



# ENGENHARIA ECONÔMICA

*Profª Glauceny Medeiros*

## UNIDADE I

# MATEMÁTICA FINANCEIRA APLICADA



*Brasília, DF.*

## 1. CONCEITOS BÁSICOS

### ➤ Capital

- É o valor que você pode aplicar ou emprestar;
- Também chamado de Capital Inicial ou Principal;
- Representado pela letra “C” ou “PV” (abreviação das palavras em inglês a *Present Value*) - Adotaremos “**PV**”.

### ➤ Juros

- É a remuneração do capital empregado, representado pela variável ( $J$ ).
- Para o CREDOR ou INVESTIDOR: É a remuneração do investimento;
- Para o DEVEDOR: É o custo de capital de terceiros, obtido por empréstimo.

### ➤ Taxa de Juros

- É o índice que determina a remuneração de um capital num determinado período de tempo (dias, meses, anos, etc.).
- Esse tempo é representado pela letra ( $n$ ) e a taxa de juros pela variável ( $i$ ).
- Pode ser representado por uma Taxa Percentual ou Taxa Unitária.
- Sua determinação se dá de forma bem subjetiva.

De uma forma geral, a taxa de juros deve ser suficiente para:

- Compensar os riscos relacionados à incerteza de recebimento futuro;
- Garantir poder de compra;
- Representar ganho sobre o custo de oportunidade.

### a) Taxa Percentual

- Corresponde ao valor dos juros sobre cada centésima parte do capital.
- Por exemplo: Uma taxa de 20% ao ano significa que a cada R\$ 100 aplicado, se ganha R\$ 20, ao ano.

### b) Taxa Unitária

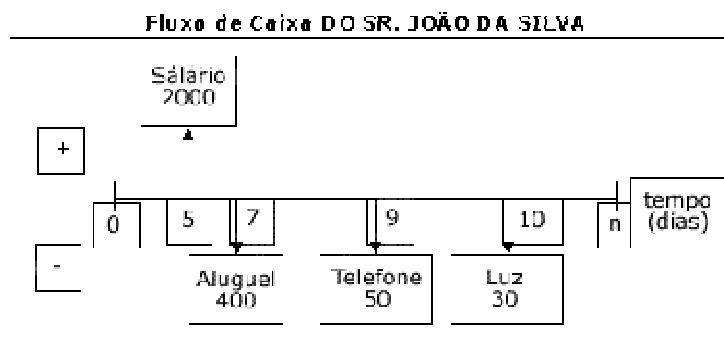
- Reflete o rendimento para cada “unidade” de capital.
- Considerando o exemplo anterior, tem-se uma taxa de 0,2, que significa que a cada R\$ 1,00 aplicado se ganha R\$ 0,20, num determinado período de tempo.

## ➤ Juros Exato e Juros Comercial

- Os conceitos de, juros exato e juros comercial, estão relacionados ao número de dias que será considerado para o cálculo da taxa de juros.
- No **juros exato**, utilizamos efetivamente o calendário do ano civil (365 dias) e consideramos efetivamente o número de dias de cada mês para o cálculo da taxa.
- No **juros comercial**, admitimos para todos os meses, independente de qual seja, um prazo de 30 dias e o ano com 360 dias.
- Em nosso curso iremos empregar sempre o conceito de juros comercial, dado que o mesmo facilita os cálculos, sem prejuízo ao aprendizado dos fundamentos da matemática financeira.

## ➤ Fluxo de Caixa

- O fluxo de caixa é um gráfico que busca representar as entradas e saídas de recursos no caixa de uma empresa ou, por exemplo, na conta corrente de uma pessoa física.



- As saídas de caixa correspondem aos pagamentos, têm sinais negativos e são representadas por setas apontadas para baixo.
- As entradas de caixa correspondem aos recebimentos, têm sinais positivos e são representadas por setas apontadas para cima.

➤ **Montante (M) ou Valor Futuro (FV)**

- É o capital inicial acrescido do rendimento obtido durante o período de aplicação;
- Representado pela sigla “*M*” ou “*FV*” (abreviação das palavras em inglês a *Future Value*) – Adotaremos “*FV*”.

$$FV = PV + J$$

➤ **Capitalização**

- Indica a metodologia e a periodicidade, de cálculo dos juros, empregadas na operação financeira.

Composta de dois regimes básicos:

- Regime de Capitalização Simples (**RCS**)
- Regime de Capitalização Composto (**RCC**)

## 2. REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES (RCS)

- No regime de juros simples (RCS), o valor dos juros periódicos é calculado tendo como base o capital inicial, sendo proporcional ao seu valor e ao tempo de aplicação.
- Juros acumulados ao longo dos períodos não rendem juros, apesar de ficarem retidos pela instituição financeira.
- Crescimento do dinheiro, ao longo do tempo, é linear (ou em progressão aritmética).
- Os juros simples têm crescimento constante ao longo do período de aplicação.

**Exemplo:** Digamos que uma pessoa tenha efetuado uma aplicação de R\$ 1.000,00, pelo prazo de três meses, à taxa de juros simples de 2,00% ao mês.

Na tabela abaixo, podemos verificar os juros gerados pela operação, o saldo que a pessoa teria ao final de cada período e a variação deste saldo, no regime de capitalização simples:

**Juros e Saldos Gerados pela Operação no RCS**

Período	Capital Aplicado	Juros ao Mês	Saldo	Variação
Início mês 1	1.000,00	-	1.000,00	-
Fim mês 1	1.000,00	20,00	1.020,00	20,00
Fim mês 2	1.000,00	20,00	1.040,00	20,00
Fim mês 3	1.000,00	20,00	1.060,00	20,00

### a) Cálculo dos Juros

Os juros decorrentes de uma operação efetuada com base no RCS podem ser calculados mediante a aplicação da seguinte equação:

$$J = PV \cdot i \cdot n \quad (1)$$

Onde:

{	$J$ = valor dos juros
	$PV$ = valor inicial da operação ou valor presente
	$i$ = taxa de juros (na forma unitária)
	$n$ = prazo da operação
	$FV$ = valor futuro ou montante

## b) Cálculo do Montante

Também denominado de valor futuro ( $FV$ ), representa a soma do valor inicial ( $PV$ ) e dos juros da operação ( $J$ ).

$$FV = PV + J \quad (2)$$

$$FV = PV(1 + i \cdot n) \quad (3)$$

### Atenção!

- Nas equações dadas, a taxa de juros deve ser expressa sempre sob a forma unitária.
- O prazo da operação deve ter sua unidade (dia, mês, ano, etc.) coincidente com o período de referência da taxa de juros (diário, mensal, anual, etc.).

### Exemplos 01

1. Determinar o montante acumulado no final de quatro semestres a partir da aplicação de um principal de R\$ 10.000,00, com uma taxa de juros de 1% ao mês, no regime de juros simples. Quanto rendeu a aplicação?
2. Determinar o principal que deve ser aplicado a juros simples, com uma taxa de juros de 10% ao ano, para produzir um montante de R\$ 12.000,00, num prazo de 15 meses.



### 3. REGIME DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTO (RCC)

- No **RCC**, o valor do juro periódico é calculado tomando-se por base não apenas o capital inicial, mas também a soma dos juros de períodos anteriores de capitalização, o que gera juros sobre juros.
- No **RCC** os juros são crescentes.

**Exemplo:** Digamos que um capital de R\$ 1.000,00 seja aplicado pelo prazo de três meses, à taxa de juros compostos de 2,00% ao mês.

Na tabela abaixo, podemos verificar os juros gerados pela operação, o saldo que a pessoa teria ao final de cada período e a variação deste saldo, no regime de capitalização composta:

**Juros e Saldos Gerados pela Operação no RCC**

Período	Capital Aplicado	Juros ao Mês	Saldo	Variação
Início mês 1	1.000,00	-	1.000,00	-
Fim mês 1	1.020,00	20,00	1.020,00	20,00
Fim mês 2	1.040,40	20,40	1.040,40	20,40
Fim mês 3	1.061,21	20,81	1.061,21	20,81

Analisando os juros da operação exemplificada acima e, tendo em vista a característica do RCC, podemos verificar que, os juros gerados pela operação, o saldo ao final de cada período e a variação deste saldo são crescentes ao longo do tempo, devido ao fato de a taxa incidir não só sobre o capital inicial, mas sobre os juros de períodos anteriores.

#### a) Cálculo do Montante

O valor futuro de uma operação no RCC é calculado mediante a aplicação da seguinte fórmula:

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n \quad (4)$$

Onde:

$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{FV} = \text{valor futuro, valor nominal ou montante.} \\ \mathbf{PV} = \text{valor inicial da operação ou valor presente.} \\ \mathbf{i} = \text{taxa de juros (sempre na forma unitária).} \\ \mathbf{n} = \text{prazo da operação (compatível com a unidade da taxa de juros).} \end{array} \right.$



## b) Cálculo dos Juros

Partindo do conceito de que os juros ( $J$ ) representam a diferença entre o montante ( $FV$ ) e o valor inicial da operação ( $PV$ ), ou seja:

$$J = FV - PV \quad (5)$$

$$J = PV \cdot [(1 + i)^n - 1] \quad (6)$$

### Observações importantes:

- A taxa de juros deve estar sempre na forma unitária.
- O prazo da operação deve ter sua unidade (dia, mês, ano, etc.) coincidente com o período de referência da taxa de juros (diário, mensal, anual, etc.).

## Exemplos 02

1. Qual será o rendimento e o montante de um capital de R\$ 3.700,00 aplicado a uma taxa efetiva de juros de 1,2% ao mês, ao final de 1 ano e meio?
2. Caso necessite de R\$ 4.120,00 daqui a 2 anos e 5 meses, quanto deverei aplicar numa opção de poupança que paga 3% ao bimestre para obter este montante?

3. Por quanto tempo um investidor deverá manter R\$ 12.000,00 aplicados numa opção de investimento que paga 0,5% de juros efetivos mensais, a fim de obter R\$ 14.160,00?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
4. Determine a taxa efetiva de juros anual embutida na compra de um bem cujo valor à vista é de R\$ 3.000,00, pelo qual será paga uma entrada de R\$ 1.000,00 e um pagamento de R\$ 2.200,00 para 60 dias.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
5. Que capital produz R\$ 1.000,00 de juros, aplicado à taxa efetiva de 1,8% a.m., pelo prazo de dois anos e cinco meses?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
6. Dois capitais, o primeiro de R\$ 3.000,00 e o segundo de R\$ 2.400,00, foram aplicados, respectivamente, por 70 e 50 dias. Considerando uma taxa efetiva ganha pelo primeiro capital de 3% a.m. e sabendo-se que esse capital rendeu R\$ 100,00 a mais do que o segundo, determinar a taxa mensal ganha pelo segundo capital.

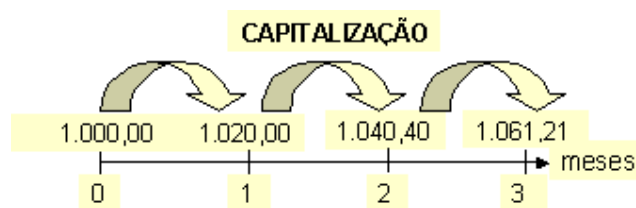
## 4. EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS

### 4.1– Capitalização

- Podemos definir capitalização como o processo que visa acrescentar juros a um determinado capital, levando-o a uma data futura.
- É importante notarmos que o valor futuro (FV) é sempre maior que o valor presente (PV), dado FV representar a soma de PV e dos juros (J).

#### ➤ Regime de Capitalização Composto

- No **RCC**, vimos que um capital de R\$ 1.000,00, aplicado a 2% ao mês, resulta num montante de R\$ 1.020,00 ao final do primeiro mês, R\$ 1.040,40 no segundo mês e R\$ 1.061,21 ao final de três meses.



- Para encontrarmos o montante ao final de cada de  $n$  períodos aplicamos a equação:

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n$$

- “ $n$ ” irá representar o número de períodos que acrescentaremos juros ao capital ou, sob outro ponto de vista, a data futura para qual queremos levar nosso valor presente.
- A expressão  $(1 + i)^n$  é denominada de Fator de Capitalização Composto (FCC), serve para acrescentar juros a um valor presente (PV) pelo número de períodos indicados em “ $n$ ”.

#### ➤ Regime de Capitalização Simples

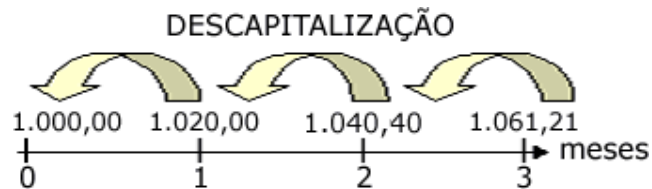
- No **RCS**, o cálculo do valor futuro é obtido pela equação:

$$FV = PV(1 + i \cdot n)$$

- A expressão  $(1 + i \cdot n)$  é denominada de Fator de capitalização Simples (**FCS**).

## 4.2– Descapitalização

- Processo inverso ao da capitalização, consiste em mover um determinado valor que ocorrerá em uma data futura, para uma data anterior à sua ocorrência.
- Para efetuarmos a descapitalização, devemos retirar os juros embutidos no valor futuro (FV), a fim de determinar seu valor presente (PV), conforme demonstrado no fluxo de caixa abaixo:



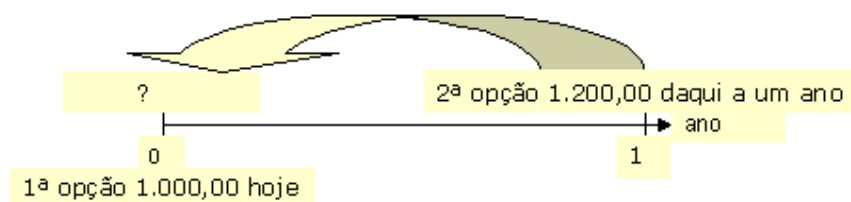
### ➤ Regime de Descapitalização Composto

- No **RCC**, o valor presente é obtido pela equação:  $PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$ .
- A expressão  $\frac{1}{(1+i)^n}$ , denominada de Fator de Descapitalização Composto (FDC), serve para retirar os juros embutidos no valor futuro (FV) pelo número de períodos indicados em “n”.

### ➤ Regime de Descapitalização Simples

- No **RCS**, o valor presente é obtido pela equação:  $PV = \frac{FV}{(1+i \cdot n)}$ .
- A expressão  $\frac{1}{(1+i \cdot n)}$  é denominada de Fator de Descapitalização Simples (FDS).

**Exemplo 01:** Você prefere receber R\$ 1000 hoje ou R\$1200 daqui a 1 ano?



➤ **Solução**

- Trata-se de um problema de equivalência de capitais, em que a melhor opção será escolhida mediante o que seria mais vantajoso, do ponto de vista financeiro. Ou seja, qual opção vale mais em termos reais?
- Na Matemática Financeira, devido ao efeito das taxas de juros ao longo do tempo, dois valores só poderão ser efetivamente comparáveis se ocorrerem numa mesma data. Então, para comparar valores que ocorrem em momentos distintos, a fim de tomar uma decisão quanto ao que seria mais vantajoso receber, devemos utilizar o processo de capitalização, que acrescenta juros a um determinado valor, levando-o a uma data futura, ou descapitalização, que consiste em retirar os juros embutidos em um valor futuro, trazendo-o a uma data anterior à sua ocorrência.
- Colocando os valores em uma mesma data, a escolha entre os dois torna-se imediata, tendo em vista que, racionalmente, optaremos pelo menor valor, caso tenhamos que pagá-lo e pelo maior valor, no caso deste representar um recebimento.
- Vamos considerar que a taxa de juros oferecida pelo mercado seja igual a 30% ao ano. A partir desta taxa poderemos, então, mover os R\$ 1.200,00 oferecidos para o final de um ano, utilizando-nos do conceito de descapitalização e comparar com os R\$ 1.000,00 oferecidos hoje.
- Após a descapitalização, pode-se verificar que os R\$ 1200 daqui a 1 ano correspondem a R\$ 923,08 hoje. E logo a resposta é imediata!!!
- Embora tenhamos resolvido o problema mediante a descapitalização dos R\$ 1.200,00, poderíamos resolvê-lo, caso quiséssemos, capitalizando os R\$ 1.000,00 de hoje, para daqui a um ano, aplicando a taxa de 30%, encontrando que R\$ 1000 hoje equivaleria a R\$ 1300 daqui a 1 ano.

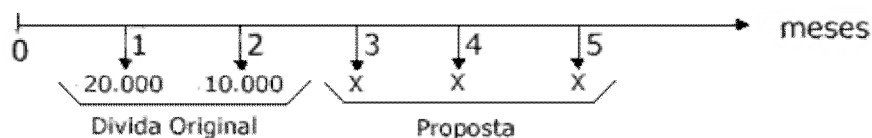
### Exemplo 02: Problemas envolvendo mais de um fluxo de caixa.

Suponha que uma empresa tenha que fazer dois pagamentos a um banco, decorrentes de uma dívida contraída anteriormente, sendo: um pagamento no valor de R\$ 20.000,00 para daqui a um mês e outro no valor de R\$ 10.000,00 para daqui a dois meses. Prevendo dificuldades em cumprir com sua obrigação, a empresa solicita ao banco a substituição dos pagamentos originais do contrato por três parcelas iguais e sucessivas, a primeira ocorrendo daqui a três meses. Considerando que a taxa de juros cobrada pela instituição financeira é de 3% ao mês e, levando-se em consideração que esta taxa não será modificada no novo contrato, qual o valor das parcelas a serem pagas, em substituição ao contrato original?

- Questões de equivalência de capitais que envolvem mais de um fluxo de caixa não possuem uma fórmula genérica para a solução, que depende da quantidade e periodicidade dos fluxos envolvidos no problema.
- Embora essa característica, aparentemente, possa sugerir grandes dificuldades ao aluno, devemos ter em mente que todas as questões poderão ser resolvidas mediante a aplicação dos processos de capitalização e descapitalização, de acordo com cada enunciado.

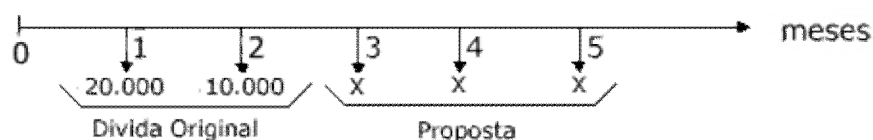
#### ➤ Solução

- Primeiramente vamos construir o fluxo de caixa representativo do problema que, neste tipo de questão, é muito importante para visualizarmos os procedimentos de cálculo:



- Dado que o problema se constitui numa substituição da dívida original pela proposta da empresa, podemos inferir que, independente do momento em que ocorrerão os fluxos de caixa, o conjunto de pagamentos da dívida original deve ser equivalente ao conjunto de pagamentos da proposta, ou seja, a uma data comum, os fluxos, originais e propostos, deverão produzir o mesmo capital.
- Essa conclusão nos leva a assumir que os capitais devem ser equivalentes a uma certa data, denominada “data focal”, que representa o momento no tempo que servirá de comparação dos valores e poderá ser, a princípio, escolhida de forma arbitrária.
- Então, vamos eleger pelo menos duas datas focais para resolver o problema, com base no RCC, partindo do princípio que o valor da dívida deve ser igual ao valor da proposta em uma mesma data focal. Neste caso, cada uma das parcelas são levadas a uma data mediante o processo de capitalização e descapitalização.

➤ **Resolvendo para a data focal “0” – RCC**



- Elegendo a data focal “0” para a solução do problema, estamos assumindo que, nesta data, o conjunto de fluxos originais será equivalente ao conjunto de fluxos da proposta, então:

**Dívida Original (descapitalizada para "0") = Proposta (descapitalizada para "0")**

Resolvendo a questão:

$$\frac{20.000}{(1+0,03)} + \frac{10.000}{(1+0,03)^2} = \frac{X}{(1+0,03)^3} + \frac{X}{(1+0,03)^4} + \frac{X}{(1+0,03)^5}$$

$$28.843,44 = 2,666238 X$$

$$X = 10.818,02$$

➤ **Resolvendo para a data focal “6” – RCC**

Elegendo a data focal “6” para a solução do problema, estamos assumindo que, nesta data, o conjunto de fluxos originais será equivalente ao conjunto de fluxos da proposta, então:

**Dívida Original (capitalizada para "6") = Proposta (capitalizada para "6")**

Resolvendo o problema:

$$20000(1+0,03)^5 + 10000(1+0,03)^4 = x \cdot (1+0,03)^3 + x \cdot (1+0,03)^2 + x \cdot (1+0,03)^1$$

$$34440,57 = 3,183627x$$

$$x = 10.818,02$$

➤ **Observação**

- Na prática, a solução deste tipo de problema será feita mediante a adoção apenas do RCC, que fornece uma única resposta, para qualquer data focal escolhida. A aplicação do RCS produz valores diferentes, a depender do momento escolhido como data focal. Este problema decorre da característica do RCS que produz juros proporcionais ao prazo da operação e que, quando fracionados, geram resultados diferentes.

### Exemplos 03

1. Uma empresa possui uma dívida composta de três pagamentos no valor de R\$ 1.500,00, R\$ 2.000,00 e R\$ 2.500,00, vencíveis em 30, 60 e 90 dias, respectivamente. Sabendo-se que a taxa de juros cobrada pelo credor é de 2,5% ao mês, quanto deverá ser pago hoje para liquidar a dívida?
2. Uma empresa deseja substituir uma dívida de R\$ 3.500,00, vencível daqui a dois meses, por dois pagamentos iguais a serem efetuados dentro de 60 e 90 dias, respectivamente. Se o credor exigir uma taxa de juros de 4% ao mês, qual será o valor das duas parcelas?
3. Uma loja vende uma televisão no valor de R\$ 2.500,00, nas seguintes condições: 20% de entrada e o restante em duas parcelas iguais a serem pagas daqui a 2 e 3 meses. Considerando que a taxa de juros cobrada pelo estabelecimento é de 5% ao mês, qual o valor das parcelas?
4. Uma empresa obteve financiamento de R\$ 20.000,00 à taxa de juros compostos de 3% a.m. A empresa já pagou R\$ 6.000,00 ao final do primeiro mês e R\$ 8.000,00 ao final do 2º mês. Determinar o valor que deverá ser pago ao final do terceiro mês para liquidar a dívida.



5. Para a compra de um produto no valor de R\$ 4.800,00, calcule o custo de cada forma de pagamento descrita abaixo e escolha a mais vantajosa.
- a) 20% de entrada e duas prestações iguais e sucessivas de R\$ 2.120,52, sendo a primeira para 30 dias. (juros efetivos mensais de 12% a.m.)
  - b) O valor à vista é acrescido de 30% e, desse valor majorado, 20% são pagos à vista e o saldo, dividido em dois pagamentos mensais iguais sem juros, sendo o primeiro para 30 dias. (juros efetivos mensais de 8% a.m.)
6. Uma pessoa depositou R\$ 2.000,00 em uma poupança. Dois meses depois, deposita mais R\$ 2.500,00 e, dois meses após este último depósito, realiza uma retirada de R\$ 1.300,00. Qual será o saldo da poupança ao final do 6º mês, considerando que a taxa de juros ganha é de 1,5% a.m..