河北工程大学 2025~2026 学年第一学期

高等数学 A(1) 课程题目集

信息与电气工程学院

计算机 2501 班

姜振坤

2025 年 11 月 3 日

文档说明[1]

更新日志 1[2]

[1] 公益项目，完全免费

[2] 2025 年 11 月 3 日完成全部章节的习题内容.

本文档所用排版工具：LaTeX

本文档存在诸多不完善的地方，还望理解！

文档说明[3]　文档说明[4]　文档说明[5]　文档说明[6]

参考书目如下：

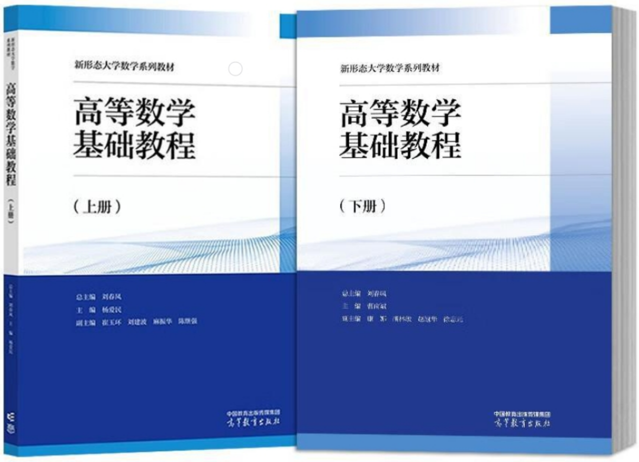

图 1：本文档参考书目

若有打印需求，请忽略本页

祝考试顺利，取得好成绩！

[3]本文档包括 2025 级计算机科学与技术、软件工程专业所修高等数学 A(1) 的学习通课程任务中涉及到的所有题目. 另外还会补充一些易错或者重要的题目.

[4]本文档仅供平时学习及期末复习使用，请勿盲目为了完成课程任务而学习，目的应该是真正掌握知识点.

[5]课程号 G801091011　高等数学 A.

[6]2025 年 11 月 3 日第四次更新，完善了全部题目和部分章节的排版问题，一些显而易见的题目不提供过多解题过程.

目录

1 前言

本来写了很多, 最后删减到现在的三言两语. 我写这份题目详解 (或者说是略解), 一方面是个人学习的总结, 便于不断地复习回顾; 另一方面也是希望能够给那些在学习数学上遇到困难的同学一些微不足道的帮助; 高等数学 A(1) 这门课程有 5.5 学分, 重要性不言而喻, 所以希望每个同学都能取得好成绩.

我的高等数学 A(2) 期末成绩为 96 分 (见下图2), 个人认为, 应对大学的高数期末考试, 无需耗费额外的精力进行大篇幅复习, 应该把大量的时间留给专业课复习, 尤其是计算机专业更应该如此, 最好的复习计划就是去复习课堂的重点内容和老师布置的题目集, 只要把平时的作业反复练习到熟练 (考试一定要注意细节问题, 我就是因为细节没注意到, 导致出现了不该有的计算失误), 期末考试获得高分或者满分完全没有问题, 所以不需要去购买那些额外的书籍 (如果有需要的话, 可以购买考研的题集, 如果仅仅是为了一个课程的期末考试去专门买一本练习册我感觉是没有必要的).

本文档尽可能按课程进度进行更新, 并加入一些重点考题, 学习通章节的习题更新进度完全随缘, 但不会晚于 88 学时的高等数学课程, 并且后续可能会添加其他练习题目.

由于本人学识短浅, 文档中的错误、疏漏在所难免, 希望大家谅解. 同时衷心的希望大家都能取得好成绩!

计算机 2501 班 姜振坤

2025 年 11 月 3 日

图 2: **我的高等数学 (2) 88 学时成绩**

2 函数

2.1 题目集

1. 函数 $y = \arcsin(\arctan x)$ 的定义域为 (   ).

(A) $[-1, 1]$ (B) $(-\infty, +\infty)$ (C) $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ (D) $[-\tan 1, \tan 1]$

2. 函数 $y = \sqrt{|3-2x|-4}$ 的定义域是 (   ).

(A) $[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$ (C) $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{7}{2}, +\infty)$

(B) $(-\infty, -\frac{7}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$ (D) $[-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}]$

3. 函数 $\ln\sqrt{1-x} + \sin\frac{1}{x}$ 的定义域为 (   ).

(A) $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$ (C) $(-\infty, 1]$

(B) $(-\infty, 1)$ (D) $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

4. 函数 $y = \sqrt{\arcsin(2x-1)}$ 的值域是 (   ).

(A) $[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$ (C) $[0, +\infty)$

(B) $[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$ (D) $[0, \frac{\pi}{2}]$

5. 下列四个函数中, 与 $y = |x|$ 不同的是 (   ).

(A) $y = |e^{\ln x}|$ (C) $y = \sqrt{x^2}$

(B) $y = x \operatorname{sgn} x$ (D) $y = \sqrt[4]{x^4}$

6. 下列选项中, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相等的是 (   ).

(A) $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2}+x), g(x) = -\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$

(B) $f(x) = x, g(x) = \sqrt[3]{x^3}$

(C) $f(x) = \tan^2 x, g(x) = \sec^2 x - 1$

(D) $f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = \frac{|x|}{x}$

7. 下列函数中, 有界函数的个数为 (   ).

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$

(2) $y=\arcsin x$

(3) $y=\cos\dfrac{1}{x}$

(4) $y=\cot x$

(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 3

8. 下列函数中为奇函数的是 (　).

(A) $y=\cos(\arctan x)$

(B) $y=x^2\tan(\sin x)$

(C) $y=x^2\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$

(D) $y=\sqrt{2^x-2^{-x}}$

9. 下列函数中, 既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 内单调递增的是 (　).

(A) $y=x^3+x$

(B) $y=\cos x$

(C) $y=e^{|x|}$

(D) $y=-\ln|x|$

10. 下列函数不是周期函数的是 (　).

(A) $y=\arctan x$

(B) $y=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^C\end{cases}$

(C) $y=\sin x$

(D) $y=\sec x$

2.2 解答集

1. 函数 $y = \arcsin(\arctan x)$ 的定义域为 ( ).

解: 要求 $\arcsin(\arctan x)$ 有定义, 需有

$$\arctan x \in [-1, 1].$$

由于 $\arctan x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增且值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 于是

$$\arctan x \in [-1, 1] \iff x \in [\tan(-1), \tan 1] = [-\tan 1, \tan 1].$$

$\boxed{\text{所以定义域为 } [-\tan 1, \tan 1], \text{ 选项 (D).}}$

2. 函数 $y = \sqrt{|3 - 2x| - 4}$ 的定义域是 ( ).

解: 要求被开方数 ≥ 0, 即

$$|3 - 2x| - 4 \geq 0 \iff |3 - 2x| \geq 4.$$

由绝对值不等式,

$$3 - 2x \geq 4 \text{ 或 } 3 - 2x \leq -4.$$

解得

$$3 - 2x \geq 4 \Rightarrow -2x \geq 1 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2},$$

$$3 - 2x \leq -4 \Rightarrow -2x \leq -7 \Rightarrow x \geq \frac{7}{2}.$$

$\boxed{\text{因此定义域为 } (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{7}{2}, +\infty), \text{ 选项 (C).}}$

3. 函数 $\ln\sqrt{1 - x} + \sin\frac{1}{x}$ 的定义域为 ( ).

解: 要使 $\ln\sqrt{1 - x}$ 有定义, 需

$$\sqrt{1 - x} > 0 \iff 1 - x > 0 \iff x < 1.$$

注意当 $x = 1$ 时 $\sqrt{1 - x} = 0$,$\ln 0$ 无定义; 当 $x < 1$ 且 $x \neq 1$, 对 $\sqrt{1 - x}$ 满足正性条件. 又 $\sin\frac{1}{x}$ 要有定义需 $x \neq 0$(否则 $1/x$ 无意义). 综上,

$$x < 1,\ x \neq 0 \iff (-\infty, 0) \cup (0, 1).$$

$\boxed{\text{故选项 (D).}}$

4. 函数 $y=\sqrt{\arcsin(2x-1)}$ 的值域是 ( ).

解: 首先 $\arcsin(2x-1)$ 要有定义, 需 $2x-1\in[-1,1] \iff x\in[0,1]$. 其次被开方数需 $\arcsin(2x-1)\ge 0$. 在 $x\in[0,1]$ 上,

$$\arcsin(2x-1)\ge 0 \iff 2x-1\ge 0 \iff x\ge \frac{1}{2}.$$

于是自变量取 $x\in[\frac{1}{2},1]$, 对应 $\arcsin(2x-1)$ 的取值区间为

$$\arcsin(2\cdot\frac{1}{2}-1)=\arcsin 0=0 \quad 到 \quad \arcsin(2\cdot 1-1)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

因此

$$y=\sqrt{\arcsin(2x-1)}\in\left[0,\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right].$$

$\boxed{\text{故选项 (A).}}$

5. 下列四个函数中, 与 $y=|x|$ 不同的是 ( ).

解: 比较每一项与 $|x|$ 是否在全体实数上相同 (包括定义域).

(A) $y=|e^{\ln x}|$: 这里 $e^{\ln x}=x$ 仅在 $x>0$ 有意义 ($\ln x$ 要求 $x>0$), 因此该函数的定义域是 $(0,\infty)$, 并不是全体实数, 故与 $|x|$ 不同.

(B) $y=x\operatorname{sgn}x$: 对任意实数 x, 有 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$, 故 $x\operatorname{sgn}x=|x|$(包括 $x=0$ 情况). 相同.

(C) $y=\sqrt{x^2}$: 主值平方根非负, 等于 $|x|$, 相同 (定义域全体实数).

(D) $y=\sqrt[4]{x^4}$: 偶次根取非负主值, 等于 $|x|$, 相同.

$\boxed{\text{因此与 } |x| \text{ 不同的是 (A).}}$

6. 下列选项中, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相等的是 ( ).

解: 逐项检验函数表达式及定义域.

(A) 已知恒等式

$$\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=1,$$

对两边取对数得

$$\ln(\sqrt{1+x^2}+x) = -\ln(\sqrt{1+x^2}-x),$$

且两边在实数上均有定义, 因此二者相等.

(B) 对实数 x, 有 $\sqrt[3]{x^3} = x$(实数立方与立方根互为反函数), 相等.

(C) 恒等式 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$, 所以 $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$(在两边均有定义的点上相等).

(D) $\operatorname{sgn} x$ 在 $x = 0$ 时定义为 0, 而 $\dfrac{|x|}{x}$ 在 $x = 0$ 处没有定义 (分母为 0), 因此作为函数它们不相等 (定义域不同).

$\boxed{\text{所以不相等的是 (D).}}$

7. 下列函数中, 有界函数的个数为 ( ).

$$(1)\ y = \frac{1}{1-x^2}, \quad (2)\ y = \arcsin x, \quad (3)\ y = \cos\frac{1}{x}, \quad (4)\ y = \cot x.$$

解:

(1) $\dfrac{1}{1-x^2}$ 在 $x \to \pm 1$ 时发散, 故不有界.

(2) $\arcsin x$ 在其定义域 $[-1, 1]$ 上取值于 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 有界.

(3) $\cos\dfrac{1}{x}$ 对所有 $x \neq 0$ 有定义, 且值在 $[-1, 1]$, 有界 (尽管在 0 处无定义, 但函数在其定义域上的值有界).

(4) $\cot x$ 在 $x \to k\pi$ 时发散, 不是有界函数.

$\boxed{\text{因此有界的函数有两项, 答案为 (B).}}$

8. 下列函数中为奇函数的是 ( ).

$$\text{(A)}\ \cos(\arctan x), \quad \text{(B)}\ x^2\tan(\sin x), \quad \text{(C)}\ x^2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right), \quad \text{(D)}\ \sqrt{2^x - 2^{-x}}.$$

解: 判断奇偶性 (记: 偶 × 偶 = 偶, 奇 × 奇 = 偶, 偶 × 奇 = 奇).

(A) $\arctan x$ 为奇函数,cos 为偶函数, 所以 $\cos(\arctan x)$ 为偶函数.

(B) x^2 为偶函数;$\sin x$ 为奇函数,tan 为奇函数, 则 $\tan(\sin x)$ 为奇函数 (奇函数复合奇函数为奇). 偶函数乘以奇函数得奇函数, 故 (B) 为奇函数.

(C) x^2 为偶,$\cos(x + \pi/4)$ 既非偶也非奇, 因此乘积一般也不是奇函数.

(D) $2^x - 2^{-x}$ 对 $x \mapsto -x$ 变号 (即为奇函数), 但开平方会取非负值且在负 x 处常无实值 (当 $2^x - 2^{-x} < 0$ 时无实值), 因此不能为全域奇函数.

$\boxed{\text{所以选 (B).}}$

9. 下列函数中, 既是偶函数又在 $(0, +\infty)$ 内单调递增的是 ( ).

$$\text{(A) } x^3 + x, \quad \text{(B) } \cos x, \quad \text{(C) } e^{|x|}, \quad \text{(D) } -\ln|x|.$$

解: 要同时满足"偶"与"在 $(0, +\infty)$ 上单调递增".

(A) $x^3 + x$ 为奇函数, 不是偶函数.

(B) $\cos x$ 为偶函数, 但在 $(0, +\infty)$ 上并非单调递增 (在 $(0, \pi)$ 上单调递减, 之后又振荡).

(C) $e^{|x|}$ 为偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上 $e^{|x|} = e^x$, 显然单调递增.

(D) $-\ln|x|$ 为偶函数, 但在 $(0, +\infty)$ 上为 $-\ln x$, 这是随 x 增大而减小的 (单调递减).

$\boxed{\text{因此选 (C).}}$

10. 下列函数不是周期函数的是 ( ).

$$\text{(A) } \arctan x, \quad \text{(B) } f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^C, \end{cases} \quad \text{(C) } \sin x, \quad \text{(D) } \sec x.$$

解:

(A) $\arctan x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调且趋于常数, 不可能存在非零周期, 故非周期函数.

(B) 狄利克雷函数 (有理数取 1, 无理数取 0) 对任意有理数 $p \neq 0$ 都满足 $f(x + p) = f(x)$, 因此存在非零周期 (例如任一有理数), 是周期函数 (具有任意有理数为周期).

(C) $\sin x$ 是周期函数, 周期 2π.

(D) $\sec x$ 也是周期函数, 周期 2π(在定义域上).

$\boxed{\text{因此不是周期函数的是 (A).}}$

3 极限与连续

3.1 题目集

3.1.1 数列的极限

1. 下列数列发散的是 ( ).

(A) $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4, \ldots, \sin n, \ldots$

(B) $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{8}, 0, \ldots, (\frac{1}{2})^n, 0, \ldots$

(C) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

(D) $0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \ldots, 1-(\frac{1}{10})^n, \ldots$

2. 在极限定义中 ε 与 N 的关系是 ( ).

(A) 先给定 ε 后唯一确定 N

(B) 先确定 N 后给定 ε

(C) 先给定 ε 后确定 N, 但 N 值不唯一

(D) ε 与 N 无关

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{3}{5})^n = ($ $)$.

(A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) 不存在

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{5}{3})^n = ($ $)$.

(A) 不存在 (B) 0 (C) 1 (D) $\frac{5}{3}$

5. 数列有界是数列收敛的 ( ).

(A) 既不是充分条件也不是必要条件 (C) 充分条件

(B) 充分必要条件 (D) 必要条件

6. 数列无界是数列发散的 ( ).

(A) 充分必要条件 (C) 充分条件

(B) 既非充分又非必要条件 (D) 必要条件

7. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n < 0, \forall n$, 则下列选项不可能成立的是 ( ).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 0$　　(C) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

8. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n+1} =$________.

3.1.2 函数的极限

1. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是 (   ).

(A) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在

(B) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在

(C) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在且相等

(D) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x} =$ (   ).

(A) 不存在

(B) 存在且等于 1

(C) 存在且等于 -1

(D) 存在且等于 0

3. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在的充分必要条件是 (   ).

(A) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 都存在

(B) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 都存在且相等

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在

4. 设 $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ k, & x > 0 \end{cases}$, 且极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在, 则常数 $k =$ (   ).

3.1.3 极限的运算法则

1.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt{n}+3\sqrt{n\sqrt{n}}-1}{2\sqrt{n}-\sqrt{n\sqrt{n}}}=(\quad)$.

(A) 2　(B) -3　(C) 0　(D) ∞

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=(\quad)$.

(A) $-\dfrac{1}{2}$　(B) 1　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) -1

4. $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2})=(\quad)$.

(A) $-\dfrac{1}{2}$　(B) 0　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) ∞

5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}=(\quad)$.

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) 0　(D) ∞

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-x+1}=(\quad)$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}=(\quad)$.

8. $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x})=(\quad)$.

9. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{3-x}=(\quad)$.

10. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2025}-1}{x-1}=(\quad)$.

11. 已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax-b}{x-1}=2$, 则 $a=(\quad),b=(\quad)$.

3.1.4 极限的存在准则和两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}=(\quad)$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x=(\quad)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=(\quad)$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{3x}=(\quad)$.

   (A) e^{-3} (B) $\sqrt{e}$ (C) e^{3} (D) $\sqrt[3]{e}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=(\quad)$.

   (A) $-e$ (B) e (C) e^{-1} (D) $-e^{-1}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x}{x+1})^{8x}=(\quad)$.

   (A) ∞ (B) 1 (C) e^{-8} (D) e^{8}

7. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{x})^{2x+5}=(\quad)$.

   (A) e^{-5} (B) e^{5} (C) e^{-2} (D) e^{2}

3.1.5 无穷小与无穷大

1. 已知当 $x \to 0$ 时,$\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}$ 与 $b-\cos x$ 是等价无穷小, 则 $a=(\quad), b=(\quad)$.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-ax+6}{x-1}=b$, 则 $a=(\quad), b=(\quad)$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-2\cos x^2}{x^2\sin x^2}=(\quad)$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sec x-2}{\tan^2 x}=(\quad)$.

5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=(\quad)$.

3.1.6 函数的连续性

1. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{-2}\cdot\tan(ax^2), & x<0 \\ 1, & x=0 \\ x^{50}+b, & x>0 \end{cases}$, 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 ( ).

(A) $a=2,b=1$

(B) $a=0,b=0$

(C) $a=2,b=0$

(D) $a=1,b=1$

2. 若点 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点, 则下列说法错误的是 ( ).

(A) 跳跃间断点与可去间断点合称为第一类间断点

(B) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在, 但 $f(x)$ 在 x_0 处无定义, 或虽然 $f(x)$ 在 x_0 处有定义, 但 $A\neq f(x_0)$, 则 $x=x_0$ 称为 $f(x)$ 的可去间断点

(C) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在但不相等, 则 $x=x_0$ 称为 $f(x)$ 的跳跃间断点

(D) 跳跃间断点与无穷间断点合称为第二类间断点

3. 设 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}-1$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ( ).

(A) 连续点

(B) 第二类间断点

(C) 跳跃间断点

(D) 可去间断点

4. $x=0$ 是函数 $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ 的 ( ) 间断点.

(A) 可去　(B) 振荡　(C) 无穷　(D) 跳跃

5. $x=1$ 是函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+6x-7}{x-1}, & x\neq 1 \\ 8, & x=1 \end{cases}$ 的 ( ).

(A) 可去间断点

(B) 跳跃间断点

(C) 无穷间断点

(D) 连续点

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ x, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 ( ).

(A) $x=0$ 处间断, $x=1$ 处连续　　(C) $x=0, x=1$ 处都连续

(B) $x=0, x=1$ 处都间断　　(D) $x=0$ 处连续, $x=1$ 处间断

7. 设 $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\sin x}{x}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x\cos\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ( ).

(A) 连续点　　(C) 跳跃间断点

(B) 可去间断点　　(D) 振荡间断点

8. $x=0$ 是函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的 ( ).

(A) 振荡间断点　　(C) 可去间断点

(B) 无穷间断点　　(D) 跳跃间断点

9. 设 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x-1}$, 则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的 ( ).

(A) 跳跃间断点　　(C) 可去间断点

(B) 连续点　　(D) 第二类间断点

10. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2021}{\cos x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$ ( ).

11. 若 $f(x)=\dfrac{x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=2$ 和可去间断点 $x=1$, 则 $a=$ ( ), $b=$ ( ).

12. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}$ 存在, 则 $f(2)=$ ( ).

13. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln|x|}$, 则 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的 ( ) 间断点, $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的 ( ) 间断点. (填" 可去" 或" 跳跃" 或" 第二类")

3.1.7 闭区间上连续函数的性质

1. 方程 $\ln x = x - e$ 在 $(1, e^2)$ 内必有实根.

   (A) 对　　(B) 错

2. 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 一定是有界.

   (A) 对　　(B) 错

3. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则它必能取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意值.

   (A) 对　　(B) 错

4. 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 一定有最大值和最小值.

   (A) 对　　(B) 错

5. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 3 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ 在闭区间 $[0, 2]$ 不连续.

   (A) 对　　(B) 错

3.2 解答集

3.2.1 数列的极限

1. 下列数列发散的是 ( ).

解: 逐项分析极限情况:

(A) $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \ldots$ ——由于角度 n(以弧度计) 模 2π 在 $[0, 2\pi)$ 中是稠密的, 故 $\{\sin n\}$ 无极限, 发散.

(B) 序列形如 $(\frac{1}{2})^n, 0, (\frac{1}{2})^n, 0, \ldots$ 或题意为交替出现的 $(\frac{1}{2})^n$ 与 0(无论如何各项趋于 0), 收敛于 0.

(C) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ ——倒数数列, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, 收敛.

(D) $0.9, 0.99, 0.999, \ldots, 1 - (\frac{1}{10})^n, \ldots$ ——显然收敛到 1.

$\boxed{\text{因此发散的是 (A).}}$

2. 在极限定义中 ε 与 N 的关系是 ( ).

解: 极限的 ε-N 定义是: 先给定任意 $\varepsilon > 0$, 然后存在某个整数 N(可能不是唯一的) 使得对所有 $n > N$ 有 $|a_n - A| < \varepsilon$. 因此先给定 ε 后确定 N, 但 N 值不唯一.

$\boxed{\text{故选项 (C).}}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n = (\quad).$

解: 公比 $-\frac{3}{5}$ 的绝对值小于 1, 故等比数列极限为 0.

$\boxed{\text{选 (C).}}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = (\quad).$

解: 公比 $\frac{5}{3} > 1$, 项数随 n 增大绝对值趋于 $+\infty$, 无有限极限, 故极限“不存在”.

$\boxed{\text{选 (A).}}$

5. 数列有界是数列收敛的 ( ).

解: 收敛的数列必有界 (即有界是收敛的必要条件), 但有界不一定收敛 (例如黎曼函数列或振荡有界序列).

$\boxed{\text{因此答案为“必要条件”. 选 (D).}}$

6. 数列无界是数列发散的 ( ).

解: 若数列无界, 则不可能收敛 (收敛数列必有界), 所以"无界"推出"发散", 即为充分条件 (但不是必要条件, 因为也有有界的发散序列).

$\boxed{\text{选 (C).}}$

7. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n < 0$, $\forall n$, 则下列选项不可能成立的是 ( ).

解: 若对所有 n 都有 $a_n < 0$, 则任何极限若存在只能 ≤ 0(极限为正数与最终项都为负矛盾). 因此不可能出现 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$.

$\boxed{\text{选 (C).}}$

8. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n+1} =$________.

解: 任意收敛数列的任意子列都收敛于相同的极限, 故子列 $\{a_{3n+1}\}$ 的极限仍为$\boxed{4}$.

3.2.2 函数的极限

1. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是 ( ).

   解: 极限存在当且仅当左右两侧极限都存在且相等, 即

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ 与 } \lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ 都存在且相等.}$$

   $\boxed{\text{故选 (C).}}$

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x} = (\quad)$.

   解: 考察左右极限:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

   左右极限不相等, 因此极限不存在.

   $\boxed{\text{选 (A).}}$

3. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在的充分必要条件是 ( ).

   解: “$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在”极限存在当且仅当左右两侧极限都存在且相等.

   $\boxed{\text{选择 (D).}}$

4. 设

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ k, & x > 0, \end{cases}$$

   且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在, 求常数 k.

   解: 要使 $x\to 0$ 时极限存在, 左右极限必须相等. 左极限为 2, 右极限为 k, 因此需 $\boxed{k = 2.}$

3.2.3 极限的运算法则

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt{n}+3\sqrt{n\sqrt{n}}-1}{2\sqrt{n}-\sqrt{n\sqrt{n}}}$.

解：写出幂：

$$\sqrt{n}=n^{\frac{1}{2}},\qquad \sqrt{n\sqrt{n}}=n^{\frac{3}{4}}.$$

把分子分母同除以 $n^{\frac{3}{4}}$, 得极限为

$$\frac{3+0}{-1+0}=-3.$$

$\boxed{\text{答案：B. }-3.}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=(\quad)$.

解: 用共轭化:

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}.$$

令 $x\to 0$, 得 $\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\text{故选 (C).}}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)=(\quad)$.

解: 写成同分母:

$$\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{1+x}{(1-x)(1+x)}-\frac{2}{(1-x)(1+x)}=\frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)}=\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}.$$

注意 $\dfrac{x-1}{1-x}=-1$, 所以表达式化为 $-\dfrac{1}{1+x}$. 令 $x\to 1$, 得 $-\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\text{故选 (A).}}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}=(\quad)$.

解: 共轭化:

$$\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}=\frac{(2x-1)-x}{(x-1)\big(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}\big)}=\frac{x-1}{(x-1)\big(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}\big)}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}.$$

令 $x\to 1$, 得 $\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\text{故选 (A).}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-x+1}=(\quad)$.

解: 分子分母同时除以 x^2:

$$\frac{x^2+1}{x^2-x+1}=\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

令 $x\to\infty$, 有 $\dfrac{1}{x}\to 0$, $\dfrac{1}{x^2}\to 0$, 故极限为

$$\frac{1+0}{1-0+0}=1.$$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}=(\quad)$.

解: 分子分母同时除以 x^4(或看最高次幂): 分子阶为 x^2, 分母阶为 x^4, 比值同阶比为 $O(\dfrac{1}{x^2})\to 0$. 因此极限为 0.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)=(\quad)$.

解: 记 $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$, 通分得

$$\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}=\frac{3-(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{2-x-x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}.$$

把分子变形:

$$2-x-x^2=-(x^2+x-2)=-(x+2)(x-1),$$

且 $1-x=-(x-1)$, 于是整个式子化为

$$\frac{-(x+2)(x-1)}{-(x-1)(1+x+x^2)}=\frac{x+2}{1+x+x^2}.$$

令 $x\to 1$, 得 $\dfrac{3}{3}=1$.

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{3-x}=(\quad)$.

解: 代入 $x=2$ 即为一般点处值 (分母非零):

$$\frac{2^2+5}{3-2}=\frac{4+5}{1}=9.$$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2025}-1}{x-1}=(\quad)$.

解: 这是差商, 等于多项式在 $x=1$ 处的导数, 或用和式公式

$$\frac{x^{2025}-1}{x-1}=\sum_{k=0}^{2024}x^k,$$

代入 $x=1$ 得 2025. 故极限为 2025.

10. 已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax-b}{x-1}=2$, 求 a,b.

解: 为使极限有限, 分子在 $x=1$ 处必须为零:

$$1+a-b=0 \quad\Rightarrow\quad b=1+a.$$

极限等于分子的导数在 $x=1$ 处:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-b}{x-1}=\big(2x+a\big)\big|_{x=1}=2+a.$$

由题给值 $2+a=2$, 得 $a=0$. 于是 $b=1+a=1$. 得 $a=0,b=1$.

3.2.4 极限的存在准则和两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x} = (\quad)$.

解: 由 $\tan u \sim u$ $(u\to 0)$, 取 $u=3x$ 得

$$\frac{\tan 3x}{x} = \frac{\tan 3x}{3x}\cdot 3 \longrightarrow 1\cdot 3 = 3.$$

故极限为 3.

2. $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x = (\quad)$.

解: $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, 故

$$x\cot x = \frac{x\cos x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x/x}.$$

当 $x\to 0$ 时,$\cos x\to 1$, $\sin x/x \to 1$, 因此极限为 1.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2} = (\quad)$.

解: 利用恒等变换 $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$, 得

$$\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 \longrightarrow 2\cdot 1^2 = 2.$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x} = (\quad)$.

解: 写成幂的形式:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^3 \longrightarrow e^3.$$

因此选项为 (C) e^3.

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = (\quad)$.

解: 设 L 为极限, 取对数:

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

利用 $\ln(1-x)\sim -x$(当 $x\to 0$), 得 $\ln L = -1$, 所以 $L = e^{-1}$.

故选 (C) e^{-1}.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{8x} = (\quad)$.

解: 变形为

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{8x} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-8x} = \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-8} \longrightarrow e^{-8}.$$

因此选 (C) e^{-8}.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x+5}=(\quad)$.

解: 分解为

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+5}=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}=\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}.$$

令 $x\to\infty$ 得前项趋向 e^2, 后项趋向 1, 所以极限为 e^2.

故选 (D) e^2.

3.2.5 无穷小与无穷大

1. 已知当 $x \to 0$ 时,$\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}$ 与 $b-\cos x$ 是等价无穷小, 则 $a=(\quad),b=(\quad)$.

解: 等价无穷小要求两式在 $x \to 0$ 时阶相同且比值趋向非零常数. 先展开右端:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0),$$

因此

$$b - \cos x = (b-1) + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

若要与左端等价, 则常数项必须为 0, 即 $b-1=0 \Rightarrow b=1$. 此时

$$b - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad (x \to 0).$$

左端当 $a>0$ 时有

$$\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}} \sim \frac{x^2}{\sqrt{a}} \quad (x \to 0).$$

要与 $\dfrac{x^2}{2}$ 等价, 需 $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2}$, 即 $\sqrt{a}=2 \Rightarrow a=4$.
(若 $a=0$ 或 $a<0$ 情形不满足等价阶次, 因此唯一解为)

$$a=4, \qquad b=1.$$

2. 已知 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-ax+6}{x-1} = b$, 求 a,b.

解: 为使极限有限, 分子在 $x=1$ 处须为 0:

$$1-a+6=0 \Rightarrow a=7.$$

然后极限等于分子对 x 的导数在 $x=1$ 处的值 (或用洛必达/因式分解):

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-7x+6}{x-1} = \big(2x-7\big)\Big|_{x=1} = 2-7=-5.$$

所以

$$a=7, \qquad b=-5.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-2\cos x^2}{x^2 \sin x^2} = ?$

解: 展开 $\cos x^2 = 1 - \frac{(x^2)^2}{2} + o(x^4) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$. 于是分子

$$2 - 2\cos x^2 = 2\Big(1 - \big(1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\big)\Big) = x^4 + o(x^4).$$

分母 $x^2 \sin x^2 \sim x^2 \cdot x^2 = x^4$. 因此极限为

$$\frac{x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \to 1.$$

故极限为 1.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sec x - 2}{\tan^2 x} = ?$

解: 写成

$$\frac{2(\sec x - 1)}{\tan^2 x}.$$

利用小量展开 $\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$,$\tan x = x + o(x)$. 于是分子 $2(\sec x - 1) \sim 2 \cdot \frac{x^2}{2} = x^2$, 分母 $\tan^2 x \sim x^2$. 故极限为

$$\frac{x^2}{x^2} \to 1.$$

因此极限为 1.

5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} = ?$

解: 设 $t = x - 1$, 则当 $x \to 1$ 时 $t \to 0$, 且

$$x^2 - 1 = (1 + t)^2 - 1 = 2t + t^2.$$

于是

$$\frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{\sin(2t + t^2)}{t} = \frac{\sin(2t + t^2)}{2t + t^2} \cdot \frac{2t + t^2}{t}.$$

令 $t \to 0$, 第一项趋于 1, 第二项趋于 2. 因此极限为 2.

(等价的计算: 令 $u = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, 则 $\frac{\sin u}{x - 1} = \frac{\sin u}{u} \cdot (x + 1) \to 1 \cdot 2 = 2$.)

3.2.6 函数的连续性

1. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{-2}\cdot\tan(ax^2), & x<0 \\ 1, & x=0 \\ x^{50}+b, & x>0 \end{cases}$, 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 ( ).

解: 连续要求左右极限都存在且等于 $f(0)=1$. 当 $x\to 0^-$ 时, 令 $t=ax^2\to 0$, 有 $\tan t\sim t$, 故

$$\lim_{x\to 0^-} x^{-2}\tan(ax^2)=\lim_{x\to 0^-} x^{-2}\cdot(ax^2)=a.$$

当 $x\to 0^+$ 时, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{50}+b=b$. 因此需 $a=1,\ b=1$.

对应选项为 (D).

2. 若点 $x=x_0$ 为函数 f 的间断点, 则下列说法中错误的是 ( ).

解: 跳跃间断与可去间断合称第一类间断点；若左右极限都存在且相等但值与函数值不符或函数未定义则为可去间断点；若左右极限存在但不相等则为跳跃间断点. 选项 (D) “跳跃间断点与无穷间断点合称第二类间断点” 是错误的 (跳跃属于第一类). 故选 (D).

3. 设 $f(x)=e^{1/x}-1$, 则 $x=0$ 是 f 的 ( ).

解: $x\to 0^+$ 时 $e^{1/x}\to+\infty$, 而 $x\to 0^-$ 时 $e^{1/x}\to 0$(因此 $e^{1/x}-1\to -1$), 左右极限一侧为无穷, 另一侧为有限, 故为第二类间断点.

选 (B).

4. $x=0$ 是函数 $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ 的 ( ) 间断点.

解: $x\to 0$ 时 $\cos(1/x)$ 无极限, 在任意邻域内振荡且左右极限都不存在, 属于振荡间断 (通常称为第二类中的振荡间断). 对照选项, 选 (B).

5. 设

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+6x-7}{x-1}, & x\neq 1, \\ 8, & x=1, \end{cases}$$

则 $x=1$ 为 ( ).

解: 分子因式分解: $x^2+6x-7=(x-1)(x+7)$. 故当 $x\neq 1$ 时函数等于 $x+7$, 极限 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1+7=8$. 且 $f(1)=8$, 因此在 $x=1$ 连续.

选 (D).

6. 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ x, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 ( ).

解: 在 $x=0$ 处, 左极限为 $0^2+1=1$, 右值为 $f(0)=0$, 故在 0 处间断；在 $x=1$ 处, 左值为 $f(1)=1$, 右极限为 $\lim\limits_{x\to 1^+} 2-x=1$, 故在 1 处连续.

因此选 (A):$x=0$ 处间断,$x=1$ 处连续.

7. 设

$$f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x\cos\dfrac{1}{x}, & x>0,\end{cases}$$

则 $x=0$ 是 f 的 ( ).

解: 计算左右极限: 当 $x\to 0^-$, 有 $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$, 故左极限为 $0+1=1$；当 $x\to 0^+$, 有 $x\cos\dfrac{1}{x}\to 0$(被界值乘以 $x\to 0$), 故右极限为 0. 左右极限存在但不相等, 故为跳跃间断点.

选 (C).

8. $x=0$ 是函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的 ( ).

解: 当 $x\to 0$ 时 $x\sin\dfrac{1}{x}\to 0$, 极限存在且等于 0. 若该函数在 $x=0$ 处未定义, 则为可去间断点；题中未给出 $f(0)$ 的值, 通常判为可去间断点.

故选 (C).

9. 设 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x-1}$, 则 $x=1$ 是 f 的 ( ).

解: 当 $x\to 1^+$,$\dfrac{1}{x-1}\to+\infty$,$\arctan\to\dfrac{\pi}{2}$；当 $x\to 1^-$,$\dfrac{1}{x-1}\to-\infty$,$\arctan\to-\dfrac{\pi}{2}$. 左右极限存在且不相等, 故为跳跃间断点.

选 (A).

10. 已知

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2021}{\cos x}, & x\neq 0,\\[2ex] a, & x=0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 连续, 求 a.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2021}{\cos x}=\dfrac{2021}{1}=2021$. 为连续需 $a=2021$.

11. 若 $f(x)=\dfrac{x-b}{(x-a)(x-1)}$ 在 $x=2$ 处为无穷间断点、在 $x=1$ 处为可去间断点, 求 a,b.

解: 可去间断点 $x=1$ 要求分子在 $x=1$ 处也为零: $1-b=0\Rightarrow b=1$. 无穷间断点 $x=2$ 要求分母在 $x=2$ 为零 (即 $a=2$) 且分子在 $x=2$ 非零: $2-b=2-1=1\neq 0$. 因此

$$a=2,\qquad b=1.$$

12. 设 f 在 $x=2$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}$ 存在, 求 $f(2)$.

解: 若该极限存在 (为有限数), 则分子在 $x\to 2$ 时趋于 0, 即 $f(x)\to 1$. 由连续性有 $f(2)=1$.

13. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\ln|x|}$. 判断 $x=0$ 与 $x=1$ 的间断类型 (用“可去”、“跳跃”或“第二类”填写).

解: 当 $x\to 0^{\pm}$,$\ln|x|\to-\infty$, 于是 $f(x)=1/\ln|x|\to 0$. 极限存在且为有限数, 但函数在 $x=0$ 处未定义, 故 $x=0$ 是 $\boxed{\text{可去}}$ 间断点. 当 $x\to 1^{\pm}$,$\ln|x|\to 0$, 且左右符号相反: 从右侧 $\ln x\to 0^+$ 导致 $f\to+\infty$, 从左侧 $\ln x\to 0^-$ 导致 $f\to-\infty$, 为无穷振荡类 (左右一正一负无穷), 属于第二类间断点. 故 $x=1$ 是 $\boxed{\text{第二类}}$ 间断点.

3.2.7 闭区间上连续函数的性质

1. 方程 $\ln x = x - e$ 在 $(1, e^2)$ 内必有实根.

   (A) 对

   解: 令 $g(x) = \ln x - (x - e)$. 则 g 在 $(0, \infty)$ 上连续, 计算端点:

$$g(1) = \ln 1 - (1 - e) = 0 - 1 + e = e - 1 > 0,$$

$$g(e^2) = \ln(e^2) - \left(e^2 - e\right) = 2 - e^2 + e.$$

   由于 $e^2 \approx 7.389$, $2 + e \approx 4.718$, 所以 $g(e^2) = 2 - e^2 + e < 0$. 由连续性的介值性质,$g(1) > 0$, $g(e^2) < 0$ 跨号, 故在 $(1, e^2)$ 内至少有一根. 命题正确.

2. 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 一定是有界.

   (A) 对

   解: 这是拓扑/实分析的基本结论——连续函数在紧集 (闭有界区间) 上必有界 (Weierstrass 有界性定理).

3. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则它必能取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意值. **(A)** 对

   解: 这是介值定理的直接表述: 连续函数在区间上的像是区间, 因而对任一介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的值 y, 存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = y$.

4. 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 一定有最大值和最小值.

   (A) 对

   解: 这是 Weierstrass 极值定理: 连续函数在紧集上必能取得其最大值和最小值.

5. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1, \\ 3 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ 在闭区间 $[0, 2]$ 不连续.

   (B) 错

   解: 检查可能的不连续点 $x = 1$: 左极限与左值为 $2 \cdot 1 = 2$, 右极限与右值为 $3 - 1 = 2$, 两侧相等且等于定义值, 故在 $x = 1$ 处连续. 端点 $0, 2$ 处显然有定义且为一般点值. 于是 f 在 $[0, 2]$ 上处处连续, 命题在闭区间 $[0, 2]$ 不连续是错误的

4 导数与微分

4.1 题目集

4.1.1 导数概念

1. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$, 则 $f'(2)=(\quad)$.

2. 做直线运动的质点, 它所经过的路程与时间的关系为 $s=3t^2+1$, 则 $t=2$ 时质点的运动速度为 $(\quad)$.

3. 设 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=3f'(x_0)$, 则 $k=(\quad)$.

4. 设 $f'(x_0)$ 存在, 则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=(\quad)$.

   (A) $-f'(x_0)$ (B) $2f'(x_0)$ (C) $f'(x_0)$ (D) $-2f'(x_0)$

5. 设 $f'(x_0)$ 存在, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=(\quad)$.

   (A) $2f'(x_0)$ (B) $-2f'(x_0)$ (C) $f'(x_0)$ (D) $-f'(x_0)$

6. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 上点 $(2,\dfrac{1}{2})$ 处的切线方程为 $(\quad)$.

   (A) $4y+x+4=0$ (C) $4y+x-4=0$

   (B) $2y+x-2=0$ (D) $2y+x+2=0$

7. 设函数 $f(x),g(x)$ 均可导, 则 $(\quad)$.

   (A) $f(x)+g(x)$ 连续但不可导 (C) $f(x)+g(x)$ 不连续但可导

   (B) $f(x)+g(x)$ 可导 (D) $f(x)+g(x)$ 不连续

8. $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续, 但它在 $x=0$ 处不可导.

   (A) 对 (B) 错

4.1.2 求导法则及几类特殊函数的求导方法

1. 设 $f(\frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x} + 1$, 则 $f'(-1) = (\quad)$.

2. 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 且 $f'(1) = -2$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{d}{dx} f(\cos\sqrt{x}) = (\quad)$.

3. 设 $f(x) = \ln\tan\frac{x}{2}$, 则 $f'(\frac{\pi}{2}) = (\quad)$.

4. 设 $f(x) = (1+x)^x$, 则 $f'(0) = (\quad)$.

5. 设 $f(x) = x^3 + 4\cos x - \sin\frac{\pi}{2}$, 则 $f'(0) = (\quad)$.

6. 设 $f(x) = x\ln x$ 则 $f'(e) = (\quad)$.

7. 设 $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$, 则 $f'(\frac{\pi}{2}) = (\quad)$.

8. 设 $f(x) = \ln\sin x$, 则 $f'(\frac{\pi}{4}) = (\quad)$.

9. 设 $f(x) = e^{\sin^2 x}$, 则 $f'(0) = (\quad)$.

10. 设 $y = (\arcsin\frac{x}{2})^2$, 则 $y' = (\quad)$.

    (A) $\dfrac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$ (B) $\dfrac{2\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x^2}}$ (C) $\dfrac{2\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$ (D) $-\dfrac{2\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$

11. 设 $y = e^{\sin\frac{1}{x}}$, 则 $y' = (\quad)$.

    (A) $\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}$ (C) $-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}$

    (B) $-e^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}$ (D) $e^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}$

12. 设两函数 $f(x), g(x)$ 均可导, 则下面结论中不正确的是 ( ).

    (A) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g'(x)$ (C) $[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)$

    (B) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ (D) $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$

13. 设函数 $f(x), g(x)$ 均可导, $|g(x)| \neq 0$, 则下面结论中不正确的是 ( ).

    (A) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, [g'(x)\neq 0]$

    (B) $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$

    (C) $[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)$

    (D) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

14. 设 $u=g(x)$ 在点 x 处可导, $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 处可导, 则 $y=f(g(x))$ 在点 x 处 ( ).

(A) 连续但不可导
(B) 可导且 $\dfrac{dy}{dx}=f'(u)g'(x)$
(C) 不连续
(D) 不可导

15. 设 $y=\sin x^2$, 则 $y'=$ ( ).

(A) $2x\cos x^2$ (B) $\cos x^2$ (C) $-\cos x^2$ (D) $-2x\cos x^2$

16. 设 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 则 $y'=$ ( ).

(A) $x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ (B) $x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (C) $-x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ (D) $-x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

17. 设 $y=\ln(\tan\dfrac{x}{2})$, 则 $y'=$ ( ).

(A) $2\csc x$ (B) $\sec x$ (C) $\csc x$ (D) $2\sec x$

18. 设 $y=\sin^2(\dfrac{1-\ln x}{x})$, 则 $y'=$ ( ).

(A) $\dfrac{2}{x^2}(\ln x-2)\sin(\dfrac{1-\ln x}{x})$
(B) $\dfrac{2}{x}(\ln x-2)\cos(\dfrac{1-\ln x}{x})$
(C) $\dfrac{1}{x}(\ln x-2)\sin 2(\dfrac{1-\ln x}{x})$
(D) $\dfrac{1}{x^2}(\ln x-2)\sin 2(\dfrac{1-\ln x}{x})$

19. 由方程 $1+\sin(x+y)=e^{-xy}$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数为 ( ).

(A) $-\dfrac{ye^{-xy}+\cos(x+y)}{xe^{-xy}+\cos(x+y)}$
(B) $\dfrac{ye^{-xy}-\cos(x+y)}{xe^{-xy}+\cos(x+y)}$
(C) $\dfrac{ye^{-xy}+\cos(x+y)}{xe^{-xy}+\cos(x+y)}$
(D) $\dfrac{ye^{-xy}+\cos(x+y)}{xe^{-xy}-\cos(x+y)}$

20. 曲线 $\begin{cases} x=\sin\theta \\ y=\cos 2\theta \end{cases}$, 在点 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程为 ( ).

(A) $2\sqrt{2}x+y-4=0$
(B) $2\sqrt{2}x+y+2=0$
(C) $2\sqrt{2}x+y-2=0$
(D) $2\sqrt{2}x+y+4=0$

4.1.3 高阶导数

1. 设 $f(x) = x\cos x$, 则 $f''(-\frac{\pi}{2}) = (\quad)$.

2. 设 $f(x) = 2x^2 + \ln x$, 则 $f''(1) = (\quad)$.

3. 设 $y = \ln(1+x)$, 则 $y^{(n)} = (\quad)$

   (A) $\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

   (B) $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

   (C) $-\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

   (D) $(-1)^n\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

4. 设 $y = \sin x$, 则 $y^{(n)} = (\quad)$

   (A) $\cos x$

   (B) $\cos(x + n\frac{\pi}{2})$

   (C) $\sin x$

   (D) $\sin(x + n\frac{\pi}{2})$

5. 设由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定的函数 y 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2} = (\quad)$.

   (A) $\frac{1+t^2}{4t}$

   (B) $\frac{1}{2}$

   (C) $\frac{1-t^2}{4t}$

   (D) $\frac{1+t^2}{4}$

6. 由方程 $y = 1 + xe^y$ 确定的隐函数 y 的二阶导数为 $(\quad)$.

   (A) $\frac{e^{2y}(3+y)}{(2-y)^3}$

   (B) $\frac{e^{2y}(3+y)}{(2+y)^3}$

   (C) $\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$

   (D) $\frac{e^{2y}(3-y)}{(2+y)^3}$

4.1.4 函数的微分

1. 下面结论中正确的是 ( ).

(A) 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 但反之不然

(B) 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 但反之不然

(C) 设 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 但反之不然

(D) 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 但反之不然

2. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 则下面结论中不正确的是 ( ).

(A) $f(x)$ 在点 x_0 处可导

(B) $f(x)$ 在点 x_0 处连续

(C) $f(x)$ 在点 x_0 处不可导

(D) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处存在切线

3. 设 $y = \tan^2(1 + 2x^2)$, 则 $dy = $ ( ).

(A) $dy = 4x\tan(1 + 2x^2)\sec^2(1 + 2x^2)dx$

(B) $dy = 8x\tan(1 + 2x^2)\sec^2(1 + 2x^2)dx$

(C) $dy = 8x\tan(1 + 2x^2)\csc^2(1 + 2x^2)dx$

(D) $dy = 4x\tan(1 + 2x^2)\csc^2(1 + 2x^2)dx$

4. 设 $y = 5^{\tan x}$, 则 $dy = $ ( ).

(A) $5^{\tan x}\sec^2 xdx$

(B) $5^{\tan x}\ln 5\sec xdx$

(C) $5^{\tan x}\sec xdx$

(D) $5^{\tan x}\ln 5\sec^2 xdx$

5. 设由方程 $\sin(x^2 + y^2) + e^x - xy^2 = 0$ 确定的函数 $y = y(x)$ 的微分 $dy = $ ( ).

(A) $\dfrac{y^2 + e^x - 2x\cos(x^2 + y^2)}{2y\cos(x^2 + y^2) - 2xy}dx$

(B) $\dfrac{y^2 - e^x + 2x\cos(x^2 + y^2)}{2y\cos(x^2 + y^2) - 2xy}dx$

(C) $\dfrac{y^2 - e^x - 2x\cos(x^2 + y^2)}{2y\cos(x^2 + y^2) - 2xy}dx$

(D) $\dfrac{y^2 - e^x - 2x\cos(x^2 + y^2)}{2y\cos(x^2 + y^2) + 2xy}dx$

6. 在点 x_0 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等是 $f(x)$ 在点 x_0 处可微的 ( ) 条件.(可选填" 必要"、" 充分" 和" 充分必要")

7. $f(x)$ 在点 x_0 处可微是 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的 ( ) 条件.(可选填" 必要"、" 充分" 和" 充分必要")

4.2 解答集

4.2.1 导数概念

1. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处连续, 且 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$, 则

$$f(2)=0,\quad f'(2)=3.$$

$$\boxed{f'(2)=3.}$$

2. 做直线运动的质点, 它所经过的路程与时间的关系为 $s=3t^2+1$, 则速度为

$$v=\frac{ds}{dt}=6t,\quad t=2\Rightarrow v=12.$$

$$\boxed{12.}$$

3. 设 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=3f'(x_0)$, 由导数定义可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{k\Delta x}=f'(x_0),$$

所以该极限等于 $kf'(x_0)$. 故 $k=3$.

$$\boxed{k=3.}$$

4. 设 $f'(x_0)$ 存在, 则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2f'(x_0).$$

$$\boxed{(B)\ 2f'(x_0).}$$

5. 设 $f'(x_0)$ 存在, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]+[f(x_0)-f(x_0-h)]}{h}=2f'(x_0).$$

$$\boxed{(A)\ 2f'(x_0).}$$

6. 曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $(2,\frac{1}{2})$ 处的切线方程：

$$y'=-\frac{1}{x^2},\quad y'(2)=-\frac{1}{4}.$$

切线方程为

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow x + 4y - 4 = 0.$$

$$\boxed{(C)\ 4y + x - 4 = 0.}$$

7. 设函数 $f(x), g(x)$ 均可导, 则它们的和也可导.

$$\boxed{(B)\ f(x) + g(x)\ \text{可导.}}$$

8. $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处连续, 但左、右导数分别为 -1 与 1, 不相等, 因此不可导.

$$\boxed{(A)\ \text{对}}$$

4.2.2 求导法则及几类特殊函数的求导方法

1. 设 $f\big(\frac{1}{x}\big)=x^2+\frac{1}{x}+1$. 令 $u=\frac{1}{x}$ 则

$$f(u)=\frac{1}{u^2}+u+1,\quad f'(u)=-\frac{2}{u^3}+1.$$

所以 $f'(-1)=-2/(-1)^3+1=3$.

$$\boxed{\text{故答案为:3}}$$

2. $y=f(\cos\sqrt{x})$. 对 x 求导得

$$\frac{d}{dx}f(\cos\sqrt{x})=f'(\cos\sqrt{x})\cdot\big(-\sin\sqrt{x}\big)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

令 $x\to 0$, 得极限 $f'(1)\cdot(-\frac{1}{2})=-2\cdot(-\frac{1}{2})=1$.

$$\boxed{\text{故答案为:1}}$$

3. $f(x)=\ln\tan\frac{x}{2}$. 由链式法则

$$f'(x)=\frac{1}{\tan(x/2)}\cdot\sec^2(x/2)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}=\frac{1}{\sin x}.$$

故 $f'(\frac{\pi}{2})=1$.

$$\boxed{\text{故答案为:1}}$$

4. $f(x)=(1+x)^x=e^{x\ln(1+x)}$, 故

$$f'(x)=f(x)\big(\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\big).$$

取 $x=0$ 得 $f'(0)=1\cdot(0+0)=0$.

$$\boxed{\text{故答案为:0}}$$

5. $f(x)=x^3+4\cos x-\sin\frac{\pi}{2}=x^3+4\cos x-1$, 因此

$$f'(x)=3x^2-4\sin x,\quad f'(0)=0.$$

$$\boxed{\text{故答案为:0}}$$

6. $f(x) = x\ln x$, $f'(x) = \ln x + 1$. 故 $f'(e) = 1 + 1 = 2$.

$$\boxed{\text{故答案为:2}}$$

7. $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$. 用商法则得

$$f'(x) = \frac{\sin^2 x - (1-\cos x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}.$$

在 $x = \dfrac{\pi}{2}$, 值为 1.

$$\boxed{\text{故答案为:1}}$$

8. $f(x) = \ln\sin x$, $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$. 在 $x = \dfrac{\pi}{4}$,$\cot\dfrac{\pi}{4} = 1$.

$$\boxed{\text{故答案为:1}}$$

9. $f(x) = e^{\sin^2 x}$, 因此

$$f'(x) = e^{\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cos x = e^{\sin^2 x}\sin(2x).$$

在 $x = 0$,$f'(0) = 0$.

$$\boxed{\text{故答案为:0}}$$

10. $y = \left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^2$, 由链式法则

$$y' = 2\arcsin\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$\boxed{\text{故答案为:}(C)\ \frac{2\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}}$$

11. $y = e^{\sin(1/x)}$, 由链式法则

$$y' = e^{\sin(1/x)}\cos(1/x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}e^{\sin(1/x)}\cos\frac{1}{x}.$$

$$\boxed{\text{故答案为:}(C)\ -\frac{1}{x^2}e^{\sin(1/x)}\cos\frac{1}{x}}$$

12. 关于可导函数 f, g 的结论中不正确的是

$$\boxed{\text{故答案为:}(A)\ [f(x)g(x)]' = f'(x)g'(x)\ (\text{错误})}$$

13. 在给定选项中不正确的是 (注意分母条件)

$$\boxed{\text{故答案为:}(A)\ \text{错误在条件写成}[g'(x) \neq 0]\ \text{而非}g(x) \neq 0.}$$

14. 链式法则给出复合函数可导且

$$\boxed{\text{故答案为:}(B)\ \frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x).}$$

15. $y = \sin x^2$,$y' = 2x\cos x^2$.

$$\boxed{\text{故答案为:}(A)\ 2x\cos x^2}$$

16. $y = (1-x^2)^{-1/2}$, 则

$$y' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = x(1-x^2)^{-3/2}.$$

$$\boxed{\text{故答案为:}(A)\ x(1-x^2)^{-3/2}}$$

17. $y = \ln(\tan\frac{x}{2})$, 前面已算得 $y' = \csc x$.

$$\boxed{\text{故答案为:}(C)\ \ \csc x}$$

18. $y = \sin^2\big(\frac{1-\ln x}{x}\big)$. 设 $u = \frac{1-\ln x}{x}$, 则

$$y' = \sin(2u) \cdot u', \quad u' = \frac{\ln x - 2}{x^2},$$

所以

$$y' = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2)\sin 2\Big(\frac{1-\ln x}{x}\Big).$$

$$\boxed{\text{故答案为:}(D)}$$

19. 由 $1+\sin(x+y)=e^{-xy}$ 隐函数求导：

$$\cos(x+y)(1+y')=e^{-xy}\big(-y-xy'\big).$$

解得

$$y'=-\frac{ye^{-xy}+\cos(x+y)}{xe^{-xy}+\cos(x+y)}.$$

$$\boxed{\text{故答案为:}(A)}$$

20. 参数曲线 $x=\sin\theta,\ y=\cos 2\theta$. 斜率

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{-2\sin 2\theta}{\cos\theta}.$$

在 $\theta=\frac{\pi}{4}$, 点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0)$, 斜率 $-2\sqrt{2}$, 切线为

$$y=-2\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\implies 2\sqrt{2}x+y-2=0.$$

$$\boxed{\text{故答案为:}(C)\ 2\sqrt{2}x+y-2=0}$$

4.2.3 高阶导数

1. $f(x)=x\cos x$,$f'(x)=\cos x-x\sin x$,$f''(x)=-2\sin x-x\cos x$.
$f''\big(-\frac{\pi}{2}\big)=-2\sin\big(-\frac{\pi}{2}\big)-\big(-\frac{\pi}{2}\big)\cos\big(-\frac{\pi}{2}\big)=2.$

$$\boxed{\text{故答案为:}2}$$

2. $f(x)=2x^2+\ln x$,$f''(x)=4-\frac{1}{x^2}$.
$f''(1)=4-1=3.$

$$\boxed{\text{故答案为:}3}$$

3. $y=\ln(1+x)$, 有 $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

$$\boxed{\text{故答案为:}(B)\ (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}}$$

4. $y=\sin x$, 因此 $y^{(n)}=\sin\big(x+n\frac{\pi}{2}\big)$.

$$\boxed{\text{故答案为:}(D)\ \sin\big(x+n\frac{\pi}{2}\big)}$$

5. 参数方程 $x=\ln(1+t^2)$, $y=t-\arctan t$.
$dx/dt=\frac{2t}{1+t^2}$, $dy/dt=\frac{t^2}{1+t^2}$, 故 $\frac{dy}{dx}=\frac{t}{2}$.
$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}=\frac{1+t^2}{4t}.$

$$\boxed{\text{故答案为:}(A)\ \frac{1+t^2}{4t}}$$

6. 隐函数 $y=1+xe^y$. 先得 $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{1-xe^y}$. 继续求二阶导并用 $xe^y=y-1$ 代换, 得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}.$$

$$\boxed{\text{故答案为:}(C)\ \frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}}$$

4.2.4 函数的微分

1. 可导可以推导出连续, 但是连续函数在尖端处不可导, $\boxed{\text{故答案为:}(D)}$.

2. 显然 $\boxed{(C)}$ 不正确. 正确的结论是 (A),(B),(D) 中的均为真, 因此 (C) 错误.

3. 令 $u = 1 + 2x^2$, 有 $y = \tan^2 u$,

$$dy = 2\tan u{\cdot}\sec^2 u\, du = 2\tan(1{+}2x^2)\sec^2(1{+}2x^2){\cdot}(4x)\, dx = 8x\tan(1{+}2x^2)\sec^2(1{+}2x^2)\, dx.$$

$\boxed{\text{故答案为:}(B)}$.

4. $y = 5^{\tan x} \Rightarrow dy = 5^{\tan x}\ln 5 \cdot (\sec^2 x)\, dx$. $\boxed{(D)}$.

5. 由方程 $\sin(x^2 + y^2) + e^x - xy^2 = 0$, 对 x 求导得：

$$\cos(x^2 + y^2)\,(2x + 2y\,y') + e^x - (y^2 + 2xy\,y') = 0, \tag{1}$$

$$\Rightarrow\ y'(2y\cos(x^2 + y^2) - 2xy) = y^2 - e^x - 2x\cos(x^2 + y^2), \tag{2}$$

$$\Rightarrow\ dy = y'\,dx = \frac{y^2 - e^x - 2x\cos(x^2 + y^2)}{2y\cos(x^2 + y^2) - 2xy}\,dx. \tag{3}$$

$\boxed{\text{故答案为:}C}$

6. “左导数与右导数都存在且相等”是 f 在点 x_0 处可微的 $\boxed{\text{充分必要}}$ 条件.

7. “f 在点 x_0 处可微”是“f 在点 x_0 处连续”的 $\boxed{\text{充分}}$ 条件.

5 中值定理与导数的应用

5.1 题目集

5.1.1 中值定理

1. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)+xf(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+f(x)}{x}=(\quad)$.

2. 下列函数在指定区间上满足罗尔中值定理条件的是 ( ).

   (A) $f(x)=(x-4)^2, x\in[-2,4]$

   (B) $f(x)=\sin x, x\in\left[-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

   (C) $f(x)=|x|, x\in[-1,1]$

   (D) $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\in[0,1]$

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内平行于 x 轴的切线 ( ).

   (A) 至少有一条

   (B) 不存在

   (C) 不一定存在

   (D) 仅有一条

5.1.2 洛必达法则

1. 当 $x \to 0$ 时, 函数 $\dfrac{x^2}{2} + \cos x - 1$ 是函数 x^4 的 ( ).

(A) 等价无穷小
(B) 高阶无穷小
(C) 同阶但非等价无穷小
(D) 低阶无穷小

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x} =$ ( ).

(A) ∞
(B) $e^{-\frac{1}{2}}$
(C) e
(D) 1

3. 设 $\lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{1}{ax+1} - \dfrac{3}{x^3+1} \right) = b$, 其中 a, b 为常数, 则 ( ).

(A) $a = 1, b = -1$
(B) $a = -1, b = 1$
(C) $a = 1, b = 1$
(D) $a = -1, b = -1$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right) =$ ( ).

(A) 1
(B) 0
(C) $\dfrac{1}{2}$
(D) ∞

5. $\lim\limits_{x \to 0} (e^x - \sin x)^{\frac{8}{x^2}} =$ ( ).

(A) e^8
(B) 1
(C) ∞
(D) e^4

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)^{\frac{1}{x}} =$ ( ).

(A) 1
(B) e
(C) ∞
(D) $e^{\frac{1}{2}}$

7. $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 - \cos x)^x =$ ( ).

(A) e^{-1}
(B) 1
(C) e
(D) ∞

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sqrt{x^2+36}}{e^x - \sin x - 1} =$ ( ).

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{\ln x-x+1}=(\quad)$.

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-12x+16}{x^3-3x^2+4}=(\quad)$.

11. 设 $f(x)$ 二阶可导,$f''(0)=4,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\alpha}$, 则 $\alpha=(\quad)$.

5.1.3 函数的单调性和曲线的凹凸性

1. 设 $f''(x) > 0$, 且 $f(0) = 0$, 则必有 ( ).

(A) $2f(1) = f(2)$

(B) $2f(1) > f(2)$

(C) $2f(1) < f(2)$

(D) 其他选项都不正确

2. 曲线 $y = \dfrac{e^x}{1+x}$ 有 ( ).

(A) 无拐点

(B) 有三个拐点

(C) 有两个拐点

(D) 有一个拐点

3. 曲线 $y = xe^{-x}$ 的拐点坐标为 ( ).

(A) $(2, 2e^{-2})$

(B) $(0, 0)$

(C) 不存在

(D) $(1, e^{-1})$

4. 设 $f(x)$ 满足 $\dfrac{df(x)}{de^{-x}} = x$, 则 $y = f(x)$ 的 ( ).

(A) 凹区间为 $(-1, +\infty)$; 凸区间为 $(-\infty, -1)$

(B) 凹区间为 $[1, +\infty)$; 凸区间为 $(-\infty, 1]$

(C) 凹区间为 $[-1, +\infty)$; 凸区间为 $(-\infty, -1]$

(D) 凹区间为 $[1, +\infty)$; 凸区间为 $(-\infty, 1)$

5. 曲线 $y = (2-x)^{-\frac{1}{3}}$ 在 $(2, +\infty)$ 内 ( ).

(A) 单调递减且为凸的

(B) 单调递增且为凹的

(C) 单调递增且为凸的

(D) 单调递减且为凹的

6. 函数 $f(x) = x\ln x + \dfrac{1}{e}$ 在定义域内有 ( ) 个零点.

(A) 1

(B) 0

(C) 2

(D) 3

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足 $f''(x) > 0$, 则 $f'(1), f(1) - f(0), f'(0)$ 的大小顺序为 ( ).

(A) $f'(1) > f'(0) - f(1) > f'(0)$

(B) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$

(C) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$

(D) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$

8. 设函数 $f(x), g(x)$ 是大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则当 $a < x < b$ 时, 有 ( ).

(A) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$

(B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

(D) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$

9. 已知函数 $f(x) = (x-1)(x+1)^3$, 则 ( ).

(A) 函数在区间 $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调减少, 在区间 $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ 上单调增加

(B) 函数在定义域上单调减少

(C) 函数在区间 $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ 上单调减少, 在区间 $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调增加

(D) 函数在定义域上单调增加

10. 已知函数 $f(x) = x - \ln(1+x)$, 则 ( ).

(A) 函数在区间 $(-1, 0]$ 上单调减少, 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调增加

(B) 函数在定义域上单调减少

(C) 函数在区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少, 在区间 $(-1, 0]$ 上单调增加

(D) 函数在定义域上单调增加

5.1.4 函数的极值与最值

1. 设 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{(x-2)^3}=1$, 则在 $x=2$ 处 ( ).

(A) 取得极小值

(B) 取得极大值

(C) $f(x)$ 不取得极值

(D) $f(x)$ 的导数存在且 $f'(2)\neq 0$

2. 下列说法中不正确的是 ( ).

(A) 函数在区间 (a,b) 内的极大值不一定大于极小值

(B) 若 $f'(x_0)=0$,$f''(x_0)=0$ 则不能确定 $x=x_0$ 是不是函数 $f(x)$ 的极值点

(C) 使 $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在的点, 有可能是 $f(x)$ 的极值点

(D) 若 $f'(x_0)=0, f''(x_0)<0$, 则 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的极小点

3. 若 $x=x_0$ 为函数 $y=f(x)$ 的极值点, 则 ( ).

(A) $f'(x_0)=0$

(B) $f'(x_0)$ 不存在

(C) $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

(D) $f'(x_0)\neq 0$

4. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内的一阶导数连续, 且 $f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{e^{2x}-1}=-3$, 则 ( ).

(A) 点 $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $f'(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值

(C) $f''(0)$ 存在但 $\neq -6$

(D) $f''(0)$ 不存在

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值分别为 ( ).

(A) $f(b), f(a)$

(B) a, b

(C) $f'(a), f'(b)$

(D) $f(a), f(b)$

6. 函数 $f(x)=x+2\cos x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 ( ).

(A) $\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

(B) $\dfrac{\pi}{6}-\sqrt{3}$

(C) $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

(D) $\dfrac{\pi}{3}+\sqrt{3}$

7. 设 $x = x_0$ 为函数 $y = f(x)$ 的驻点, 则 (　).

(A) $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极值　　(C) $f(x_0) = 0$

(B) $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点　　(D) $f'(x_0) = 0$

5.1.5 函数图像的描绘

1. 曲线 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ 的水平渐近线为 ( ), 铅直线渐近线为 ( ).

(A) $y=1, x=-1$

(B) $y=-1, x=1$

(C) $y=1, x=1$

(D) $y=-1, x=-1$

2. 曲线 $y=x\arctan x$ 的斜渐近线为 ( ).

(A) $y=\dfrac{\pi}{4}x+1, y=-\dfrac{\pi}{4}x+1$

(B) $y=\dfrac{\pi}{2}x+1, y=-\dfrac{\pi}{2}x+1$

(C) $y=\dfrac{\pi}{2}x-1, y=-\dfrac{\pi}{2}x-1$

(D) $y=\dfrac{\pi}{4}x-1, y=-\dfrac{\pi}{4}x-1$

5.2 解答集

5.2.1 中值定理

1. 设
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+xf(x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$
展开得 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$. 若
$$1+f(x)=cx+o(x)$$
则
$$\ln(1+x)+xf(x)=\big(-\frac{1}{2}+c\big)x^2+o(x^2).$$
因此 $-\dfrac{1}{2}+c=\dfrac{1}{2}$, 得 $c=1$. 故
$$\lim_{x\to 0}\frac{1+f(x)}{x}=1.$$

2. 判断罗尔定理条件是否满足.

   (A) $f(x)=(x-4)^2,\ x\in[-2,4]$. $f(-2)=36,\ f(4)=0$, 端点值不等, 故不满足.

   (B) $f(x)=\sin x,\ x\in\left[-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. 连续可导且 $\sin(-\dfrac{3\pi}{2})=1=\sin(\dfrac{\pi}{2})$, 故满足.

   (C) $f(x)=|x|,\ x\in[-1,1]$. 连续但在 0 处不可导, 故不满足.

   (D) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in[0,1]$. 在 0 处未定义, 故不满足.

   因此仅 (B) 满足罗尔定理条件.

3. 由题意 f 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 内可导且 $f(a)=f(b)$, 应用罗尔定理可知存在 $c\in(a,b)$ 使 $f'(c)=0$. 因此曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内与 x 轴平行的切线 **至少有一条**. 故选 (A).

5.2.2 洛必达法则

1. 求当 $x \to 0$ 时 $\dfrac{x^2}{2} + \cos x - 1$ 与 x^4 的阶次关系.

   考虑极限
   $$L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \cos x - 1}{x^4}.$$
   分子在 $x = 0$ 处及其前几阶导数均为 0, 可对分子与分母同时使用洛必达法则四次. 记
   $$N(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1, \qquad D(x) = x^4.$$
   依次求导:
   $$N'(x) = x - \sin x, \quad N''(x) = 1 - \cos x, \quad N^{(3)}(x) = \sin x, \quad N^{(4)}(x) = \cos x,$$
   $$D'(x) = 4x^3, \quad D''(x) = 12x^2, \quad D^{(3)}(x) = 24x, \quad D^{(4)}(x) = 24.$$
   由洛必达法则得
   $$L = \lim_{x\to 0} \frac{N^{(4)}(x)}{D^{(4)}(x)} = \frac{N^{(4)}(0)}{24} = \frac{\cos 0}{24} = \frac{1}{24}.$$
   因此原函数与 x^4 同阶且等价系数非零, 故为同阶无穷小.

   故选:(C).

2. 计算
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}.$$
   取对数, 设极限为 L, 则
   $$\ln L = \lim_{x\to\infty} \left(x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x\right) = \lim_{x\to\infty} x^2 \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right).$$
   将其写为商的形式:
   $$\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}.$$
   分子与分母在 $x \to \infty$ 时都趋于 0, 可用洛必达法则. 对 x 求导 (注意求导可以直接对原变量进行):
   $$分子' = \frac{d}{dx}\left(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2(1+\frac{1}{x})} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x^3(1+\frac{1}{x})},$$
   $$分母' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3}.$$

因此

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3(1+\frac{1}{x})}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{2(1+\frac{1}{x})} = -\frac{1}{2}.$$

于是 $L = e^{-1/2}$.

故选:(B).

3. 设

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{ax+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=b.$$

要使极限存在, 两个分式在 $x=-1$ 处的主极部必须相互抵消. 注意

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1),\quad x^2-x+1\big|_{x=-1}=3.$$

若在 $x=-1$ 处分母 $ax+1$ 不为零, 则第一项有限而第二项在 $x=-1$ 处有极点, 极限不存在. 因此必须有 $a=1$, 使第一项在 $x=-1$ 也有与第二项同阶的极部. 令 $a=1$, 合并化简:

$$\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}=\frac{1}{x+1}-\frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x^2-x+1-3}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x-2}{x^2-x+1}.$$

代 $x=-1$, 得 $b=\dfrac{-3}{3}=-1$.

故选:(A).

4. 计算

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{e^x-1}\right).$$

合并为一项:

$$\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x-1-\ln(1+x)}{(e^x-1)\ln(1+x)}.$$

显然分母在 $x\to0$ 时为 $0\cdot0$ 形式, 分子也趋于 0. 为计算极限, 观察

$$分子=e^x-1-\ln(1+x).$$

将该分子写成商与 x^2:

$$\frac{e^x-1-\ln(1+x)}{x^2}\Big/\frac{(e^x-1)\ln(1+x)}{x^2}.$$

由洛必达法则或展开可证明分子与 x^2 同阶, 分母的两个因子均与 x 同阶, 因此整体极限

为

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-\ln(1+x)}{x^2}\bigg/\left(\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}\right).$$

计算分子极限 (可用洛必达两次):

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

而分母各极限均为 1, 因此原极限为 $1/2\div(1\cdot1)=\frac{1}{2}\times2=1$. 更简洁的洛必达过程可按需展开.

故选:1(A).

5. 计算

$$\lim_{x\to0}(e^x-\sin x)^{8/x^2}.$$

取对数:

$$\ln Y=\lim_{x\to0}\frac{8}{x^2}\ln\big(e^x-\sin x\big).$$

注意 $e^x-\sin x-1\sim\frac{x^2}{2}$, 因此

$$\ln\big(e^x-\sin x\big)=\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

于是

$$\ln Y=\lim_{x\to0}\frac{8}{x^2}\cdot\frac{x^2}{2}=4,$$

得 $Y=e^4$.

故选:(D).

6. 计算

$$\lim_{x\to+\infty}\big(x+\sqrt{1+x^2}\big)^{1/x}.$$

取对数:

$$\ln L=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\big(x+\sqrt{1+x^2}\big).$$

注意

$$x+\sqrt{1+x^2}=x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\sim2x,$$

因此

$$\ln\big(x+\sqrt{1+x^2}\big)=\ln x+\ln\big(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\big)=\ln x+O(1),$$

于是

$$\ln L = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x + O(1)}{x} = 0.$$

因此 $L = 1$.

故选:(A).

7. 计算

$$\lim_{x \to 0^+} (1 - \cos x)^x.$$

取对数:

$$\ln Y = \lim_{x \to 0^+} x \ln(1 - \cos x).$$

注意当 $x \to 0^+$,$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, 所以

$$\ln(1 - \cos x) = \ln\left(\frac{x^2}{2}\big(1 + o(1)\big)\right) = 2\ln x - \ln 2 + o(1).$$

因此

$$\ln Y = \lim_{x \to 0^+} x(2\ln x - \ln 2 + o(1)) = \lim_{x \to 0^+} 2x \ln x + o(x) = 0.$$

得 $Y = 1$.

故选:(B).

8. 计算

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2\sqrt{x^2 + 36}}{e^x - \sin x - 1}.$$

分子写为 $x^2\sqrt{x^2 + 36}$. 当 $x \to 0$, 有展开 $\sqrt{x^2 + 36} = 6 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$, 因此分子 $= 6x^2 + o(x^2)$. 分母利用之前得到的 $e^x - \sin x - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. 故极限为

$$\frac{6x^2}{\frac{x^2}{2}} = 12.$$

9.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - x^x}{\ln x - x + 1}.$$

函数在 $x = 1$ 处为不定型 $0/0$, 应用洛必达法则.

一次求导:

$$\begin{aligned}
&\text{分子}' = 1 - \frac{d}{dx}\big(x^x\big) = 1 - x^x(\ln x + 1),\\
&\text{分母}' = \frac{1}{x} - 1.
\end{aligned}$$

代入 $x = 1$ 得仍为 $0/0$, 继续使用洛必达法则.

二次求导:

$$\begin{aligned}
\text{分子}'' &= -\frac{d}{dx}\Big[x^x(\ln x + 1)\Big] = -\Big[(x^x(\ln x + 1))(\ln x + 1) + x^x \cdot \frac{1}{x}\Big]\\
&= -x^x\Big[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x}\Big],\\
\text{分母}'' &= -\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

因此根据洛必达法则

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - x^x}{\ln x - x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\text{分子}''}{\text{分母}''} = \lim_{x\to 1} x^{x+2}\Big[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x}\Big].$$

在 $x = 1$ 处代入得

$$1^3\big[(0 + 1)^2 + 1\big] = 1 \cdot (1 + 1) = 2.$$

故原极限为 2.

10. 计算

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 12x + 16}{x^3 - 3x^2 + 4}.$$

对分子分母代入 $x = 2$ 得 $0/0$. 可对 x 关于 2 展开或直接用洛必达法则. 对两边分别对 x 求导直到消去不定式:

$$\text{第 1 次求导:}\quad \frac{3x^2 - 12}{3x^2 - 6x}.$$

代入 $x = 2$ 仍得 $0/0$. 继续求导:

$$\text{第 2 次求导:}\quad \frac{6x}{6x - 6}.$$

代入 $x = 2$ 得 $\dfrac{12}{6} = 2$. 故极限为 2.

(亦可因式分解得相同结果: 均含因子 $(x - 2)^2$, 化简后代入得 2.)

11. 设 f 二阶可导,$f''(0) = 4$, 且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. 若

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{1/x} = e^{\alpha},$$

求 α.

由 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ 可得 $f(0) = 0$ 且 $f'(0) = 0$. 由泰勒展式 (或对 f 作二次展开):

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = 2x^2 + o(x^2).$$

因此

$$\frac{f(x)}{x} = 2x + o(x).$$

取对数并除以 x:

$$\frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right) \sim \frac{1}{x} \cdot \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)}{x^2} \to 2.$$

所以 $\alpha = 2$.

5.2.3 函数的单调性和曲线的凹凸性

1. 设 $f''(x) > 0$,$f(0) = 0$. 由凹函数的中点不等式 (严格凹性, 因为 $f'' > 0$) 有

$$f(1) = f\left(\frac{0+2}{2}\right) < \frac{f(0)+f(2)}{2} = \frac{0+f(2)}{2},$$

因此 $2f(1) < f(2)$.

故选 (C).

2. 令 $y = \dfrac{e^x}{1+x}$. 先求二阶导数.

$$y' = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \frac{e^x x}{(1+x)^2},$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x x}{(1+x)^2}\right) = \frac{(x^2+1)e^x}{(1+x)^3}.$$

分子 $(x^2+1)e^x > 0$ 对所有实数成立；分母为 $(1+x)^3$, 在 $x = -1$ 时分母为 0 且函数在 $x = -1$ 处无定义. 因而不存在点使 $y'' = 0$(函数处处二阶导号定, 且在定义域内二阶导不变号), 故无拐点.

故选 (A).

3. $y = xe^{-x}$. 计算二阶导:

$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x),$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\big(e^{-x}(1-x)\big) = e^{-x}(x-2).$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 2$. 拐点坐标为 $(2, 2e^{-2})$.

选 (A).

4. 题中给出 $\dfrac{df(x)}{d(e^{-x})} = x$. 设 $t = e^{-x}$, 则 $\dfrac{dy}{dt} = x$. 用链式法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = x \cdot (-e^{-x}) = -xe^{-x}.$$

再求二阶导

$$y'' = \frac{d}{dx}(-xe^{-x}) = e^{-x}(x-1).$$

因此当 $x < 1$ 时 $y'' < 0$(函数向上凸), 当 $x > 1$ 时 $y'' > 0$(函数向下凹), 在 $x = 1$ 处 $y'' = 0$. 所以函数的凹凸区间为: 在 $(-\infty, 1)$ 为凸, 在 $(1, \infty)$ 为凹. 与选项对应 (含端点 1 可视为任意包含, 但常取开区间)

故选 (B).

5. $y=(2-x)^{-1/3}$. 在区间 $(2,\infty)$ 上计算导数:

$$y'=-\frac{1}{3}(2-x)^{-4/3}\cdot(-1)=\frac{1}{3}(2-x)^{-4/3}>0,$$

因此在 $(2,\infty)$ 单调递增. 二阶导:

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}(2-x)^{-4/3}\right)=\frac{1}{3}\cdot(-\frac{4}{3})(2-x)^{-7/3}\cdot(-1)=\frac{4}{9}(2-x)^{-7/3}.$$

注意对 $x>2$,$(2-x)^{-7/3}$ 为负数 (因底为负且分母为奇数), 所以 $y''<0$, 即在 $(2,\infty)$ 为凸函数. 综上, 单调递增且为凸的.

故选 (C).

6. $f(x)=x\ln x+\frac{1}{e}$, 定义域 $x>0$. 设 $h(x)=x\ln x$, 则

$$h'(x)=\ln x+1,$$

在 $x=\frac{1}{e}$ 处 $h'(x)=0$, 且 $h''(x)=1/x>0$, 故 $x=\frac{1}{e}$ 为唯一极小点, 极小值

$$h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}.$$

方程 $x\ln x=-\frac{1}{e}$ 有且仅有一解 $x=\frac{1}{e}$, 因此 $f(x)=0$ 在定义域内有且仅有一个零点.

故选 (A).

7. $f''(x)>0$ 在 $[0,1]$ 上, 所以 f 在 $[0,1]$ 上为凹函数. 由拉格朗日中值定理存在 $c\in(0,1)$ 使

$$f(1)-f(0)=f'(c).$$

由于 $f''>0$,f' 单调递增, 故

$$f'(0)<f'(c)<f'(1).$$

因此

$$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0).$$

故选 (C).

8. $f(x), g(x) > 0$ 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$. 注意

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} < 0,$$

所以 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 (a, b) 上单调递减. 于是对任意 $x \in (a, b)$ 有

$$\frac{f(b)}{g(b)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{f(a)}{g(a)}.$$

故

$$f(x)g(b) > f(b)g(x).$$

故选 (D).

9. $f(x) = (x-1)(x+1)^3$. 求导:

$$f'(x) = (x+1)^3 + 3(x-1)(x+1)^2 = (x+1)^2\big[(x+1) + 3(x-1)\big] = 2(x+1)^2(2x-1).$$

由此 $f'(x) = 0$ 当且仅当 $x = -1$(重根) 或 $x = \dfrac{1}{2}$. 因为 $(x+1)^2 \geq 0$, 符号由 $2x - 1$ 决定. 故在 $(-\infty, \dfrac{1}{2})$ 上 $f'(x) < 0$(单调减少), 在 $(\dfrac{1}{2}, \infty)$ 上 $f'(x) > 0$(单调增加).

综上, 故选 (C).

10. $f(x) = x - \ln(1+x)$, 定义域 $x > -1$. 求导:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

当 $-1 < x < 0$ 时分子 $x < 0$ 而分母 $1 + x > 0$, 故 $f'(x) < 0$；当 $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$. 因此在 $(-1, 0]$ 上单调减少, 在 $[0, \infty)$ 上单调增加.

故选 (A).

5.2.4 函数的极值与最值

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{(x-2)^3}=1$.

$$f(x)-f(2)=(x-2)^3+o((x-2)^3).$$

故 $f'(2)=f''(2)=0$ 而主项为奇次 (立方), 左右符号相反, 函数在 $x=2$ 处不取极值. 选 (C).

2. 判断不正确的一项.

- (A) 可为真, 例如常函数时极大值等于极小值, 故命题成立.
- (B) 若 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$ 无法判断极值, 成立.
- (C) 驻点或不可导点均可能为极值点, 成立.
- (D) 若 $f'(x_0)=0, f''(x_0)<0$ 则 x_0 为局部极大值, 不是极小值,(D) 错误.

故选 (D).

3. 若 x_0 为极值点, 则必要条件为导数为零或导数不存在, 即

$$f'(x_0)=0 \quad 或 \quad f'(x_0)\ 不存在.$$

选 (C).

4. 已知 f' 在 0 附近连续, 且 $f'(0)=0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^{2x}-1}=-3.$$

用 $e^{2x}-1\sim 2x$ 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^{2x}-1}\cdot 2=-3\cdot 2=-6.$$

由 $f'(0)=0$ 可得

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=-6.$$

因此 $f''(0)$ 存在且等于 -6, 并在 $x=0$ 处取得极大值. 选 (B).

5. 若 $f'(x) < 0$ 在 $[a,b]$ 上, 则 f 在 $[a,b]$ 严格单调减少. 因此最大值在左端点, 最小值在右端点, 即最大为 $f(a)$, 最小为 $f(b)$. 选 (D).

6. $f(x) = x + 2\cos x,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$f'(x) = 1 - 2\sin x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}.$$

检查三点:

$$f(0) = 2, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

比较得最大值为 $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$. 选 (C).

7. 驻点定义即 $f'(x_0) = 0$. 选 (D).

5.2.5 函数图像的描绘

1. 曲线 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ 的水平渐近线为 (　), 铅直线渐近线为 (　).

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt[3]{1}=1,\quad \lim_{x\to-1^+} y=+\infty.$$

因此, 水平渐近线为 $y=1$, 铅直线渐近线为 $x=-1$.

答案选 (A) $y=1, x=-1$.

2. 曲线 $y=x\arctan x$ 的斜渐近线为 (　).

当 $x\to+\infty$ 时,

$$\arctan x\to\frac{\pi}{2},\quad y\approx\frac{\pi}{2}x.$$

于是求截距:

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(y-\frac{\pi}{2}x)=\lim_{x\to+\infty}(x\arctan x-\frac{\pi}{2}x)=\lim_{x\to+\infty}x(\arctan x-\frac{\pi}{2})=-1.$$

同理, 当 $x\to-\infty$ 时,

$$\arctan x\to-\frac{\pi}{2},\quad y\approx-\frac{\pi}{2}x,\quad b_2=\lim_{x\to-\infty}(y+\frac{\pi}{2}x)=-1.$$

因此两条斜渐近线为

$$y=\frac{\pi}{2}x-1,\quad y=-\frac{\pi}{2}x-1.$$

答案选 (C) $y=\frac{\pi}{2}x-1$, $y=-\frac{\pi}{2}x-1$.

6 不定积分

6.1 题目集

6.1.1 不定积分的概念与性质

1. 设 $f(x)$ 为连续函数, 则 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)dx = (\quad)$.

(A) $f'(x)$

(B) $f(x)$

(C) $f(x)+C$

(D) $f'(x)+C$

2. 若 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的一个原函数, 则 ( ).

(A) $\displaystyle\int f'(x)dx = g(x)+C$

(B) $\displaystyle\int f(x)dx = g(x)+C$

(C) $\displaystyle\int g'(x)dx = f(x)+C$

(D) $\displaystyle\int g(x)dx = f(x)+C$

3. 若 $\displaystyle\int f'(x^3)dx = x^3+C$, 则 $f(x) = (\quad)$.

(A) $\dfrac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$

(B) $\dfrac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$

(C) x^3+C

(D) $x+C$

4. 在可积函数 $f(x)$ 的积分曲线族中, 每一条曲线在横坐标相同的点处的切线 ( ).

(A) 相互垂直

(B) 平行于 y 轴

(C) 平行于 x 轴

(D) 相互平行

5. $\displaystyle\int 2^x e^x dx = (\quad)$.

(A) $\dfrac{2^x e^x}{1+\ln 2}$

(B) $\dfrac{2e^x}{1+\ln 2}+C$

(C) $\dfrac{2^x e^x}{1+\ln 2}+C$

(D) $\dfrac{2e^x}{1+\ln 2}$

6. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,C 为不等于 0 且不等于 1 的其他任意常数, 则 ( ) 也是 $f(x)$ 的原函数.

(A) $CF(x)$

(B) $F(Cx)$

(C) $F\left(\dfrac{x}{C}\right)$

(D) $C+F(x)$

7. 若 $f(x)$ 的导数为 $\sin x$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ( ).

(A) $1-\sin x$
(B) $1+\cos x$
(C) $1-\cos x$
(D) $1+\sin x$

8. 若 $f(x)$ 的一个原函数为 x^2, 则 $\int f'(x)dx=$ ( ).

(A) $2x$
(B) x^2+C
(C) x^2
(D) $2x+C$

9. 设 $\int \frac{f(x)}{x}dx=e^{2x}+C$, 则 $f(x)$ 为 ( ).

(A) $\frac{1}{2}xe^{2x}$
(B) $2xe^{2x}$
(C) $2xe^{2x}+C$
(D) xe^{2x}

10. 设 $f(x)$ 有连续导数, 下列等式中正确的是 ( ).

(A) $\int df(x)=f(x)$
(B) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$
(C) $\int f'(x)dx=f(x)$
(D) $d\int f(x)dx=f(x)$

11. 在区间 (a,b) 内的任一点 x, 如果总有 $f'(x)=g'(x)$ 成立, 则下列各式中必定成立的是 ( ).

(A) $\left[\int f(x)dx\right]'=\left[\int g(x)dx\right]'$
(B) $f(x)=g(x)$
(C) $f(x)=g(x)+C$
(D) $f(x)=g(x)+1$

12. 设 $I=\int \frac{1}{x^3}dx$, 则 $I=$ ( ).

(A) $\frac{1}{2}x^{-2}+C$
(B) $-3x^{-4}+C$
(C) $-\frac{1}{2}x^2+C$
(D) $-\frac{1}{2x^2}+C$

13. 若 $\ln|x|$ 是函数 $f(x)$ 的原函数, 则下列函数是 $f(x)$ 的另一原函数的是 ( ).

(A) $\ln|ax|$
(B) $\frac{1}{2}(\ln x)^2$
(C) $\ln|x+a|$
(D) $\frac{1}{a}\ln|ax|$

14. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin 2x \cdot \cos x} dx = (\quad)$.

(A) $\frac{1}{2}\csc x + C$

(B) $-\frac{1}{2}\csc x + C$

(C) $\frac{1}{2}\sec x + C$

(D) $-\frac{1}{2}\sec x + C$

15. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx = (\quad)$.

(A) $\sin x - \cos x + C$

(B) $-\sin x - \cos x + C$

(C) $\sin x + \cos x + C$

(D) $-\sin x + \cos x + C$

6.1.2 换元积分法

1. 设 $I=\int\frac{1}{3-4x}dx$, 则 $I=(\quad)$.

(A) $\ln|3-4x|+C$

(B) $\frac{1}{3}\ln|3-4x|+C$

(C) $\frac{1}{4}\ln|3-4x|+C$

(D) $-\frac{1}{4}\ln|3-4x|+C$

2. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int x^{-1}f(2\ln x)dx=(\quad)$.

(A) $\frac{1}{2}F(\ln x)+C$

(B) $\frac{1}{2}F(2\ln x)+C$

(C) $2F(\ln x)+C$

(D) $2F(2\ln x)+C$

3. 设 $I=\int\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$, 则 $I=(\quad)$.

(A) $\frac{1}{3}\arcsin x+C$

(B) $3\arcsin\frac{x}{3}+C$

(C) $\arcsin\frac{x}{3}+C$

(D) $-\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{3}+C$

4. 已知 $f(x)=e^{-x}$, 则 $\int\frac{f'(\ln x)}{x}dx=(\quad)$.

(A) $-\ln x+C$

(B) $\ln x+C$

(C) $\frac{1}{x}+C$

(D) $-\frac{1}{x}+C$

5. 下列等式中, 正确的是 ( ).

(A) $\int\frac{1}{\cos x}d\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1}{2\cos^2 x}+C$

(B) $\int(x^2+a)dt=\frac{1}{3}x^3+ax+C$

(C) $k\int f(x)dx=\int kf(x)dx\quad$ (k是常数)

(D) $\int f'(ax+b)dx=f(ax+b)+C$

6. $2\int\sec^2 2xdx=(\quad)$.

(A) $\tan x+C$

(B) $\tan x$

(C) $\tan 2x$

(D) $\tan 2x+C$

7. $\int xe^{-x^2}dx=(\quad)$.

(A) $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}+C$

(B) $-e^{-x^2}+C$

(C) $\dfrac{1}{2}e^{-x^2}+C$

(D) $e^{-x^2}+C$

8. 若 $\displaystyle\int f(x)dx=x^2+C$, 则 $\displaystyle\int xf(1-x^2)dx=(\quad)$.

(A) $2(1-x^2)^2+C$

(B) $\dfrac{1}{2}(1-x^2)^2+C$

(C) $-2(1-x^2)^2+C$

(D) $-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^2+C$

9. 若 $F'(x)=f(x)$, 则 $\displaystyle\int \sin x f(\cos x)dx=(\quad)$.

(A) $-F(\cos x)$

(B) $F(\cos x)+C$

(C) $-F(\cos x)+C$

(D) $F(\cos x)$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx=(\quad)$.

(A) $\dfrac{1}{2}\ln|x-\sqrt{1+x^2}|+\dfrac{1}{2}\arcsin x+C$

(B) $\dfrac{1}{2}\ln|x-\sqrt{1-x^2}|+\dfrac{1}{2}\arcsin x+C$

(C) $\dfrac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+\dfrac{1}{2}\arcsin x+C$

(D) $\dfrac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1-x^2}|+\dfrac{1}{2}\arcsin x+C$

11. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=(\quad)$.

(A) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}+C$

(B) $\sqrt{x^2-1}$

(C) $\sqrt{x^2-1}+C$

(D) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

12. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=(\quad)$.

(A) $\dfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}-\sqrt{x^2-1}+C$

(B) $\dfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+\sqrt{x^2-1}+C$

(C) $\dfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+\sqrt{x^2+1}+C$

(D) $\dfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}-\sqrt{x^2+1}+C$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(5+2\ln x)}=(\quad)$.

(A) $\ln|5+2\ln x|$

(B) $\dfrac{1}{2}\ln|5+2\ln x|+C$

(C) $\dfrac{1}{2}\ln|5+2\ln x|$

(D) $\ln|5+2\ln x|+C$

14. $\displaystyle\int \sin\sqrt{1+x^2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=(\quad)$.

(A) $-\sin\sqrt{1+x^2}+C$

(B) $\sin\sqrt{1+x^2}+C$

(C) $\cos\sqrt{1+x^2}+C$

(D) $-\cos\sqrt{1+x^2}+C$

15. $\int x\sqrt{2+x^2}dx=(\quad)$.

(A) $\frac{1}{3}(2+x^2)^{2/3}+C$

(B) $\frac{2}{3}(2+x^2)^{1/3}+C$

(C) $\frac{1}{3}(2+x^2)^{3/2}+C$

(D) $\frac{2}{3}(2+x^2)^{3/2}+C$

6.1.3 分部积分法

1. $\int x\sin x dx = (\quad)$.

(A) $-\sin x - x\cos x + C$

(B) $x\cos x - \sin x + C$

(C) $\sin x - x\cos x + C$

(D) $\sin x + x\cos x + C$

2. $\int \ln x dx = (\quad)$.

(A) $x(1-\ln x)+C$

(B) $-x(\ln x+1)+C$

(C) $x(\ln x-1)+C$

(D) $x(\ln x+1)+C$

3. $\int x\tan^2 x dx = (\quad)$.

(A) $x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C$

(B) $x\tan x - \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + C$

(C) $x\tan x - \ln|\sin x| - \frac{x^2}{2} + C$

(D) $x\tan x + \ln|\sin x| - \frac{x^2}{2} + C$

4. $\int x^2\sin^2 x dx = (\quad)$.

(A) $\frac{x^3}{6} - \frac{x}{4}\cos 2x + \left(\frac{1}{8} + \frac{x^2}{4}\right)\sin 2x$

(B) $\frac{x^3}{6} + \frac{x}{4}\cos 2x + \left(\frac{1}{8} + \frac{x^2}{4}\right)\sin 2x$

(C) $\frac{x^3}{6} - \frac{x}{4}\cos 2x + \left(\frac{1}{8} - \frac{x^2}{4}\right)\sin 2x$

(D) $\frac{x^3}{6} + \frac{x}{4}\cos 2x + \left(\frac{1}{8} - \frac{x^2}{4}\right)\sin 2x$

5. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx = (\quad)$.

(A) $\frac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6) + C$

(B) $-\frac{1}{x}(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6) + C$

(C) $-\frac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6) + C$

(D) $\frac{1}{x}(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6) + C$

6. $\int (\arccos x)^2 dx = (\quad)$.

(A) $x(\arccos x)^2 - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x + 2x + C$

(B) $x(\arccos x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arccos x - 2x + C$

(C) $x(\arccos x)^2 - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x - 2x + C$

(D) $x(\arccos x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arccos x + 2x + C$

7. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx = (\quad)$.

(A) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\sqrt{1+x^2}+C$

(B) $-x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$

(C) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$

(D) $-x\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\sqrt{1+x^2}+C$

8. $\displaystyle\int \sin x\cdot\ln(\tan x)dx=(\quad)$.

(A) $-\cos x\cdot\ln(\tan x)+\ln|\csc x-\cot x|+C$

(B) $-\cos x\cdot\ln(\tan x)-\ln|\csc x-\cot x|+C$

(C) $\cos x\cdot\ln(\tan x)+\ln|\csc x-\cot x|+C$

(D) $\cos x\cdot\ln(\tan x)-\ln|\csc x-\cot x|+C$

9. $\displaystyle\int x\sin x\cos x dx=(\quad)$.

(A) $-\dfrac{1}{4}x\cos 2x-\dfrac{1}{8}\sin 2x+C$

(B) $\dfrac{1}{4}x\cos 2x+\dfrac{1}{8}\sin 2x+C$

(C) $-\dfrac{1}{4}x\cos 2x+\dfrac{1}{8}\sin 2x+C$

(D) $\dfrac{1}{4}x\cos 2x-\dfrac{1}{8}\sin 2x+C$

10. $\displaystyle\int xe^{-x}dx=(\quad)$.

(A) $-(x+1)e^{-x}+C$

(B) $(x-1)e^{-x}+C$

(C) $-(x-1)e^{-x}+C$

(D) $(x+1)e^{-x}+C$

6.1.4 几种特殊函数的积分

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = (\quad).$

(A) $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$

(B) $\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$

(C) $-\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$

(D) $-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$

2. $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}dx = (\quad).$

(A) $-\frac{1}{2}\ln|(x+1)^2+2| - \frac{3\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$

(B) $\frac{1}{2}\ln|(x+1)^2+2| - \frac{3\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$

(C) $-\frac{1}{2}\ln|(x+1)^2+2| + \frac{3\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$

(D) $\frac{1}{2}\ln|(x+1)^2+2| + \frac{3\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$

3. $\displaystyle\int \frac{2x-5}{(x-1)^2(x+2)}dx = (\quad).$

(A) $\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right| + \frac{1}{x-1} + C$

(B) $\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + \frac{1}{x-1} + C$

(C) $\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C$

(D) $\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| - \frac{1}{x-1} + C$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}dx = (\quad).$

(A) $-\cot\frac{x}{2} + C$

(B) $\cot\frac{x}{2} + C$

(C) $-\tan\frac{x}{2} + C$

(D) $\tan\frac{x}{2} + C$

5. $\displaystyle\int \cos^5 x dx = (\quad).$

(A) $\sin x + \frac{2}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

(B) $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

(C) $\sin x + \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

(D) $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

6. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 5\cos^2 x}dx = (\quad).$

(A) $\arctan(2\cos x) + C$

(B) $-\frac{1}{2}\arctan(2\cos x) + C$

(C) $-\arctan(2\cos x) + C$

(D) $\frac{1}{2}\arctan(2\cos x) + C$

7. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = (\quad)$.

(A) $2\sqrt{x} - 2\ln|1-\sqrt{x}| + C$

(B) $2\sqrt{x} + 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$

(C) $2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$

(D) $-2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$

8. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx = (\quad)$.

(A) $\frac{1}{5}(x-2)(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

(B) $\frac{1}{5}(x+2)(3x+1)^{\frac{3}{2}} + C$

(C) $\frac{1}{5}(x-2)(3x+1)^{\frac{3}{2}} + C$

(D) $\frac{1}{5}(x+2)(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

9. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx = (\quad)$.

(A) $\frac{1}{3}\tan^3 x + C$

(B) $-\frac{1}{3}\tan^3 x + C$

(C) $-\frac{1}{5}\tan^5 x + C$

(D) $\frac{1}{5}\tan^5 x + C$

10. $\int \frac{x^3}{x+3}dx = (\quad)$.

(A) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|x+3| + C$

(B) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x + 27\ln|x+3| + C$

(C) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|x+3| + C$

(D) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x + 27\ln|x+3| + C$

6.2 解答集

6.2.1 不定积分的概念与性质

1. 设 $f(x)$ 连续, 则
$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x).$$
故选项 (B).

2. 若 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的一个原函数, 则 $f'(x) = g(x)$, 因此
$$\int g(x)\,dx = f(x) + C.$$
故选项 (D).

3. 已知
$$\int f'(x^3)\,dx = x^3 + C.$$
对等式两边求导得
$$f'(x^3) = 3x^2.$$
令 $t = x^3$, 则 $f'(t) = 3t^{2/3}$. 于是
$$f(x) = \int 3x^{2/3}\,dx = 3\cdot\frac{3}{5}x^{5/3} + C = \frac{9}{5}x^{5/3} + C.$$
故选项 (A).

4. 积分曲线族 $y = F(x) + C$ 在同一横坐标 x 处导数相同, 故切线互相平行. 故选 (D).

5. 由于 $2^x = e^{x\ln 2}$, 所以
$$2^x e^x = e^{x(1+\ln 2)},$$
因此
$$\int 2^x e^x\,dx = \int e^{x(1+\ln 2)}\,dx = \frac{1}{1+\ln 2}e^{x(1+\ln 2)} + C = \frac{2^x e^x}{1+\ln 2} + C.$$
故选 (C).

6. 若 $F'(x) = f(x)$, 则 $(C + F(x))' = f(x)$. 其它选项不一定为 $f(x)$ 的原函数.

故选 (D).

7. 若 $f'(x) = \sin x$, 则

$$f(x) = -\cos x + C.$$

则 $f(x)$ 的一个原函数为

$$F(x) = -\sin x + C.$$

选项中 $1 - \sin x$ 符合此类原函数形式.

故选 (A).

8. 设 x^2 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x) = (x^2)' = 2x$. 故

$$\int f'(x)\,dx = \int (2x)'\,dx = \int 2\,dx = 2x + C.$$

故选 (D).

9. 由

$$\int \frac{f(x)}{x}\,dx = e^{2x} + C,$$

两边求导得

$$\frac{f(x)}{x} = 2e^{2x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2xe^{2x}.$$

故选 (B).

10. 下列等式中, 正确且为标准表述的是基本微积分基本定理形式

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x).$$

故选 (B).(注意选项 (C) 需要加常数项才严格正确, 即 $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$.)

11. 若在区间 (a,b) 内任一点均有 $f'(x) = g'(x)$, 则 $f(x) - g(x)$ 为常数, 因此

$$f(x) = g(x) + C.$$

故选 (C).

12. 计算

$$I = \int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

故选 (D).

13. 若 $\ln|x|$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 $f(x)=\dfrac{d}{dx}\ln|x|=\dfrac{1}{x}$. 由于

$$\ln|ax|=\ln|a|+\ln|x|$$

与 $\ln|x|$ 相差常数, 故 $\ln|ax|$ 也是 $f(x)$ 的原函数. 故选 (A).

14. 计算被积式

$$\frac{\sin^2 x}{\sin 2x\cdot\cos x}=\frac{\sin^2 x}{2\sin x\cos x\cdot\cos x}=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}\sec x\tan x.$$

因此

$$\int\frac{\sin^2 x}{\sin 2x\cdot\cos x}\,dx=\frac{1}{2}\int\sec x\tan x\,dx=\frac{1}{2}\sec x+C.$$

故选 (C).

15. 利用恒等变形

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x),$$

故

$$\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}=\cos x+\sin x.$$

于是

$$\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,dx=\int(\cos x+\sin x)\,dx=\sin x-\cos x+C.$$

故选 (A).

6.2.2 换元积分法

1. 设 $I=\int \frac{1}{3-4x}dx$, 令 $u=3-4x$, 则 $du=-4dx$,

$$I=\int \frac{1}{u}\cdot\left(-\frac{1}{4}du\right)=-\frac{1}{4}\ln|u|+C=-\frac{1}{4}\ln|3-4x|+C.$$

答案：$\boxed{(D)}$

2. 设 $F'(x)=f(x)$, 则

$$I=\int x^{-1}f(2\ln x)dx.$$

令 $t=2\ln x$, 则 $dt=\frac{2}{x}dx$, 即 $\frac{1}{x}dx=\frac{dt}{2}$. 因此

$$I=\frac{1}{2}\int f(t)dt=\frac{1}{2}F(t)+C=\frac{1}{2}F(2\ln x)+C.$$

答案：$\boxed{(B)}$

3. 设 $I=\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$, 令 $x=3\sin\theta$, 则 $dx=3\cos\theta d\theta$, 代入得

$$I=\int \frac{3\cos\theta}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}}d\theta=\int d\theta=\arcsin\frac{x}{3}+C.$$

答案：$\boxed{(C)}$

4. 已知 $f(x)=e^{-x}$, 则 $f'(x)=-e^{-x}$, 因此

$$I=\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx=\int \frac{-e^{-\ln x}}{x}dx=-\int \frac{1/x}{x}dx=-\int x^{-2}dx=\frac{1}{x}+C.$$

答案：$\boxed{(C)}$

5. $\boxed{\text{本题的 A,C 选项均为正确选项, 但是学习通上设置的正确答案为 A,}}$

C 选项中的等式是：

$$k\int f(x)dx=\int kf(x)dx,$$

常数可以提出积分号外.

答案：$\boxed{(A,C)}$

6. 设 $I = 2\int \sec^2 2xdx$. 令 $u = 2x$, 则 $du = 2dx$,

$$I = 2 \cdot \frac{1}{2}\int \sec^2 udu = \tan u + C = \tan 2x + C.$$

答案: $\boxed{(D)}$

7. 设 $I = \int xe^{-x^2}dx$, 令 $u = -x^2$, 则 $du = -2xdx$,

$$I = -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

答案: $\boxed{(A)}$

8. 已知 $\int f(x)dx = x^2 + C \Rightarrow f(x) = 2x$. 则

$$I = \int xf(1-x^2)dx = \int x \cdot 2(1-x^2)dx = 2\int (x-x^3)dx = x^2 - \frac{x^4}{2} + C.$$

令 $u = 1 - x^2$, 则 $du = -2xdx \Rightarrow xdx = -\frac{1}{2}du$,

$$I = -\frac{1}{2}\int f(u)du = -\frac{1}{2}(u^2 + C) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C.$$

答案: $\boxed{(D)}$

9. 设 $F'(x) = f(x)$, 令 $u = \cos x$, 则 $du = -\sin xdx$,

$$I = \int \sin xf(\cos x)dx = -\int f(u)du = -F(u) + C = -F(\cos x) + C.$$

答案: $\boxed{(C)}$

10. 令 $x = \sin\theta$, 则 $dx = \cos\theta d\theta$,

$$I = \int \frac{\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}d\theta.$$

使用标准积分表结果:

$$I = \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{1-x^2}| + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

答案: $\boxed{(D)}$

11. 令 $u=x^2-1$, 则 $du=2xdx \Rightarrow xdx=\dfrac{du}{2}$,

$$I=\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}}=\sqrt{u}+C=\sqrt{x^2-1}+C.$$

答案：$\boxed{(C)}$

12. 令 $u=x^2+1$, 则 $du=2xdx \Rightarrow xdx=\dfrac{du}{2}$,

$$I=\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int \frac{x^2\cdot xdx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\int \frac{(u-1)}{\sqrt{u}}du=\frac{1}{2}\int (u^{1/2}-u^{-1/2})du.$$

积分得

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}-2u^{1/2}\right)+C=\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}-\sqrt{x^2+1}+C.$$

答案：$\boxed{(D)}$

13. 令 $u=5+2\ln x$, 则 $du=\dfrac{2}{x}dx \Rightarrow \dfrac{dx}{x}=\dfrac{du}{2}$,

$$I=\int \frac{dx}{x(5+2\ln x)}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln|5+2\ln x|+C.$$

答案：$\boxed{(B)}$

14. 令 $u=\sqrt{1+x^2}$, 则 $du=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$,

$$I=\int \sin u\,du=-\cos u+C=-\cos\sqrt{1+x^2}+C.$$

答案：$\boxed{(D)}$

15. 令 $u=2+x^2$, 则 $du=2xdx \Rightarrow xdx=\dfrac{du}{2}$,

$$I=\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C=\frac{1}{3}(2+x^2)^{3/2}+C.$$

答案：$\boxed{(C)}$

6.2.3 分部积分法

1. 计算

$$\int x\sin x\,dx.$$

取 $u=x,\ dv=\sin x\,dx$. 则 $du=dx,\ v=-\cos x$. 故

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

答案：$\sin x-x\cos x+C$.(选 (C))

2. 计算

$$\int\ln x\,dx.$$

取 $u=\ln x,\ dv=dx$. 则 $du=\dfrac{1}{x}dx,\ v=x$. 故

$$\int\ln x\,dx=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx=x\ln x-x+C.$$

答案：$x(\ln x-1)+C$.(选 (C))

3. 计算

$$\int x\tan^2 x\,dx.$$

利用 $\tan^2 x=\sec^2 x-1$, 得

$$\int x\tan^2 x\,dx=\int x\sec^2 x\,dx-\int x\,dx.$$

对第一项分部, 取 $u=x,\ dv=\sec^2 x\,dx$ 得 $v=\tan x$. 于是

$$\int x\sec^2 x\,dx=x\tan x-\int\tan x\,dx=x\tan x+\ln|\cos x|+C.$$

因此

$$\int x\tan^2 x\,dx=x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C.$$

答案：$x\tan x+\ln|\cos x|-\dfrac{x^2}{2}+C$.(选 (A))

4. 计算

$$\int x^2\sin^2 x\,dx.$$

用恒等式 $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, 得

$$\int x^2 \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int x^2\,dx - \frac{1}{2}\int x^2\cos 2x\,dx = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\int x^2\cos 2x\,dx.$$

计算 $\int x^2\cos 2x\,dx$：

$$\int x^2\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x^2\sin 2x - \int x\sin 2x\,dx,$$
$$\int x\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x.$$

因此

$$\int x^2\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x^2\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x.$$

代回原式得

$$\int x^2\sin^2 x\,dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x}{4}\cos 2x + \left(\frac{1}{8} - \frac{x^2}{4}\right)\sin 2x + C.$$

答案：$\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x}{4}\cos 2x + \left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{x^2}{4}\right)\sin 2x$.(选 (C))

5. 计算

$$\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\,dx.$$

设 $I_n = \int \dfrac{\ln^n x}{x^2}\,dx$. 分部取 $u = \ln^n x,\ dv = x^{-2}dx$, 得递推

$$I_n = -\frac{\ln^n x}{x} + nI_{n-1}.$$

已知 $I_0 = \int x^{-2}dx = -\dfrac{1}{x} + C$. 由递推得到

$$I_1 = -\frac{\ln x}{x} + I_0 = -\frac{\ln x + 1}{x},$$
$$I_2 = -\frac{\ln^2 x}{x} + 2I_1 = -\frac{\ln^2 x + 2\ln x + 2}{x},$$
$$I_3 = -\frac{\ln^3 x}{x} + 3I_2 = -\frac{\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6}{x}.$$

答案：$-\dfrac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6) + C$.(选 (C))

6. 计算

$$\int (\arccos x)^2\,dx.$$

分部取 $u=(\arccos x)^2,\ dv=dx$, 则 $du=-\dfrac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ v=x$. 于是

$$\begin{aligned}\int(\arccos x)^2dx&=x(\arccos x)^2-\int x\cdot\left(-\frac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx\\&=x(\arccos x)^2+2\int\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx.\end{aligned}$$

令 $x=\cos t$, $t=\arccos x$, 则积分化为

$$2\int(-t\cos t)\,dt=-2\big(t\sin t+\cos t\big)+C.$$

回代得到

$$\int(\arccos x)^2dx=x(\arccos x)^2-2\sqrt{1-x^2}\ \arccos x-2x+C.$$

答案：$x(\arccos x)^2-2\sqrt{1-x^2}\arccos x-2x+C$.(选 (C))

7. 计算

$$\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$$

分部取 $u=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\ dv=dx$. 则

$$\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

注意 $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{1+x^2}$. 故

$$\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$$

答案：$x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$.(选 (C))

8. 计算

$$\int\sin x\cdot\ln(\tan x)\,dx.$$

分部取 $u=\ln(\tan x),\ dv=\sin x\,dx$. 注意

$$\frac{d}{dx}\ln(\tan x)=\frac{\sec^2x}{\tan x}=\frac{1}{\sin x\cos x}.$$

同时 $v=-\cos x$. 于是

$$\begin{aligned}\int \sin x\ln(\tan x)\,dx &= -\cos x\ln(\tan x)-\int(-\cos x)\,\frac{1}{\sin x\cos x}\,dx\\ &= -\cos x\ln(\tan x)+\int\csc x\,dx\\ &= -\cos x\ln(\tan x)+\ln\big|\csc x-\cot x\big|+C.\end{aligned}$$

答案：$-\cos x\ln(\tan x)+\ln|\csc x-\cot x|+C$.(选 (A))

9. 计算

$$\int x\sin x\cos x\,dx.$$

用恒等式 $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$, 得

$$\int x\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int x\sin 2x\,dx.$$

计算 $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x$. 因此

$$\int x\sin x\cos x\,dx=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C.$$

答案：$-\dfrac{1}{4}x\cos 2x+\dfrac{1}{8}\sin 2x+C$.(选 (C))

10. 计算

$$\int xe^{-x}\,dx.$$

分部取 $u=x,\ dv=e^{-x}dx$, 得 $v=-e^{-x}$. 于是

$$\int xe^{-x}\,dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx=-(x+1)e^{-x}+C.$$

答案：$-(x+1)e^{-x}+C$.(选 (A))

6.2.4 几种特殊函数的积分

1.

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$$

部分分式分解：

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

比较系数得 $A=1,\ B=-1,\ C=0$, 于是

$$\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

答案：(A) $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C.$

2.

$$\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\,dx.$$

令 $u = x+1$, 则分母为 u^2+2, 分子为 $u-3$：

$$\int \frac{u-3}{u^2+2}\,du = \frac{1}{2}\ln(u^2+2) - \frac{3\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} + C.$$

还原得

$$\frac{1}{2}\ln\left((x+1)^2+2\right) - \frac{3\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

答案：(B)

3.

$$\int \frac{2x-5}{(x-1)^2(x+2)}\,dx.$$

设

$$\frac{2x-5}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}.$$

解得 $A=1,\ B=-1,\ C=-1$, 故

$$\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \ln|x+2| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + \frac{1}{x-1} + C.$$

答案：(B)

4.

$$\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx.$$

利用 $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$,

$$\int \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \csc^2\frac{x}{2}\,dx = -\cot\frac{x}{2} + C.$$

答案：(A)

5.
$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos x(1-\sin^2 x)^2\,dx.$$

令 $u=\sin x, du=\cos x\,dx$：

$$\int(1-2u^2+u^4)\,du = u-\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5+C = \sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

答案：(D)

6.
$$\int \frac{\sin x}{\sin^2 x+5\cos^2 x}\,dx.$$

令 $t=\cos x$, $dt=-\sin x\,dx$, 分母为 $1+4t^2$：

$$-\int \frac{dt}{1+4t^2} = -\frac{1}{2}\arctan(2t)+C = -\frac{1}{2}\arctan(2\cos x)+C.$$

答案：(B)

7.
$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx.$$

令 $u=\sqrt{x},\ x=u^2,\ dx=2u\,du$：

$$\int \frac{2u}{1+u}\,du = \int\left(2-\frac{2}{1+u}\right)du = 2u-2\ln|1+u|+C = 2\sqrt{x}-2\ln|1+\sqrt{x}|+C.$$

答案：(C)

8.
$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx.$$

令 $u=3x+1,\ du=3dx,\ x+1=\dfrac{u+2}{3}$：

$$\int \frac{u+2}{9}u^{-1/3}\,du = \frac{1}{9}\int(u^{2/3}+2u^{-1/3})\,du = \frac{1}{15}u^{5/3}+\frac{1}{3}u^{2/3}+C = \frac{1}{5}(x+2)(3x+1)^{2/3}+C.$$

答案：(D)

9.
$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx = \int \tan^4 x \sec^2 x\,dx.$$

令 $u = \tan x, du = \sec^2 x\,dx$：

$$\int u^4\,du = \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{5}\tan^5 x + C.$$

答案：(D)

10.
$$\int \frac{x^3}{x+3}\,dx.$$

多项式除法：

$$\frac{x^3}{x+3} = x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{x+3}.$$

$$\int \left(x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{x+3}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|x+3| + C.$$

答案：(C)

7 定积分及其应用

7.1 题目集

7.1.1 定积分的概念与性质

1. 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是 ( ).

(A) 一个原函数
(B) 一个非负数
(C) 一个数
(D) 一个函数族

2. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(t)dt$ 的值 ( ).

(A) 等于零
(B) 小于零
(C) 不确定
(D) 大于零

3. 利用定积分的几何意义, 计算定积分 $\int_{-1}^1 (1+\sqrt{1-x^2})dx =$ ( ).

(A) $4-\pi$
(B) $2+\dfrac{\pi}{2}$
(C) $2-\dfrac{\pi}{2}$
(D) $2-\pi$

4. 利用定积分的几何意义, 计算 $\int_{-1}^1 \min\{f(x), g(x)\}dx =$ ( ).

其中, 设 $f(x)=\sqrt{1-x^2}, g(x)=x+1$.

(A) 2
(B) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{2}$
(C) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$
(D) $\dfrac{\pi}{2}$

5. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的 ( ) 条件.

(A) 既非充分又非必要
(B) 必要
(C) 充分必要
(D) 充分

6. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的 ( ) 条件.

(A) 充分必要
(B) 既非充分又非必要
(C) 必要
(D) 充分

7. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上连续, 下列选项中错误的是 ( ).

(A) 若 $\int_0^2 f(x)dx \geq 0$, 则 $f(x) \geq 0$

(B) 若 $f(x) \geq 0$, 且 $f(1) > 0$, 则 $\int_0^2 f(x)dx > 0$

(C) 若 $f(x) \geq 0$, 且 $\int_0^2 f(x)dx = 0$, 则 $f(x)$ 恒等于零

(D) 若 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_0^2 f(x)dx \geq 0$

8. 比较定积分的大小: $\int_{10}^1 e^{x^2} dx$____$\int_{10}^1 e^{x^3} dx$.

(A) 不确定 (C) 大于

(B) 小于 (D) 等于

9. 下列各式中, 不成立的是 ( ).

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 x dx$ (C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$

(B) $\int_3^4 \ln x dx \leq \int_3^4 (\ln x)^2 dx$ (D) $\int_0^1 \ln(1+x)dx \leq \int_0^1 \ln(1+x^2)dx$

10. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $\int_a^b f(x)dx = 0$, 则 ( ).

(A) 在 $[a,b]$ 上, $f(x) = 0$

(B) 必有 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f(x_0) = 0$

(C) 必有 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 使得 $f(x_1)f(x_2) < 0$

(D) 在 $[a,b]$ 上, 有 $f(x) \neq 0$

7.1.2 微积分基本公式

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\forall x\in[a,b]$, 下列结论中正确的是 ( ).

(A) $\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续但不可导

(B) $\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可积但不连续

(C) $\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上不可积

(D) $\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导

2. 设 $F(x)=\begin{cases}\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $F'(0)=($ $)$.

(A) 1

(C) ∞

(B) -1

(D) 0

3. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, $F(x)=\int_a^x f(t)dt, x\in[a,b]$, 则 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的 ( ).

(A) 在 $[a,b]$ 上的定积分

(C) 不定积分

(B) 全体原函数

(D) 一个原函数

4. 若 $\frac{d}{dx}\int_0^{e^{-x}} f(t)dt=e^{2x}$, 则 $f(x)=($ $)$.

(A) $-2x^{-3}$

(C) $-e^{3x}$

(B) $-x^{-3}$

(D) x^{-3}

5. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}} f(t)dt$, 则 $F'(x)=($ $)$.

(A) $e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$

(C) $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

(B) $-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$

(D) $e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

6. 设 $\alpha(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt, \beta(x)=\int_0^x (1+t)^{\frac{1}{t}}dt$, 当 $x\to 0$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 ( ) 无穷小.

(A) 同阶但非等价

(C) 高阶

(B) 低阶

(D) 等价

7. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=e^{-t^2}\\ y=te^{-t^2}-\int_1^t e^{-u^2}du\end{cases}$ 确定, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}=($ $)$.

(A) $-\frac{1}{2}e^{t^2}$

(B) t

(C) $-\frac{1}{2t^2}e^{t^2}$

(D) $-\frac{1}{2t}e^{t^2}$

8. 方程 $4x-2-\int_0^x e^{-t^4}dt=0$ 在区间 $(0,1)$ 内的实根个数 ( ).

(A) 0

(B) 3

(C) 1

(D) 2

9. 已知函数方程为 $y=\int_0^{x^2}(e^{t^2}+t)dt$, 下列选项错误的是 ( ).

(A) 函数没有最大值, 但有最小值

(B) 函数有极小值 $y(0)=0$

(C) 函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增

(D) 函数在 $(-\infty,0]$ 上单调减

10. 已知曲线方程为 $f(x)=\int_2^x \sqrt{(t-2)^2+1}dt$, 则下列选项正确的是 ( ).

(A) 以上选项均不对

(B) 曲线在 $[2,+\infty)$ 上是凹的

(C) 曲线在 $(-\infty,+\infty)$ 上是凹的

(D) 曲线没有拐点

11. 设 $F(x)=\frac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)=$ ( ).

(A) 0

(B) 不存在

(C) a^2

(D) $a^2f(a)$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}dx=$ ( ).

(A) $2-\sqrt{2}$

(B) $2\sqrt{2}-2$

(C) $2\sqrt{2}-1$

(D) $2-2\sqrt{2}$

13. 若定积分 $\int_0^a \frac{x}{1+x^2}dx=4$, 若常数 $a>0$, 则 $a=$ ( ).

(A) e^4

(B) $\sqrt{e^8-1}$

(C) e^8

(D) $\sqrt{e^4+1}$

14. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx$, 则 $f(2)=$ ( ).

15. 已知 $f'(x)\int_0^2 f(x)dx=50$, 且 $f(0)=0$, 则 $|f(1)|=$ ( ).

7.1.3 定积分的计算

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}dx = (\quad)$.

(A) $\frac{2}{3}$ (C) $-\frac{2}{3}$

(B) $\frac{4}{3}$ (D) $-\frac{4}{3}$

2. $\int_1^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = (\quad)$.

(A) $2(\sqrt{3}+2)$ (C) $2(\sqrt{3}-2)$

(B) $2(\sqrt{3}+1)$ (D) $2(\sqrt{3}-1)$

3. $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = (\quad)$.

(A) $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ (C) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

(B) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ (D) $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

4. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = (\quad)$.

(A) $\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$ (C) $\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$

(B) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ (D) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$

5. $\int_{-5}^{5} \frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx = (\quad)$.

(A) 1 (C) 0

(B) 2 (D) π

6. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = (\quad)$.

(A) $\frac{\pi^3}{324}$ (C) $\frac{\pi^3}{81}$

(B) $\frac{\pi^3}{162}$ (D) $\frac{\pi^3}{58}$

7. $\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}dx = (\quad)$.

(A) $\frac{\pi}{2}$ (C) $-\frac{\pi}{2}$

(B) $-\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

8. $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = (\quad)$.

(A) $\frac{\pi}{2}-2-\ln 2$ (C) $\frac{\pi}{2}+2-\ln 2$

(B) $\frac{\pi}{2}+2+\ln 2$ (D) $\frac{\pi}{2}-2+\ln 2$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = (\quad)$.

(A) $\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)$ (C) $\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$

(B) $\frac{1}{5}(e^{\pi}+2)$ (D) $\frac{1}{5}(e^{\pi}+1)$

10. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|dx = (\quad)$.

(A) $2(1+e)$ (C) $2(1-e^{-1})$

(B) $2(1-e)$ (D) $2(1+e^{-1})$

11. 设 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x dx = 5$, $f(\pi)=2$, 则 $f(0)=(\quad)$.

(A) 5 (C) 0

(B) 3 (D) 1

12. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arctan 2x dx = (\quad)$.

(A) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ (C) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

(B) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln 2$ (D) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$

13. $\int_{-\pi}^{\pi} x^8 \sin x dx = (\quad)$.

(A) 2 (C) 4

(B) 0 (D) 1

14. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx = (\quad)$.

15. 已知 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$, 则 $\int_0^2 xf''(x)dx = (\quad)$.

7.1.4 反常积分

1. $\int_0^e \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}dx = (\quad)$.

   (A) $\frac{\pi}{2}$ (C) 发散

   (B) 0 (D) π

2. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = (\quad)$.

   (A) ∞ (C) $\frac{2}{3}$

   (B) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}dx = (\quad)$.

   (A) π (C) $\frac{\pi}{4}$

   (B) ∞ (D) $\frac{\pi}{2}$

4. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx = (\quad)$.

   (A) 0 (C) $+\infty$

   (B) 1 (D) 2

5. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx = (\quad)$.

   (A) 发散 (C) 2

   (B) $\ln 2$ (D) 0

7.1.5 定积分在几何学上的应用

1. 由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x$ 围成平面图形面积为 ( ).

(A) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{6}$　(D) $\frac{1}{3}$

2. 心形线 $\rho=1+\cos\theta$ 围成的平面图形的面积为 ( ).

(A) π　(C) $\frac{3\pi}{4}$

(B) $\frac{3\pi}{2}$　(D) 2π

3. 由抛物线 $y=x^2, y=\frac{x^2}{4}$ 和直线 $y=1$ 围成平面图形面积为 ( ).

(A) $\frac{4}{3}$　(C) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{3}{4}$　(D) $\frac{3}{2}$

4. 由曲线 $\rho=3\cos\theta$ 与 $\rho=1+\cos\theta$ 围成平面图形的公共部分的面积为 ( ).

(A) $\frac{5\pi}{2}$　(C) $\frac{3\pi}{4}$

(B) $\frac{5\pi}{4}$　(D) $\frac{3\pi}{2}$

5. 曲线 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 相应于区间 $[0,1]$ 上的一段弧长为 ( ).

(A) $\frac{e+e^{-1}}{2}-1$　(C) $\frac{e-e^{-1}}{2}$

(B) $\frac{e+e^{-1}}{2}$　(D) $\frac{e+e^{-1}}{2}+1$

6. 由曲线 $y=(x-1)^2, y=1$ 所围图形的面积为 ( ).

(A) $\int_0^1(2x-x^2)dx$　(C) $\int_0^1(x^2-2x)dx$

(B) $\int_0^2(2x-x^2)dx$　(D) $\int_0^2(2x+x^2)dx$

7. 曲线 $y=x^2, x=1$ 和 x 轴所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为 ( ).

(A) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{5}$

(B) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

8. 曲线 $y=\frac{2}{x}, y=x, x=3$ 所围图形的面积为 ( ).

(A) $\int_{\sqrt{2}}^{3}\left(x-\frac{2}{x}\right)dx$ (C) $\int_{\sqrt{2}}^{3}\left(4-\frac{2}{y}-y\right)dy$

(B) $\int_{\sqrt{2}}^{3}\left(4-\frac{2}{x}-x\right)dx$ (D) $\int_{\sqrt{2}}^{3}\left(\frac{2}{x}-x\right)dx$

9. 曲线 $\rho=2\cos\theta$ 所围图形的面积为 ( ).

(A) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta)^2d\theta$ (C) $\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta)^2d\theta$

(B) $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(2\cos\theta)^2d\theta$ (D) $\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(2\cos\theta)^2d\theta$

10. 两个半径为 1 的直交圆柱体所围体积为 ( ).

(A) $2\int_0^1(1-x^2)dx$ (C) $8\int_0^1(1-x^2)dx$

(B) $4\int_0^1(1-x^2)dx$ (D) $6\int_0^1(1-x^2)dx$

11. 曲线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $(a>0, 0\le t\le\pi)$ 与 $y=0$ 所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 ( ).

(A) $9\pi^2a^3$ (C) $7\pi^2a^3$

(B) $4\pi^2a^3$ (D) $5\pi^2a^3$

12. 曲线 $y=x^2-1$ 上相应于 $0\le x\le 1$ 的一段弧长为 ( ).

(A) $\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx$ (C) $\int_0^1(x^2-1)dx$

(B) $\int_0^1\sqrt{1+x}dx$ (D) $\int_0^1\sqrt{1+4x^2}dx$

13. 曲线 $y=e^x$ 与该曲线过原点的切线和 y 轴所围图形的面积为 ( ).

(A) $\int_0^1 (e^x - xe^x)dx$

(B) $\int_0^1 (e^x - xe)dx$

(C) $\int_0^1 (\ln y - y\ln y)dy$

(D) $\int_1^e (\ln y - y\ln y)dy$

14. 曲线弧 $y = \ln\cos x (0 \le x \le \frac{\pi}{6})$ 的长度为 ( ).

(A) $\frac{5}{12}\ln 3$

(B) $\frac{1}{12}\ln 3$

(C) $\frac{1}{2}\ln 3$

(D) $\ln\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

15. 曲线 $y = \sqrt{x}$ 与直线 $x = 4, y = 0$ 所围图形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积为 ( ).

(A) $16\pi - \int_0^2 \pi y^4 dy$

(B) $\int_0^4 \pi x dx$

(C) $32\pi - \int_0^2 \pi y^4 dy$

(D) $\int_0^2 \pi y^4 dy$

7.1.6 定积分在物理学上的应用

1. 将边长为 $1m$ 的正方形薄片垂直置放于水中, 使其顶部距水面距离为 $2m$, 则该正方形薄片所受压力为 ( ).

(A) $\int_2^3 xdx$ (C) $\int_0^1 xdx$

(B) $\int_0^1 (x+1)dx$ (D) $\int_1^2 xdx$

2. 设一圆锥形水池, 深 $15m$, 口径为 $20m$, 盛满了水, 今以泵将水抽尽, 所做的功为 ( ).

(A) $1875\pi\rho g$ (C) $1475\pi\rho g$

(B) $1275\pi\rho g$ (D) $1625\pi\rho g$

3. 一条线密度为 $5\,kg/m$ 均匀的链子长 $4m$, 平放在地上, 求将其一端提高到离地面 $6m$ 时所需做的功 ( ).

(A) $649J$ (C) $526J$

(B) $714J$ (D) $784J$

4. 一个长为 $20m$ 的水槽, 其截面是底为 $2m$, 高为 $3m$, 且顶角朝下的等腰三角形, 水槽内装满水. 若要将水完全吸尽, 需要做功 ( ).

(A) $284KJ$ (C) $632KJ$

(B) $524KJ$ (D) $588KJ$

5. 有一圆柱形的贮水槽, 高为 4 米, 底圆半径为 2 米, 桶内盛满了水, 设水的密度为 ρ, 重力加速度为 g, 现欲将水全部抽出, 需要做功为 ____$\pi\rho g$.

7.2 解答集

7.2.1 定积分的概念与性质

1. 定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 是 **一个数**.

   答案:(C)

2. 因为变量符号不同但积分区间相同,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt,$$

   二者相减为零.

   答案:(A)

3. $\int_{-1}^{1}(1+\sqrt{1-x^2})\,dx =$ 矩形面积+半圆面积. 矩形面积为 $2\times 1 = 2$, 半圆面积为 $\frac{1}{2}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{2}$, 结果为 $2+\frac{\pi}{2}$.

   答案:(B)

4. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 表示上半圆,$g(x) = x+1$ 是直线. 两曲线交点满足 $\sqrt{1-x^2} = x+1$, 解得 $x = -1, 0$. 区间 $[-1, 0]$ 上 $g(x) \le f(x)$, 区间 $[0, 1]$ 上 $f(x) \le g(x)$.

$$\int_{-1}^{1} \min\{f, g\}\,dx = \int_{-1}^{0} g(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx.$$

   计算得

$$\int_{-1}^{0}(x+1)\,dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4},$$

   和为 $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

   答案:(C)

5. 有界是可积的**必要条件**, 但非充分条件.

   答案:(B)

6. 连续是可积的**充分条件**, 但非必要条件.

   答案:(D)

7. (A) 错.$\int f(x)\,dx \ge 0$ 不必意味着 $f(x) \ge 0$.

   答案:(A)

8. 区间为 $[10,1]$, 上限小于下限, 符号反转:

$$\int_{10}^{1} e^{x^2} dx = -\int_{1}^{10} e^{x^2} dx, \quad \int_{10}^{1} e^{x^3} dx = -\int_{1}^{10} e^{x^3} dx.$$

对 $x > 1$ 有 $x^3 > x^2 \Rightarrow e^{x^3} > e^{x^2}$, 故

$$\int_{1}^{10} e^{x^3} dx > \int_{1}^{10} e^{x^2} dx \Rightarrow \int_{10}^{1} e^{x^2} dx > \int_{10}^{1} e^{x^3} dx.$$

答案:(C)

9. 比较各项:

(A) 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上 $\sin x \le \cos x$, 故成立.

(B) 在 $[3,4]$ 上 $\ln x \in (1.1, 1.4)$, 故 $\ln x \le (\ln x)^2$ 成立.

(C) 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上 $\sin^9 x \le \sin^4 x$ 成立.

(D) 在 $[0,1]$ 上 $\ln(1+x) \ge \ln(1+x^2)$, 因此 D" 不成立" .

答案:(D)

10. 若 $\int_a^b f(x)\, dx = 0$, 则 $f(x)$ 在闭区间上要么存在零点, 要么恒为 0.

答案:(B)

7.2.2 微积分基本公式

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 令 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. 由微积分基本定理,$F$ 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 上可导, 且 $F'(x)=f(x)$.

   答案: (D)

2. 设

$$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

   计算 $F'(0)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(h)-F(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \frac{\sin t}{t}\,dt$. 当 $t\to 0$ 有 $\dfrac{\sin t}{t}=1-\dfrac{t^2}{6}+o(t^2)$, 于是

$$\int_0^h \frac{\sin t}{t}\,dt=\int_0^h (1+o(1))\;dt=h+o(h).$$

   因此 $\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h \frac{\sin t}{t}\,dt\to 1$, 即 $F'(0)=1$.
   答案: (A)

3. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续,$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. 由基本定理可知 $F'(x)=f(x)$, 因此 F 是 f 的一个原函数 (即某一个不定积分的特定原函数).

   答案: (D)

4. 由链式法则,

$$\frac{d}{dx}\int_0^{e^{-x}} f(t)\,dt=f(e^{-x})\cdot\frac{d}{dx}(e^{-x})=-e^{-x}f(e^{-x}).$$

   题给此导数等于 e^{2x}, 所以

$$-e^{-x}f(e^{-x})=e^{2x}\quad\Longrightarrow\quad f(e^{-x})=-e^{3x}.$$

   令 $s=e^{-x}$, 则 $x=-\ln s$, 得

$$f(s)=-e^{3(-\ln s)}=-s^{-3}.$$

   因此把自变量写为 x, 有 $f(x)=-x^{-3}$.

   答案: (B)

5. 设 $F(x)=\int_x^{e^{-x}} f(t)\,dt$. 对变上、下限同时求导:

$$F'(x)=f(e^{-x})\cdot\frac{d}{dx}(e^{-x})-f(x)\cdot\frac{d}{dx}(x)=-e^{-x}f(e^{-x})-f(x).$$

答案: (B)

6. 当 $x\to 0$ 时,

$$\alpha(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt\sim\int_0^x 1\,dt=x,$$

而

$$\beta(x)=\int_0^x(1+t)^{1/t}\,dt\sim\int_0^x e\,dt=ex,$$

因而 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 同阶, 但 $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\to\dfrac{1}{e}\neq 1$, 故为" 同阶但非等价" .

答案: (A)

7. 参数方程:

$$x=e^{-t^2},\qquad y=te^{-t^2}-\int_1^t e^{-u^2}\,du.$$

先求导:

$$\frac{dx}{dt}=-2te^{-t^2},\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\big(te^{-t^2}\big)-e^{-t^2}=\big(e^{-t^2}-2t^2e^{-t^2}\big)-e^{-t^2}=-2t^2e^{-t^2}.$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2t^2e^{-t^2}}{-2te^{-t^2}}=t.$$

继续求二阶导:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{-2te^{-t^2}}=-\frac{1}{2t}e^{t^2}.$$

答案: (D)

8. 设

$$g(x)=4x-2-\int_0^x e^{-t^4}\,dt.$$

则

$$g'(x)=4-e^{-x^4}.$$

在 $(0,1)$ 上有 $0 < e^{-x^4} < 1$, 故 $g'(x) > 3 > 0$, 即 g 在 $(0,1)$ 上严格递增. 又 $g(0) = -2 < 0$, 而

$$g(1) = 2 - \int_0^1 e^{-t^4}\,dt > 2 - 1 = 1 > 0.$$

由介值定理, 单调增加且端点符号相反, 故在 $(0,1)$ 内恰有一个实根.

答案: (C)

9. 设

$$y(x) = \int_0^{x^2} \left(e^{t^2} + t\right) dt.$$

由链式法则

$$y'(x) = \left(e^{x^4} + x^2\right) \cdot 2x = 2x\left(e^{x^4} + x^2\right).$$

因为 $e^{x^4} + x^2 > 0$ 对任意 x 成立, 得 $y'(x)$ 与 x 同号. 于是在 $(-\infty, 0)$ 上 $y' < 0$(单调减), 在 $(0,\infty)$ 上 $y' > 0$(单调增), 在 $x = 0$ 处有极小值且 $y(0) = 0$. 函数无最大值但有最小值.

故错误的选项为" 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增” .

答案: (C)

10. 设

$$f(x) = \int_2^x \sqrt{(t-2)^2 + 1}\,dt.$$

则

$$f'(x) = \sqrt{(x-2)^2 + 1} > 0, \qquad f''(x) = \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2 + 1}}.$$

当 $x \geq 2$ 时 $f''(x) \geq 0$, 因此在 $[2, \infty)$ 上曲线向上 (凹向上/凸). 函数在 $x = 2$ 处 f'' 变号, 因此存在拐点. 由此正确选项为" 曲线在 $[2, +\infty)$ 上是凹的 (向上)” .

答案: (B)

11. 设

$$F(x) = \frac{x^2}{x-a} \int_a^x f(t)\,dt, \qquad f \text{ 连续}.$$

当 $x \to a$ 时, 记 $I(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, 则 $I(x) = f(a)(x-a) + o(x-a)$. 于是

$$F(x) = \frac{x^2}{x-a} \cdot \big(f(a)(x-a) + o(x-a)\big) = x^2 f(a) + x^2 \frac{o(x-a)}{x-a}.$$

令 $x \to a$ 得极限为 $a^2 f(a)$.

答案: (D)

12. 计算

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin 2x}\, dx.$$

注意恒等式

$$1-\sin 2x = (\sin x - \cos x)^2,$$

因此被积函数为 $|\sin x - \cos x|$. 在 $[0, \pi/4]$ 上 $\sin x - \cos x \le 0$, 在 $[\pi/4, \pi/2]$ 上为非负. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} |\sin x - \cos x|\, dx &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\, dx \\ &= \big[\sin x + \cos x\big]_0^{\pi/4} + \big[-\cos x - \sin x\big]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2}-2.\end{aligned}$$

答案: (B)

13. 已知

$$\int_0^a \frac{x}{1+x^2}\, dx = 4.$$

积分可直接计算:

$$\int_0^a \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^a = \frac{1}{2}\ln(1+a^2).$$

于是 $\dfrac{1}{2}\ln(1+a^2) = 4$, 得 $\ln(1+a^2) = 8$, 所以 $1+a^2 = e^8$, 即

$$a = \sqrt{e^8 - 1}.$$

(题中 $a > 0$, 取正根.)

答案: (B)

14. 设连续函数 f 满足

$$f(x) = x^2 - x\int_0^2 f(x)\, dx + 2\int_0^1 f(x)\, dx.$$

记 $I_1 = \displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$,$I_2 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$. 则

$$f(x) = x^2 - I_1 x + 2I_2.$$

计算 I_1 与 I_2:

$$I_1 = \int_0^2 (x^2 - I_1 x + 2I_2)\,dx = \frac{8}{3} - I_1 \cdot 2 + 4I_2,$$
$$I_2 = \int_0^1 (x^2 - I_1 x + 2I_2)\,dx = \frac{1}{3} - I_1 \cdot \frac{1}{2} + 2I_2.$$

由第二式得 $-I_2 = \frac{1}{3} - \frac{I_1}{2}$, 即 $I_2 = -\frac{1}{3} + \frac{I_1}{2}$. 代入第一式:

$$I_1 = \frac{8}{3} - 2I_1 + 4\Big(-\frac{1}{3} + \frac{I_1}{2}\Big) = \frac{8}{3} - 2I_1 - \frac{4}{3} + 2I_1 = \frac{4}{3}.$$

于是 $I_1 = \frac{4}{3}$, 再得 $I_2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$. 因此

$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot I_1 + 2 \cdot I_2 = 4 - 2 \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 2.$$

答案: $f(2) = 2$.

15. 已知 $f'(x)\int_0^2 f(x)\,dx = 50$, 且 $f(0) = 0$. 设 $C = \int_0^2 f(x)\,dx$, 则 $f'(x) = 50/C$, 故

$$f(x) = \frac{50}{C}x + D.$$

由 $f(0) = 0$ 得 $D = 0$, 即 $f(x) = \frac{50}{C}x$. 于是

$$C = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{50}{C}x\,dx = \frac{50}{C} \cdot 2.$$

解得 $C^2 = 100$, 即 $|C| = 10$. 于是

$$|f(1)| = \left|\frac{50}{C}\right| = \frac{50}{|C|} = \frac{50}{10} = 5.$$

答案: $|f(1)| = 5$.

7.2.3 定积分的计算

1.

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x(1-\cos^2 x)}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\sqrt{\cos x}\,dx.$$

被积函数为偶函数, 故

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(\cos x)^{1/2}\,dx.$$

令 $u=\cos x,\ du=-\sin x\,dx$, 得

$$I=2\int_1^0 -u^{1/2}\,du=2\int_0^1 u^{1/2}\,du=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

答案: (B)

2.

$$\int_1^{e^2}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx.$$

令 $t=\ln x,\ dt=\dfrac{dx}{x}$, 积分限 $t\in[0,2]$:

$$\int_0^2(1+t)^{-1/2}\,dt=2\big[(1+t)^{1/2}\big]_0^2=2(\sqrt{3}-1).$$

答案: (D)

3.

$$\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx=\int_0^1\Big(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2}\Big)\,dx.$$

计算

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4},$$

且

$$\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx=\Big[\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x\Big]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}.$$

于是原式

$$\frac{\pi}{4}-\Big(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}\Big)=\frac{1}{4}\Big(\frac{\pi}{2}-1\Big).$$

答案: (A)

4.
$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx.$$

令 $x=\sec t,\ t\in[0,\pi/3]$, 则 $\sqrt{x^2-1}=\tan t,\ dx=\sec t\tan t\,dt$, 得

$$\int_0^{\pi/3}\tan^2 t\,dt=\int_0^{\pi/3}(\sec^2 t-1)\,dt=\big[\tan t-t\big]_0^{\pi/3}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$$

答案: (B)

5. 被积函数为奇函数 (x^3 为奇,$\sin^2 x$ 为偶, 分母为偶), 对称区间积分为零.

$$\int_{-5}^{5}\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\,dx=0.$$

答案: (C)

6.
$$\int_{-1/2}^{1/2}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

被积函数为偶函数, 令 $x=\sin t$,$t\in[0,\pi/6]$:

$$2\int_0^{1/2}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=2\int_0^{\pi/6}t^2\,dt=2\cdot\frac{(\pi/6)^3}{3}=\frac{\pi^3}{324}.$$

答案: (A)

7.
$$\int_{-2}^{0}\frac{1}{x^2+2x+2}\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{u^2+1}\,du=[\arctan u]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}.$$

答案: (A)

8.
$$\int_0^1\ln(1+x^2)\,dx.$$

分部:$u=\ln(1+x^2),\ dv=dx$, 得

$$x\ln(1+x^2)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{2x^2}{1+x^2}\,dx=\ln 2-2\int_0^1\Big(1-\frac{1}{1+x^2}\Big)\,dx$$

$$=\ln 2-2\Big(1-\frac{\pi}{4}\Big)=\frac{\pi}{2}-2+\ln 2.$$

答案: (D)

9. 使用公式 $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \dfrac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}$. 于是

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx = \Big[\frac{e^{2x}(2\cos x+\sin x)}{5}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{e^{\pi}-2}{5}.$$

答案: (A)

10.

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx = \int_{1/e}^{1}(-\ln x)\,dx + \int_1^e \ln x\,dx.$$

计算得

$$(1-\tfrac{2}{e})+1 = 2-\tfrac{2}{e} = 2(1-e^{-1}).$$

答案: (C)

11. 观察恒等式

$$\big(f'(x)\sin x - f(x)\cos x\big)' = f''(x)\sin x + f(x)\sin x.$$

因此

$$\int_0^{\pi}\big(f(x)+f''(x)\big)\sin x\,dx = \big[f'(x)\sin x - f(x)\cos x\big]_0^{\pi} = f(\pi)+f(0).$$

已知左端等于 5 且 $f(\pi)=2$, 得 $f(0)=3$.

答案: (B)

12.

$$\int_0^{1/2}\arctan(2x)\,dx.$$

分部:$u=\arctan(2x),\ dv=dx$, 得

$$\frac{1}{2}\arctan 1 - \int_0^{1/2}\frac{2x}{1+4x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.$$

答案: (D)

13. 被积函数为奇函数, 故

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^8\sin x\,dx = 0.$$

答案: (B)

14.

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx.$$

令 $t = \sqrt{x}$,$dx = 2t\,dt$, 得

$$2\int_0^1 te^t\,dt = 2\big[te^t - e^t\big]_0^1 = 2(0-(-1)) = 2.$$

答案: 2.

15. 通过分部积分

$$\int_0^2 xf''(x)\,dx = \big[xf'(x)\big]_0^2 - \int_0^2 f'(x)\,dx = 2f'(2) - \big(f(2)-f(0)\big).$$

代入 $f(0)=1,\ f(2)=3,\ f'(2)=5$:

$$2\cdot 5-(3-1) = 10-2 = 8.$$

答案: 8.

7.2.4 反常积分

1.
$$\int_0^e \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,dx.$$

令 $t=\ln x,\ dt=\dfrac{dx}{x}$. 积分形式变为

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

参照积分表, 求得积分结果为 $\dfrac{\pi}{2}$

答案: (A) $\dfrac{\pi}{2}$

2.
$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

令 $u=x-1,\ u\in[0,1]$, 则

$$\int_0^1 \frac{u+1}{\sqrt{u}}\,du=\int_0^1 \left(u^{1/2}+u^{-1/2}\right)du=\left[\frac{2}{3}u^{3/2}+2u^{1/2}\right]_0^1=\frac{8}{3}.$$

答案: (B) $\dfrac{8}{3}$

3.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx=[\arctan(x+1)]_{-\infty}^{\infty}=\pi.$$

答案: (A) π

4.
$$\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx.$$

令 $t=\sqrt{x}$ 则 $dx=2t\,dt$, 有

$$\int_0^{\infty} e^{-t}2t\,dt=2\int_0^{\infty} te^{-t}\,dt=2\Gamma(2)=2\cdot 1=2.$$

答案: (D) 2

5.
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx.$$

在 $x=0$ 处有不可去的第一类奇点. 左右两侧不同时收敛为有限和, 因此广义积分不收敛 (发散).(注意主值为 0, 但作为真实广义积分应判为发散.)

答案: (A) 发散

7.2.5 定积分在几何学上的应用

1. 由曲线 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = x$ 围成的面积: 交点 $\sqrt{x} = x \Rightarrow x = 0, 1$,

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\, dx = \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2} - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{6}.$$

答案: (B)

2. 心形线 $\rho = 1 + \cos\theta$ 的面积:

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta)^2\, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{2}\big(2\pi + 0 + \pi\big) = \tfrac{3\pi}{2}.$$

答案: (B)

3. 由 $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{4}$ 与直线 $y = 1$ 围成的图形: 当且仅当 $|x| \le 1$ 时两抛物线都在 $y = 1$ 之下, 且在此区间上上界为 $y = 1$, 下界为较大的抛物线 $y = x^2$,

$$A = \int_{-1}^1 (1 - x^2)\, dx = 2\Big(1 - \tfrac{1}{3}\Big) = \tfrac{4}{3}.$$

答案: (A)

4. 公共部分面积 ($\rho_1 = 3\cos\theta$, $\rho_2 = 1 + \cos\theta$): 两曲线交于 $\cos\theta = \frac{1}{2}(\theta = \pm\pi/3)$. 按区间取较小的 r 并积分, 计算得

$$A = \frac{5\pi}{4}.$$

答案: (B)

5. 曲线 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$ 在 $[0, 1]$ 的弧长:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (\sinh x)^2}\, dx = \int_0^1 \cosh x\, dx = \sinh 1 = \frac{e - e^{-1}}{2}.$$

答案: (C) $\boxed{\text{学习通答案为 A, 应该为错误答案}}$

6. 曲线 $y = (x - 1)^2$ 与 $y = 1$ 围成的面积: 交点 $x = 0, 2$, 因此

$$A = \int_0^2 \big(1 - (x - 1)^2\big)\, dx = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx.$$

答案: (B)

7. 曲线 $y = x^2,\ x = 1$ 与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转所得体积: 圆盘法

$$V = \pi \int_0^1 (x^2)^2\,dx = \pi \int_0^1 x^4\,dx = \frac{\pi}{5}.$$

答案: (C)

8. 曲线 $y = \dfrac{2}{x},\ y = x,\ x = 3$ 围成图形的面积: 交点 $x = \sqrt{2}$, 对 $x \in [\sqrt{2}, 3]$ 有 $x \geq \dfrac{2}{x}$, 故

$$A = \int_{\sqrt{2}}^3 \left(x - \frac{2}{x}\right) dx.$$

答案: (A)

9. 极坐标曲线 $\rho = 2\cos\theta$ 所围图形面积: 曲线存在于 $|\theta| \leq \dfrac{\pi}{2}$, 直接计算得数值面积为 π. 下列等价表达式中匹配的是

$$\int_0^{\pi/2} (2\cos\theta)^2\,d\theta,$$

其值为 π.

答案: (A)

10. 两个半径为 1 的直交圆柱体相交所围体积 (Steinmetz 体): 标准结果 $V = \dfrac{16}{3}r^3$, 当 $r = 1$ 时 $V = \dfrac{16}{3}$. 选项等价表示为

$$8\int_0^1 (1 - x^2)\,dx$$

因为 $8\displaystyle\int_0^1 (1 - x^2)\,dx = 8 \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{16}{3}$.

答案: (C)

11. 参数曲线 $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \leq t \leq \pi$ 绕 x 轴旋转的体积: 按圆盘法 (参数形式)$V = \pi \displaystyle\int y^2\,dx = \pi a^3 \int_0^\pi (1 - \cos t)^3 dt$. 计算积分得 $\displaystyle\int_0^\pi (1 - \cos t)^3 dt = \tfrac{5\pi}{2}$, 因此

$$V = \frac{5}{2}\pi^2 a^3.$$

(若按全摆周期 $0 \leq t \leq 2\pi$ 则 $V = 5\pi^2 a^3$. 题目选项中与常见结果一致者为 $5\pi^2 a^3$.)

答案: (D) (对应常见整周期结果 $5\pi^2 a^3$, 题目应该是遗漏了系数 2)

12. 曲线 $y=x^2-1$ 在 $[0,1]$ 的弧长:

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

答案: (D)

13. 曲线 $y=e^x$ 与该曲线过原点的切线及 y 轴所围图形的面积: 先求切点 t 使切线过原点: 切线在 $x=t$ 为 $y=e^t(x-t)+e^t$, 代入 $(0,0)$ 得 $t=1$, 切线为 $y=ex$. 所围图形在 $x\in[0,1]$, 面积

$$A=\int_0^1 \big(e^x-ex\big)\,dx.$$

答案: (B)

14. 曲线弧 $y=\ln\cos x,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$ 的长度: $y'=-\tan x$, 有 $\sqrt{1+(y')^2}=\sec x$,

$$L=\int_0^{\pi/6}\sec x\,dx=\ln\big(\sec x+\tan x\big)\Big|_0^{\pi/6}=\ln\big(\sqrt{3}\big)=\tfrac{1}{2}\ln 3.$$

答案: (C)

15. 曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=4,y=0$ 所围图形绕 y 轴旋转一周的体积: 用柱壳法

$$V=2\pi\int_0^4 x\sqrt{x}\,dx=2\pi\int_0^4 x^{3/2}\,dx=2\pi\cdot\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^4=\frac{128\pi}{5}.$$

选项等价表示为 $32\pi-\displaystyle\int_0^2 \pi y^4dy$, 因为

$$32\pi-\int_0^2 \pi y^4dy=32\pi-\pi\cdot\frac{32}{5}=\frac{128\pi}{5}.$$

答案: (C)

7.2.6 定积分在物理学上的应用

1. 正方形薄片边长 1 m, 顶部距水面 2 m, 底部距水面 3 m. 单位深度处压强为 $p(y) = \rho g y$. 垂直宽为 1, 总压强 (合力) 为

$$F = \int_{y=2}^{3} \rho g y \cdot 1 \, dy = \rho g \int_{2}^{3} y \, dy.$$

题中给出的积分表达对应为 $\int_2^3 x \, dx$.

选:(A)

2. 圆锥形水池: 深 $H = 15\,\mathrm{m}$, 口径 $20\,\mathrm{m}$, 故口半径 $R = 10\,\mathrm{m}$. 取自底向上坐标 $y \in [0, 15]$, 此处截面半径按相似三角形为

$$r(y) = \frac{R}{H} y = \frac{10}{15} y = \frac{2}{3} y.$$

厚为 dy 的圆盘体积 $dV = \pi r^2 dy = \pi \frac{4}{9} y^2 dy$, 重力为 $\rho g dV$, 提升距离至池口为 $H - y$. 故总功

$$W = \rho g \pi \frac{4}{9} \int_0^{15} y^2 (15 - y) \, dy.$$

计算内积分:

$$\int_0^{15} y^2 (15 - y) \, dy = \left(5y^3 - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^{15} = 4218.75,$$

于是

$$W = \rho g \pi \frac{4}{9} \cdot 4218.75 = \ 1875 \pi \rho g.$$

选:(A)

3. 链子线密度 $\lambda = 5$ kg/m, 长度 $L = 4\,\mathrm{m}$, 总质量 $m = \lambda L = 20\,\mathrm{kg}$. 原来平放在地面, 提升到最终全体垂直悬挂于高度区间 $[2, 6]$(挂顶点在 $6\,\mathrm{m}$, 长 $4\,\mathrm{m}$), 其重心高度由 0 提升到垂直悬挂时重心高度 $h_{\mathrm{cm}} = (6 + 2)/2 = 4\,\mathrm{m}$. 故所做功

$$W = mg\Delta h = 20 \cdot g \cdot 4 = 80g.$$

取 $g \approx 9.8\, m/s^2$ 则 $W = 80 \cdot 9.8 = 784$ J.

选:(D)

4. 长度为 20 m 的水槽, 截面为等腰三角形, 顶宽 (上底)= 2 m, 高 = 3 m, 顶角朝下 (顶点在底部). 令垂直高度 y 从底部 0 到顶端 3. 横向水面宽度按相似三角形为 $w(y)=\frac{2}{3}y$. 单层厚 dy 的水体积 (沿槽长度) 为

$$dV=(\text{长度}20)\cdot w(y)\,dy=20\cdot\frac{2}{3}y\,dy=\frac{40}{3}y\,dy.$$

其重量为 $\rho g\frac{40}{3}y\,dy$, 提升距离为 $3-y$, 故总功

$$W=\rho g\frac{40}{3}\int_0^3 y(3-y)\,dy=\rho g\frac{40}{3}\Big[\frac{3}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\Big]_0^3=\rho g\frac{40}{3}\cdot\frac{9}{2}=60\rho g.$$

代入水密度 1000 kg/m^3 和 $g\approx 9.8$ 得 $W\approx 588000\,\mathrm{J}$, 即 588 kJ.

选:(D)

5. 圆柱形贮水槽: 高 $H=4\,\mathrm{m}$, 底半径 $R=2\,\mathrm{m}$. 对高度 $y\in[0,4]$ 的薄层体积 $dV=\pi R^2dy=\pi\cdot 4\,dy$, 重量 $dW=\rho g\cdot 4\pi\,dy$, 提升距离至顶端为 $4-y$. 总功

$$W=4\pi\rho g\int_0^4(4-y)\,dy=4\pi\rho g\big[4y-\tfrac{1}{2}y^2\big]_0^4=4\pi\rho g(16-8)=32\pi\rho g.$$

故空桶所需功为 $\boxed{32\pi\rho g}$.

8 空间解析几何与向量代数

8.1 题目集

8.1.1 向量及其线性运算

1. 向量 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 与三个坐标轴正向的夹角分别为 α、β、γ, 则 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦中 $\cos\alpha = (\quad)$.

   (A) $\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x + a_y + a_z}}$

   (B) $\pm\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$

   (C) $\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$

   (D) $\pm\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x + a_y + a_z}}$

2. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3,2,-1)$、$B(5,-4,7)$ 和 $C(-1,1,2)$, 则从顶点 C 所引中线的长度是 ( ).

   (A) $\sqrt{35}$ (B) 35 (C) $\sqrt{30}$ (D) 30

3. 与点 $A(2,3,1)$ 和点 $B(4,5,6)$ 等距离的点的轨迹方程为 ( ).

   (A) $2x + 4y + 8z - 63 = 0$

   (B) $2x + 4y + 10z - 53 = 0$

   (C) $4x + 2y + 5z - 63 = 0$

   (D) $4x + 4y + 10z - 63 = 0$

4. 点 $M(2,-3,1)$ 关于坐标原点的对称点 M_1 的坐标是 ( ).

   (A) $(2,3,-1)$

   (B) $(-2,3,-1)$

   (C) $(-2,-3,-1)$

   (D) $(-2,3,1)$

5. 设 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, $\boldsymbol{a} = (3,-5,8)$, $\boldsymbol{b} = (-1,1,z)$, 则 $z = (\quad)$.

6. 设 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, 则 $2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v} = \underline{\quad}\boldsymbol{a} - \underline{\quad}\boldsymbol{b} + \underline{\quad}\boldsymbol{c}$.

8.1.2 数量积向量积

1. 设三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(\quad)$.

(A) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ (B) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ (C) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ (D) $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$

2. 设非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=(\quad)$.

(A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) 0

3. 设 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=26$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=72$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\quad)$.

(A) 30 (B) ±30 (C) -30 (D) 0

4. 设向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行但方向相反, 且 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|>0$, 则 $(\quad)$.

(A) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ (C) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

(B) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ (D) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

5. 设三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, 则 $(\quad)$.

(A) $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ (C) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

(B) 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ (D) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$

6. 向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=(2,1,1)$ 的夹角 $\theta=(\quad)$.

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

7. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 都是单位向量, 且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=(\quad)$.

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) 3 (D) -3

8. 设 $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=3$, 且 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$, 则以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积为 $(\quad)$.

(A) $15\sqrt{3}$ (C) 30

(B) $30\sqrt{3}$ (D) 15

9. 设 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=(\quad)$.

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$, 则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\quad)$.

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$, 则 $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\quad)$.

12. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直, 且 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$. 则, $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=(\quad)$; $|(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|=(\quad)$.

13. 已知三角形的三个顶点坐标分别为 $A(0,1,-1)$, $B(2,-1,-4)$, $C(4,1,5)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 $(\quad)$.

8.1.3 平面及其方程

1. 过点 $M(2,0,-1)$, 且与向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,-1)$、$\boldsymbol{b}=(3,0,4)$ 都平行的平面方程为 ( ).

(A) $4x+11y-3z-11=0$　　(C) $4x-11y-3z+11=0$

(B) $4x-11y+3z-11=0$　　(D) $4x-11y-3z-11=0$

2. 通过点 $(3,2,-1)$, 且与平面 $2x-y+z-3=0$ 平行的平面方程为 ( ).

(A) $2x-y+z-3=0$　　(C) $2x+y+z-3=0$

(B) $2x-y+z+3=0$　　(D) $2x-y-z-3=0$

3. 过点 $(1,-5,1)$ 和 $(3,2,-2)$ 且垂直于 xOy 面的平面方程为 ( ).

(A) $7x-2y-7z-17=0$　　(C) $7x-2y-17=0$

(B) $7x+2y-17=0$　　(D) $7x-2y-7z+17=0$

4. 平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,-1)$ 且在 x 轴、y 轴的截距依次为 3 和 -2 的平面方程为 ( ).

(A) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$　　(C) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}=1$

(B) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{5}=1$　　(D) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{6}=1$

5. 若平面 $x+ky-2z+1=0$ 与平面 $2x-3y+z=0$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$, 则 $k=$ ( ).

(A) $\pm\dfrac{\sqrt{70}}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{70}}{2}$

(B) $\pm\dfrac{\sqrt{70}}{4}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{70}}{4}$

6. 点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离为 ( ).

8.1.4 空间直线及其方程

1. 过点 $(4,-1,3)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{s}=(2,1,5)$ 的直线方程为 ( ).

(A) $\dfrac{x-4}{2}=y+1=\dfrac{z-3}{5}$

(C) $\dfrac{x+4}{2}=y-1=\dfrac{z+3}{5}$

(B) $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{3}$

(D) $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+5}{3}$

2. 过点 $(-1,0,2)$ 且垂直于平面 $2x-y+3z-6=0$ 的直线方程为 ( ).

(A) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$

(C) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$

(B) $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-3}{3}$

(D) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$

3. 过点 $(2,-3,5)$ 和 $(2,-1,4)$ 的直线方程为 ( ).

(A) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-5}{-1}$

(C) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-5}{-1}$

(B) $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-5}{-1}$

(D) $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+5}{-1}$

4. 过点 $(-3,2,5)$, 且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行的直线方程为 ( ).

(A) $4(x+3)+3(y-2)+(z-5)=0$

(C) $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-5}{3}$

(B) $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}$

(D) $2(x+3)+1(y-2)+3(z-5)=0$

5. 直线 $x+2=\dfrac{y-1}{-4}=z+1$ 与直线 $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$ 的夹角的余弦值为 ( ).

(A) $\dfrac{4}{\sqrt{15}}$

(C) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(B) $\dfrac{2}{\sqrt{15}}$

(D) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

6. 点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ 的距离为 ( ).

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

(D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

7. 过点 $(3,1,-2)$ 且通过直线 $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程为 (   ).

(A) $8x-9y-22z-59=0$

(B) $8x-9y+22z-59=0$

(C) $8x-9y+22z-69=0$

(D) $8x-9y-22z-69=0$

8. 过点 $(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程为 (   ).

(A) $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{3}$

(B) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{4}$

(C) $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$

(D) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$

9. 已知平面 $Ax-y-z+5=0$ 与直线 $x-4=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z}{4}$ 平行, 则 $A=$ (   ).

8.1.5 曲面及其方程

1. xOz 坐标面上的抛物线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面方程为 ( ).

(A) $y^2 + z^2 = 5x$ (C) $x^2 + y^2 = 5z$

(B) $x^2 + z^2 = 5x$ (D) $y^2 - z^2 = 5x$

2. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 绕 y 轴旋转一周求旋转曲面方程为 ( ).

(A) $4(x^2 - z^2) - 9y^2 = 36$ (C) $4(x^2 + z^2) - 9y^2 = 36$

(B) $4x^2 - 9(y^2 + z^2) = 36$ (D) $4x^2 - 9(y^2 - z^2) = 36$

3. 在空间直角坐标系, 方程 $\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ 表示 ( ).

(A) 柱面 (C) 圆

(B) 双曲面 (D) 抛物面

4. 在空间直角坐标系, 方程 $\dfrac{z}{3} = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ 表示 ( ).

(A) 椭圆抛物面 (C) 旋转抛物面

(B) 柱面 (D) 圆锥面

5. 在空间直角坐标系, 方程 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 表示 ( ).

(A) 圆锥面 (C) 球面

(B) 柱面 (D) 旋转抛物面

6. 在空间直角坐标系, 方程 $y^2 - z = 0$ 表示 ( ).

(A) 抛物线 (C) 双曲面

(B) 锥面 (D) 抛物柱面

7. 方程 $(z - a)^2 = x^2 + y^2$ 表示 ( ).

(A) xOz 面上的直线 $z - a = x$ 绕 z 轴旋转所得的曲面

(B) yOz 面上的直线 $z - a = y$ 绕 y 轴旋转所得的曲面

(C) yOz 面上的曲线 $(z - a)^2 = y^2$ 绕 x 轴旋转所得的曲面

(D) xOz 面上的曲线 $(z - a)^2 = x^2$ 绕 y 轴旋转所得的曲面

8. 下列结论中错误的是 ( ).

(A) $x^2+2y^2=1+3z^2$ 表示双叶双曲面

(B) $z+2x^2+y^2=0$ 表示椭圆抛物面

(C) $y^2=2x$ 表示抛物柱面

(D) $x^2+2y^2-(z-1)^2=0$ 表示圆锥面

8.1.6 空间曲线及其方程

1. 方程组 $\begin{cases} y = 5x + 1, \\ y = 2x - 3; \end{cases}$ 表示 ( ).

(A) 空间直线 (C) 椭圆

(B) 抛物线 (D) 双曲线

2. 方程组 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \\ y = 3; \end{cases}$ 表示 ( ).

(A) 两条平行于 z 轴的直线 (C) 抛物线

(B) 椭圆 (D) 双曲线

3. 方程组 $\begin{cases} y^2 + z^2 - 4x + 8 = 0, \\ y = 4; \end{cases}$ 表示 ( ).

(A) 双曲线 (C) 椭圆

(B) 抛物线 (D) 圆

4. 曲线 $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ 的参数方程为 ( ).

(A) $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3}\cos t \\ y = \sqrt{3}\cos t \quad (0 \le t \le 2\pi) \\ z = 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3}\cos t \\ y = \sqrt{3}\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi) \\ z = 0 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3}\cos t \\ y = \sqrt{3}\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi) \\ z = 1 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3}\cos t \\ y = \sqrt{3}\cos t \quad (0 \le t \le 2\pi) \\ z = 1 \end{cases}$

5. 两个球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 及 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 的交线在 xOy 面上的投影方程为 ( ).

(A) $\begin{cases} x^2 + z^2 = \dfrac{3}{4} \\ y = 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{3}{4} \\ z = 0 \end{cases}$

(C) $x^2+y^2=\frac{3}{4}$

(D) $\begin{cases} y^2+z^2=\frac{3}{4} \\ x=0 \end{cases}$

6. 方程组 $\begin{cases} \frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1, \\ x=2 \end{cases}$ 表示 ( ).

(A) 双叶双曲面

(C) 单叶双曲面

(B) 双曲柱面

(D) 双曲柱面与平面 $x=2$ 的交线

7. 曲线 $\begin{cases} y^2+z^2-2x=0, \\ z=3 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线的方程是 ( ).

(A) $\begin{cases} y^2=2x, \\ z=3 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} y^2=2x-9, \\ z=0 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} y^2=2x-9, \\ z=3 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} y^2=2x, \\ z=0 \end{cases}$

8. 曲面 $x^2+4y^2+z^2=4$ 与平面 $x+z=a$ 的交线在 yOz 面上的投影曲线的方程是 ( ).

(A) $(a-z)^2+4y^2+z^2=4$

(C) $\begin{cases} x^2+4y^2+(a-x)^2=4, \\ x=0 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x^2+4y^2+(a-x)^2=4, \\ z=0 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} (a-z)^2+4y^2+z^2=4, \\ x=0 \end{cases}$

9. 设直线 L 的方程为 $\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x+y+z=4, \end{cases}$ 则 L 的参数方程为 ( ).

(A) $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=1+t, \\ z=1+3t \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=1-t, \\ z=1+3t \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 - t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 + t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

10. 方程组 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 11, \\ y = 2 \end{cases}$, 在空间直角坐标系中表示 (　).

(A) 椭圆柱面

(B) 椭圆曲线

(C) 两条平行直线

(D) 两个平行平面

8.2 解答集

8.2.1 向量及其线性运算

1. 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$, 方向余弦定义为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

答案: (C)

2. 中点 M 为 AB 的中点:

$$M\Big(\frac{3+5}{2},\frac{2+(-4)}{2},\frac{-1+7}{2}\Big)=(4,-1,3).$$

中线向量 $\overrightarrow{CM}=M-C=(4-(-1),-1-1,3-2)=(5,-2,1)$, 长度 $\sqrt{5^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{30}$.

答案: (C)

3. 点 (x,y,z) 到 $A(2,3,1)$ 与 $B(4,5,6)$ 等距, 则

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=(x-4)^2+(y-5)^2+(z-6)^2.$$

化简得线性方程

$$4x+4y+10z-63=0.$$

答案: (D)

4. 关于原点的对称点即坐标取反:

$$M_1=(-2,3,-1).$$

答案: (B)

5. 条件 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 等价于

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

即 $4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 代入 $\boldsymbol{a}=(3,-5,8)$, $\boldsymbol{b}=(-1,1,z)$:

$$3(-1)+(-5)(1)+8z=0\Rightarrow -3-5+8z=0\Rightarrow 8z=8\Rightarrow z=1.$$

6. 先写出 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c},\qquad \boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}.$$

计算

$$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}.$$

8.2.2 数量积向量积

1. 由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$ 得 $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 因此

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

答案: (B)

2. 由 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 等式可得 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, 类似可得三向量两两垂直. 记 $x=|\boldsymbol{a}|$, $y=|\boldsymbol{b}|$, $z=|\boldsymbol{c}|$, 则 $x=yz$, $y=zx$, $z=xy$. 非零乘得 $xyz=(xyz)^2$, 故 $xyz=1$, 又由 $x=yz$ 得 $x^2=1$, 故 $x=y=z=1$. 于是

$$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=3.$$

答案: (A)

3. 由 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$, 有 $78\sin\theta=72\Rightarrow\sin\theta=\frac{12}{13}$, 于是 $\cos\theta=\pm\dfrac{5}{13}$. 故

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=78\cdot\left(\pm\frac{5}{13}\right)=\pm30.$$

答案: (B)

4. 设 $\boldsymbol{b}=-k\boldsymbol{a}$ 且 $0<k<1$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|(1-k)\boldsymbol{a}|=|a|-|b|$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|(1+k)\boldsymbol{a}|=|a|+|b|$.

答案: (A)

5. 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 得 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$, 即 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.

答案: (A)

6. 计算内积:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,-1,2)\cdot(2,1,1)=2-1+2=3.$$

模长 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$, 因此

$$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}.$$

答案: (B)

7. 三单位向量和为零, 则 $0 = |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})$. 代入各模长为 1, 得 $3+2S=0 \Rightarrow S=-\frac{3}{2}$.

答案: (B)

8. 面积 $= |(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|$. 展开得

$$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}) = -5(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$

所以面积 $= 5|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = 5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\dfrac{\pi}{6} = 5\cdot 4\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2} = 30.$

答案: (C)

9. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = -2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

模长 $= 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| = 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$

答案: 24.

10. 令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 为混合积, 但混合积在其中有两向量相同或成比例时为零. 更直接:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})) + (\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})) = 0+0=0.$$

答案: 0.

11. 计算已知向量:

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (6,3,-1),$$

所以

$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} = (6,3,-1)\cdot(2,-3,1) = 12-9-1 = 2.$$

答案: 2.

12. 已作于上题. 若 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}, |\boldsymbol{a}| = 3, |\boldsymbol{b}| = 4$, 则

$$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})| = 24,$$

而

$$|(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})| = 7|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84.$$

答案: 24, 84.

13. 取边向量 $\overrightarrow{AB} = (2, -2, -3), \overrightarrow{AC} = (4, 0, 6)$,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-12, -24, 8),$$

模长 $= 28$, 三角形面积 $= \frac{1}{2} \cdot 28 = 14$.

答案: 14.

8.2.3 平面及其方程

1. 过点 $M(2,0,-1)$ 且平行于 $\boldsymbol{a}=(2,1,-1)$, $\boldsymbol{b}=(3,0,4)$ 的平面. 法向量取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 4\end{vmatrix}=(4,-11,-3).$$

平面方程为 $4(x-2)-11(y-0)-3(z+1)=0$, 即

$$4x-11y-3z-11=0.$$

答案: (D)

2. 过点 $(3,2,-1)$ 且与平面 $2x-y+z-3=0$ 平行. 平行平面法向量相同, 方程为

$$2(x-3)-(y-2)+(z+1)=0\Longrightarrow 2x-y+z-3=0.$$

答案: (A)

3. 过 $(1,-5,1)$ 和 $(3,2,-2)$ 且垂直于 xOy 面的平面. 垂直于 xOy 意味着平面含有 z 轴方向 $(0,0,1)$. 令 $\boldsymbol{v}=(3-1,2-(-5),-2-1)=(2,7,-3)$, 法向量可取为 $(0,0,1)\times\boldsymbol{v}=(-7,2,0)$, 等价为 $(7,-2,0)$. 过点 $(1,-5,1)$ 得方程

$$7(x-1)-2(y+5)=0\Longrightarrow 7x-2y-17=0.$$

答案: (C)

4. 平面平截式为 $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{c}=1$(y 截距为 -2 写成 -2, 故为 $-y/2$). 要求平行于 $\boldsymbol{a}=(2,1,-1)$, 则方向向量代入齐次方程:

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{-1}{c}=0\Longrightarrow\frac{1}{6}-\frac{1}{c}=0\Rightarrow c=6.$$

方程为

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1.$$

答案: (D)

5. 两平面法向量分别 $\boldsymbol{n}_1 = (1, k, -2)$ 和 $\boldsymbol{n}_2 = (2, -3, 1)$, 夾角為 $\pi/4$, 故

$$\frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{\|\boldsymbol{n}_1\|\|\boldsymbol{n}_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

代入得

$$\frac{|2 - 3k - 2|}{\sqrt{k^2+5}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \frac{3|k|}{\sqrt{14(k^2+5)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

解得 $k^2 = \dfrac{35}{2}$, 即

$$k = \pm\frac{\sqrt{70}}{2}.$$

答案: (A)

6. 点到平面距离: 点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x + 2y + 2z - 10 = 0$ 的距离为

$$\frac{|1 + 4 + 2 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{3}{3} = 1.$$

8.2.4 空间直线及其方程

1. 过点 $(4,-1,3)$ 且平行于 $\boldsymbol{s}=(2,1,5)$ 的直线参数方程

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}.$$

答案: (A)

2. 直线垂直于平面 $2x-y+3z-6=0$, 方向向量就是该平面的法向量 $(2,-1,3)$, 过点 $(-1,0,2)$:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z-2}{3}.$$

答案: (D)

3. 两点 $(2,-3,5)$ 与 $(2,-1,4)$ 的方向向量为 $(0,2,-1)$, 直线方程写作

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-5}{-1}.$$

答案: (B)

4. 两平面 $x-4z=3$ 与 $2x-y-5z=1$ 的法向量分别为 $(1,0,-4)$ 与 $(2,-1,-5)$, 交线方向为两法向量的叉积, 可取方向 $(4,3,1)$. 过点 $(-3,2,5)$ 的直线方程为

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

答案: (B)

5. 将两直线的方向向量取出. 第一直线等价参数形式给出方向 $\boldsymbol{u}=(1,-4,1)$；第二直线方向 $\boldsymbol{v}=(5,-2,-1)$. 两方向的夹角余弦 (取锐角) 为

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}=\frac{12}{\sqrt{18}\sqrt{30}}=\frac{2}{\sqrt{15}}.$$

答案: (B)

6. 所求直线为两平面的交线. 先求交线的方向向量为两平面法向量的叉积:

$$\boldsymbol{d}=(1,1,-1)\times(2,-1,1)=(0,-3,-3)\sim(0,-1,-1).$$

求出交线上的一点例如 $(1,-2,0)$(解线性方程组). 点 $P(3,-1,2)$ 到该直线的距离为

$$\frac{\|(P-Q)\times \boldsymbol{d}\|}{\|\boldsymbol{d}\|}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

答案: (D)

7. 给定直线参数点 $L_0(4,-3,0)$, 方向 $\boldsymbol{v}=(5,2,1)$. 要找通过点 $P(3,1,-2)$ 且包含该直线的平面, 取另一个方向向量为 $\overrightarrow{PL_0}=(-1,4,-2)$. 平面法向量为 $\boldsymbol{v}\times\overrightarrow{PL_0}=(-8,9,22)$. 用点 P 写出方程:

$$-8(x-3)+9(y-1)+22(z+2)=0,$$

即

$$8x-9y-22z-59=0.$$

答案: (A)

8. 给定直线方向 $\boldsymbol{u}=(3,2,-1)$(从 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 得到). 要求与之垂直相交且过点 $(2,1,3)$ 的直线, 则该直线方向应与 $\boldsymbol{u}$ 垂直并通过点 $(2,1,3)$. 选项中唯一满足与 $\boldsymbol{u}$ 垂直的是方向 $(2,-1,4)$, 因此方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

答案: (D)

9. 直线方向为 $(1,-2,4)$(从 $x-4=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z}{4}$ 得到). 若平面 $Ax-y-z+5=0$ 与该直线平行, 则方向向量应在平面内, 因此法向量 $(A,-1,-1)$ 与方向向量点乘为零:

$$A\cdot 1+(-1)(-2)+(-1)\cdot 4=0\Longrightarrow A-2=0\Rightarrow A=2.$$

答案: $A=2$.

8.2.5 曲面及其方程

1. 抛物线在 xOz 面上为 $z^2 = 5x$. 绕 x 轴旋转时,z^2 被替换为 $y^2 + z^2$. 因此旋转曲面方程为

$$y^2 + z^2 = 5x.$$

答:(A)

2. 平面曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 在 xOy 面上, 绕 y 轴旋转时,x^2 变为 $x^2 + z^2$. 所以旋转曲面方程为

$$4(x^2 + z^2) - 9y^2 = 36.$$

答:(C)

3. 方程

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

与 z 无关, 表示以直线圆周 (以 z 轴为方向) 的延伸. 即柱面 (圆柱面).

答:(A)

4. 将方程整理为

$$z = 3\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{3}y^2,$$

这是 z 与二次型成正比的抛物面, 且两个平面截面系数不同, 故为椭圆抛物面.

答:(A)

5. 方程

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Longleftrightarrow \quad z^2 = x^2 + y^2,\ z \geq 0,$$

表示以原点为顶点、关于 z 轴对称的圆锥面 (取主值时为上半锥).

答:(A)

6. 方程 $y^2 - z = 0$ 即 $z = y^2$, 与 x 无关. 对每一固定 x 在 yOz 面上是抛物线, 沿 x 方向平移得到抛物柱面.

答:(D)

7. 方程

$$(z-a)^2 = x^2 + y^2$$

等价于以点 $(0,0,a)$ 为顶点、绕 z 轴对称的圆锥面. 该曲面也可视为 xOz 面上直线 $z-a=x$ 绕 z 轴旋转所得 (旋转后把 x^2 升为 x^2+y^2).

答:(A)

8. 判断正误 (要求找出错误结论):

(A) $x^2+2y^2=1+3z^2$ 可写为 $x^2+2y^2-3z^2=1$. 因为二次型符号为 $(+,+,-)$ 且右端为正, 属于单叶双曲面 (one-sheet hyperboloid) 而非双叶双曲面 (two-sheet). 因此 (A) 错误.

(B) $z+2x^2+y^2=0$ 等价于 $z=-2x^2-y^2$, 为开口向下的椭圆抛物面, 正确.

(C) $y^2=2x$ 与 z 无关, 为沿 z 方向延伸的抛物柱面, 正确.

(D) $x^2+2y^2-(z-1)^2=0$ 即 $(z-1)^2=x^2+2y^2$, 为以 $(0,0,1)$ 为顶点的圆锥面, 正确.

综上, 错误项为:(A).

8.2.6 空间曲线及其方程

1. 方程组

$$\begin{cases} y = 5x + 1, \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

联立得 $5x + 1 = 2x - 3 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\dfrac{4}{3}$, $y = 2x - 3 = -\dfrac{8}{3} - 3 = -\dfrac{17}{3}$. 方程不含 z, 因此解集为点 $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{17}{3}\right)$ 沿 z 轴延伸的一条直线. 故为空间直线.

答:(A)

2. 方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \\ y = 3. \end{cases}$$

代入第二式得 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{9}{9} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow x = 0$. 方程不含 z, 因此解为点 $(0, 3)$ 沿 z 轴的一条直线 (单条直线, 注意并非两条).

注: 选项中没有“单条直线”, 实际集合为直线 $x = 0,\ y = 3$.

答:(A, 最接近选项)

3. 方程组

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 4x + 8 = 0, \\ y = 4. \end{cases}$$

代入 $y = 4$: $16 + z^2 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow z^2 - 4x + 24 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}z^2 + 6$. 这是以 z 为参数的抛物线 (在平面 $y = 4$ 中).

答:(B)

4. 曲线由

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4, \qquad z = 0$$

给出. 把 $z = 0$ 代入得

$$(x-1)^2 + y^2 + 1 = 4 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 3,$$

这是平面 $z=0$ 中以 $(1,0,0)$ 为心、半径 $\sqrt{3}$ 的圆. 参数方程取

$$\begin{cases} x = 1+\sqrt{3}\cos t, \\ y = \sqrt{3}\sin t, \qquad\qquad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = 0, \end{cases}$$

答:(C)

5. 两球的方程为

$$x^2+y^2+z^2=1, \qquad x^2+y^2+z^2=2z.$$

第二式变形为 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$. 两式相减得

$$0 = 2z-1 \Rightarrow z = \tfrac{1}{2}.$$

代入任一球方程得

$$x^2+y^2+\tfrac{1}{4}=1 \Rightarrow x^2+y^2=\tfrac{3}{4}.$$

交线在 xOy 面的投影即该圆 $x^2+y^2=\frac{3}{4}, z=0$.

答:(B)

6. 方程组

$$\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1, \qquad x=2.$$

第一式关于 y,z 给出双曲线, 且与 x 无关, 是一个以 y,z 为坐标的双曲柱面. 与平面 $x=2$ 交得到该双曲柱面与平面的交线. 故最精确的描述为"(双曲柱面) 与平面 $x=2$ 的交线".

答:(D)

7. 方程组

$$y^2+z^2-2x=0, \qquad z=3.$$

代入 $z=3$ 得 $y^2+9-2x=0 \Rightarrow y^2=2x-9$. 将该曲线投影到 xOy 平面, 得到方程 $y^2=2x-9$(投影坐标记作 $z=0$).

答:(C)

8. 曲面与平面交线投影问题. 曲面为

$$x^2+4y^2+z^2=4,$$

平面为 $x+z=a$. 将 $x=a-z$ 代入曲面方程得

$$(a-z)^2+4y^2+z^2=4.$$

交线在 yOz 面的投影即把 x 坐标置为 0, 保留 y,z 满足上述关系, 即

$$\begin{cases}(a-z)^2+4y^2+z^2=4,\\ x=0.\end{cases}$$

答:(D)

9. 直线 L 由

$$\begin{cases}x-y+z=1,\\ 2x+y+z=4\end{cases}$$

给出. 求参数方程. 解法一: 先求一点和方向向量. 做差得

$$(2x+y+z)-(x-y+z)=4-1\Rightarrow x+2y=3\Rightarrow x=3-2y.$$

取参数 t 令 $y=1+t$, 则 $x=3-2(1+t)=1-2t$. 由 $x-y+z=1$ 得 $z=1+3t$. 于是参数方程

$$\begin{cases}x=1-2t,\\ y=1+t,\\ z=1+3t.\end{cases}$$

答:(A)

10. 方程组

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=11,\qquad y=2.$$

解答过程同 2 题.

答:(C)

9 高等数学相关测试

9.1 课堂涉及到的随堂练习

9.1.1 随堂练习题目集

1. 函数 $f(x)(-1 \le x \le 2)$ 的图像如图所示,

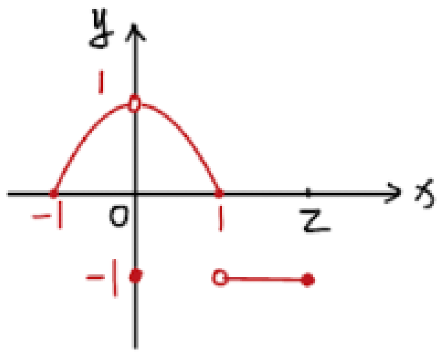

图 3: **随堂练习 1**

给出下列极限的值 (若” 不存在” 填写” 不存在”) :

(1) $\lim\limits_{x\to-1} f(x) =$ ____;

(2) $\lim\limits_{x\to0} f(x) =$ ____;

(3) $\lim\limits_{x\to1} f(x) =$ ____;

(4) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) =$ ____.

2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1} = (\quad)$.

(A) 0 (B) 不存在 (C) 2 (D) $\dfrac{1}{2}$

3. 极限 $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}\right) = (\quad)$.

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) 0 (D) ∞

4. $\lim\limits_{x\to0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = (\quad)$.

(A) 1 (B) e (C) 2 (D) e^2

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x = (\quad)$.

(A) 1 (B) e (C) $\frac{1}{\mathrm{e}}$ (D) 0

6. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x} = (\quad)$.

(A) 1 (B) e^2 (C) e (D) e^3

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}{\cos x-1} = (\quad)$.

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) -1

8. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x} = (\quad)$.

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

9. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的 $(\quad)$.

(A) 等价无穷小 (C) 高阶无穷小

(B) 同阶但不等价 (D) 低阶无穷小

10. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}-\mathrm{e}^{\tan x}}{x\ln(1+x^2)} = (\quad)$.

(A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ a\mathrm{e}^{2x}, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续, 则常数 $a=(\quad)$.

(A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2

12. 若函数 $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ 2^x+k, & x\ge 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $k=(\quad)$.

(A) -2 (C) e

(B) 0 (D) $\mathrm{e}^{-1}-1$

13. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续, 则 $(\quad)$.

(A) $ab = \frac{1}{2}$　(B) $ab = -\frac{1}{2}$　(C) $ab = 0$　(D) $ab = 2$

14. 当 $x \to 0$ 时，下列四个无穷小量中，比其他三个更高阶的无穷小量是 ( ).

(A) x^2　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$

(B) $1-\cos x$　(D) $\tan x - \sin x$

15. 当 $x \to 0$ 时, $\alpha(x), \beta(x)$ 是非零无穷小量, 给出以下四个命题:

(1) 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$;

(2) 若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

(3) 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$;

(4) 若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

其中正确的序号是: ( ).

(A) (1)(2)　(C) (1)(3)(4)

(B) (1)(4)　(D) (2)(3)(4)

16. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则 $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h} = (\quad)$.

(A) $f'(x_0)$　(B) $2f'(x_0)$　(C) $-f'(x_0)$　(D) $-2f'(x_0)$

17. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处 ( ).

(A) 连续且可导　(C) 不连续

(B) 连续，不可导　(D) 导函数连续

18. 设 $y = \sqrt{x} \sin x - 2^x \cos x$, 则 $y' = (\quad)$.

(A) $\frac{1}{\sqrt{x}} \sin x + \sqrt{x} \cos x + 2^x \ln 2 \cdot \cos x + 2^x \sin x$

(B) $\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x + \sqrt{x} \cos x - 2^x \cdot \cos x + 2^x \sin x$

(C) $\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x + \sqrt{x} \cos x - 2^x \ln 2 \cdot \cos x + 2^x \sin x$

(D) $\frac{1}{\sqrt{x}} \sin x - \sqrt{x} \cos x + 2^x \ln 2 \cdot \cos x + 2^x \sin x$

19. 设 $y = \frac{1+\ln x}{x^2}$, 则 $y' = (\quad)$.

(A) $-\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$

(B) $\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$

(C) $\dfrac{1+2\ln x}{x^3}$

(D) $-\dfrac{1+2\ln x}{x^3}$

20. 设 $f(x)=\dfrac{3}{5-x}+\dfrac{x^2}{5}$, 则 $25f'(0)=($ $)$.

21. 设 $y=x\tan x-2\sec x$, 则 $y'=($ $)$.

(A) $\tan x+x\sec x-2\sec x\tan x$

(B) $\tan x+\sec^2 x-2\sec x\tan x$

(C) $\tan x+x\sec^2 x-2\sec x\tan x$

(D) $\tan x+\dfrac{x}{1+x^2}-2\sec x\tan x$

22. 设 $f(x)=\ln\tan\dfrac{x}{2}$, 则 $f'(x)=($ $)$.

A. $\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}$

B. $\dfrac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

C. $\dfrac{1}{2}\dfrac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{\sin x}=\csc x$

D. $\dfrac{1}{2\tan\frac{x}{2}}\dfrac{1}{1+x^2}$

23. 设 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$, 其中常数 $a>0$, 则 $y'=($ $)$.

A. $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right)\cdot 2x$

B. $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right)\cdot 2x$

C. $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\cdot 2x$

D. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

更新至 2025 年 10 月 28 日的随堂测试内容

9.1.2 随堂练习解答集

此部分暂不更新

9.2 10 月 26 日第二章章节测试

9.2.1 题目

1. 若 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x^2}{x^2+ax+b}=2$，则 ( )

A. $a=-4,b=-5$

B. $a=-2,b=-3$

C. $a=3,b=2$

D. $a=5,b=4$

2. 若 $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2-3x}-ax-b)=2$，则常数 a 和 b 满足 ( )

A. $a=1,b=-\dfrac{3}{2}$

B. $a=-1,b=\dfrac{3}{2}$

C. $a=1,b=-\dfrac{7}{2}$

D. $a=-1,b=\dfrac{7}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\cos x)\tan\dfrac{1}{x}=$ ( )

A. 其他选项都不对

B. 1

C. 0

D. ∞

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2x+1}{3x+1})^{\frac{1}{x}}=$ ( )

A. e

B. ∞

C. e^{-1}

D. 1

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin bx}{x} & ,x>0,\\ a & ,x\le 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 a 和 b 满足 ( )

A. a 与 b 为任意常数

B. $a=b$

C. $a<b$

D. $a>b$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt{n}+3\sqrt{n\sqrt{n}}-1}{2\sqrt{n}-\sqrt{n\sqrt{n}}}=$ ( ).

A. ∞

B. 0

C. -3

D. 2

7. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{n}{2n^2+1}+\dfrac{n}{2n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{2n^2+n})=$ ( )

A. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{2}$

B. 1　　D. 0

8. 当 $x \to 0$ 时，$1-\sqrt{1-2x^3}$ 是 $\arcsin x^3$ 的 (　)

A. 等价无穷小　　C. 低阶无穷小

B. 高阶无穷小　　D. 同阶但非等价无穷小

9. $x=0$ 是函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ 的 (　)

A. 无穷间断点　　C. 跳跃间断点

B. 可去间断点　　D. 振荡间断点

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+6x\sin x}-1}{x\ln(1+3x)}=$ (　)

11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{2x-5}-\sqrt{x-2}}=$ (　)

9.2.2 参考答案

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-x^2}{x^2+ax+b}=2.$

   解： 分子 $1-x^2=(1-x)(1+x)$ 在 $x=-1$ 有因子 $x+1$，为使极限为有限值，分母亦应有因子 $x+1$。设

$$x^2+ax+b=(x+1)(x+c)=x^2+(1+c)x+c,$$

   得 $a=1+c,\ b=c$，且极限为

$$\lim_{x\to-1}\frac{1-x^2}{(x+1)(x+c)}=\lim_{x\to-1}\frac{1-x}{x+c}=\frac{2}{c-1}=2,$$

   解得 $c-1=1\Rightarrow c=2$，故 $a=1+c=3,\ b=2.$

   $\boxed{\text{答案：}\ \text{C. } a=3,\ b=2.}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-ax-b\right)=2.$

   解： 对大 x 展开

$$\sqrt{x^2-3x}=x\sqrt{1-\frac{3}{x}}=x\Big(1-\frac{3}{2x}+o(1)\Big)=x-\frac{3}{2}+o(1).$$

   为使 x 项消去，需 $a=1$。常数极限为 $-\dfrac{3}{2}-b=2$，得 $b=-\dfrac{7}{2}$。

   $\boxed{\text{答案：}\ \text{C. } a=1,\ b=-\dfrac{7}{2}.}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\cos x)\tan\dfrac{1}{x}.$

   解： $\tan(\dfrac{1}{x})\sim*\dfrac{1}{x}$，而 $1-\cos x$ 有界（介于 0 与 2 之间），故乘以 $\dfrac{1}{x}$ 得 0。

   $\boxed{\text{答案：}\ \text{C. } 0.}$

4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}.$

   解： 记极限为 L，取对数

$$\ln L=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{1+2x}{1+3x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big((2x-2x^2+\cdots)-(3x-\frac{9}{2}x^2+\cdots)\Big)=\lim_{x\to0}\frac{-x+\frac{5}{2}x^2+\cdots}{x}=-1.$$

   所以 $L=e^{-1}$。

   $\boxed{\text{答案：}\ \text{C. } e^{-1}.}$

5. 函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin bx}{x}, & x>0,\\ a, & x\le 0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 连续，则 a,b 满足何种关系？

解：右极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin bx}{x}=b\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin bx}{bx}=b$。连续要求 $a=b$。

$\boxed{\textbf{答案：}\ \text{B. } a=b.}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt{n}+3\sqrt{n\sqrt{n}}-1}{2\sqrt{n}-\sqrt{n\sqrt{n}}}$.

解：写出幂：

$$\sqrt{n}=n^{\frac12},\qquad \sqrt{n\sqrt{n}}=n^{\frac34}.$$

把分子分母同除以 $n^{\frac34}$，得极限为

$$\frac{3+0}{-1+0}=-3.$$

$\boxed{\textbf{答案：}\ \text{C. } -3.}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2n^2+1}+\dfrac{n}{2n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{2n^2+n}\right)$.

解：第 k 项为 $\dfrac{n}{2n^2+k}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{2+\frac{k}{n^2}}$. 因为 $\dfrac{k}{n^2}\to0$，每项约为 $\dfrac1n\cdot\dfrac12$，共有 n 项，极限为 $\dfrac12$。

$\boxed{\textbf{答案：}\ \text{C. } \dfrac12.}$

8. 当 $x\to0$ 时，比较 $1-\sqrt{1-2x^3}$ 与 $\arcsin(x^3)$ 的无穷小阶。

解：展开：

$$1-\sqrt{1-2x^3}\sim *\frac12(2x^3)=x^3,\qquad \arcsin(x^3)\sim *x^3.$$

故它们同阶且等价。

$\boxed{\textbf{答案：}\ \text{A. 等价无穷小.}}$

9. $x=0$ 是否为 $f(x)=\arctan\dfrac1x$ 的哪类间断点？

解：$\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\dfrac1x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\dfrac1x=-\dfrac{\pi}{2}$，左右极限存在且不相等，为跳跃间断点。

$\boxed{\textbf{答案：}\ \text{C. 跳跃间断点.}}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+6x\sin x}-1}{x\ln(1+3x)}$.

解： 设 $u=6x\sin x$，当 $x\to 0$ 时 $u\to 0$，有

$$\sqrt{1+u}-1=\frac{u}{2}+o(u)=\frac{6x\sin x}{2}+o(x\sin x)=3x\sin x+o(x^2).$$

又 $\ln(1+3x)=3x+o(x)$，所以分母 $x\ln(1+3x)=3x^2+o(x^2)$. 因此极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x\sin x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$\boxed{\text{答案： } 1.}$

11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{2x-5}-\sqrt{x-2}}$.

解： 分子分母在 $x=3$ 同为 0。用共轭：

$$\frac{x^2-3x}{\sqrt{2x-5}-\sqrt{x-2}}=\frac{(x^2-3x)\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{x-2}\right)}{(2x-5)-(x-2)}=\frac{x(x-3)\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{x-2}\right)}{x-3}.$$

约去 $x-3$ 得 $x\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{x-2}\right)$. 代 $x=3$ 得

$$3(1+1)=6.$$

$\boxed{\text{答案： } 6.}$

9.3 期末模拟卷

$\boxed{\text{此部分请参照学习通的内容} \rightarrow}$ 期末模拟卷 1 和 2

(其实是我懒得做了 Q^TAQ)

10 LaTeX 文件编译环境测试 (最终版本这条要注释掉)

本章节内容仅用于测试 LaTeX 文件编译环境是否正常进行[7].

10.1 选择题环境

1. 当 $x \to 0$ 时, 若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x} = 2$, 则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处

   (A) 不可导 (C) 取得极大值

   (B) 可导, 且 $f'(0) \neq 0$ (D) 取得极小值

10.2 填空题环境

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x} =$ ___1___.
2. 设 $y = (1+\sin x)^x$, 则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\pi} =$ ___$-\pi$___.
3. 设 $f(x) = \ln(1-x)$, 则 $f^{(n)}(0) =$ ___$-(n-1)!$___.

10.3 解答题环境

14. (本小题满分 8 分) 设 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处导数连续, 且 $f'(1) = 1$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}f(\cos^2 2x)$.

    解:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(\cos^2 2x) &= f'(\cos^2 2x)\cdot(2\cos 2x)\cdot(-\sin 2x)\cdot 2 \\
&= (-2\sin 4x)f'(\cos^2 2x) && \text{3 分} \\
\text{则原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 4x\cdot f'(\cos^2 2x)}{x} \\
&= (-2)\lim_{x\to 0}\frac{4x\cdot f'(\cos^2 2x)}{x} && \text{5 分} \\
&= (-8)f'(1) = -8 && \text{8 分}
\end{aligned}
$$

[7]编译选项为 XeLaTeX

10.4 代码环境

```cpp
#include <iostream>
int main(){
    std::cout << "LaTeX" << std::endl;
    //这一行是注释
    return 0;
}
```

10.5 公式环境 1

$$E = mc^2 \tag{4}$$

10.6 公式环境 2

$$\begin{align}P &= UI \tag{5}\\ &= I^2R \tag{6}\end{align}$$

10.7 超链接环境

1. 白日不到处, 青春恰自来苔花如米小, 也学牡丹开;
2. 读书不觉已春深, 一寸光阴一寸金;
3. 你有一天将遭遇的灾祸是你某一段时间疏懒的报应.

DevCpp 下载:(推荐使用 5.11 版本)

1. 官方下载:https://sourceforge.net/projects/orwelldevcpp/
2. 百度网盘:https://pan.baidu.com/s/1mhHDj08 提取码:mken
3. 有时候无法访问 SourceForge 这个网站, 建议大家去百度网盘下载.

10.8 图表环境

图 4: 插图测试

10.9 作业信息环境

《程序设计基础 (C 语言)》作业

作业号	Q0101
班级	计算机 2501 班
学号	240260114
姓名	姜振坤