Вычм. мат

Реш. алг. ур-ий ($f(x)=0$, $|f(x_*)|\le\varepsilon$)

1. Локализация корней

2. Пусть $\exists!$ x_* на $[a,b]$, $f(a)<0$, $f(b>0)$

единств

Ищем бинарн поиском

$c=\frac{a+b}{2}$. а) $|f(c)|<\varepsilon \Rightarrow c$ - корень

б) $|f(c)|\ge\varepsilon \Rightarrow$ ищем на $[a,c]$

3. $\exists!$ x_* на $[a,+\infty)$ $f(a)<0$, Δ - шаг

$f(a+\Delta)$ - $\left[\begin{array}{l} >0, \text{ искомый отр } [a,a+\Delta] \\ <0, f(a+2\Delta) \ldots \end{array}\right.$

$f(a+k\Delta) \Rightarrow [a+(k-1)\Delta; a+k\Delta)$

$f(x)=ax^2+bx+c$, $a>0$

$D=b^2-4ac$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$a\%2=0$;

$D=b^2-ac$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{a}$

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$

1) $D \leq 0$

2) $D \geq 0$

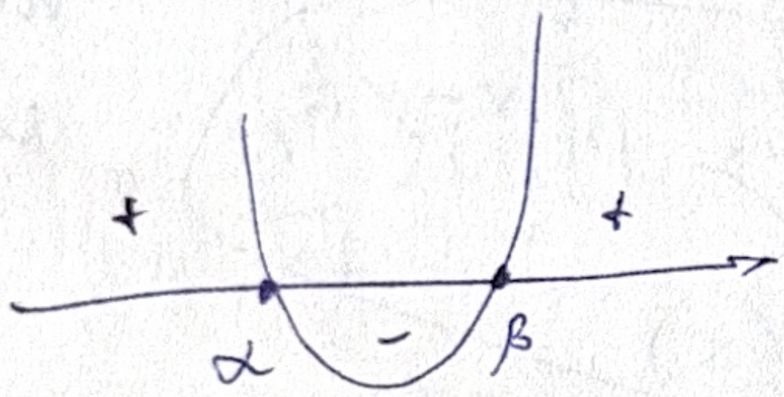
1. $f(0) = b$

$|f(0)| < \varepsilon$

$f(0) < -\varepsilon \Rightarrow [0; +\infty)$

$f(0) > \varepsilon \Rightarrow (-\infty; 0]$

2. $D \geq 0$

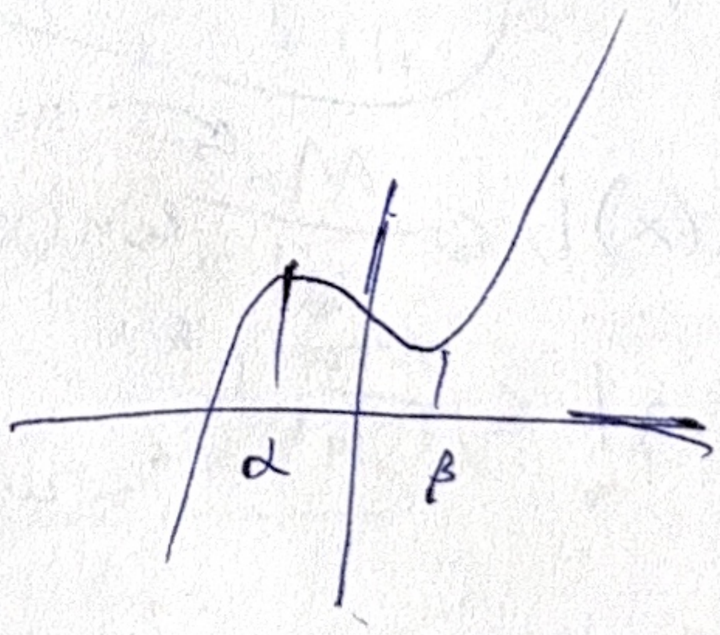


$f(\alpha) > \varepsilon$, то

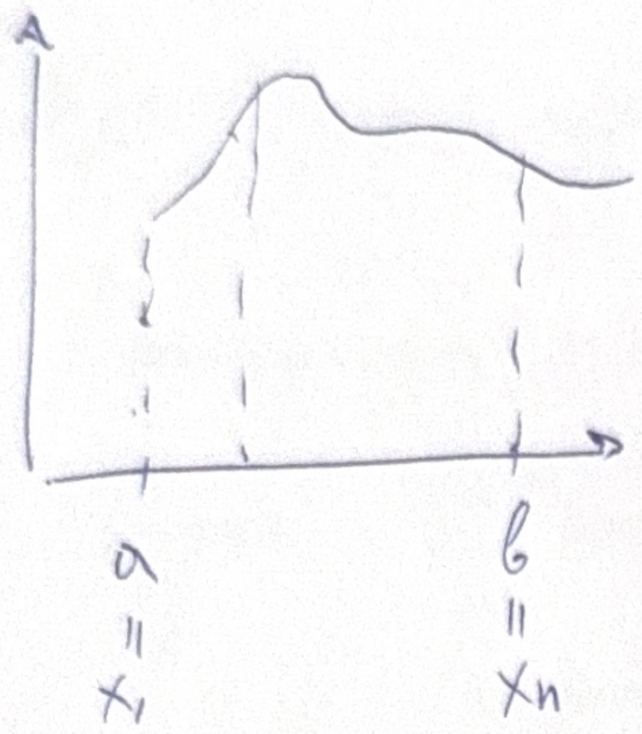
а) $f(\beta) > \varepsilon$

б) $|f(\beta)| \leq \varepsilon$

в) $f(\beta) < -\varepsilon$



Интерполяция



с помощью n точек можно построить ф-цию n-1 степ.

$$P_{n-1}(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

остаточный член, погрешность интерполяц

Точность:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega_n(x)$$

$\prod x - x_i$

M_n ← $\max(f^{(n)}(\xi))$

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_n}{n!} \omega_n(x)$$

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_n}{n} h^n$$

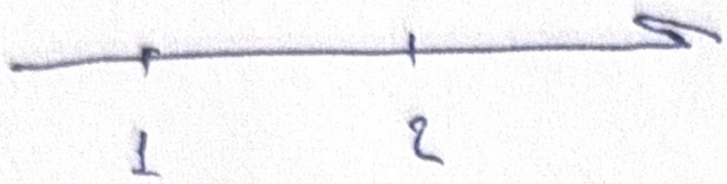
← шаг между точек

Задача

$n=2 \quad x_1=1 \quad f_1=2$

$x_2=2 \quad f_2=5$

$$L_2(x)=\sum_{i=1}^{2} f_i \prod_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{2} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}=$$



$$=2\,\frac{x-2}{1-2}+5\,\frac{x-1}{2-1}=$$

<//L>

$$=-2x+4+5x-5=$$

$$=3x-1$$

<it>

$x_1=1 \quad f_1=1$

$x_2=2 \quad f_2=0$

$x_3=5 \quad f_3=2$

<.....>

<//>it <.../>

$$L_3(x)=\sum_{i=1}^{3} f_i \prod_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{3} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}=$$

<//Z>

more that faculty

$$=1\,\frac{x-2}{1-2}\cdot\frac{x-5}{1-5}+2\,\frac{x-1}{5-1}\cdot\frac{x-2}{5-2}=$$

$$=+\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}=$$

$$=\underbrace{\frac{3x^2+2x^2}{12}}_{\frac{5}{12}x^2}+\underbrace{\frac{(-15-6-4-2)x}{12}}_{\frac{-27x}{12}}+\underbrace{\frac{15+2}{6}}_{\frac{17}{6}}=$$

$$=\frac{1}{12}(5x^2-27x-34)$$

N* Новосибирский государственный университет
*НАСТОЯЩАЯ НАУКА
N*

Выч. мат Семинар

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$$ ← распределенная разность

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} = \frac{f_{23} - f_{12}}{x_3 - x_1}$$

$$f_{1,\dots,n+1} = \frac{f_{2,\dots,n+1} - f_{1,\dots,n}}{x_{n+1} - x_1}$$

$$f_{\overline{1,n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$ – док-ть по индукции

⊛ Интерполяционный полином в форме Ньютона

$$L_n(x) = f(x_1) + f_{1,2}(x - x_1) + f_{\overline{1,3}}(x - x_1)(x - x_2) + \dots$$
$$+ f_{\overline{1,n}}(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 1 & f_1 = 0 \\ x_2 = 0 & f_2 = 7 \\ x_3 = 2 & f_3 = -1 \end{array}\right]$$ Построить в форме Ньютона

$$L_3(x) = f(x_1) + f_{1,2}(x - x_1) + f_{\overline{1,3}}(x - x_1)(x - x_2)$$

$$f_{1,2} = f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 0}{0 - 1} = \boxed{-7}$$

$$f_{\overline{1,3}} = f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f_{2,3} - f_{1,2}}{x_3 - x_1} = \frac{-4+7}{2-1} = 3$$

[+]

$$f_{2,3} = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = \frac{-1-7}{2-0} = \boxed{-4}$$

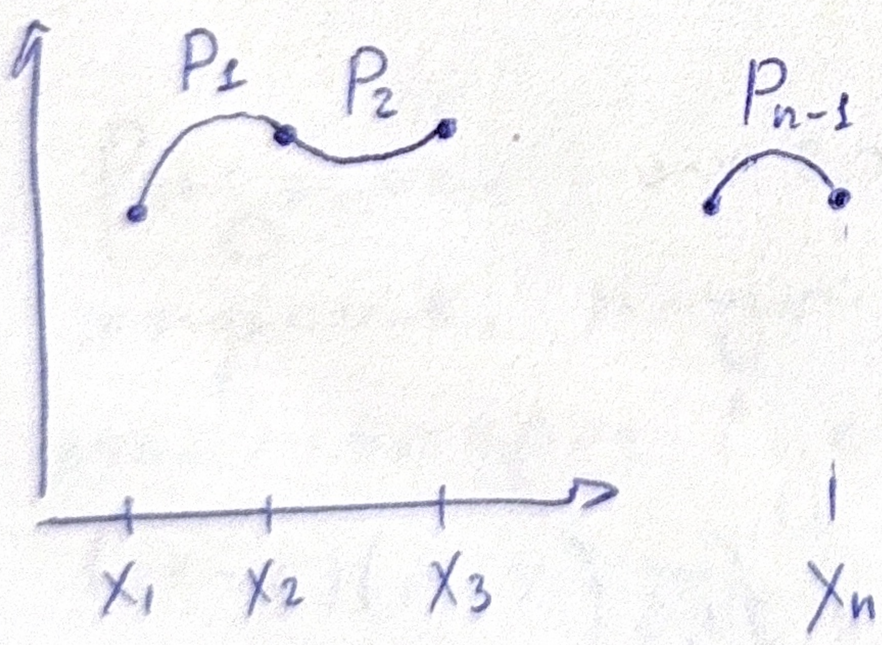
$$L_3(x) = 0 + (-7)(x - \underset{\overset{\parallel}{1}}{x_1}) + 3(x-1)(x-0) =$$

$$= -7x + 7 + 3x^2 - 3x = 3x^2 - 10x + 7$$

<u>Замечание:</u>

Основное различие форм Л и Н: в Н получили результат и может просто добавить точку.

<u>Сплайны:</u>



$$P_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3,$$

$$i = \overline{1, n-1}$$

Условие непрерывности:

$$\left.\begin{aligned} p_i(x_{i+1}) &= p_{i+1}(x_{i+1}) \\ p_i'(x_{i+1}) &= p_{i+1}'(x_{i+1}) \\ p_i''(x_{i+1}) &= p_{i+1}''(x_{i+1}) \end{aligned}\right\} \quad i = \overline{1, n-2} \text{ условий}$$

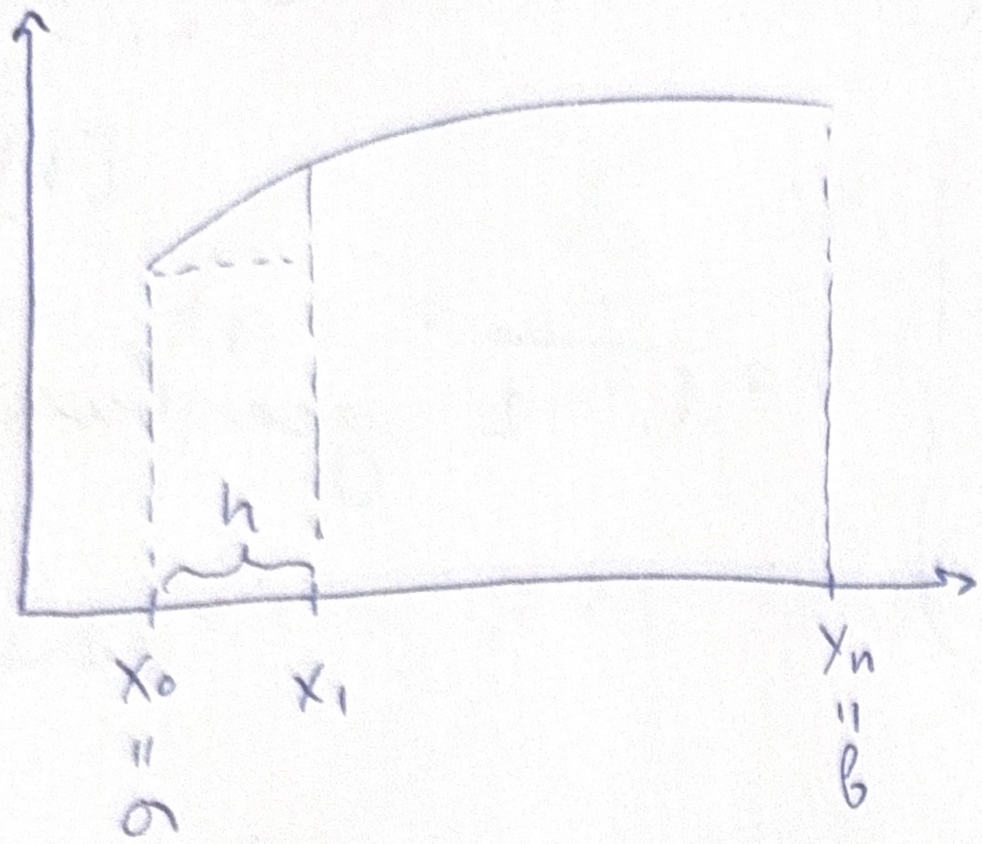
$$\left.\begin{aligned} p_i(x_i) &= f_i \\ p_{n-1}(x_n) &= f_n \end{aligned}\right\} \quad i = \overline{1, n-1} \text{ условия}$$

неизвестных $4(n-1)$

условий $4n-6$

добавим 2 ур-ия: $p_1''(x_1) = \alpha$

$p_{n-1}''(x_n) = \beta$

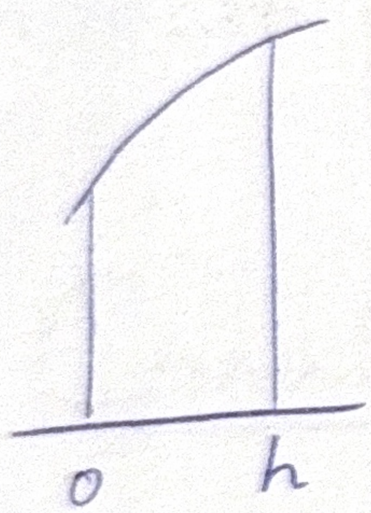


$$J = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

$$S = f(x_0)h + f(x_1)h + \ldots + f(x_{n-1})\cdot h$$ – ф-ла инт-ия с помощью левых прямоуг-ков

С какой точностью считаем?

$$|J - S| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}(J_i - S_i)\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1}|J_i - S_i|$$



$$J_i = \int_0^h f(x)dx$$

$$S_i = h\cdot f(0)$$

ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots$$

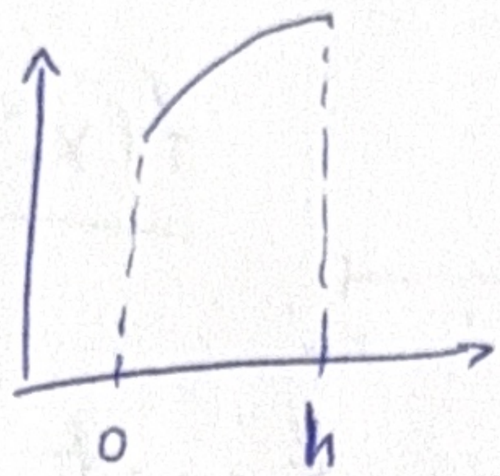
у нас: $f(x)\big|_{x=0} = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + O(x^3)$

т.е. больше не надо

Выч. мат. Семинар

$$|J - S| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}(J_i - S_i)\right| \le \sum_{i=0}^{n-1}|J_i - S_i|$$

$$J_i = \int_0^h f(x)\,dx$$



$$S_0 = f(0)\cdot h$$

$$\int_0^h f(x)\,dx = \int_0^h \left[f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + O(x^2)\right]dx =$$

$$= f(0)$$

$$|J - S| = \ldots \le \sum_{i=0}^{n-1}|J_i - S_i| = \sum_{i=0}^{n-1}\left|f'(x_i)\frac{h^2}{2} + O(h^3)\right| \le$$

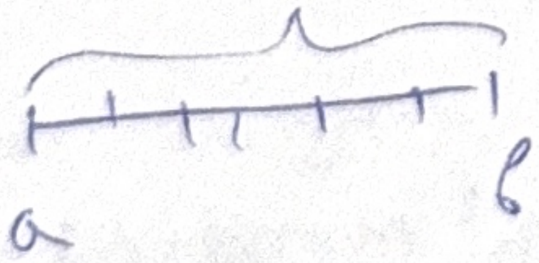
$$\le \sum_{i=0}^{n-1}\left|f'(x_i)\frac{h^2}{2}\right| + \sum_{i=0}^{n-1}|O(h^3)| \le \frac{h^2}{2}\max_i f'(x_i)\sum_{i=0}^{n-1}1 +$$

$$+ |O(h^3)|\sum_{i=0}^{n-1}1 = \frac{h^2}{2}M_1 n + nO(h^3) =$$

можно убрать т.к. для O это неуч.

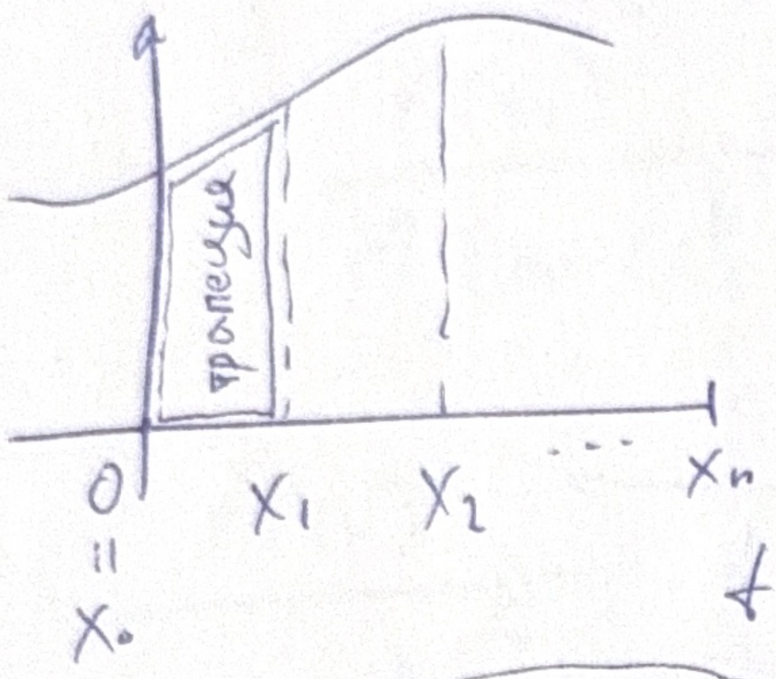
$$h = \frac{b-a}{n} \qquad = \boxed{\frac{h^2}{2}M_1\frac{b-a}{h}} + (b-a)\,\cancel{n}\,O(h^2)$$

n частей



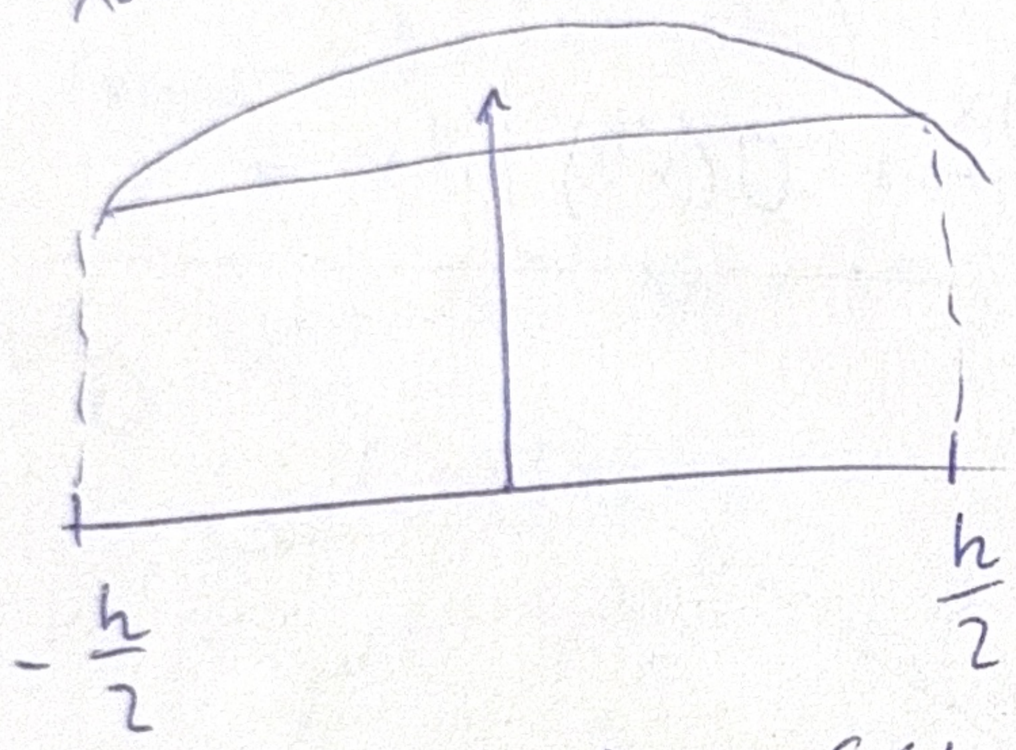
N* Новосибирский государственный университет
*НАСТОЯЩАЯ НАУКА

Ф-ла трапеций



$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} h$$

$$\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} h + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} h + \dots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} h$$



$$S_i = \frac{f(-\frac{h}{2})+f(\frac{h}{2})}{2} h = f(0)h + \frac{f''(0)\frac{h^3}{4}}{2} + O(h^5)$$

$$J_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x)\,dx$$

$$|J-S| \le \sum_{i=0}^{n-1} |J_i - S_i| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| f(0)h + \frac{f''(0)(h^3)}{24} + O(h^5) - \left(\frac{f(0)h}{2} + \frac{f''(0)\frac{h^3}{4}}{4} + O(h^5)\right)\right| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{f(0)h}{2} - \frac{f''(0)h^3}{48} \right|$$

$f(x)$ - 1 разложение:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + O(x^4)$$

$$\int f(x)\,dx = f(0)h + \frac{f''(0)(h^3)}{24} + O(h^5)$$

$$f(\pm\frac{h}{2}) = f(0) \pm \frac{f'(0)\frac{h}{2}}{1!} + \frac{f''(0)\frac{h^2}{4}}{2!} \pm \frac{f'''(0)\frac{h^3}{8}}{3!} + O(h^4)$$

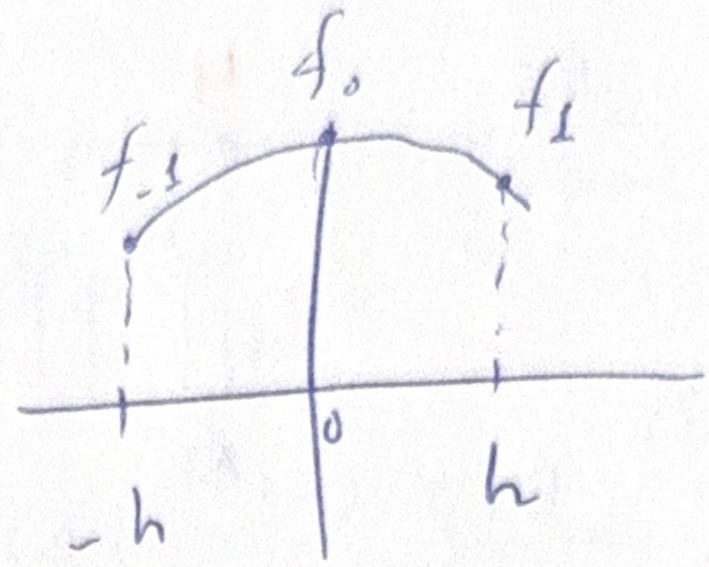
Д/З) в тетрадке + $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$, $h=6$ Посчитать всеми способами

Выч. мат Семинар

$y = ax^2 + bx + c$

$y(0) = f_0$

$c = f_0$



$$a = \frac{f_1 + f_{-1} - 2f_0}{2h^2}$$

$$\left.\begin{aligned} ah^2 + bh + f_0 &= f_1 \\ ah^2 - bh + f_0 &= f_{-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2ah^2 + 2f_0 = f_1 + f_{-1} \Rightarrow$$

$$\int_{-h}^{h} y\,dx = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\,dx = \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right)\Big|_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{2a}{3}h^3 + 2ch = \frac{f_1 + f_{-1} - 2f_0}{3}h + 2f_0 h =$$

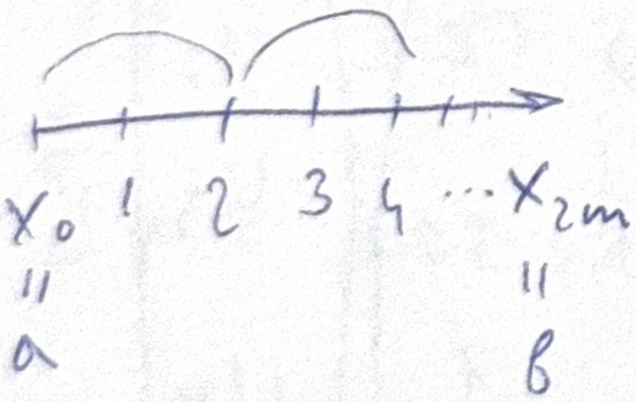
$$= \frac{h}{3}(f_1 + f_{-1} - 2f_0 + 6f_0) = \frac{h}{3}(f_1 + f_{-1} + 4f_0)$$

сместили систему отсчета в 0

$$S = \frac{h}{3}(f_2 + f_0 + 4f_1 + f_4 + f_2 + 4f_3 + \dots) =$$

$\boxed{h = 2m}$

$$= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots f_{2n}) =$$



$$= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i=0}^{m-1} f_{2i+1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} f_{2i} + f_{2m}\right)$$

Определяем точность для ф-лы Симпсона:

$$f(x)\big|_0 = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots$$

$$f_1 = f(h)\big|_0 = f(0) + \cancel{f'(0)h} + \frac{f''(0)h^2}{2!} + \cancel{\frac{f'''(0)h^3}{3!}} + \dots$$

$$f_{-1} = f(-h)\big|_0 = f(0) - \cancel{f'(0)h} + \frac{f''(0)h^2}{2!} - \cancel{\frac{f'''(0)h^3}{3!}} + \dots$$

$$\frac{h}{3}\left(f_1 + f_{-1} + 4f_0\right) = \int_{-h}^{h} y\,dx = S$$

$$\parallel$$

$$\frac{h}{3}\left(6f(0) + f''(0)h^2 + \frac{f^{(4)}(0)h^4}{12} + \frac{f^{(6)}(0)h^6}{360} + O(h^7)\right)$$

$$\mathcal{J} = \int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \int_{-h}^{h}\left(f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \frac{f''''(0)x^4}{4!} + O(x^5)\right)dx =$$

$$= f(0)2h + \frac{f''(0)h^3}{3} + \frac{f^{(4)}(0)h^5}{60} + O(h^7)$$

$$\left|\mathcal{J}_{2i+1} - S_{2i+1}\right| = \left|\cancel{\frac{2f''(0)h^3}{3}} \quad \frac{f^{(4)}(0)h^5}{12}\,\frac{2}{15} + O(h^7)\right| \#$$

$$\sum_{i=0}^{m-1}\left|\frac{f^{(4)}(x_{2i+1})\cdot 2h^5}{4!}\cdot\frac{2}{15}+O(h^7)\right| \le$$

это

из пред задачи ответ

$$\le \sum_{i=0}^{m-1}\left|\frac{f^{(4)}(x_{2i+1})\,2h^5}{4!}\cdot\frac{2}{15}\right| + \left|\sum_{i=0}^{m-1}O(h^7)\right| \le$$

$$\le \frac{h^5}{3!\cdot 15}M_4\cdot m + O(h^7)\cdot m =$$

$$n=\frac{b-a}{h}$$

$$= \frac{h^{\cancel{5}\,4}}{3!\cdot 15}M_4\frac{(b-a)}{2\cancel{h}} + O(h^{\cancel{7}\,6})\frac{(b-a)}{2h} = \quad n=2m$$

$$= \frac{M_4 h^4(b-a)}{3!\cdot 30} + \frac{(b-a)\,O(h^6)}{2} = \quad m=\frac{b-a}{2h}$$

можно убрать

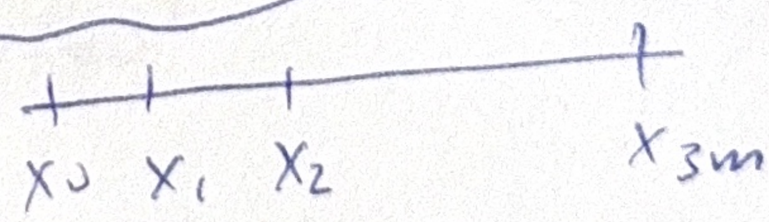
$$= \cancel{\frac{(b-a)}{2}\left(\frac{M_4h^4}{3!\cdot 15}+O(h^6)\right)} =$$

$$= \boxed{\frac{M_4h^4(b-a)}{3!\cdot 30}} + O(h^6)$$

гл. член ошибки

Р/З

обязательно



делим $(b-a)$ на интервалы длины $3m$ $\quad n=3m=\frac{b-a}{h}$

на каждом интервале полином строим $P_3(x)$

$$\int_{x_{3i}}^{x_{3i+3}} f(x)\,dx \approx \int_{x_{3i}}^{x_{3i+3}} P_3(x)\,dx$$

Выписать ф-лу числ инт., вычислить гл. член ошибки

Выч Мат Семинар

Метод простой итерации (для реш алг. ур)

$f(x)=0 \rightsquigarrow x=g(x)$

$x_{n+1}=g(x_n)$, x_0 - нач. приближ.

$f(x)=e^x-2-x=0$ привести к $x=g(x)$

$x=e^x-2$ $x_0=$

$g(x)$

$f(0)=-1$

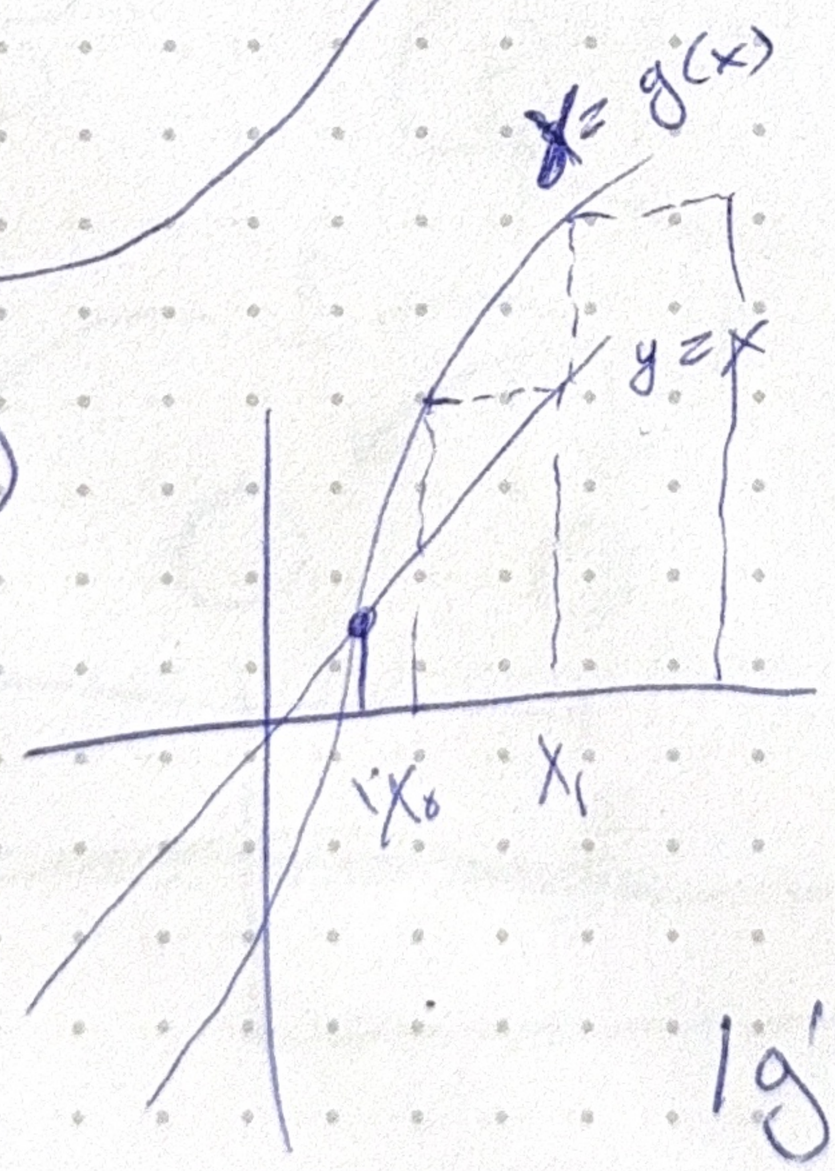
$f(1)=e-3$

$f(2)=e^2-4>0$

$f(-1)=\frac{1}{e}-1<0$

$f(-2)=\frac{1}{e^2}$

$x_1=g(x_0)$



Сход 1

$|g'(\bar{x})|<q \Rightarrow$

$\Rightarrow$ сход

Как тогда найти корень, если расход

$g(g^{-1}(x)) = x$

$g'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

подставим $\tilde{x} = g^{-1}(\tilde{x})$

$(g^{-1})'(\tilde{x}) = \frac{1}{g'(g^{-1}(\tilde{x}))} = \frac{1}{g'(\tilde{x})} \Rightarrow$

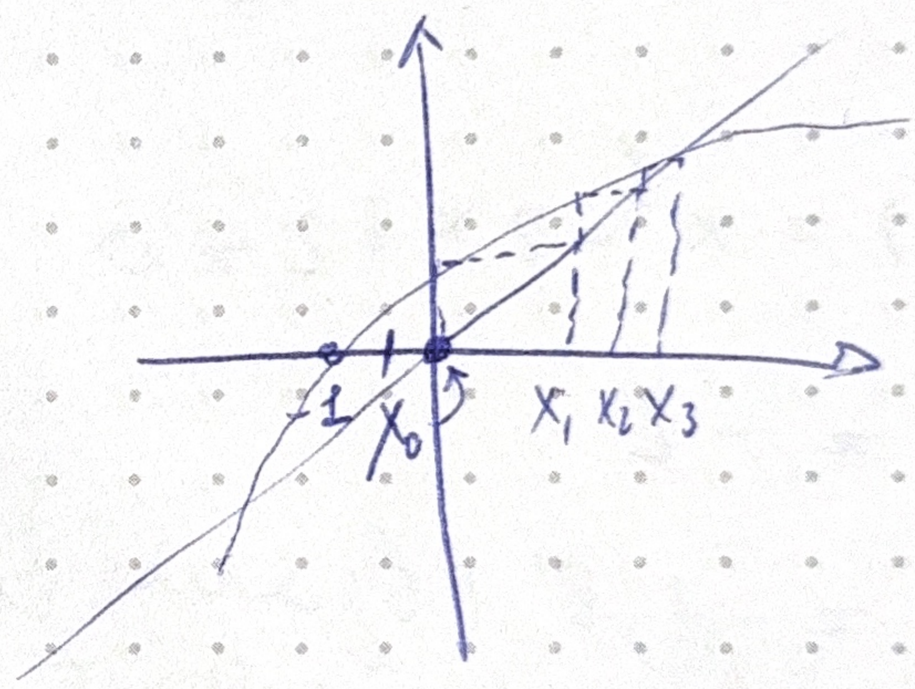
$\Rightarrow$ если $|g'(\tilde{x})| > 1$, то $|(g^{-1})'(\tilde{x})| < 1$

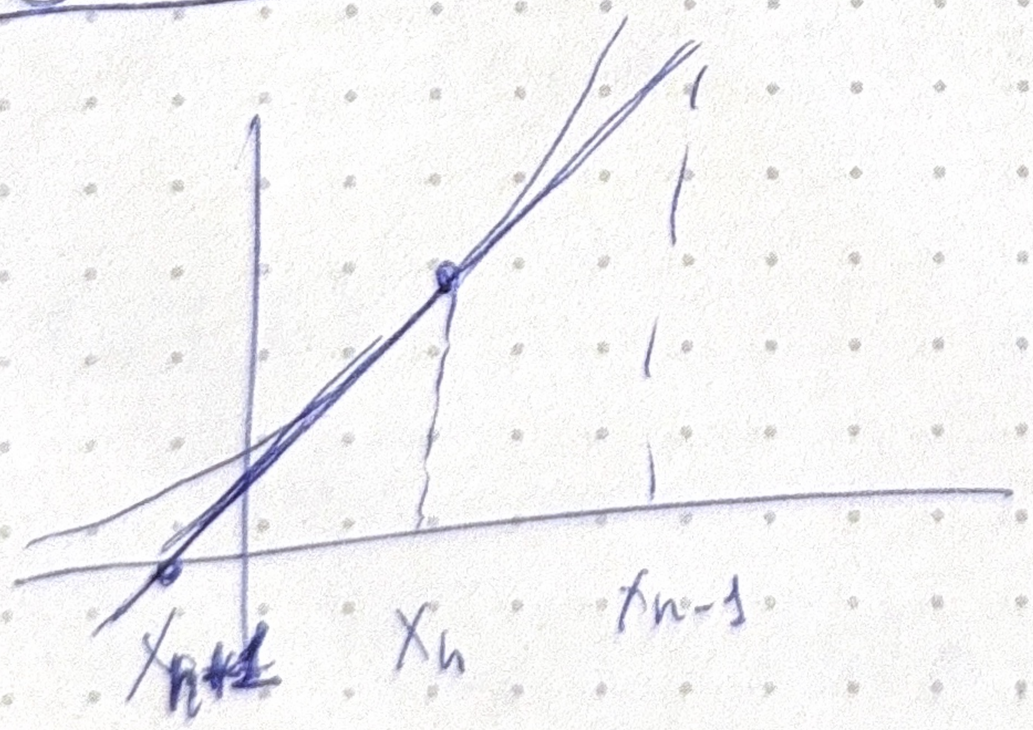
$g(x) = e^x - 2$

$g^{-1}(x) = \ln(x+2)$

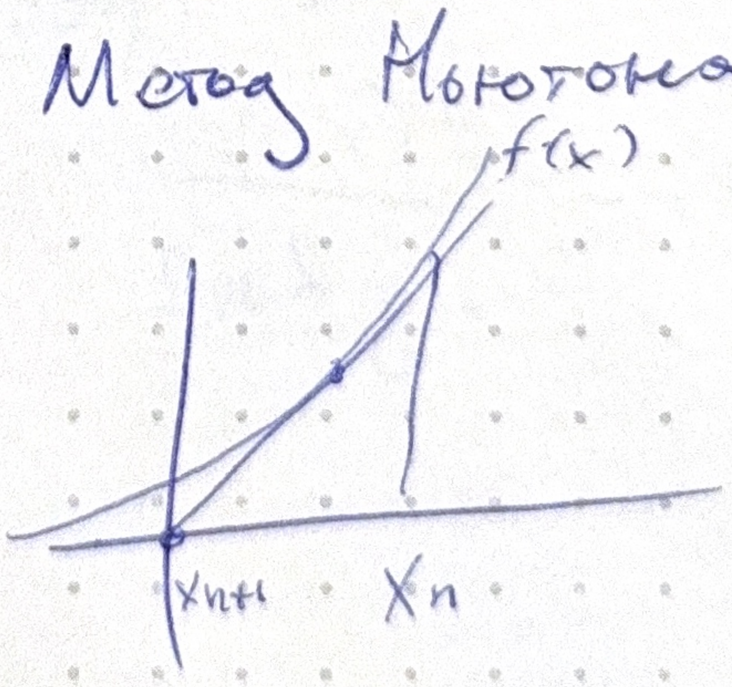
$x = \ln(x+2)$

$g'(x) = e^x$





Метод Монотона



$tg\alpha_n = \frac{f(x_n)-0}{x_n - x_{n+1}}$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{tg\alpha_n}$

$tg\alpha_n = f'(x_n)$

М. одной касат.

$tg\alpha_n = f'(x_0)$

Мет. секущих

$tg\alpha_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

TINKOFF

$f(x) = x^3 - 2x + 2 = 0$

$x_0 = 0$

$tg\,\alpha_n = 3\underset{x_0}{\underset{\parallel}{x^2}} - 2 = -2$

$x_1 = x_0 - \frac{2}{-2} = 1$

$x_2 = 1 - \frac{1}{-2} = \frac{3}{2}$

расходится

$x_0 = -2$

$tg\,\alpha_n = 12 - 2 = 10$

$x_1 = -2 - \frac{-8+4+2}{10} = -\frac{20+2}{10} = -\frac{18}{10}$

$x_2 = -\frac{18}{10} - \frac{\left(-\frac{18}{10}\right)^3 - 2\left(-\frac{18}{10}\right) + 2}{10} = -1{,}7768$

$f(x) = x^3 - 2x + 2 = 0$

$x_0 = -2$

$x_1 = -1{,}8$ (взяли из другого метода)

$tg\,\alpha_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} =$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{tg\,\alpha_1}$

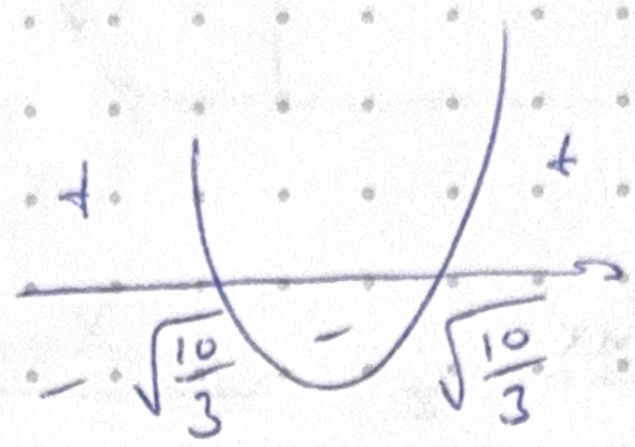
Выч. мат. Семинар

$f(x) = x^3 - 10x - 1 = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 10 = 0$

$3x^2 = 10$

$x = \pm\sqrt{\frac{10}{3}}$



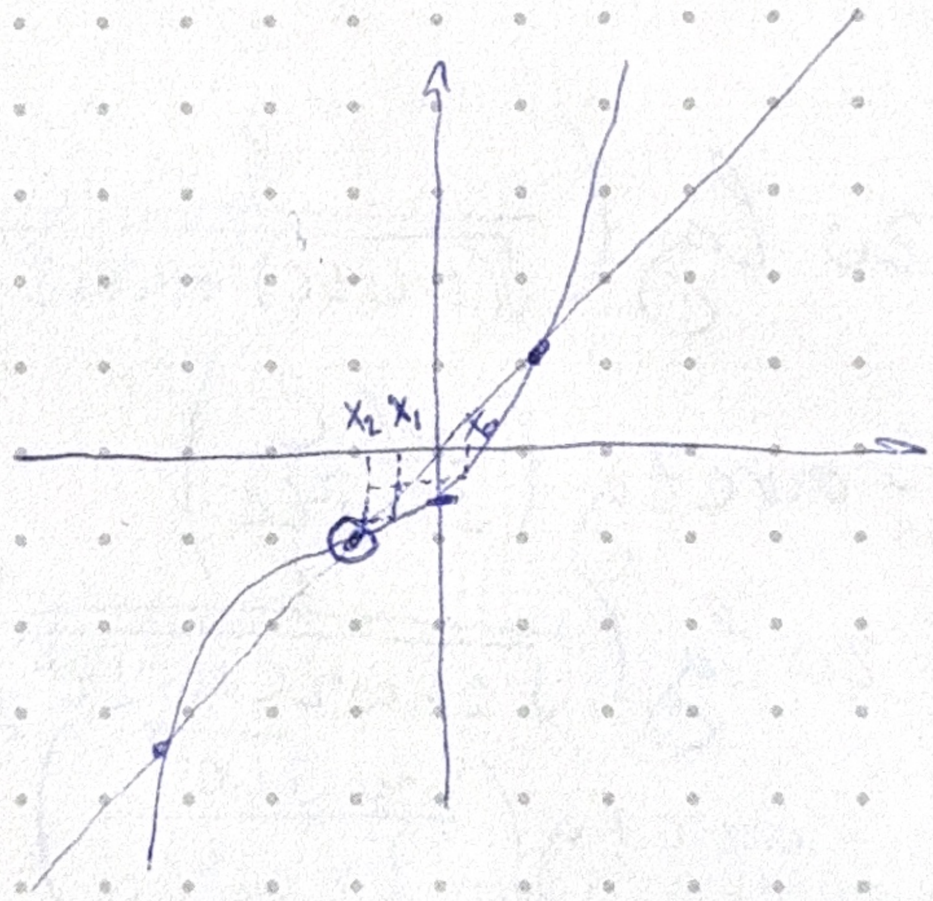
$f\left(-\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = \frac{10}{3}\left(-\sqrt{\frac{10}{3}}\right) + 10\sqrt{\frac{10}{3}} - 1 = \sqrt{\frac{10}{3}}\left(10 - \frac{10}{3}\right) - 1 > 0$

$f\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = \frac{10}{3}\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) - 10\sqrt{\frac{10}{3}} - 1 = \sqrt{\frac{10}{3}}\left(\frac{10}{3} - 10\right) - 1 < 0$

Метод простой итерации:

$10x = x^3 - 1$

$x = \frac{x^3 - 1}{10}$



$x_{n+1} = g(x_n)$

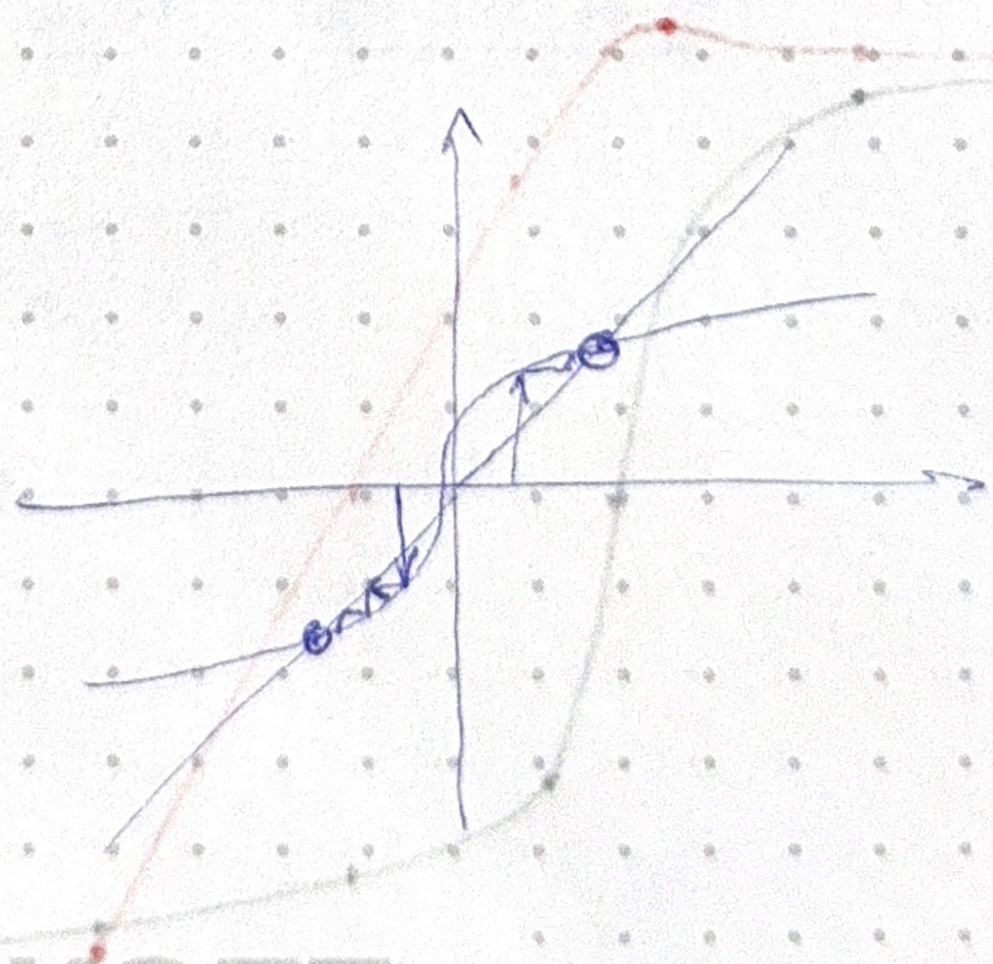
$x_1 = g(x_0)$

один корень нашли

для этого

$\tilde{x} = g^{-1}(\tilde{x})$

$x = \sqrt[3]{10x + 1}$



TINKOFF

сход-ть: $|x_{n+1} - \tilde{x}| \leq C|x_n - \tilde{x}|^k$

М. Ньютона: $k = 2$, k - поряд сход-ти

если прост корень + x_0 близко к $\tilde{x}$

М. однор кор: $k = 1$

М. секущ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$f = x^2$, $f' = 2x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} = \frac{1}{2}x_n$$

$$|x_{n+1} - 0| = \frac{1}{2}|x_n - 0| \Rightarrow k = 1$$

СЛАУ

$$\|A\|_\infty = \cancel{\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a} = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max(1+3+1,\ 2+4,\ 3) = 6$$

$$\|A\|_1 = \max(1+2+1,\ 3+4+1,\ 1+1) = 8$$

TINKOFF

$Ax = y$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+10^{-4} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \quad x = (2, 0)$

$Ax = f \qquad f \qquad \delta f$

$A(x + \delta x) = f + \delta f \qquad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-4} \end{pmatrix} \qquad x = (1, 1)$

можно в норме, но ошибок

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \underbrace{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}_{\text{число обусловленности}} \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\|A\|_\infty = 2 + 10^{-4}$

$A^{-1} = \frac{1}{10^{-4}} \begin{pmatrix} 1+10^{-4} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 10^4 + 1 & -10^4 \\ -10^4 & 10^4 \end{pmatrix}$

$\|A^{-1}\|_\infty = 2 \cdot 10^4 + 1$

$\nu(A) = 4(10^4 + 1) + 10^{-4}$

↑ число обусл.

$\|\delta f\|_\infty = 10^{-4}$

$\|f\|_\infty = 2$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \left[4(10^4 + 1) + 10^{-4}\right] \frac{10^{-4}}{2} =$$

можно не учит.

$$= \frac{1}{2}\left[4(1 + 10^{-4}) + 10^{-8}\right] \approx$$

$$\approx 2$$

TINKOFF

Какое отклонение δf мы можем позволить, чтобы $\cancel{\|\delta x\|/\|x\| \le \frac{1}{100}}$ $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{1}{100}$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \left(4(10^4+1)+10^{-4}\right)\frac{\|\delta f\|}{2} \le \frac{1}{100}$$

$$\cancel{\|\delta x\|}\ \|\delta f\| \le \frac{2}{100(4(10^4+1)+10^{-4})} \approx \frac{2}{4\cdot 10^6+100} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2\cdot 10^6}$$

$A>0$ полож опред, если $\forall x \ne 0$ $(Ax,x)>0$

<u>критерий Сильвестра</u>:

Если $A=A^T$, то $A>0 \iff \underbrace{\Delta_1>0,\ \Delta_2>0,\ \dots}_{\text{главные миноры}}\ \Delta_n>0$

Исслед матрицу на полож опред-ть:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{c|c|c} \Delta_1 & & \\ \hline & \Delta_2 & \\ \hline & & \Delta_3 \end{array}\right)$$

$$Ax=\begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+10x_2\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$(Ax,x)=\left(\begin{pmatrix}x_1+10x_2\\ x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right)=(x_1+10x_2)x_1+x_2^2$$

для $x_1=1$, $x_2=-1$ $(Ax,x)<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не полож опред

<u>Утв</u>: $A>0$ тогда и только тогда, когда $A+A^T>0$

TINKOFF

$$A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = 2 \qquad \Delta_2 = 4 - 100 = -96$$

LU - разлож

$Ax = f \qquad A = LU, \quad L = \begin{pmatrix} = & & 0 \\ = & = & \\ = & = & = \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} = & = & = \\ & = & = \\ 0 & & = \end{pmatrix}$

$Ax = f \qquad Ly = f$

$\parallel$

$LUx = f \qquad Ux = y$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Решить $Ax = f$, $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Ly = f \qquad Ux = y$

$$\begin{cases} 2y_1 = 1 \\ -y_1 + \frac{3}{2} y_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} \\ y_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - \frac{x_2}{2} = \frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Если все глав миноры матр. отлич от 0, то $\exists LU$ разл

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = 5 \neq 0 \quad \Delta_3 = 5 \cdot 24 + 1(-5) = 5 \cdot 23 =$$

$\Delta_2 = 24 \neq 0 \quad = 115 \neq 0 \quad \Rightarrow \exists LU$ разл

Выч Мат Семинар

Метод Гаусса:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ не можем воспольз. на этой матрице

Задача

$$\begin{cases} 10^{-8} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 10^{-8} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10^{-8} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow | : a_{11} = 10^{-8} \text{ (первую строку)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10^{8} & 10^{8} \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow | \cdot a_{21} = 1 \text{ и вычит. из второго}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10^{8} & 10^{8} \\ 0 & 1-10^{8} & 2-10^{8} \end{pmatrix} | : a_{22} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10^{8} & 10^{8} \\ 0 & 1 & \frac{2-10^{8}}{1-10^{8}} \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 10^{8} x_2 = 10^{8}$$

$$x_2 = \frac{2-10^{8}}{1-10^{8}}$$

$$x_1 \approx 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-8} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \|A\|_\infty = 2$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 10^{-8} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10^{-8}-1}$$

когда считаем $\|A^{-1}\|_\infty$ нужно помнить модуль т.к. $\|..\|$ - неотр число

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{2}{1-10^{-8}}$$

$$\nu_\infty = \|A^{-1}\|\|A\| = \frac{4}{1-10^{8}} \approx 4$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 10^{8} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \|U\|_\infty = 10^{8}+1$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -10^{8} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{1-10^{8}} \qquad \|U^{-1}\|_\infty = 10^{8}+1$$

$$\nu_{2\infty} = (10^{8}+1)^2 \approx 10^{16}$$

Р/З

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 12 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

Методом Гаусса с выбором глав эл.

т.е. переставить 2 строку на 1-е место

(т.к. ее коэф. больше)

$Ax = f$

$$x^{m+1} = x^m - \tau B^{-1}(Ax^m - f) = \underbrace{(E - \tau B^{-1}A)}_{S\text{-матр перехода}} x^m + \tau B^{-1} f$$

$$B\frac{x^{m+1} - x^m}{\tau} + Ax^m = f$$

Итерационный процесс сход, если

$$\forall x_0 \quad \lim_{n\to\infty} \|x^n - x\| = 0$$

<u>Задача (с экзамена)</u>

Дан итерац. процесс

$$\begin{cases} 2x_1^{k+1} - x_2^k = 1 \\ -x_1^{k+1} + 2x_2^{k+1} = 1 \end{cases}$$

Записать в канонич. виде

Если пр. сходится, то к решению какой системы?

Предполагаем:

$x^{k+1} \to x$

$x^k \to x$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 2x_1 - 1$$

$$-x_1 + 4x_1 - 2 = 1$$

$$3x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix}$$

$$Dx^{k+1} + Cx^k = f$$

Нужно привести $B\frac{x^{m+1}-x^m}{\tau} + Ax^m = f$ ← пусть τ

$$Bx^{m+1} - Bx^m + Ax^m = f$$

$$Bx^{m+1} + (-B + A)x^m = f$$

Получается, что $B = D$, а $(\overset{A-B}{\cancel{B+A}}) = C$

$$\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$A = C + B$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Достаточное условие сход-ти стац. процесса:

$\|S\| < 1 \Rightarrow$ сход-ся

где $S = E - \tau B^{-1}A$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{4} \qquad B^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \|S\|_\infty = \frac{1}{2} < 1$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

НИО $\forall \lambda \; |\lambda(S)| < 1$ | в тетрадоне

Теорема Самарского: $\tau = 1 > 0$ → вперёд

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^T \quad \Delta_1 = 2 > 0$

$\Delta_2 = 3 > 0 \quad B > \frac{1}{2}A \Rightarrow$ сход

Вычм Мат. Семинар

м. Зейделя

$$x^{m+1} = x^m - 1(L+D)^{-1}(Ax^m - f)$$

(здесь $B = L + D$, $\tau = 1$)

$$A = L + D + U = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 11x_1^{m+1} + x_2^m + x_3^m = 13 \\ x_1^{m+1} + 7x_2^{m+1} + 2x_3^m = 10 \\ x_1^{m+1} + 2x_2^{m+1} + 8x_3^{m+1} = 11 \end{cases}$$

$$(L+D)x^{m+1} + (A-L-D)x^m = f$$

м. Якоби

$$x^{m+1} = x_m - 1 \cdot D^{-1}(Ax^m - f)$$

$$Dx^{m+1} + (A-D)x^m = f$$

Д/З

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

а) применить метод Якоби

б) вычислить x^2, если $x^0 = 0$

в) исследуем способами док-ть сход-ть

ОПР:

Λ_h - разностный опер., F - диф. оп,

то разн. оп. апрокс. диф. опер, если

$|\Lambda_h - F| \le O(h^k)$ k - порядок апрокс.

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

$$F_{[y]} = y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \Lambda_h$$ - разность вперед

x $x+h$

$$\overline{\Lambda}_h = \frac{y(x) - y(x-h)}{h}$$ - разность назад

$x-h$ x

$$\Lambda^*_h = \frac{\Lambda_h + \overline{\Lambda}_h}{2}$$

мы не знаем, что такое $y(x+h) - y(x) =$

$$= y(x) + \frac{y'(x)h}{1} + \frac{y''(x)h^2}{2} + O(h^3) - y(x) =$$

$$= y'(x)h + \frac{y''(x)h^2}{2} + O(h^3)$$

$$\Lambda_h = y'(x) + \underbrace{\frac{y''(x)h}{2}}_{\text{гл. член ошибки 1-ого порядка}} + O(h^2)$$

$$\Lambda^*_h = \frac{\Lambda + \bar{\Lambda}}{2} = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

$$y(x+h) - y(x-h) = y(x) + y'(x)h + \cancel{\frac{y''(x)h^2}{2}} + \frac{y'''(x)h^3}{6} +$$

$$+ \cancel{\frac{y''''(x)h^4}{24}} + O(h^5) - y(x) + y'(x)h - \cancel{\frac{y''(x)h^2}{2}} + \frac{y'''(x)h^3}{6} -$$

$$- \cancel{\frac{y''''(x)h^4}{24}} + O(h^5) = 2y'(x)h + y'''(x)h^3 + O(h^5)$$

$$\Lambda^*_h = y'(x) + \frac{y'''(x)h^2}{6} + O(h^4)$$

разложим в ряд Тейлора

$$y''(x) = (y')' \approx \left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h}\right)' \approx \frac{\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h}}{h} =$$

$$= y''(x) + \frac{y^{(4)}(x)h^2}{12} + O(h^4) = \Omega \quad \Rightarrow k = 2$$

$$\Delta_h = \frac{1}{h^n} \sum_{j \in M} \alpha_j y(x + jh)$$

$M = \{0, 1, 2\}$, аппрокс 1-ую пр-ую со 2-ым порядком, $n = 1$, $k = 2$

$$3 = |M| \geq n + k = 3 \checkmark$$

мощность шаблона

$m=0: \quad a_0 + a_1 + a_2 = 0$

$m=2: \quad a_0 0^2 + a_1 1^2 + a_2 \cdot 2^2 = 0$

$a_0 0 + a_1 1 + a \cdot 2 = 1$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + 4a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Delta_h = \frac{1}{h}\left(-\frac{3}{2}y(x) + 2y(x+h) - \frac{1}{2}y(x+2h)\right)$$