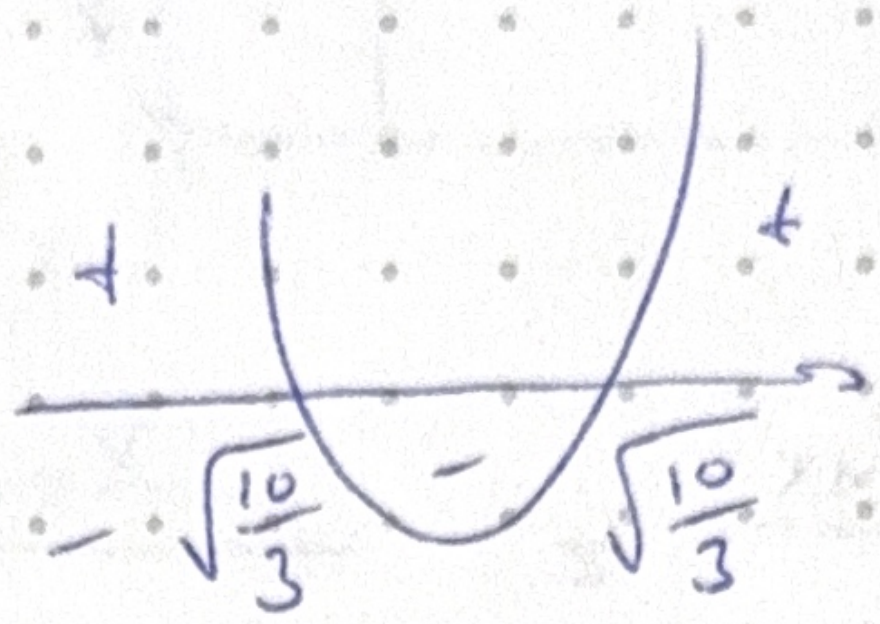
Выч. мат. Семинар

$$f(x) = x^3 - 10x - 1 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10 = 0$$

$$3x^2 = 10$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{10}{3}}$$



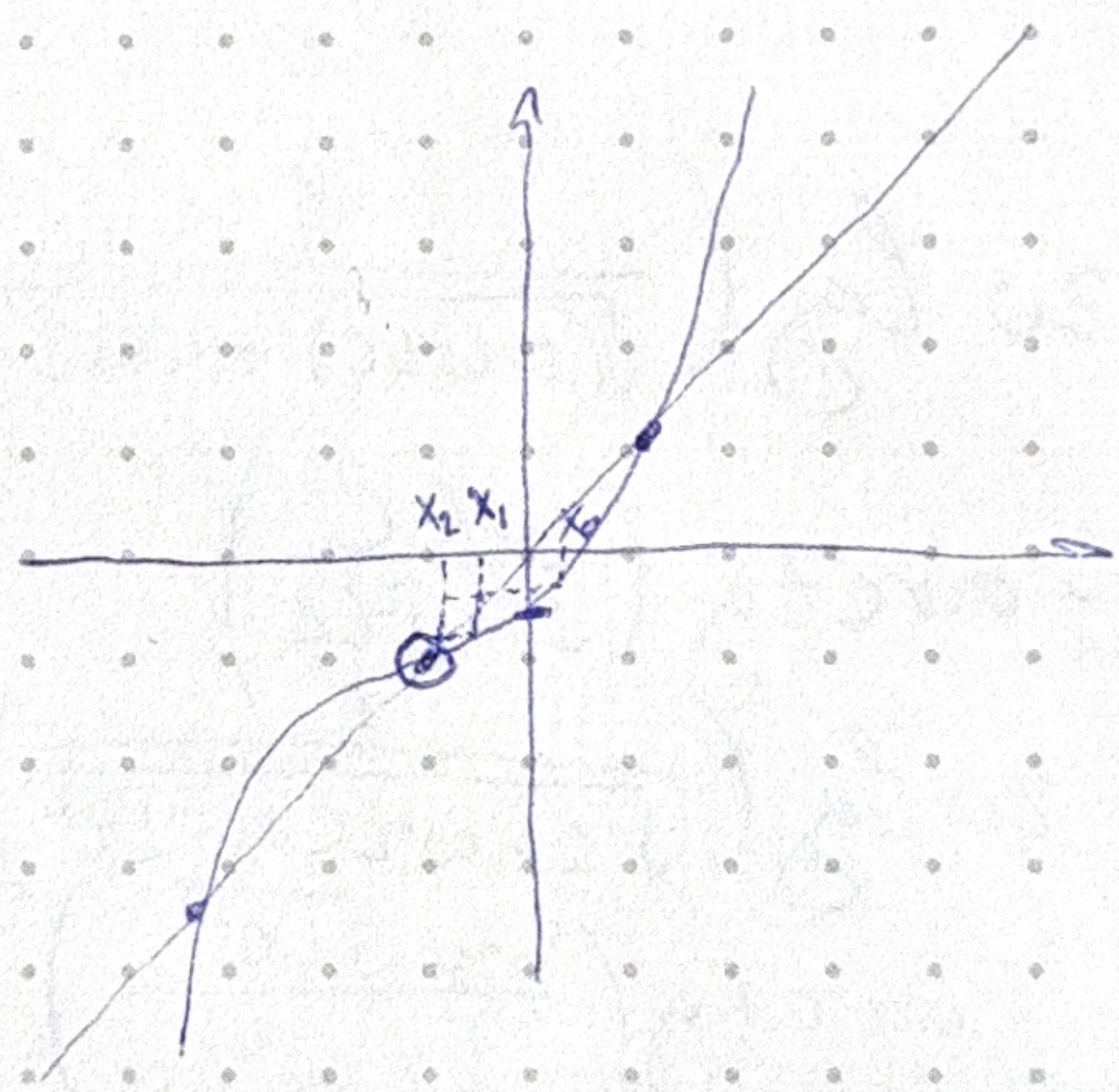
$$f\left(-\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = \frac{10}{3}\left(-\sqrt{\frac{10}{3}}\right) + 10\sqrt{\frac{10}{3}} - 1 = \sqrt{\frac{10}{3}}\left(10 - \frac{10}{3}\right) - 1 > 0$$

$$f\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = \frac{10}{3}\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) - 10\sqrt{\frac{10}{3}} - 1 = \sqrt{\frac{10}{3}}\left(\frac{10}{3} - 10\right) - 1 < 0$$

Метод простой итерации:

$$10x = x^3 - 1$$

$$x = \frac{x^3 - 1}{10}$$



$$x_{n+1} = g(x_n)$$

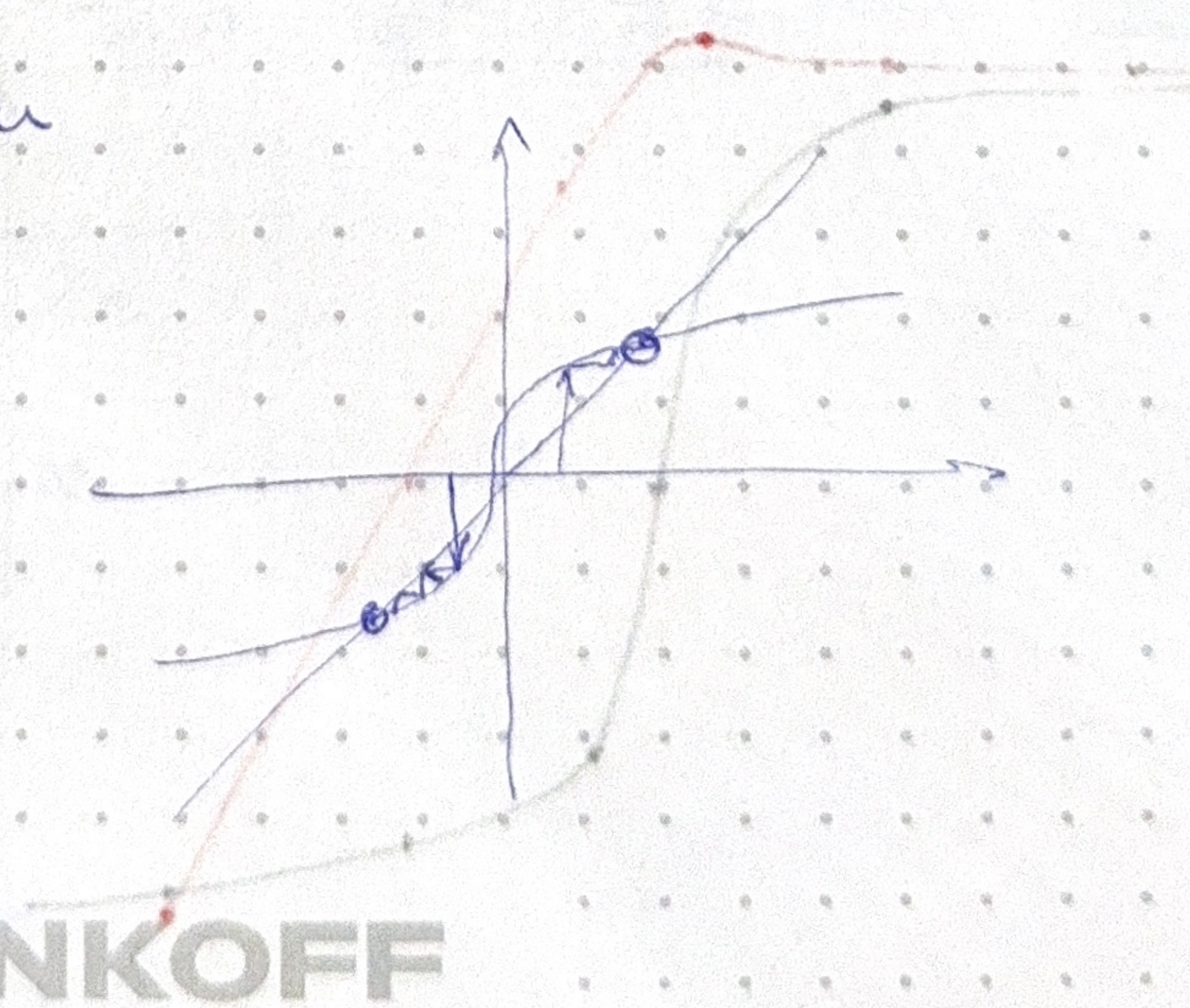
$$x_1 = g(x_0)$$

один корень нашли

для этого

$$\tilde{x} = g^{-1}(\tilde{x})$$

$$x = \sqrt[3]{10x + 1}$$



сход-ть: $|x_{n+1} - \tilde{x}| \leq C|x_n - \tilde{x}|^k$

М. Ньютона: $k=2$, k - поряд сход-ти

если прост корень + x_0 близко к $\tilde{x}$

М. одноб кас: $k=1$

М. секущ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$f = x^2$, $f' = 2x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} = \frac{1}{2}x_n$$

$$|x_{n+1} - 0| = \frac{1}{2}|x_n - 0| \Rightarrow k=1$$

СЛАУ

$$\|A\|_\infty = \cancel{\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a} = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max(1+3+1,\ 2+4,\ 3) = 6$$

$$\|A\|_1 = \max(1+2+1,\ 3+4+1,\ 1+1) = 8$$

$Ax = y$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+10^{-4} \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad x_1 = 2$, $x_2 = 0$ $\quad x = (2, 0)$

$Ax = f$ $\quad f \quad \delta f$

$A(x + \delta x) = f + \delta f$ $\quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-4} \end{pmatrix}$ $\quad x = (1, 1)$

можно и нормы по оценок

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}_{\text{число обусловленности}} \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\|A\|_\infty = 2 + 10^{-4}$

$A^{-1} = \frac{1}{10^{-4}} \begin{pmatrix} 1+10^{-4} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 10^4 + 1 & -10^4 \\ -10^4 & 10^4 \end{pmatrix}$

$\|A^{-1}\|_\infty = 2 \cdot 10^4 + 1$

$\nu(A) = 4(10^4 + 1) + 10^{-4}$

↑ число обусл.

$\|\delta f\|_\infty = 10^{-4}$

$\|f\|_\infty = 2$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \left[4(10^4+1) + 10^{-4}\right] \frac{10^{-4}}{2} =$$

можно не учит.

$$= \frac{1}{2}\left[4(1 + 10^{-4}) + 10^{-8}\right] \approx$$

≈ 2

Какое отклонение δf мы можем позволить, чтобы $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{1}{100}$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \left(4(10^4+1)+10^{-4}\right)\frac{\|\delta f\|}{2} \le \frac{1}{100}$$

$$\|\delta f\| \le \frac{2}{100(4(10^4+1)+10^{-4})} \approx \frac{2}{4\cdot 10^6+100} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2\cdot 10^6}$$

$A>0$ полож опред, если $\forall x \ne 0 \quad (Ax, x) > 0$

критерий Сильвестра:

Если $A = A^T$, то $A > 0 \Leftrightarrow \underbrace{\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots \Delta_n > 0}_{\text{главные миноры}}$

Исслед матрицу на полож опред-ть:

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 & & \\ & \Delta_2 & \\ & & \Delta_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 10x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(Ax, x) = \left(\begin{pmatrix} x_1 + 10x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + 10x_2)x_1 + x_2^2$$

для $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ $(Ax, x) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не полож опред

Утв: $A > 0$ тогда и только тогда, когда $A + A^T > 0$

$$A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 4 - 100 = -96$$

LU - разлож

$Ax = f \qquad A = LU, \quad L = \left(\ \diagdown\ 0\ \right), \quad U = \left(\ 0\ \diagdown\ \right)$

$Ax = f \qquad Ly = f$

$\parallel\!|$

$LUx = f \qquad Ux = y$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Решить $Ax = f$, $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Ly = f \qquad\qquad Ux = y$

$$\begin{cases} 2y_1 = 1 \\ -y_1 + \frac{3}{2} y_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} \\ y_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - \frac{x_2}{2} = \frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Если все глав миноры мат. отлич от 0, то $\exists$ LU разл

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = 5 \neq 0 \quad \Delta_3 = 5 \cdot 24 + 1(-5) = 5 \cdot 23 =$$

$$\Delta_2 = 24 \neq 0 \quad = 115 \neq 0 \quad \Rightarrow \exists \text{ LU разл}$$