Выч Мат Семинар

Метод Гаусса:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ не можем воспольз. на этой матрице

Задача

$$\begin{cases} 10^{-8} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 10^{-8} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10^{-8} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mid : a_{11} = 10^{-8} \text{ (первую строку)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10^{8} & 10^{8} \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow 1 \cdot a_{21} = 1 \text{ и вычит. из второго}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10^{8} & 10^{8} \\ 0 & 1-10^{8} & 2-10^{8} \end{pmatrix} \mid : a_{22} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10^{8} & 10^{8} \\ 0 & 1 & \frac{2-10^{8}}{1-10^{8}} \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 10^{8} x_2 = 10^{8}$$

$$x_2 = \frac{2-10^{8}}{1-10^{8}}$$

$$x_1 \approx 0$$

$A = \begin{pmatrix} 10^{-8} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \|A\|_\infty = 2$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 10^{-8} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10^{-8}-1}$ ← когда считаем $\|A^{-1}\|_\infty$ нужно накинуть модуль т.к. $\|..\|$ - неотр числ

$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{2}{1-10^{-8}}$

$\nu_\infty = \|A^{-1}\| \|A\| = \frac{4}{1-10^{8}} \approx 4$

$U = \begin{pmatrix} 1 & 10^{8} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \|U\|_\infty = 10^{8}+1$

$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -10^{8} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{1-10^{8}}$ $\|U^{-1}\|_\infty = 10^{8}+1$

$\nu_{2\infty} = (10^{8}+1)^2 \approx 10^{16}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 12 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

Методом Гаусса с выбором глав эл.

т.е. переставить 2 строку на 1-е место (т.к. ее коэфф. больше)

$Ax = f$

$$x^{m+1} = x^m - \tau B^{-1}(Ax^m - f) = (\underbrace{E - \tau B^{-1} A}_{S\text{-матр перехода}})x^m + \tau B^{-1} f$$

$$B\frac{x^{m+1} - x^m}{\tau} + Ax^m = f$$

Итерационный процесс сход, если

$$\forall x_0 \quad \lim_{n\to\infty} \|x^n - x\| = 0$$

<u>Задача (с экзамена)</u>

Дан итерац. процесс

$$\begin{cases} 2x_1^{k+1} - x_2^k = 1 \\ -x_1^{k+1} + 2x_2^{k+1} = 1 \end{cases}$$

Записать в каноннич. виде

Если пр. сходится, то к решению какой системы?

Предполагаем:

$x^{k+1} \to x$

$x^k \to x$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 2x_1 - 1$$

$$-x_1 + 4x_1 - 2 = 1$$

$$3x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix}$$

$$Dx^{k+1} + Cx^k = f$$

Нужно привести $B\dfrac{x^{m+1}-x^m}{\tau} + Ax^m = f$ τ < пусть 1

$Bx^{m+1} - \cancel{\tau} Bx^m + Ax^m = f$

$Bx^{m+1} + (-B + \cancel{\tau} A)x^m = f$

Получается, что $B = D$, а $\overset{A-B}{(\cancel{B+A})} = C$

$$\begin{pmatrix}2&0\\-1&2\end{pmatrix} \qquad \cancel{C = B + A}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix}2&0\\-1&2\end{pmatrix} A}$$

$A = C + B$

$$\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2&0\\-1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

Достаточное условие сход-ти стац. процесса

$\|S\| < 1$ => сход-ся

$\cancel{B^{-1}E}$ $S = E - \tau B^{-1}A$

$B^{-1} = \begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}\frac{1}{4}$ $B^{-1}A = \begin{pmatrix}\frac12&0\\\frac14&\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-\frac12\\0&\frac34\end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ $\|S\|_\infty = \frac12 < 1$

$S = \begin{pmatrix}0&\frac12\\0&\frac14\end{pmatrix}$

НИД $\forall \lambda$ $|\lambda(S)| < 1$ | в телефоне

Теорема Самарского: $\tau = 1 > 0$

$A = \begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix} = A^T$ $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$ $B > \frac12 A$ => сход → в телефо