UNIDADE II – Taxa de Juros

- Um dos problemas mais comuns no dia a dia do mercado financeiro consiste na necessidade de transformação das taxas divulgadas pelas instituições financeiras, de forma a adequá-las ao prazo desejado pelo poupador ou tomador de recursos, em operações específicas.

- Aprendemos que a solução de problemas de Matemática Financeira exige que o prazo da operação seja expresso na mesma unidade de tempo da taxa de juros.

- Sob essa premissa, alguns problemas envolvendo divergências na unidade de tempo da taxa e da operação, foram resolvidos mediante o uso de regra de três simples, para a transformação da taxa (no RCS) ou para a transformação do prazo (no RCC e RCS), permitindo, assim, a solução das questões.

- Embora sempre haja a possibilidade de nos utilizarmos desses procedimentos, é essencial determos o conhecimento de modelos matemáticos que sirvam para a transformação das taxas em qualquer prazo, a fim de facilitar, tanto a solução dos problemas, quanto **permitir a tomada de decisão com base apenas na comparação de taxas**.

- Para efetuarmos essas transformações, verificamos que o primeiro passo é caracterizarmos o regime de capitalização utilizado na operação.

  - Caso a operação seja efetuada sob o **RCS**, as taxas poderão ter seu prazo convertido mediante a utilização das equações de **taxas proporcionais** ou, ainda, pela utilização de regra de três simples.

  - Quando o regime de capitalização empregado na operação for o **RCC**, devemos utilizar o conceito de **taxas equivalentes** para a conversão das taxas, lembrando que, para este regime, não podemos utilizar regra de três, devido a ocorrência de juros sobre juros.

- Problemas de conversão de taxas envolvem três variáveis:

$$\begin{cases} \boldsymbol{i} \text{ – representa a taxa de prazo maior} \\ \boldsymbol{i_k} \text{ – taxa de prazo menor} \\ \boldsymbol{k} \text{ – número de vezes que o prazo da taxa menor cabe no prazo da taxa maior.} \end{cases}$$

1. TAXA PROPORCIONAL

- Conceito empregado em operações envolvendo o Regime de Capitalização Simples – RCS, revelando que:

> "Duas taxas de juros de prazos diferentes são ditas proporcionais se, quando aplicadas sobre o mesmo capital inicial, produzirem o mesmo montante acumulado ao final de determinado prazo".

- **Exemplos**: Uma taxa de 1% a.m. é proporcional à taxa de 12% a.a..

- **Transformação de Taxas Proporcionais**

A transformação de uma taxa no RCS, em prazos diferentes, pode ser determinada pela aplicação de regra de três simples. Desta forma, para transformar uma taxa proporcional, vale a relação:

$$i = i_k \cdot k \quad \text{ou} \quad i_k = \frac{i}{k} \qquad (1)$$

2. TAXA EQUIVALENTE

- Conceito empregado em operações envolvendo o Regime de Capitalização Composto – RCC, revelando que:

> "Duas taxas referentes a prazos distintos são equivalentes quando, para o mesmo prazo de aplicação, for indiferente aplicar certo capital a qualquer uma das duas taxas".

- Conforme podemos observar, o conceito de taxas equivalentes, em essência, corresponde ao de taxas proporcionais, diferenciando-se, apenas, por envolver o regime de capitalização composto – RCC.

- **Transformação de Taxas Equivalentes**

Para transformar uma taxa no juros no RCC, em prazos diferentes, vale as relações abaixo, originadas das equações do RCC.

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1 \quad \text{ou} \quad i = (1+i_k)^k - 1 \qquad (2)$$

Por **convenção**, se o enunciado não indicar que a operação é efetuada pelo RCS, devemos considerá-la no RCC.

Exemplos 01

1. Se uma operação de investimento é remunerada a uma taxa proporcional de 2% ao mês, quanto um aplicador obterá ao final de um ano?

2. Determinar a taxa trimestral proporcional a 12% ao ano.

3. Dada à taxa de 15% a.a., calcule a taxa proporcional para 135 dias.

4. Se uma operação de investimento é remunerada a uma taxa de 0,25% ao dia, qual a taxa equivalente mensal?

5. Determinar a taxa bimestral equivalente a 10% ao semestre.

6. Dada à taxa de 15% a.a., calcule a taxa equivalente para 9 meses.

3. TAXA NOMINAL E EFETIVA

- As taxas de juros possuem três componentes: valor, prazo e período de capitalização.

- Exemplo: 10% a.a. ccm.

- Por convenção, quando o período de capitalização for igual ao prazo da taxa ele é omitido. Assim, quando escrevemos, por exemplo, 2% a.m., embora não esteja indicado explicitamente o período de capitalização, sabemos que o mesmo é ao mês, ou ccm.

- O período de capitalização é muito importante para identificarmos o tipo de taxa que estamos tratando e quais os procedimentos que deverão ser adotados para incluí-la nas fórmulas de cálculo.

- É o período de capitalização que indica a ocorrência, ou periodicidade, do cálculo dos juros nas operações financeiras. Além disso, é a partir dele que identificamos se uma taxa é nominal ou efetiva, conforme veremos a seguir.

TAXA NOMINAL

- Uma taxa é dita nominal quando o prazo difere do período de capitalização, não representando o custo ou ganho da operação, não podendo, portanto, serem empregadas diretamente nas fórmulas de cálculo. Exemplo: 6% a.a. ccm..

- A taxa nominal é muito utilizada no mercado, quando da formalização dos negócios. Não é, porém, utilizada diretamente nos cálculos, por não corresponder, de fato, ao ganho/custo financeiro do negócio.

- Uma característica importante das **taxas nominais** é que elas **são formadas pelo conceito de "juros simples"**, ou seja, a taxa de 12% a.s. cct, representa a taxa proporcional ao semestre de uma taxa de 6% ao trimestre.

TAXA EFETIVA

- Uma taxa é dita efetiva quando o seu prazo for igual ao período de capitalização. Dada esta característica, as taxas efetivas representam o ganho ou custo efetivo da operação, podendo, portanto, serem empregadas diretamente nas fórmulas de cálculo.

- **Lembre-se!** Como o período de capitalização é igual ao prazo ele é omitido.

- Ao contrário das taxas nominais, as taxas efetivas são formadas pelo conceito de juros compostos.

TRANSFORMAÇÃO DE TAXAS

- Tendo em vista que a taxa efetiva representa, por conceito, o custo ou ganho da operação, essa é aquela que realmente vai interessar ao agente econômico em suas decisões financeiras.

- Muitas vezes, no entanto, o mercado financeiro divulga as nominais ao invés das efetivas em suas operações, gerando a necessidade de sua transformação para que o custo ou ganho seja conhecido.

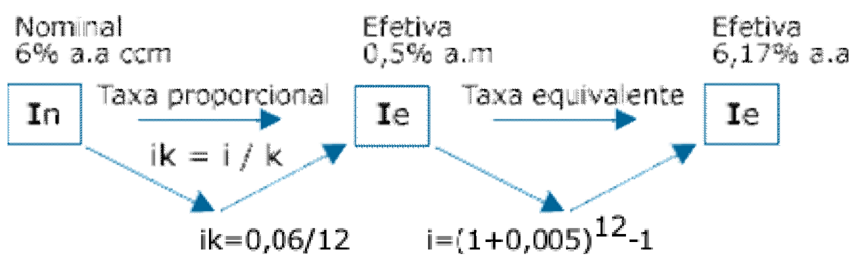
- Existem dois modelos básicos de conversão de taxas:

  O primeiro destina-se a transformar taxas nominais (juros simples) em taxas efetivas (juros compostos), e se dá mediante o uso do conceito de taxas proporcionais.

  O segundo serve para a conversão de taxas efetivas (juros compostos) em taxas efetivas de prazos diferentes e é efetuado pela utilização do conceito de taxas equivalentes.

<u>Exemplo: Taxa de Juros da Poupança</u>

Conforme observado anteriormente, um depósito de poupança paga 6% a.a. ccm + TR. Desconsiderando a correção do capital pela TR, quanto um investidor obterá de rendimento após um ano?



Exemplos 01

1. Qual será o custo efetivo mensal e anual de uma operação de empréstimo realizada a taxa de 24% a.a. ccm?

2. Determinar as taxas mensal e trimestral equivalentes à taxa de 9,0% a.a. ccm.

4. TAXA UNIFICADA

Aplica-se esse conceito quando a taxa final de uma operação compõem-se de duas ou mais taxas. A primeira, geralmente, representando um indexador qualquer, que serve para a correção do capital e a segunda, teoricamente, sendo o ganho da operação.

Exemplo:

TR + 0,5% a.m.
Variação cambial + 15% a.a.IGP-M + 5% a.s.

Ao contrário do que possa parecer, em operações que envolvam mais de uma taxa, não podemos simplesmente somá-las, a fim de obter a final.

Dessa forma, a taxa unificada (i_u) de n taxas diferentes, pode ser obtida pela relação:

$$i_u = (1+i_1)\cdot(1+i_2)\cdot\ldots\cdot(1+i_n)-1 \qquad (3)$$

Exemplos 03

1. Sabendo-se que a taxa referencial (TR) para a próxima sexta-feira é de 0,6273%, qual será a remuneração de uma conta de poupança, com aniversário naquela data, cujo rendimento é (0,5%+TR) a.m.?

2. Uma conta de poupança rendeu nos últimos quatro meses 0,632%, 0,725%, 0,824% e 0,699%. Com base nestas informações, calcule o rendimento mensal do período.

5. TAXA REAL

➢ Ilusão Monetária

Ocorre quando operações **aparentemente** lucrativas estão, na verdade, gerando prejuízos aos investidores **em termos reais**, ou seja, considerada a taxa de inflação a operação não é lucrativa. Dessa forma, as taxas não levam em consideração a inflação do período e então representam aparentemente um ganho.

➢ Inflação e Índices de Preços

Quando iniciamos o estudo de nossa disciplina, salientamos a necessidade de que as taxas de juros do mercado fossem suficientes para garantir o poder de compra dos agentes poupadores, além de oferecer ganho real.

Enquanto a garantia do poder de compra está relacionada à capacidade dos juros em neutralizar os efeitos da inflação, que, em poucas palavras, pode ser definida como o aumento generalizado do nível de preços na economia; o ganho real refere-se à expectativa dos agentes em ampliar seu poder aquisitivo no futuro, pelo recebimento de juros maiores do que a inflação.

Assim, a taxa de inflação irá influenciar o ganho real dos agentes econômicos, na medida em que irá “consumir” parcela da remuneração obtida, podendo, inclusive, tornar negativo o resultado da operação.

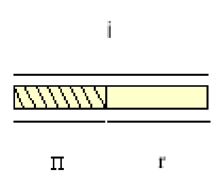
Podemos definir inflação como o aumento generalizado nos preços de mercadorias e serviços transacionados no mercado. Esse aumento de preços é periodicamente medido pelos chamados índices de preços, que nada mais são do que médias ponderadas dos preços de um número fixo de produtos.

Ao longo do tempo, a taxa de inflação é caracterizada por uma taxa de juros compostos, uma vez que o aumento de preços de um determinado conjunto de produtos e serviços incorpora acréscimos apurados em períodos anteriores. Logo, a conversão das taxas de inflação deve ser efetuada pelo conceito de taxas equivalentes.

➢ Taxas de Juros em uma Economia Inflacionária

Em um contexto inflacionário, onde existe o crescimento do nível geral de preços, é necessário que os juros garantam o valor do dinheiro na aquisição de bens e produtos, além de uma parcela adicional que efetivamente compense o ato de poupar.

Dessa maneira, as taxas de juros de mercado devem ser compostas por uma parcela que sirva para corrigir o poder de compra, ou seja, cobrir a inflação, e outra que permita um ganho real para o dinheiro aplicado (*r*), demonstrando graficamente:



Utilizando-nos o conceito de taxas unificadas, pode-se obter a taxa real de uma operação por:

$$r = \frac{(1+i)}{(1+\pi)} - 1 \qquad (4)$$

Onde:

$$\begin{cases} i = \text{taxa nominal ou aparente de uma operação} \\ \pi = \text{taxa de inflação} \\ r = \text{taxa real} \end{cases}$$

Sob um enfoque econômico, a taxa real de uma operação, ou seja, aquela apurada depois de eliminados os efeitos inflacionários pode ser negativa, bastando para isso que a de inflação seja superior à nominal (aparente). O resultado indica que, embora o dinheiro do investidor tenha crescido em termos financeiros, seu poder de compra reduziu, devido ao efeito da inflação do período.

Exemplos 04

1. Qual a taxa real de uma operação de poupança que pagou 0,657% de remuneração a seus investidores, sabendo-se que a inflação do período foi de 2,15%.

2. Uma pessoa aplica R$ 2.300,00 e recebe, ao final de cinco meses, R$ 2.630,00. Caso a inflação verificada neste período tenha sido equivalente a 0,5% a.m., qual o ganho real obtido pelo investidor?