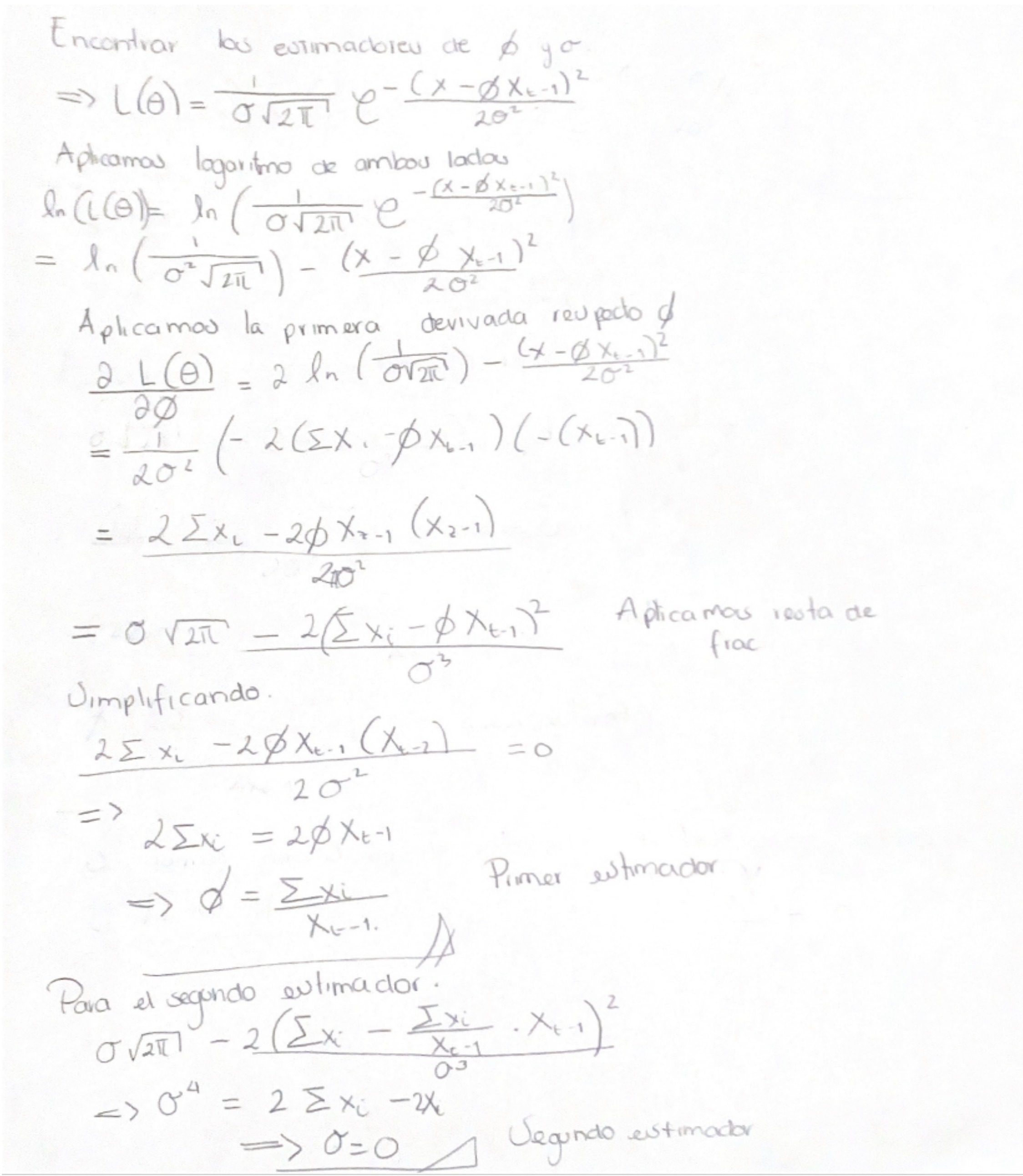
ESTADÍSTICA III

Tarea

Autor:
Noemi Sarahi Arizmendi Prian

ABRIL 2022

0.1 El método más utilizado para estimar los parámetros de una serie de tiempo es llamado "Método de Máxima Verosimilitud", el cual consiste en maximizar la función de log-verosimilitud correspondiente a una muestra aleatoria. Como ejemplo, tomemos un proceso AR(1). Asumiendo una distribución Gaussiana para el ruido blanco. Encuentre los estimadores de ϕ y σ utilizando el método de máxima verosimilitud.


Encontrar los estimadores de ϕ y σ

$$\Rightarrow L(\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\phi x_{t-1})^2}{2\sigma^2}}$$

Aplicamos logaritmo de ambos lados

$$\ln(L(\theta)) = \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\phi x_{t-1})^2}{2\sigma^2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{(x-\phi x_{t-1})^2}{2\sigma^2}$$

Aplicamos la primera derivada respecto ϕ

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial\phi} = \partial \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{(x-\phi x_{t-1})^2}{2\sigma^2}$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\left(-2(\sum x_i - \phi x_{t-1})(-(x_{t-1}))\right)$$

$$= \frac{2\sum x_i - 2\phi x_{t-1}(x_{t-1})}{2\sigma^2}$$

$$= \sigma\sqrt{2\pi} - \frac{2(\sum x_i - \phi x_{t-1})^2}{\sigma^3}$$ Aplicamos resta de frac

Simplificando.

$$\frac{2\sum x_i - 2\phi x_{t-1}(x_{t-2})}{2\sigma^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2\sum x_i = 2\phi x_{t-1}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\sum x_i}{x_{t-1}}$$ Primer estimador

Para el segundo estimador.

$$\sigma\sqrt{2\pi} - \frac{2\left(\sum x_i - \frac{\sum x_i}{x_{t-1}} \cdot x_{t-1}\right)^2}{\sigma^3}$$

$$\Rightarrow \sigma^4 = 2\sum x_i - 2x_i$$

$$\Rightarrow \sigma = 0$$ Segundo estimador

Figure 1: Estimadores Maxima Verosimilitud

0.2 Uno de los indicadores más utilizados para determinar si el modelo utilizado en una serie de tiempo es el criterio de información de Akaike (Akaike Information Criterion). Investigue en qué consiste dicho indicador y de una breve explicación al respecto.

El criterio de información de Akaike (An Information Criterion, AIC) [2] proporciona un método simple y objetivo que selecciona el modelo más adecuado para caracterizar los datos experimentales. Este criterio, que se enmarca en el campo de la teoría de la información, se define como:

donde: $\log(\log(\theta b))$ es el logaritmo de la máxima verosimilitud, que permite determinar los valores de los parámetros libres de un modelo estadístico [3], y K es el número de parámetros libres del modelo. Esta expresión proporciona una estimación de la distancia entre el modelo y el mecanismo que realmente genera los datos observados, que es desconocido y en algunos casos imposible de caracterizar. Como la estimación se hace en función de los datos experimentales, esta distancia es siempre relativa y dependiente del conjunto de datos experimentales. Por tanto, un valor individual de AIC no es interpretable por sí solo, y los valores AIC sólo tienen sentido cuando se realizan comparaciones utilizando los mismos datos experimentales.

El menor valor de AIC indica que o bien el modelo se ajusta mejor a los datos experimentales o que es menos complejo, y en realidad una combinación de ambos factores. Por lo tanto, este criterio ofrece un valor objetivo que, de manera relativa, cuantifica simultáneamente la precisión y sencillez del modelo. Cuando el número de parámetros (K) es muy elevado en relación con el tamaño de la muestra (n) los resultados que proporciona AIC pueden no ser satisfactorios. En estos casos se utiliza una aproximación de segundo orden:

Cuando el cociente n/K es suficientemente grande, ambos valores (AIC y AICc) son muy similares

0.3 En clase vimos que un método muy utilizado para determinar el orden de una serie de tiemp (es decir, si el proceso es AR(1), AR(2), etc...), era calculando la ACF y la PACF de la serie de tiempo. No obstante, existe una alternativa que es encontrar el orden lat que el criterio de AIC se maximice. Implemente una función tal que para un orden máximo dado, la función busque sobre todos los órdenes menores a este valor máximo y seleccione el orden con un criterio de AIC máximo.

0.4 Implemente una función en Python que calcule la función de autocorrelación parcial para una serie de tiempo dada.

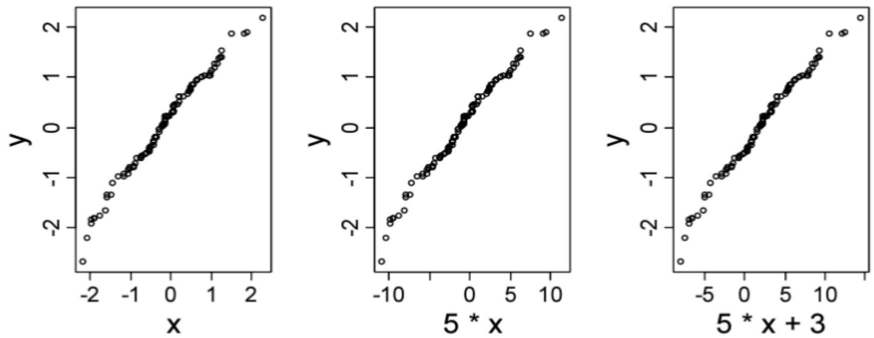
cosigo en GitHub

0.5 Investiguen en qué consiste la gráca de Cuantil-Cuantil ó QQ-plot.

Un gráfico Cuantil-Cuantil permite observar cuan cerca está la distribución de un conjunto de datos a alguna distribución ideal ó comparar la distribución de dos conjuntos de datos.

0.5.1 Comparación de la distribución de dos conjuntos de datos

La función qqplot(x, y, plot=T) grafica las funciones quantile de una muestra vs. la de la otra. Vemos que el Q-Q plot no cambia por una transformación lineal de los datos.




```
> x <- rnorm(100)
> y <- rnorm(100)

> par(mfrow=c(1,3))
>  qqplot(x,y ,cex.lab=2,cex.axis=1.5)
>  qqplot(5*x,y,cex.lab=2,cex.axis=1.5 )
> qqplot(5*x+3,y,cex.lab=2,cex.axis=1.5)
```

Figure 2: Comparación de la distribución de dos conjuntos de datos

Si interesa comparar con la distribución gaussiana se llama gráfico de probabilidad normal. Se ordenan los datos y se grafica el i-ésimo dato contra el correspondiente cuantil gaussiano. Hoaglin, Mosteller y Tukey (1993) sugieren tomar el i-esimo cuantil como:

$$\phi^{-}i\left(\frac{i-1/3}{n+1/3}\right)$$

La función qqnorm reemplaza una de las muestras, en qqplot, por los cuantiles de la distribución normal.