Док-во по индукции:

для удобства

$$f_{\overline{1,n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j}{\prod\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq j}}^{n} (x_j - x_m)}$$

База индукции $n=1$: $f_1 = f(x_1)$

$$\sum_{j=1}^{1} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq j}}^{1} (x_j - x_m)} = f(x_1) = f_1 \quad \checkmark$$

Пусть для $n \geq 1$ верно:

$$f_{\overline{1,n}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq j}}^{n} (x_j - x_m)}$$

Шаг индукции: $n \to n+1$

$$f_{\overline{1,n+1}} = \frac{f_{\overline{2,n+1}} - f_{\overline{1,n}}}{x_{n+1} - x_1}$$

$$f_{\overline{2,n+1}} = \sum_{j=2}^{n+1} \underbrace{\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=2 \\ m\neq j}}^{n+1} (x_j - x_m)}}_{1}; \quad f_{\overline{1,n}} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq j}}^{n} (x_j - x_m)}}_{2};$$

$$f_{\overline{1,n+1}} = \frac{1}{x_{n+1} - x_1} \left(\ldots - \ldots \right)$$

Зафиксируем j:

$$D_j = \prod_{\substack{m=1 \\ m\neq j}}^{n+1} (x_j - x_m) \Rightarrow \text{для } 2 \leq j \leq n$$

$$\Rightarrow \prod_{\substack{m=2 \\ m\neq j}}^{n+1} (x_j - x_m) = \frac{D_j}{x_j - x_1} \; ; \; \prod_{\substack{m=1 \\ m\neq j}}^{n} (x_j - x_m) = \frac{D_j}{x_j - x_{n+1}}$$

$$(1) = \frac{f(x_j)(x_j - x_1)}{D_j} \qquad (2) = \frac{f(x_j)(x_j - x_{n+1})}{D_j}$$

$$\frac{f(x_j)(x_j - x_1)}{D_j} - \frac{f(x_j)(x_j - x_{n+1})}{D_j} = \frac{f(x_j)((x_j - x_1) - (x_j - x_{n+1}))}{D_j} =$$

$$= \frac{f(x_j)(x_{n-1} - x_1)}{D_j}$$

Поделим на $x_{n-1} - x_1$ из основного выр-ия $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Тогда в сумме получается

$$\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq j}}^{n+1} (x_j - x_m)} \quad \text{это для } j \in [2, n]$$

Для $j=1$: (из второй суммы)

$$-\frac{f(x_1)}{\prod\limits_{\substack{m=1\\m\neq 1}}^{n}(x_1-x_m)} = -\frac{f(x_1)}{\prod\limits_{m=2}^{n}(x_1-x_m)}$$

Выразим через D_1

$$D_1 = \prod\limits_{\substack{m=1\\m\neq 1}}^{n+1}(x_1-x_m) = \left(\prod\limits_{m=2}^{n}(x_1-x_m)\right)\cdot(x_1-x_{n+1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod\limits_{m=2}^{n}(x_1-x_m) = \frac{D_1}{x_1-x_{n+1}}$$

Тогда $-\dfrac{f(x_1)}{\prod\limits_{m=2}^{n}(x_1-x_m)} = -\dfrac{f(x_1)(x_1-x_{n+1})}{D_1}$

Поделим на $x_{n+1}-x_1$

и получаем $\dfrac{f(x_1)}{D_1} = \dfrac{f(x_1)}{\prod\limits_{\substack{m=1\\m\neq 1}}^{n+1}(x_1-x_m)}$

Для $j = n+1$: (из первой суммы)

$$\frac{f(x_{n+1})}{\prod\limits_{\substack{m=2\\m\neq n+1}}^{n+1}(x_{n+1}-x_m)} = \frac{f(x_{n+1})}{\prod\limits_{m=2}^{n}(x_{n+1}-x_m)}$$

$$D_{n+1} = \prod_{\substack{m=1\\m\neq n+1}}^{n+1}(x_{n+1}-x_m) = (x_{n+1}-x_1)\cdot\prod_{m=2}^{n}(x_{n+1}-x_m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{m=2}^{n}(x_{n+1}-x_m) = \frac{D_{n+1}}{x_{n+1}-x_1}$$

Тогда $\dfrac{f(x_{n+1})}{\prod\limits_{m=2}^{n}(x_{n+1}-x_m)} = \dfrac{f(x_{n+1})(x_{n+1}-x_1)}{D_{n+1}}$

Поделим на $x_{n+1}-x_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{f(x_{n+1})}{D_{n+1}} = \frac{f(x_{n+1})}{\prod\limits_{\substack{m=1\\m\neq n+1}}^{n+1}(x_{n+1}-x_m)}$$

Теперь посчитаем $f_{\overline{1,n+1}}$ сложив результаты для каждого $j \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_{\overline{1,n+1}} = \sum_{j=1}^{n+1}\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=1\\m\neq j}}^{n+1}(x_j-x_m)} \quad \blacksquare$$