河北工程大学信息与电气工程学院

计算机专业概率论课程题目集

念碎夜画繁星辰

2025 年 12 月 20 日

题目来源：浙大概率论与数理统计第五版前 7 章[1]

[1]GitHub:念碎夜画繁星辰

目录

1　概率论的基本概念

1. 写出下列随机试验的样本空间 S：

   (a) 记录一个班一次数学考试的平均分数（设以百分制计分）.

   (b) 生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数.

   (c) 对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上“正品”，不合格的记上“次品”，如连续查出了 2 件次品就停止检查，或检查了 4 件产品就停止检查，记录检查的结果.

   (d) 在单位圆内任取一点，记录它的坐标.

2. 设 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件：

   (a) A 发生，B 与 C 不发生.

   (b) A 与 B 都发生，而 C 不发生.

   (c) A,B,C 中至少有一个发生.

   (d) A,B,C 都发生.

   (e) A,B,C 都不发生.

   (f) A,B,C 中不多于一个发生.

   (g) A,B,C 中不多于两个发生.

   (h) A,B,C 中至少有两个发生.

3. (a) 设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4, P(AB)=P(BC)=0, P(AC)=1/8$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

   (b) 已知 $P(A)=1/2, P(B)=1/3, P(C)=1/5, P(AB)=1/10, P(AC)=1/15, P(BC)=1/20, P(ABC)=1/30$，求 $A\cup B, \overline{AB}, A\cup B\cup C, \overline{ABC}, \overline{AB}C, \overline{AB}\cup C$ 的概率.

   (c) 已知 $P(A)=1/2$，(i) 若 A,B 互不相容，求 $P(A\overline{B})$，(ii) 若 $P(AB)=1/8$，求 $P(A\overline{B})$.

4. 设 A,B 是两个事件

   (a) 已知 $A\overline{B}=\overline{A}B$，验证 $A=B$.

   (b) 验证事件 A 和事件 B 恰有一个发生的概率为 $P(A)+P(B)-2P(AB)$.

5. 10 片药片中有 5 片是安慰剂.

   (a) 从中任意抽取 5 片，求其中至少有 2 片是安慰剂的概率.

(b) 从中每次取一片，作不放回抽样，求前 3 次都取到安慰剂的概率.

6. 在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码.

   (a) 求最小号码为 5 的概率.

   (b) 求最大号码为 5 的概率.

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶、红漆 3 桶，在搬运中所有标签脱落，交货人随意将这些油漆发给顾客。问一个订货为 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客，能按所订颜色如数得到订货的概率是多少？

8. 在 1500 件产品中有 400 件次品、1100 件正品．任取 200 件.

   (a) 求恰有 90 件次品的概率.

   (b) 求至少有 2 件次品的概率.

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只。问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少？

10. 在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求其排列结果为 ability 的概率.

11. 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 只铆钉强度太弱。每个部件用 3 只铆钉。若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱。问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

13. 一俱乐部有 5 名一年级学生，2 名二年级学生，3 名三年级学生，2 名四年级学生.

    (a) 在其中任选 4 名学生，求一、二、三、四年级的学生各一名的概率.

    (b) 在其中任选 5 名学生，求一、二、三、四年级的学生均包含在内的概率.

14. (a) 已知 $P(\overline{A}) = 0.3, P(B) = 0.4, P(A\overline{B}) = 0.5$，求条件概率 $P(B|A \cup \overline{B})$.

    (b) 已知 $P(A) = 1/4, P(B|A) = 1/3, P(A|B) = 1/2$，求 $P(A \cup B)$.

15. 掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为 7，求其中有一颗为 1 点的概率（用两种方法).

16. 据以往资料表明，某个三口之家，患某种传染病的概率有以下规律：

$$P\{\text{孩子得病}\} = 0.6, P\{\text{母亲得病}|\text{孩子得病}\} = 0.5, P\{\text{父亲得病}|\text{母亲及孩子得病}\} = 0.4$$

求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

17. 已知在 10 件产品中有 2 件次品，在其中取两次，每次任取一件，作不放回抽样. 求下列事件的概率：
    (a) 两件都是正品.
    (b) 两件都是次品.
    (c) 一件是正品，一件是次品.
    (d) 第二次取出的是次品.

18. 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随意地拨号. 求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率. 若已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

19. (a) 设甲袋中装有 n 只白球、m 只红球；乙袋中装有 N 只白球、M 只红球。今从甲袋中任意取一只球放入乙袋中. 再从乙袋中任意取一只球. 问取到白球的概率是多少？
    (b) 第一只盒子装有 5 只红球，4 只白球；第二只盒子装有 4 只红球，5 只白球. 先从第一盒中任取 2 只球放入第二盒中去，然后从第二盒中任取一只球. 求取到白球的概率.

20. 某种产品的商标为“MAXAM”，其中有 2 个字母脱落，有人捡起随意放回，求放回后仍为“MAXAM”的概率.

21. 已知男子有 5%是色盲患者，女子有 0.25%是色盲患者. 今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲者，问此人是男性的概率是多少？

22. 一学生接连参加同一课程的两次考试. 第一次及格的概率为 p，若第一次及格则第二次及格的概率也为 p；若第一次不及格则第二次及格的概率为 $p/2$.
    (a) 若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率.
    (b) 若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率.

23. 将两信息分别编码为 A 和 B 传送出去，接收站收到时，A 被误收作 B 的概率为 0.02，而 B 被误收作 A 的概率为 0.01。信息 A 与信息 B 传送的频繁程度为 $2:1$. 若接收站收到的信息是 A，问原发信息是 A 的概率是多少？

24. 有两箱同种类的零件，第一箱装 50 只，其中 10 只一等品；第二箱装 30 只，其中 18 只一等品. 今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样. 求

(a) 第一次取到的零件是一等品的概率.

(b) 在第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率.

25. 某人下午 5:00 下班，他所积累的资料表明：

到家时间	$5:35\sim5:39$	$5:40\sim5:44$	$5:45\sim5:49$	$5:50\sim5:54$	迟于 $5:54$
乘地铁的概率	0.10	0.25	0.45	0.15	0.05
乘汽车的概率	0.30	0.35	0.20	0.10	0.05

某日他抛一枚硬币决定乘地铁还是乘汽车，结果他是 5:47 到家的. 试求他是乘地铁回家的概率.

26. 病树的主人外出，委托邻居浇水. 设已知如果不浇水，树死去的概率为 0.8. 若浇水则树死去的概率为 0.15. 有 0.9 的把握确定邻居会记得浇水.

(a) 求主人回来树还活着的概率.

(b) 若主人回来树已死去，求邻居忘记浇水的概率.

27. 设本题涉及的事件均有意义. 设 A, B 都是事件.

(a) 已知 $P(A) > 0$，证明 $P(AB|A) \geq P(AB|A \cup B)$.

(b) 若 $P(A|B) = 1$，证明 $P(\overline{B}|\overline{A}) = 1$.

(c) 若设 C 也是事件，且有 $P(A|C) \geq P(B|C), P(A|\overline{C}) \geq P(B|\overline{C})$，证明 $P(A) \geq P(B)$.

28. 有两种花籽. 发芽率分别为 0.8，0.9，从中各取一颗，设各花籽是否发芽相互独立. 求

(a) 这两颗花籽都能发芽的概率.

(b) 至少有一颗能发芽的概率.

(c) 恰有一颗能发芽的概率.

29. 根据报道美国人血型的分布近似地为：A 型为 37%，O 型为 44%，B 型为 13%，AB 型为 6%. 夫妻拥有的血型是相互独立的.

(a) B 型的人只有输入 B、O 两种血型才安全. 若妻为 B 型，夫为何种血型未知. 求夫是妻的安全输血者的概率.

(b) 随机地取一对夫妇，求妻为 B 型夫为 A 型的概率.

(c) 随机地取一对夫妇，求其中一人为 A 型，另一人为 B 型的概率.

(d) 随机地取一对夫妇，求其中至少有一人是 O 型的概率.

30. (a) 给出事件 A, B 的例子，使得

    （i）$P(A|B) < P(A)$, （ii）$P(A|B) = P(A)$, （iii）$P(A|B) > P(A)$

    (b) 设事件 A, B, C 相互独立，证明（i）C 与 AB 相互独立.（ii）C 与 $A \cup B$ 相互独立.

    (c) 设事件 A 的概率 $P(A) = 0$，证明对于任意另一事件 B，有 A, B 相互独立.

    (d) 证明事件 A, B 相互独立的充要条件是 $P(A|B) = P(A|\overline{B})$.

31. 设事件 A, B 的概率均大于零说明以下的叙述（1）必然对，（2）必然错，（3）可能对. 并说明理由.

    (a) 若 A 与 B 互不相容，则它们相互独立.

    (b) 若 A 与 B 相互独立，则它们互不相容.

    (c) $P(A) = P(B) = 0.6$ ，且 A, B 互不相容

    (d) $P(A) = P(B) = 0.6$ ，且 A, B 相互独立.

32. 有一种检验艾滋病毒的检验法，其结果有概率 0.005 报导为假阳性（即不带艾滋病毒者，经此检验法有 0.005 的概率被认为带艾滋病毒）. 今有 140 名不带艾滋病毒的正常人全部接受此种检验，被报道至少有一人带艾滋病毒的概率为多少？

33. 盒中有编号为 1,2,3,4 的 4 只球，随机地自盒中取一只球，事件 A 为“取得的是 1 号或 2 号球”，事件 B 为“取得的是 1 号或 3 号球”，事件 C 为“取得的是 1 号或 4 号球”。验证：

$$P(AB) = P(A)P(B), P(AC) = P(A)P(C), P(BC) = P(B)P(C),$$

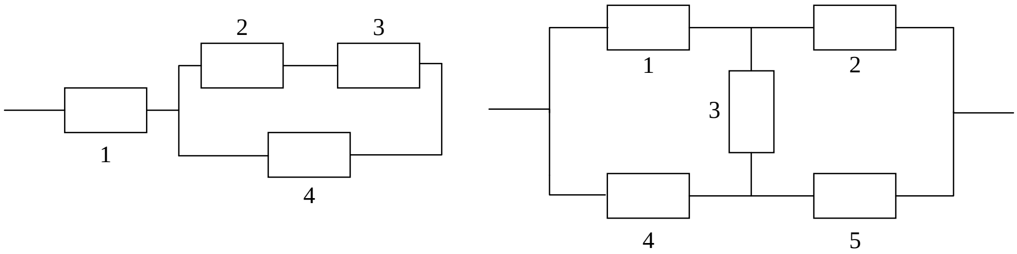
$$\text{但} \quad P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$$

    即事件 A, B, C 两两独立，但 A, B, C 不是相互独立的。

34. 试分别求以下两个系统的可靠性：

    (a) 设有 4 个独立工作的元件 1,2,3,4. 它们的可靠性分别为 p_1, p_2, p_3, p_4，将它们按图 (1) 的方式连接（称为并串联系统）.

    (b) 设有 5 个独立工作的元件 1,2,3,4,5. 它们的可靠性均为 p，将它们按图 (2) 的方式连接（称为桥式系统）.



（1）　　　　　　　　（2）

35. 如果一危险情况 C 发生时，一电路闭合并发出警报，我们可以借用两个或多个开关并联以改善可靠性. 在 C 发生时这些开关每一个都应闭合，且若至少一个开关闭合了，警报就发出. 如果两个这样的开关并联连接，它们每个具有 0.96 的可靠性（即在情况 C 发生时闭合的概率），问这时系统的可靠性（即电路闭合的概率）是多少？如果需要有一个可靠性至少为 0.9999 的系统，则至少需要用多少只开关并联？设各开关闭合与否是相互独立的.

36. 三人独立地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为 $1/5, 1/3, 1/4$. 问三人中至少有一人能将此密码译出的概率是多少？

37. 设第一只盒子中装有 3 只蓝球，2 只绿球，2 只白球；第二只盒子中装有 2 只蓝球，3 只绿球，4 只白球. 独立地分别在两只盒子中各取一只球.

    (a) 求至少有一只蓝球的概率.

    (b) 求有一只蓝球一只白球的概率.

    (c) 已知至少有一只蓝球，求有一只蓝球一只白球的概率.

38. 袋中装有 m 枚正品硬币、n 枚次品硬币（次品硬币的两面均印有国徽），在袋中任取一枚，将它投掷 r 次，已知每次都得到国徽. 问这枚硬币是正品的概率为多少？

39. 设根据以往记录的数据分析，某船只运输的某种物品损坏的情况共有三种：损坏 2%（这一事件记为 A_1），损坏 10%（事件 A_2），损坏 90%（事件 A_3），且知 $P(A_1) = 0.8, P(A_2) = 0.15, P(A_3) = 0.05$ 现在从已被运输的物品中随机地取 3 件. 发现这 3 件都是好的（这一事件记为 B). 试求 $P(A_1|B), P(A_2|B), P(A_3|B)$（这里设物品件数很多，取出一件后不影响取后一件是否为好品的概率).

40. 将 A, B, C 三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为 α，而输出为其他一字母的概率都是 $(1-\alpha)/2$. 今将字母串 AAAA，BBBB，CCCC 之一输入信道，输入 AAAA，BBBB，CCCC 的概率分别为 $p_1, p_2, p_3 (p_1 + p_2 + p_3 = 1)$，已知输出为 ABCA，问输入的是 AAAA 的概率是多少？（设信道传输各个字母的工作是相互独立的.）

2 随机变量及其分布

1. 考虑为期一年的一张保险单，若投保人在投保后一年内因意外死亡，则公司赔付 20 万元，若投保人因其他原因死亡，则公司赔付 5 万元，若投保人在投保期末生存，则公司无需付给任何费用. 若投保人在一年内因意外死亡的概率为 0.0002，因其他原因死亡的概率为 0.0010，求公司赔付金额的分布律.

2. (a) 一袋中装有 5 只球，编号为 1,2,3,4,5。在袋中同时取 3 只，以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码. 写出随机变量 X 的分布律.
   (b) 将一颗骰子抛掷两次，以 X 表示两次中得到的小的点数，试求 X 的分布律.

3. 设在 15 只同类型的零件中有 2 只是次品，在其中取 3 次，每次任取 1 只，作不放回抽样. 以 X 表示取出的次品的只数.
   (a) 求 X 的分布律.
   (b) 画出分布律的图形.

4. 进行重复独立试验，设每次试验的成功概率为 p ，失败概率为 $q = 1 - p, (0 < p < 1)$
   (a) 将试验进行到出现一次成功为止，以 X 表示所需的试验次数，求 X 的分布律.（此时称 X 服从以 p 为参数的**几何分布**.）
   (b) 将试验进行到出现 r 次成功为止，以 Y 表示所需的试验次数，求 Y 的分布律.（此时称 Y 服从以 r, p 为参数的**巴斯卡分布**或**负二项分布**.）
   (c) 一篮球运动员的投篮命中率为 45%. 以 X 表示他首次投中时累计已投篮的次数. 写出 X 的分布律，并计算 X 取偶数的概率.

5. 一房间有 3 扇同样大小的窗子. 其中只有一扇是打开的。有一只鸟自开着的窗子飞入了房间，它只能从开着的窗子飞出去. 鸟在房子里飞来飞去，试图飞出房间. 假定鸟是没有记忆的，它飞向各扇窗子是随机的.
   (a) 以 X 表示鸟为了飞出房间试飞的次数，求 X 的分布律.
   (b) 户主声称，他养的一只鸟是有记忆的，它飞向任一窗子的尝试不多于一次。以 Y 表示这只聪明的鸟为了飞出房间试飞的次数. 如户主所说是确实的，试求 Y 的分布律.
   (c) 求试飞次数 X 小于 Y 的概率和试飞次数 Y 小于 X 的概率.

6. 一大楼装有 5 台同类型的供水设备. 设各台设备是否被使用相互独立. 调查表明在任一时刻 t 每台设备被使用的概率为 0.1，问在同一时刻，

(a) 恰有 2 台设备被使用的概率是多少？

(b) 至少有 3 台设备被使用的概率是多少？

(c) 至多有 3 台设备被使用的概率是多少？

(d) 至少有 1 台设备被使用的概率是多少？

7. 设事件 A 在每次试验发生的概率为 0.3。A 发生不少于 3 次时，指示灯发出信号.

   (a) 进行了 5 次重复独立试验，求指示灯发出信号的概率.

   (b) 进行了 7 次重复独立试验，求指示灯发出信号的概率.

8. 甲、乙两人投篮，投中的概率分别为 0.6,0.7．今各投 3 次．求

   (a) 两人投中次数相等的概率；

   (b) 甲比乙投中次数多的概率.

9. 有一大批产品，其验收方案如下，先作第一次检验：从中任取 10 件，经检验无次品接受这批产品，次品数大于 2 拒收；否则作第二次检验，其做法是从中再任取 5 件，仅当 5 件中无次品时接受这批产品．若产品的次品率为 10%，求

   (a) 这批产品经第一次检验就能接受的概率.

   (b) 需作第二次检验的概率.

   (c) 这批产品按第二次检验的标准被接受的概率.

   (d) 这批产品在第一次检验未能作决定且第二次检验时被通过的概率.

   (e) 这批产品被接受的概率.

10. 有甲、乙两种味道和颜色都极为相似的名酒各 4 杯．如果从中挑 4 杯，能将甲种酒全部挑出来，算是试验成功一次.

    (a) 某人随机地去猜，问他试验成功一次的概率是多少？

    (b) 某人声称他通过品尝能区分两种酒，他连续试验 10 次，成功 3 次。试推断他是猜对的，还是他确有区分的能力（设各次试验是相互独立的）。

11. 尽管在几何教科书中已经讲过仅用圆规和直尺三等分一个任意角是不可能的，但每一年总是有一些“发明者”撰写关于仅用圆规和直尺将角三等分的文章．设某地区每年撰写此类文章的篇数 X 服从参数为 6 的泊松分布．求明年没有此类文章的概率。

12. 一电话总机每分钟收到呼唤的次数服从参数为 4 的泊松分布．求

(a) 某一分钟恰有 8 次呼唤的概率；

(b) 某一分钟的呼唤次数大于 3 的概率.

13. 某一公安局在长度为 t 的时间间隔内收到的紧急呼救的次数 X 服从参数为 $(1/2)t$ 的泊松分布. 而与时间间隔的起点无关（时间以小时计）.

    (a) 求某一天中午 12 时至下午 3 时未收到紧急呼救的概率.

    (b) 求某一天中午 12 时至下午 5 时至少收到 1 次紧急呼救的慨率.

14. 某人家中在时间间隔 t（小时）内接到电话的次数 X 服从参数为 $2t$ 的泊松分布

    (a) 若他外出计划用时 10 分钟，问其间有电话铃响一次的概率是多少？

    (b) 若他希望外出时没有电话的概率至少为 0.5，问他外出应控制最长时间是多少？

15. 保险公司在一天内承保了 5000 张相同年龄，为期一年的寿险保单，每人一份。在合同有效期内若投保人死亡，则公司需赔付 3 万元. 设在一年内，该年龄段的死亡率为 0.0015，且各投保人是否死亡相互独立. 求该公司对于这批投保人的赔付总额不超过 30 万元的概率（利用泊松定理计算）.

16. 有一繁忙的汽车站，每天有大量汽车通过，设一辆汽车在一天的某段时间内出事故的概率为 0.0001. 在某天的该时间段内有 1000 辆汽车通过. 问出事故的车辆数不小于 2 的概率是多少？（利用泊松定理计算）

17. (a) 设 X 服从 $(0-1)$ 分布，其分布律为 $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1$，求 X 的分布函数. 并作出其图形.

    (b) 求第 2 题（1）中的随机变量的分布函数.

18. 在区间 $[0,a]$ 上任意投掷一个质点，以 X 表示这个质点的坐标. 设这个质点落在 $[0,a]$ 中任意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比例。试求 X 的分布函数.

19. 以 X 表示某商店从早晨开始营业起直到第一个顾客到达的等待时间（以分计），X 的分布函数是

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-0.4x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

    求下列概率：

    (a) $P\{$至多 3 分钟$\}$

    (b) $P\{$至少 4 分钟$\}$

(c) $P\{3$ 分钟至四分钟之间$\}$

(d) $P\{$至多 3 分钟或至少 4 分钟$\}$

(e) $P\{$恰好 2.5 分钟$\}$

20. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \ln x, & 1 \le x < e \\ 1, & x \ge e \end{cases}$$

(a) 求 $P\{X < 2\}, P\{0 < X \le 3\}, P\{2 < X < 5/2\}$

(b) 求概率密度 $f_X(x)$

21. 设随机变量 X 的概率密度为

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 2(1 - \frac{1}{x^2}), & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 X 的分布函数 $F(x)$，并画出（2）中的 $f(x)$ 及 $F(x)$ 的图形。

22. (a) 分子运动速度的绝对值 X 服从麦克斯韦分布，其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2 e^{-x^2/b}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $b = m/(2kT)$，k 为玻尔兹曼常数，T 为绝对温度，m 是分子的质量，试确定常数 A。

(b) 研究了英格兰在 1875 年～1951 年期间，在矿山发生导致不少 10 人死亡的事故的频繁程度. 得知相继两次事故之间的时间 T（日）服从指数分布，其概率密度为

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{241} e^{-t/241}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求分布函数 $F_T(t)$，并求概率 $P\{50 < T < 100\}$.

23. 某种型号器件的寿命 X（以小时计）具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1000}{x^2}, & x > 1000 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

现有一大批此种器件（设各器件损坏与否相互独立），任取 5 只，问其中至少有 2 只寿命大于 l500 小时的概率是多少？

24. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（min）服从指数分布，其概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}e^{-x/5}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务。若超过 10min，他就离开。他一个月要到银行 5 次．以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数．写出 Y 的分布律．并求 $P\{Y \geq 1\}$.

25. 设 K 在 (0,5) 服从均匀分布，求 x 的方程

$$4x^2 + 4Kx + K + 2 = 0$$

有实根的概率。

26. 设 $X \sim N(3, 2^2)$

(a) 求 $P\{2 < X \leq 5\}, P\{-4 < X \leq 10\}, P\{|X| > 2\}, P\{X > 3\}$.

(b) 确定 c，使得 $P\{X > c\} = P\{X \leq c\}$.

(c) 设 d 满足 $P\{X > d\} \geq 0.9$，问 d 至少为多少？

27. 某地区 18 岁的女青年的血压（收缩压, 以 mmHg 计）服从 $N(110, 12^2)$ 分布．在该地区任选一 18 岁的女青年，测量她的血压 X。求

(a) $P\{X \leq 105\}, P\{100 < X \leq 120\}$；

(b) 确定最小的 x，使 $P\{X > x\} \leq 0.05$。

28. 由某机器生产的螺栓的长度（cm）的服从参数 $\mu = 10.05, \sigma = 0.06$ 的正态分布．规定长度在范围 10.05 ± 0.12 内为合格品，求一螺栓为不合格品的概率．

29. 一工厂生产的某种元件的寿命 X（以小时计）服从参数为 $\mu = 160, \sigma(\sigma > 0)$ 的正态分布。若要求 $P\{120 < X \leq 200\} \geq 0.80$，允许 σ 最大为多少？

30. 设在一电路中，电阻两端的电压（V）服从 $N(120, 2^2)$，今独立测量了 5 次，试确定有 2 次测定值落在区间 $[118, 122]$ 之外的概率。

31. 某人上班，自家里去办公楼要经过一交通指示灯，这一指示灯有 80% 时间亮红灯，此时他在指示灯旁等待直至绿灯亮，等待时间在区间 $[0, 30]$（以秒计）服从均匀分布. 以 X 表示他的等待时间，求 X 的分布函数 $F(x)$. 画出 $F(x)$ 的图形，并问 X 是否为连续型随机变量，是否为离散型的？（要说明理由）

32. 设 $f(x), g(x)$ 都是概率密度函数，求证

$$h(x) = af(x) + (1-\alpha)g(x), \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

也是一个概率密度函数.

33. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	3
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求 $Y = X^2$ 的分布律。

34. 设随机变量 X 在区间 (0,1) 服从均匀分布.

    (a) 求 $Y = e^X$ 的概率密度；

    (b) 求 $Y = -2\ln X$ 的概率密度。

35. 设 $X \sim N(0, 1)$.

    (a) 求 $Y = e^X$ 的概率密度.

    (b) 求 $Y = 2X^2 + 1$ 的概率密度.

    (c) 求 $Y = |X|$ 的概率密度.

36. (a) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x), -\infty < x < \infty$. 求 $Y = X^3$ 的概率密度

(b) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Y=X^2$ 的概率密度。

37. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(X)=\begin{cases} \dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度。

38. 设电流 I 是一个随机变量，它均匀分布在 9A$\sim$11A 之间. 若此电流通过 2Ω 的电阻，在其上消耗的功率 $W=2I^2$。求 W 的概率密度。

39. 某物体的温度 $T(^\circ\mathrm{F})$ 是随机变量，且有 $T\sim N(98.6,2)$，已知 $\varTheta=\dfrac{5}{9}(T-32)$，试求 $\varTheta(^\circ\mathrm{C})$ 的概率密度.

3　多维随机变量及其分布

1. 在一箱子中装有 12 只开关，其中 2 只是次品，在其中取两次．每次任取一只，考虑两种试验：（1）放回抽样；（2）不放回抽样．我们定义随机变量 X,Y 如下：

$$X=\begin{cases}0, & \text{若第一次取出的是正品}\\ 1, & \text{若第一次取出的是次品}\end{cases}\quad Y=\begin{cases}0, & \text{若第二次取出的是正品}\\ 1, & \text{若第二次取出的是次品}\end{cases}$$

试分别就（1）、（2）两种情况，写出 X 和 Y 的联合分布律．

2. (a) 盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球，在其中任取 4 只球．以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到红球的只数．求 X 和 Y 的联合分布律．

   (b) 在（1）中求 $P\{X>Y\},P\{Y=2X\},P\{X+Y=3\},P\{X<3-Y\}$.

3. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0<x<2,2<y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

   (a) 确定常数 k.

   (b) 求 $P\{X<1,Y<3\}$.

   (c) 求 $P\{X<1.5\}$.

   (d) 求 $P\{X+Y\leq 4\}$.

4. 设 X,Y 都是非负的连续型随机变量，它们相互独立．

   (a) 证明

$$P\{X<Y\}=\int_0^\infty F_X(x)f_Y(x)\mathrm{d}x$$

   其中 $F_X(x)$ 是 X 的分布函数，$f_Y(y)$ 是 Y 的概率密度．

   (b) 设 X,Y 相互独立．其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

   求 $P\{X<Y\}$.

5. 设随机变量 (X,Y) 具有分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases} 1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y}, & x>0,y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求边缘分布函数.

6. 将一枚硬币掷 3 次，以 X 表示前 2 次中出现 H 的次数，以 Y 表示 3 次中出现 H 的次数．求 X,Y 的联合分布律以及 (X,Y) 的边缘分布律．

7. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 4.8y(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求边缘概率密度.

8. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求边缘概率密度.

9. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cx^2y, & x^2\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

   (a) 确定常数 c；

   (b) 求边缘概率密度.

10. 将某一医药公司 8 月份和 9 月份收到的青霉素针剂的订货单数分别记为 X 和 Y，据以往积累的资料知 X 和 Y 的联合分布律为

$Y \backslash X$	51	52	53	54	55
51	0.06	0.05	0.05	0.01	0.01
52	0.07	0.05	0.01	0.01	0.01
53	0.05	0.10	0.10	0.05	0.05
54	0.05	0.02	0.01	0.01	0.03
55	0.05	0.06	0.05	0.01	0.03

(a) 求边缘分布律.

(b) 求 8 月份的订单数为 51 时，9 月份订单数的条件分布律.

11. 以 X 记某医院一天出生的婴儿的个数，Y 记其中男婴的个数．设 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=n,Y=m\}=\frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!},$$
$$m=0,1,2,\cdots,n;\quad n=0,1,2,\cdots$$

(a) 求边缘分布律.

(b) 求条件分布律.

(c) 特别地，写出当 $X=20$ 时，Y 的条件分布律.

12. 设随机变量 X 在 1,2,3,4 四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值。求条件分布律 $P\{Y=k|X=i\}$。

13. 在第 9 题中

(a) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$．特别地，写出当 $Y=\dfrac{1}{2}$ 时 X 的条件概率密度.

(b) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$．特别地，写出当 $X=\dfrac{1}{3},X=\dfrac{1}{2}$ 时 Y 的条件概率密度.

(c) 求条件概率

$$P\left\{Y\geq\frac{1}{4}\middle|X=\frac{1}{2}\right\},\quad P\left\{Y\geq\frac{3}{4}\middle|X=\frac{1}{2}\right\}$$

14. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x),f_{X|Y}(x|y)$.

15. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$，当给定 $X=x$ 时，随机变量 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}x, & 0<y<\dfrac{1}{x}\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

(a) 求 X 和 Y 的联合概率密度 $f(x,y)$.

(b) 求边缘密度 $f_Y(y)$，并画出它的图形.

(c) 求 $P\{X>Y\}$.

16. (a) 问第 1 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立？

(b) 问第 14 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立（需说明理由)？

17. (a) 设随机变量 (X,Y) 具有分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-\alpha x})y, & x\geq 0, 0\leq y\leq 1,\\ 1-e^{-\alpha x}, & x\geq 0, y>1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad \alpha>0$$

证明 X,Y 相互独立.

(b) 设随机变量 (X,Y) 具有分布律

$$P\{X=x,Y=y\}=p^2(1-p)^{x+y-2}, 0<p<1, x,y\text{均为正整数}$$

问 X,Y 是否相互独立。

18. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y/2}, & y>0\\ 0, & y\leq 0\end{cases}$$

(a) 求 X 和 Y 的联合概率密度。

(b) 设有 a 的二元一次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$，试求 a 有实根的概率。

19. 进行打靶，设弹着点 $A(X,Y)$ 的坐标 X 和 Y 相互独立，且都服从 $N(0,1)$ 分布，规定

$$\text{点}A\text{落在区域}D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}\text{得2分}$$
$$\text{点}A\text{落在区域}D_2=\{(x,y)|1<x^2+y^2\leq 4\}\text{得1分}$$
$$\text{点}A\text{落在区域}D_3=\{(x,y)|x^2+y^2>4\}\text{得0分}$$

以 Z 记打靶的得分．写出 X,Y 的联合概率密度，并求 Z 的分布律.

20. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\mu e^{-\mu y}, & y<0,\\ 0, & y\leq 0\end{cases}$$

其中 $\lambda > 0, \mu > 0$ 是常数。引入随机变量

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{当} X \le Y, \\ 0, & \text{当} X > Y \end{cases}$$

(a) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

(b) 求 Z 的分布律和分布函数.

21. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

分别求（1）$Z = X + Y$，（2）$Z = XY$ 的概率密度

22. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度。

23. 某种商品一周的需求量是一个随机变量．其概率密度为

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

设各周的需求量是相互独立的。求（1）两周，（2）三周的需求量的概率密度.

24. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(x + y)e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(a) 问 X 和 Y 是否相互独立

(b) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度

25. 设随机变量 X, Y 相互独立，且具有相同的分布，它们的概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x}, & x > 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Z = X + Y$ 的概率密度

26. 设随机变量 X, Y 相互独立，它们的概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Z = Y/X$ 的概率密度

27. 设随机变量 X, Y 相互独立，它们都在区间 (0,1) 上服从均匀分布，A 是以 X, Y 为边长的矩形的面积，求 A 的概率密度.

28. 设 X, Y 是相互独立的随机变量．它们都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$. 试验证随机变量 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\sigma^2} e^{-z^2/(2\sigma^2)}, & z \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

我们称 Z 服从参数为 $\sigma(\sigma > 0)$ 的瑞利分布.

29. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0 < x < 1, 0 < y < \infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

   (a) 试确定常数 b.
   (b) 求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.
   (c) 求函数 $U = \max\{X, Y\}$.

30. 设某种型号的电子元件的寿命（以小时计）近似地服从正态分布 $N(160, 20^2)$．随机地选取 4 只，求其中没有一只寿命小于 180 的概率.

31. 对某种电子装置的输出测量了 5 次．得到结果为 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5. 设它们是相互独立的随机变量且都服从参数 $\sigma = 2$ 的瑞利分布.

(a) 求 $Z=\max\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$ 的分布函数

(b) 求 $P\{Z>4\}$

32. 设随机变量 X,Y 相互独立，且服从同一分布，试证明；

$$P\{a<\min\{X,Y\}\le b\}=[P\{X>a\}]^2-[P\{X>b\}]^2 \quad (a\le b)$$

33. 设 X,Y 是相互独立的随机变量．其分布律分别为

$$P\{X=k\}=p(k), \quad k=0,1,2,\cdots,$$

$$P\{Y=r\}=q(r), \quad r=0,1,2,\cdots.$$

证明随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律为

$$P\{Z=i\}=\sum_{k=0}^{i}p(k)q(i-k), \quad i=0,1,2,\cdots$$

34. 设 X,Y 是相互独立的随机变量，$X\sim\pi(\lambda_1),Y\sim\pi(\lambda_2)$. 证明 $Z=X+Y\sim\pi(\lambda_1+\lambda_2)$

35. 设 X,Y 是相互独立的随机变量，$X\sim b(n_1,p),Y\sim b(n_2,p)$. 证明 $Z=X+Y\sim b(n_1+n_2,p)$

36. 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

(a) 求 $P\{X=2|Y=2\},P\{Y=3|X=0\}$

(b) 求 $V=\max\{X,Y\}$ 的分布律

(c) 求 $U=\min\{X,Y\}$ 的分布律

(d) 求 $W=X+Y$ 的分布律

4 随机变量的数字特征

1. (a) 在下列句子中随机地取一个单词，以 X 表示取到的单词所包含的字母个数，写出 X 的分布律，并求 $E(X)$

“THE GIRL PUT ON HER BEAUTIFUL RED HAT.”

(b) 在上述句子的 30 个字母中随机地取一个字母，以 Y 表示取到的字母所在单词所包含的字母数．写出 Y 的分布律并求 $E(Y)$．

(c) 一人掷骰子，如得 6 点则掷第 2 次．此时得分为 6 + 第二次得到的点数；否则得分为他第一次掷得的点数，且不能再掷．求得分 X 的分布律及 $E(X)$．

2. 某产品的次品率为 0.1，检验员每天检验 4 次．每次随机地取 10 件产品进行检验，如发现其中的次品数多于 1，就去调整设备．以 X 表示一天中调整设备的次数，试求 $E(X)$ ．（设诸产品是否为次品是相互独立的.）

3. 有 3 只球，4 个盒子，盒子的编号为 1,2,3,4. 将球逐个独立地, 随机地放入 4 个盒子中去．以 X 表示其中至少有一只球的盒子的最小号码（例如 $X=3$ 表示第 1 号，第 2 号盒子是空的，第 3 个盒子至少有一只球），试求 $E(X)$.

4. (a) 设随机变量 X 的分布律为 $P\left\{X=(-1)^{j+1}\frac{3^j}{j}\right\}=\frac{2}{3^j}, j=1,2,\cdots$，说明 X 的数学期望不存在.

(b) 一盒中装有一只黑球，一只白球，作摸球游戏，规则如下：一次从盒中随机摸一只球，若摸到白球．则游戏结束，摸到黑球放回再放入一只黑球，然后再从盒中随机地摸一只球．试说明要游戏结束的摸球次数 X 的数学期望不存在.

5. 设在某一规定的时间间隔里，某电气设备用于最大负荷的时间 X（以 min 计）是一个随机变量，其概率密度为

$$f(x)\begin{cases}\dfrac{1}{1500^2}x, & 0\le x\le 1500,\\ -\dfrac{1}{1500^2}(x-3000), & 1500<x\le 3000,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X)$.

6. (a) 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
p_k	0.4	0.3	0.3

求 $E(X), E(X^2), E(3X^2+5)$.

(b) 设 $X \sim \pi(\lambda)$，求 $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

7. (a) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

求（i）$Y=2X$，（ii）$Y=e^{-2X}$ 的数学期望

(b) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布（i）求 $U=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的数学期望，（ii）求 $V=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的数学期望

8. 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0.0
0	0.1	0.0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

(a) 求 $E(X), E(Y)$.

(b) 设 $Z=Y/X$，求 $E(Z)$.

(c) 设 $Z=(X-Y)^2$，求 $E(Z)$.

9. (a) 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 12y^2, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), E(XY), E(X^2+Y^2)$.

(b) 设随机变量 X,Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y}e^{-(y+x/y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), E(XY)$.

10. (a) 设随机变量 $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$ 且 X,Y 相互独立．求 $E[X^2/(X^2+Y^2)]$.

(b) 一飞机进行空投物资作业，设目标点为原点 $O(0,0)$，物资着陆点为 (X,Y)，X,Y 相互独立，且设 $X\sim N(0,\sigma^2),Y\sim N(0,\sigma^2)$，求原点到点 (X,Y) 间距离的数学期望.

11. 一工厂生产的某种设备的寿命 X（以年计）服从指数分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}e^{-x/4}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

工厂规定，出售的设备若在售出一年之内损坏可予以调换．若工厂售出一台设备赢利 100 元，调换一台设备厂方需花费 300 元．试求厂方出售一台设备净赢利的数学期望.

12. 某车间生产的圆盘直径在区间 (a,b) 服从均匀分布. 试求圆盘面积的数学期望.

13. 设电压（以 V 计）$X\sim N(0,9)$．将电压施加于一检波器，其输出电压为 $Y=5X^2$．求输出电压 Y 的均值.

14. 设随机变量 X_1,X_2 的概率密度分别为

$$f_1(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

(a) 求 $E(X_1+X_2),E(2X_1-3X_2^2)$.

(b) 又设 X_1,X_2 相互独立，求 $E(X_1X_2)$.

15. 将 n 只球（$1\sim n$ 号）随机地放进 n 个盒子（$1\sim n$ 号）中去，一个盒子装一只球．若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对. 记 X 为总的配对数，求 $E(X)$.

16. 若有 n 把看上去样子相同的钥匙. 其中只有一把能打开门上的锁. 用它们去试开门上的锁. 设取到每只钥匙是等可能的．若每把钥匙试开一次后除去，试用下面两种方法求试开次数 X 的数学期望.

(a) 写出 X 的分布律.

(b) 不写出 X 的分布律.

17. 设 X 为随机变量，C 是常数，证明 $D(X)<E[(X-C)^2]$，对于 $C\neq E(X)$．（由于 $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$，上式表明 $E[(X-C)^2]$ 当 $C=E(X)$ 时取到最小值.）

18. 设随机变量 X 服从瑞利分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\[2ex] 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中 $\sigma>0$ 是常数，求 $E(X),D(X)$.

19. 设随机变量 X 服从 Γ 分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}, & x>0\\[2ex] 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>0$ 是常数，求 $E(X),D(X)$.

20. 设随机变量 X 服从几何分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots,$$

其中 $0<p<1$ 是常数，求 $E(X),D(X)$.

21. 设长方形的高（以 m 计）$X\sim U(0,2)$，已知长方形的周长（以 m 计）为 20，求长方形面积 A 的数学期望和方差.

22. (a) 设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立，且有 $E(X_i)=i,D(X_i)=5-i,i=1,2,3,4$. 设 $Y=2X_1-X_2+3X_3-\dfrac{1}{2}X_4$. 求 $E(Y),D(Y)$.

    (b) 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(720,30^2),Y\sim N(640,25^2)$，求 $Z_1=2X+Y,Z_2=X-Y$ 的分布，并求概率 $P\{X>Y\},P\{X+Y>1400\}$.

23. 五家商店联营,它们每两周售出的某种农产品的数量(以 kg 计)分别为 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5. 已知 $X_1\sim N(200,225),X_2\sim N(240,240),X_3\sim N(180,225),X_4\sim N(260,265),X_5\sim N(320,270)$，$X_1,X_2,X_3,X_4,X_5$ 相互独立.

    (a) 求五家商店两周的总销售量的均值和方差.

    (b) 商店每隔两周进货一次，为了使新的供货到达前商店不会脱销的概率大于 0.99. 问商店的仓库应至少储存多少千克该产品？

24. 卡车装运水泥，设每袋水泥重量 X（以 kg 计）服从 $N(50,2.5^2)$，问最多装多少袋水泥使总重量超过 2000 的概率不大于 0.05.

25. 设随机变量 X,Y 相互独立. 且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布.

(a) 求 $E(XY), E(X/Y), E[\ln(XY)], E[|Y-X|]$.

(b) 以 X, Y 为边长作一长方形，以 A, C 分别表示长方形的面积和周长，求 A 和 C 的相关系数.

26. (a) 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立，且有 $X_1 \sim b(4, 1/2), X_2 \sim b(6, 1/3), X_3 \sim b(6, 1/3)$，求 $P\{X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 5\}, E(X_1X_2X_3), E(X_1 - X_2), E(X_1 - 2X_2)$.

(b) 设 X, Y 是随机变量，且有 $E(X) = 3, E(Y) = 1, D(X) = 4, D(Y) = 9$，令 $Z = 5X - Y + 15$，分别在下列 3 种情况下求 $E(Z)$ 和 $D(Z)$.

（i）X, Y 相互独立，（ii）X, Y 不相关，（iii）X 和 Y 的相关系数为 0.25.

27. 下列各对随机变量 X 和 Y，问哪几对是相互独立的？哪几对是不相关的.

(a) $X \sim U(0,1), Y = X^2$

(b) $X \sim U(-1,1), Y = X^2$

(c) $X = \cos V, Y = \sin V, V \sim U(0, 2\pi)$

若 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$.

(d)

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(e)

$$f(x,y) = \begin{cases} 2y, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

28. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的.

29. 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/8$	$1/8$
0	$1/8$	0	$1/8$
1	$1/8$	$1/8$	$1/8$

验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的.

30. 设 A 和 B 是试验 E 的两个事件，且 $P(A)>0, P(B)>0$，并定义随机变量 X, Y 如下：

$$X=\begin{cases}1, & 若A发生\\ 0, & 若A不发生\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & 若B发生\\ 0, & 若B不发生\end{cases}$$

证明若 $\rho_{XY}=0$，则 X 和 Y 必定相互独立。

31. 设随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), \mathrm{Cov}(X,Y)$.

32. 设随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\\ 0, & \qquad 其他\end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), \mathrm{Cov}(X,Y), \rho_{XY}, D(X+Y)$.

33. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2), Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且设 X,Y 相互独立，试求 $Z_1=\alpha X+\beta Y$ 和 $Z_2=\alpha X-\beta Y$ 的相关系数（其中 α,β 是不为零的常数）.

34. (a) 设随机变量 $W=(aX+3Y)^2, E(X)=E(Y)=0, D(X)=4, D(Y)=16, \rho_{XY}=-0.5$. 求常数 a 使 $E(W)$ 为最小，并求 $E(W)$ 的最小值。

    (b) 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且有 $D(X)=\sigma_X^2, D(Y)=\sigma_Y^2$. 证明当 $a^2=\sigma_X^2/\sigma_Y^2$ 时，随机变量 $W=X-aY$ 与 $V=X+aY$ 相互独立。

35. 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 $X\sim N(0,3), Y\sim N(0,4)$，相关系数 $\rho_{XY}=-1/4$，试写出 X 和 Y 的联合概率密度.

36. 已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是 7300，均方差是 700. 利用切比雪夫不等式估计每毫升含白细胞数在 $5200\sim 9400$ 之间的概率 p.

37. 对于两个随机变量 V,W，若 $E(V^2), E(W^2)$ 存在，证明

$$[E(VW)]^2\le E(V^2)E(W^2)$$

这一不等式称为柯西-施瓦茨不等式

提示：考虑实变量 t 的函数

$$q(t) = E[(V + tW)^2] = E(V^2) + 2tE(VW) + t^2E(W^2)$$

5　大数定律及中心极限定理

1. 据以往经验，某种电器元件的寿命服从均值为 100 h 的指数分布．现随机地取 16 只，设它们的寿命是相互独立的，求这 16 只元件的寿命的总和大于 1920 h 的概率．

2. (a) 一保险公司有 10000 个汽车投保人，每个投保人索赔金额的数学期望为 280 美元，标准差为 800 美元．求索赔总金额超过 2700000 美元的概率．

   (b) 一公司有 50 张签约保险单．各张保险单的索赔金额为 $X_i, i=1,2,\cdots,50$（以千美元计）服从韦布尔分布，均值 $E(X_i)=5$，方差 $D(X_i)=6$，求 50 张保险单索赔的合计金额大于 300 的概率（设各保险单索赔金额是相互独立的）．

3. 计算器在进行加法时，将每个加数舍入最靠近它的整数，设所有舍入误差相互独立且在 $(-0.5, 0.5)$ 上服从均匀分布

   (a) 将 1500 个数相加，问误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少？

   (b) 最多可有几个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90？

4. 设各零件的重量都是随机变量，它们相互独立，且服从相同的分布，其数学期望为 0.5 kg，均方差为 0.1 kg，问 5000 只零件的总重量超过 2510 kg 的概率是多少？

5. 有一批建筑房屋用的木柱，其中 80% 的长度不小于 3 m，现从这批木柱中随机地取 100 根，求其中至少有 30 根短于 3 m 的概率．

6. 一工人修理一台机器需两个阶段，第一阶段所需时间（小时）服从均值为 0.2 的指数分布，第二阶段所需时间服从均值为 0.3 的指数分布，且与第一阶段独立。现有 20 台机器需要修理，求他在 8h 内完成的概率．

7. 一食品店有三种蛋糕出售，由于售出哪一种蛋糕是随机的．因而售出一只蛋糕的价格是一个随机变量，它取 1 元、1.2 元、1.5 元各个值的概率分别为 0.3、0.2、0.5. 若售出 300 只蛋糕．

   (a) 求收入至少 400 元的概率．

   (b) 求售出价格为 1.2 元的蛋糕多于 60 只的概率．

8. 一复杂的系统由 100 个相互独立起作用的部件所组成，在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10．为了使整个系统起作用，至少必须有 85 个部件正常工作，求整个系统起作用的概率．

9. 已知在某十字路口，一周事故发生数的数学期望为 2.2．标准差为 1.4

(a) 以 $\overline{X}$ 表示一年（以 52 周计）此十字路口事故发生数的算术平均，试用中心极限定理求 $\overline{X}$ 的近似分布，并求 $P\{\overline{X} < 2\}$.

(b) 求一年事故发生数小于 100 的概率.

10. 某种小汽车氧化氮的排放量的数学期望为 0.9 g/km，标准差为 1.9 g/km. 某汽车公司有这种小汽车 100 辆. 以 $\overline{X}$ 表示这些车辆氧化氮排放量的算术平均，问当 L 为何值时 $\overline{X} > L$ 的概率不超过 0.01.

11. 随机地选取两组学生，每组 80 人，分别在两个实验室里测量某种化合物的 pH 值。各人测量的结果是随机变量，它们相互独立，服从同一分布，数学期望为 5，方差为 0.3. 以 $\overline{X}, \overline{Y}$ 分别表示第一组和第二组所得结果的算术平均.

(a) 求 $P\{4.9 < \overline{X} < 5.1\}$.

(b) 求 $P\{-0.1 < \overline{X} - \overline{Y} < 0.1\}$

12. 一公寓有 200 户住户. 一户住户拥有汽车辆数 X 的分布律为

X	0	1	2
p_k	0.1	0.6	0.3

问需要多少车位，才能使每辆汽车都具有一个车位的概率至少为 0.95.

13. 某种电子器件的寿命（小时）具有数学期望 μ（未知），方差 $\sigma^2 = 400$. 为了估计 μ，随机地取 n 只这种器件，在时刻 $t = 0$ 投入测试（测试是相互独立的）直到失效，测得其寿命为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，以 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 作为 μ 的估计，为使 $P\{|\overline{X} - \mu| < 1\} \geq 0.95$，问 n 至少为多少？

14. 某药厂断言，该厂生产的某种药品对于医治一种疑难血液病的治愈率为 0.8 . 医院任意抽查 100 个服用此药品的病人，若其中多于 75 人治愈，就接受此断言. 否则就拒绝此断言.

(a) 若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8，问接受这一断言的概率是多少？

(b) 若实际上此药品对这种疾病的治愈率为 0.7，问接受这一断言的概率是多少？

6 样本及抽样分布

1. 在总体 $N(52, 6.3^2)$ 中随机抽取一容量为 36 的样本，求样本均值 $\overline{X}$ 落在 50.8 到 53.8 之间的概率。

2. 在总体 $N(12, 4)$ 中随机抽一容量为 5 的样本 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5.

   (a) 求样本均值与总体均值之差的绝对值大于 1 的概率.

   (b) 求概率 $P\{\max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} > 15\}, P\{\min\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} < 10\}$.

3. 求总体 $N(20, 3)$ 的容量分别为 10,15 的两独立样本均值差的绝对值大于 0.3 的概率.

4. (a) 设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_6$ 来自总体 $N(0,1), Y = (X_1 + X_2 + X_3)^2 + (X_4 + X_5 + X_6)^2$，试确定常数 C 使 CY 服从 χ^2 分布.

   (b) 设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_5$ 来自总体 $N(0,1), Y = \dfrac{C(X_1 + X_2)}{(X_3^2 + X_4^2 + X_5^2)^{1/2}}$，试确定常数 C 使 Y 服从 t 分布.

   (c) 已知 $X \sim t(n)$，求证 $X^2 \sim F(1, n)$.

5. (a) 已知某种能力测试的得分服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 随机取 10 个人参与这一测试. 求他们得分的联合概率密度，并求这 10 个人得分的平均值小于 μ 的概率.

   (b) 在（1）中设 $\mu = 62, \sigma^2 = 25$，若得分超过 70 就能得奖，求至少有一人得奖的概率.

6. 设总体 $X \sim b(1, p), X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的样本

   (a) 求 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布律.

   (b) 求 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的分布律.

   (c) 求 $E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(S^2)$.

7. 设总体 $X \sim \chi^2(n), X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自 X 的样本，求 $E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(S^2)$.

8. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自 X 的样本.

   (a) 写出 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 的联合概率密度.

   (b) 写出 $\overline{X}$ 的概率密度.

9. 设在总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽得一容量为 16 的样本，这里 μ, σ^2 均未知.

   (a) 求 $P\{S^2/\sigma^2 \leq 2.041\}$，其中 S^2 为样本方差.

   (b) 求 $D(S^2)$.

10. 下面列出了 30 个美国 NBA 球员的体重（以磅计，1磅 $= 0.454$kg) 数据．这些数据是从美国 NBA 球队 1990 – 1991 赛季的花名册中抽样得到的．

225	232	232	245	235	245	270	225	240	240
217	195	225	185	200	220	200	210	271	240
220	230	215	252	225	220	206	185	227	236

(a) 画出这些数据的频率直方图（提示：最大和最小观察值分别为 271 和 185，区间 $[184.5, 271.5]$ 包含所有数据，将整个区间分为 5 等份，为计算方便．将区间调整为 $(179.5, 279.5)$.

(b) 作出这些数据的箱线图.

11. **截尾数据**　设数据集包含 n 个数据，将这些数据自小到大排序为

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$$

删去 $100\alpha\%$ 个数值小的数，同时删去 $100\alpha\%$ 个数值大的数，将留下的数据取算术平均，记为 $\overline{x}_\alpha$，即

$$\overline{x}_\alpha = \frac{x_{([n\alpha]+1)} + \cdots + x_{(n-[n\alpha])}}{n - 2[n\alpha]}$$

其中 $[n\alpha]$ 是小于或等于 $n\alpha$ 的最大整数（一般取 α 为 $0.1 \sim 0.2$）.$\overline{x}_\alpha$ 称为 $100\alpha\%$ 截尾均值。例如对于第 10 题中的数据，取 $\alpha = 0.1$，则有 $[n\alpha] = [30 \times 0.1] = 3$，得 $100 \times 0.1\%$ 截尾均值

$$\overline{x}_\alpha = \frac{200 + 200 + \cdots + 245 + 245}{30 - 6} = 225.4167$$

若数据来自某一总体的样本，则 $\overline{x}_\alpha$ 是一个统计量．$\overline{x}_\alpha$ 不受样本的极端值的影响．截尾均值在实际应用问题中是常会用到的.

试求第 10 题的 30 个数据的 $\alpha = 0.2$ 的截尾均值.

7 参数估计

1. 随机地取 8 只活塞环．测得它们的直径为（以 mm 计）

74.001	74.005	74.003	74.001
74.000	73.998	74.006	74.002

试求总体均值 μ 及方差 σ^2 的矩估计值，并求样本方差 s^2.

2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为一相应的样本值．求下列各总体的概率密度或分布律中的未知参数的矩估计量和矩估计值．

   (a)
   $$f(x) = \begin{cases} \theta c^\theta x^{-(\theta+1)}, & x > c \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$
   其中 $c > 0$ 为已知，$\theta > 1, \theta$ 为未知参数．

   (b)
   $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x^{(\sqrt{\theta}-1)}, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$
   其中 $\theta > 0, \theta$ 为未知参数．

   (c)
   $$P\{X = x\} = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}, x = 0, 1, 2, \cdots, m$$
   其中 $0 < p < 1, p$ 为未知参数．

3. 求上题中各未知参数的最大似然估计值和估计量．

4. (a) 设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

   其中 $\theta(0 < \theta < 1)$ 为未知参数．已知取得了样本值 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$．试求 θ 的矩估计值和最大似然估计值．

   (b) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自参数为 λ 的泊松分布总体的一个样本，试求 λ 的最大似然估计量及矩估计量．

(c) 设随机变量 X 服从以 r,p 为参数的负二项分布．其分布律为

$$P\{X=x_k\}=\binom{x_k-1}{r-1}p^r(1-p)^{x_k-r},\quad x_k=r,r+1,\cdots,$$

其中 r 已知，p 未知. 设有样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，试求 p 的最大似然估计值.

5. 设某种电子器件的寿命（以 h 计）T 服从双参数的指数分布，其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-(t-c)/\theta}, & t\geq c\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $c,\theta(c,\theta>0)$ 为未知参数．自一批这种器件中随机地取 n 件进行寿命试验．设它们的失效时间依次为 $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n$.

(a) 求 θ 与 c 的最大似然估计值.

(b) 求 θ 与 c 的矩估计量.

6. 一地质学家为研究密歇根湖湖滩地区的岩石成分，随机地自该地区取 100 个样品，每个样品有 10 块石子、记录了每个样品中属石灰石的石子数．假设这 100 次观察相互独立．并且由过去经验知，它们都服从参数为 $m=10,p$ 的二项分布，p 是这地区一块石子是石灰石的概率．求 p 的最大似然估计值. 该地质学家所得的数据如下：

样品中属石灰石的石子数 i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
观察到 i 块石灰石的样品个数	0	1	6	7	23	26	21	12	3	1	0

7. (a) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本. 且 $X\sim\pi(\lambda)$，求 $P\{X=0\}$ 的最大似然估计值.

(b) 某铁路局证实一个扳道员在五年内所引起的严重事故的次数服从泊松分布．求一个扳道员在五年内未引起严重事故的概率 p 的最大似然估计，使用下面 122 个观察值．下表中，r 表示一扳道员五年中引起严重事故的次数．s 表示观察到的扳道员人数.

r	0	1	2	3	4	5
s	44	42	21	9	4	2

8. (a) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的总体的样本，θ 未知，求 $U=e^{-1/\theta}$ 的最大似然估计值.

(b) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的样本.μ 未知，求 $\theta=P\{X>2\}$ 的最大似然估计值.

(c) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 $b(m,\theta)$ 的样本值，又 $\theta=\dfrac{1}{3}(1+\beta)$，求 β 的最大似然估计值.

9. (a) 验证教材第六章 §3 定理四中的统计量

$$S_w^2=\frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}S_1^2+\frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}S_2^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

是两总体公共方差 σ^2 的无偏估计量（S_w^2 称为 σ^2 的合并估计）.

(b) 设总体 X 的数学期望为 μ，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的样本，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是任意常数，验证

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}a_iX_i}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\quad (\text{其中}\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0)$$

是 μ 的无偏估计量.

10. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$.

(a) 确定常数 c，使

$$c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$$

为 σ^2 的无偏估计.

(b) 确定常数 c，使 $(\overline{X})^2-cS^2$ 是 μ^2 的无偏估计（$\overline{X}, S^2$ 是样本均值和样本方差）.

11. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}x^{(1-\theta)/\theta}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad 0<\theta<+\infty,$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本.

(a) 验证 θ 的最大似然估计量是 $\hat{\theta} = \frac{-1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$.

(b) 证明 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

12. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自均值为 θ 的指数分布总体的样本. 其中 θ 未知．设有估计量

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{6}(X_1 + X_2) + \frac{1}{3}(X_3 + X_4), \\
T_2 &= \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4}{5}, \\
T_3 &= \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}.
\end{aligned}
$$

(a) 指出 T_1, T_2, T_3 中哪几个是 θ 的无偏估计量.

(b) 在上述 θ 的无偏估计中指出哪一个较为有效.

13. (a) 设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计，且有 $D(\hat{\theta}) > 0$．试证

$$\hat{\theta}^2 = (\hat{\theta})^2 \text{不是} \theta^2 \text{的无偏估计}.$$

(b) 试证明均匀分布

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 < x \le \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
$$

中未知参数 θ 的最大似然估计量不是无偏的.

14. 设从均值为 μ，方差为 $\sigma^2 > 0$ 的总体中分别抽取容量为 n_1, n_2 的两独立样本．$\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$ 分别是两样本的均值. 试证：对于任意常数 $a, b\,(a + b = 1)$，$Y = a\overline{X}_1 + b\overline{X}_2$ 都是 μ 的无偏估计，并确定常数 a, b 使 $D(Y)$ 达到最小.

15. 设有 k 台仪器，已知用第 i 台仪器测量时. 测定值总体的标准差为 $\sigma_i (i = 1, 2, \cdots, k)$. 用这些仪器独立地对某一物理量 θ 各观察一次，分别得到 $X_1, X_2, \cdots, X_k$. 设仪器都没有系统误差，即 $E(X_i) = \theta (i = 1, 2, \cdots, k)$. 问 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 取何值，方能使使用 $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i$ 估计 θ 时，$\hat{\theta}$ 是无偏的，并且 $D(\hat{\theta})$ 最小？

16. 设某种清漆的 9 个样品．其干燥时间（以 h 计）分别为

6.0 5.7 5.8 6.5 7.0 6.3 5.6 6.1 5.0

设干燥时间总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$．求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间，（1）若由以往经验知 $\sigma = 0.6(\mathrm{h})$．（2）若 σ 为未知．

17. 分别使用金球和铅球测定引力常数（单位：$10^{-11}\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$).

    (a) 用金球测定观察值为

    $$6.683 \quad 6.681 \quad 6.676 \quad 6.678 \quad 6.679 \quad 6.672$$

    (b) 用铅球测定观察值为

    $$6.661 \quad 6.661 \quad 6.667 \quad 6.667 \quad 6.664$$

    设测定值总体为 $N(\mu, \sigma^2), \mu, \sigma^2$ 均为未知．试就（1），（2）两种情况分别求 μ 的置信水平为 0.9 的置信区间，并求 σ^2 的置信水平为 0.9 的置信区间.

18. 随机地取某种炮弹 9 发做试验，得炮口速度的样本标准差 $s = 11\mathrm{m/s}$．设炮口速度服从正态分布．求这种炮弹的炮口速度的标准差 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

19. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，μ 已知，σ 未知．

    (a) 验证 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$，利用这一结果构造 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间．

    (b) 设 $\mu = 6.5$，且有样本值 7.5，2.0，12.1，8.8，9.4，7.3，1.9，2.8，7.0，7.3，试求 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

20. 在第 17 题中，设用金球和用铅球测定时测定值总体的方差相等．求两个测定值总体均值差的置信水平为 0.90 的置信区间．

21. 随机地从 A 批导线中抽 4 根，又从 B 批导线中抽 5 根，测得电阻（Ω）为

A批导线：	0.143	0.142	0.143	0.137	
B批导线：	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140

    设测定数据分别来自分布 $N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$，且两样本相互独立．又 μ_1, μ_2, σ^2 均为未知，试求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

22. 研究两种固体燃料火箭推进器的燃烧率．设两者都服从正态分布，并且已知燃烧率的标准差均近似地为 $0.05\,\mathrm{cm/s}$．取样本容量为 $n_1 = n_2 = 20$. 得燃烧率的样本均值分别为

$\overline{x}_1 = 18\,\mathrm{cm/s}$，$\overline{x}_2 = 24\,\mathrm{cm/s}$，设两祥本独立．求两燃烧率总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 0.99 的置信区间．

23. 设两位化验员 A, B 独立地对某种聚合物含氯量用相同的方法各做 10 次测定．其测定值的样本方差依次为 $s_A^2 = 0.5419, s_B^2 = 0.6065$．设 σ_A^2, σ_B^2 分别为 A, B 所测定的测定值总体的方差. 设总体均为正态的，且两样本独立．求方差比 σ_A^2/σ_B^2 的置信水平为 0.95 的置信区间．

24. 在一批货物的容最为 100 的样本中，经检验发现有 16 只次品．试求这批货物次品率的置信水平为 0.95 的置信区间.

25. (a) 求第 16 题中 μ 的置信水平为 0.95 的单侧置信上限．

    附：第 16 题为：设某种清漆的 9 个样品．其干燥时间（以 h 计）分别为

    6.0 5.7 5.8 6.5 7.0 6.3 5.6 6.1 5.0

    设干燥时间总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$．求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间，(1) 若由以往经验知 $\sigma = 0.6(\mathrm{h})$．(2) 若 σ 为未知．

    (b) 求第 21 题中 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 0.95 的单侧置信下限．

    附：第 21 题为：随机地从 A 批导线中抽 4 根，又从 B 批导线中抽 5 根，测得电阻（Ω）为

A批导线：	0.143	0.142	0.143	0.137	
B批导线：	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140

    设测定数据分别来自分布 $N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$，且两样本相互独立. 又 μ_1, μ_2, σ^2 均为未知，试求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

    (c) 求第 23 题中方差比 σ_A^2/σ_B^2 的置信水平为 0.95 的单侧置信上限．

    附：第 23 题为：设两位化验员 A, B 独立地对某种聚合物含氯量用相同的方法各做 10 次测定．其测定值的样本方差依次为 $s_A^2 = 0.5419, s_B^2 = 0.6065$．设 σ_A^2, σ_B^2 分别为 A, B 所测定的测定值总体的方差. 设总体均为正态的，且两样本独立．求方差比 σ_A^2/σ_B^2 的置信水平为 0.95 的置信区间．

26. 为研究某种汽车轮胎的磨损特性，随机地选择 16 只轮胎，每只轮胎行驶到磨坏为止，记

录所行驶的路程（以 km 计）如下：

41 250	40 187	43 175	41 010	39 265	41 872	42 654	41 287
38 970	40 200	42 550	41 095	40 680	43 500	39 775	40 400

假设这些数据来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 未知．试求 μ 的置信水平为 0.95 的单侧置信下限．

27. 科学上的重大发现往往是由年轻人做出的．下面列出了自 16 世纪中叶至 20 世纪早期的十二项重大发现的发现者和他们发现时的年龄:

发现内容	发现者	发现时间	年龄
1. 地球绕太阳运转	哥白尼	1543	40
2. 望远镜、天文学的基本定律	伽利略	1600	36
3. 运动原理、重力、微积分	牛顿	1665	23
4. 电的本质	富兰克林	1746	40
5. 燃烧是与氧气联系着的	拉瓦锡	1774	31
6. 地球是渐进过程演化成的	莱尔	1830	33
7. 自然选择控制演化的证据	达尔文	1858	49
8. 光的场方程	麦克斯韦	1864	33
9. 放射性	居里	1896	34
10. 量子论	普朗克	1901	43
11. 狭义相对论, $E=mc^2$	爱因斯坦	1905	26
12. 量子论的数学基础	薛定谔	1926	39

设样本来自正态总体，试求发现者的平均年龄 μ 的置信水平为 0.95 的单侧置信上限．