Выч Мат. Семинар

м. Зейделя

$$x^{m+1} = x^m - 1\,(L+D)^{-1}(Ax^m - f)$$

(здесь $B = L + D$, $\tau = 1$)

$$A = L + D + U = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ \equiv & & \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & \equiv \\ & & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 11x_1^{m+1} + x_2^m + x_3^m = 13 \\ x_1^{m+1} + 7x_2^{m+1} + 2x_3^m = 10 \\ x_1^{m+1} + 2x_2^{m+1} + 8x_3^{m+1} = 11 \end{cases}$$

$$(L+D)x^{m+1} + (A - L - D)x^m = f$$

м. Якоби

$$x^{m+1} = x_m - 1 \cdot D^{-1}(Ax^m - f)$$

$$Dx^{m+1} + (A - D)x^m = f$$

Д/З

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

а) применить метод Якоби

б) вычислить x^2, если $x^0 = 0$

в) четырьмя способами док-ть сход-ть

ОПР.

Λ_h - разностный опер., F - дифф. оп,

то разн. оп. апрокс. дифф. опер, если

$|\Lambda_h - F| \le O(h^k)$ k - порядок апрокс.

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

$$F[y] = y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \Lambda_h$$ - разность вперед

x —— $x+h$

$$\bar{\Lambda}_h = \frac{y(x) - y(x-h)}{h}$$ - разность назад

$x-h$ —— x

$$\Lambda^*_h = \frac{\Lambda_h + \bar{\Lambda}_h}{2}$$

мы не знаем, что такое $y(x+h) - \underline{y(x)} =$

$$= y(x) + \frac{y'(x)h}{1} + \frac{y''(x)h^2}{2} + O(h^3) - \underline{y(x)} =$$

$$= y'(x)h + \frac{y''(x)h^2}{2} + O(h^3)$$

$$\Lambda_h = y'(x) + \underbrace{\frac{y''(x)h}{2}}_{\text{гл. член ошибки 1-ого порядка}} + O(h^2)$$

$$\Lambda_h^{*} = \frac{\Lambda + \bar{\Lambda}}{2} = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

$$y(x+h) - y(x-h) = y(x) + y'(x)h \pm \cancel{\frac{y''(x)h^2}{2}} \pm y'''\frac{(x)h^3}{6} +$$

$$+ \cancel{y''''\frac{(x)h^4}{24}} + O(h^5) - y(x) + y'(x)h - \cancel{\frac{y''(x)h^2}{2}} + y'''\frac{(x)h^3}{6} -$$

$$- \cancel{\frac{y''''(x)h^4}{24}} + O(h^5) = 2y'(x)h + y'''(x)h^3 + O(h^5)$$

$$\Lambda_h^{*} = y'(x) + y'''\frac{(x)h^2}{6} + O(h^4)$$

разлож в ряд Тейлора

$$y''(x) = (y')' \approx \left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h}\right)' \approx \frac{\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h}}{h} =$$

$$= y''(x) + y^{(4)}\frac{(x)h^2}{12} + O(h^4) = \Omega \qquad \Rightarrow k = 2$$

$$\Lambda_h = \frac{1}{h^n}\sum_{j \in M} a_j y(x + jh)$$

$M = \{0, 1, 2\}$, опрокс 1-ую пр-ую со 2-ым порядком. $n = 1$, $k = 2$

$s = |M| = n + k = 3$ ✓

мощность шаблона

$m=0: \quad a_0 + a_1 + a_2 = 0$

$m=2: \quad a_0 0^2 + a_1 1^2 + a_2 \cdot 2^2 = 0$

$a_0 0 + a_1 1 + a \cdot 2 = 1$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + 4a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Delta_h = \frac{1}{h}\left(-\frac{3}{2} y(x) + 2y(x+h) - \frac{1}{2} y(x+2h)\right)$$