

В014 Мат. Семинар

м. Зейделя

$$x^{m+1} = x^m - \tau (L+D)^{-1} (Ax^m - f)$$

(где $B = L+D$, $\tau=1$)

$$A = L + D + U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \equiv & \equiv & \equiv \\ \equiv & \equiv & \equiv \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \equiv & \equiv \\ 0 & \ddots & \equiv \\ 0 & \equiv & \equiv \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 11x_1^{m+1} + x_2^m + x_3^m = 13 \\ x_1^{m+1} + 7x_2^{m+1} + 2x_3^m = 10 \\ x_1^{m+1} + 2x_2^{m+1} + 8x_3^{m+1} = 11 \end{cases}$$

$$(L+D)x^{m+1} + (A-L-D)x^m = f$$

м. Якоби

$$x^{m+1} = x^m - \tau (D)^{-1} (Ax^m - f)$$

$$Dx^{m+1} + (A-D)x^m = f$$

Д/З

$$1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

а) применить метод Якоби

б) вычислить x^2 , если $x^0 = 0$


в) проверить способами доказ-ть сход-ть

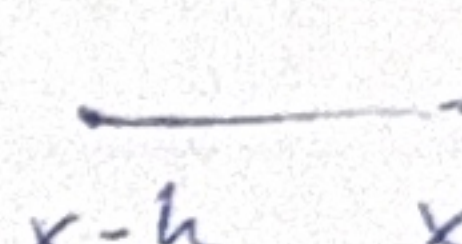
ОПР:

Δh - разностный опер., F - дифо. опер.,
то разн. опер. точнее. дифо. опер., если

$$|\Delta h - F| \leq O(h^k) \quad k - \text{порядок точности.}$$

$$y'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

$$F[y] = y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \Delta h \quad \text{— разность вперед}$$


$$\bar{\Delta}_h = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \quad \text{— разность назад}$$


$$\Delta_h^* = \frac{\Delta h + \bar{\Delta}_h}{2}$$

мы не знаем, что такое $y(x+h) - y(x) =$

$$= y(x) + \frac{y'(x)h}{1} + \frac{y''(x)h^2}{2} + O(h^3) - \underline{y(x)} =$$

$$= y'(x)h + \frac{y''(x)h^2}{2} + O(h^3)$$

$$\Delta_h = y'(x) + \frac{y''(x)h}{2} + O(h^2)$$

2-й член
ошибка

2-ого порядка

$$\Delta_h^* = \frac{\Delta + \bar{\Delta}}{2} = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

$$y(x+h) - y(x-h) = y(x) + y'(x)h + \cancel{\frac{y''(x)h^2}{2}} + \frac{y'''(x)h^3}{6} +$$

$$+ \cancel{\frac{y^{(4)}(x)h^4}{24}} + O(h^5) - y(x) + y'(x)h - \cancel{\frac{y''(x)h^2}{2}} + \frac{y'''(x)h^3}{6} -$$

$$- \cancel{\frac{y^{(4)}(x)h^4}{24}} + O(h^5) = 2y'(x)h + y'''(x)h^3 + O(h^5)$$

$$\Delta_h^* = y'(x) + \frac{y'''(x)h^2}{6} + O(h^4)$$

$$y''(x) = (y')' \approx \left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \right)' \approx \frac{\left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \right) - \left(\frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right)}{h}$$

↑ прогноз в прог
геснор

$$= y''(x) + \frac{y^{(4)}(x)h^2}{12} + O(h^4) = \Omega \quad \Rightarrow k=2$$

$$\Delta_h = \frac{1}{h^n} \sum_{j \in M} \sigma_j y(x+jh)$$

$M = \{0, 1, 2\}$, опросе 1-ую пр-ую со 2-ем

порядком, $n=1, k=2$

$$S = |M| = n+k = 3 \quad \checkmark$$

↑ мощность шаблона

$$m=0: \quad a_0 + a_1 + a_2 = 0$$

$$m=2: \quad a_0 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 1^2 + a_2 \cdot 2^2 = 0$$

$$a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 = 1$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + 4a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Delta_h = \frac{1}{h} \left(-\frac{3}{2} y(x) + 2y(x+h) - \frac{1}{2} y(x+2h) \right)$$