Matemática Discreta 1

Teoria dos Conjuntos

AULA 7

Professor:
Luiz Augusto Laranjeira
luiz.laranjeira@gmail.com

Teoria dos Conjuntos

Conjunto:

Uma coleção não-ordenada de objetos que podem ou não ter uma propriedade comum ou lei de formação.

Teoria dos Conjuntos

Como Identificar os Elementos de um Conjunto:

1) Listar os elementos do conjunto: $S = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

2) Usar recursão para mostrar como os elementos são gerados: i) $2 \in S$ ii) Se $n \in S$, então $(n+2) \in S$

3) Descrever uma propriedade P que caracterize os elementos do conjunto:

$$S = \{\, x \mid x \text{ é um inteiro positivo par} \,\}$$

Teoria dos Conjuntos

Descrição Formal de uma Propriedade *P* que Caracterize os Elementos de um Conjunto:

$S = \{\, x \mid P(x) \,\}$ onde P é um *predicado unário*

$S = \{\, x \mid P(x) \,\}$ é o mesmo que

$$(\forall x)\ [\ (x \in S \rightarrow P(x)) \bullet (P(x) \rightarrow x \in S)\ ]$$

Relações entre Conjuntos

Subconjunto:

Diz-se que A é um subconjunto de B, ou que B contém A, denotado por $A \subseteq B$, se todo elemento de A é também elemento de B.

$$(\forall x)\ [(x \in A) \rightarrow (x \in B)]$$

A = ***subconjunto*** de B B = ***superconjunto*** de A

se $A \neq B$, então A é um ***subconjunto próprio*** de B, ou $A \subset B$

Relações entre Conjuntos

Subconjunto (cont.):

{ } ≡ Ø é chamado de conjunto vazio

Ø é subconjunto de qualquer conjunto

Igualdade:

Dados dois conjuntos A e B, diz-se que A = B, se

$$(\forall x)\ [(x \in A \rightarrow x \in B) \bullet (x \in B \rightarrow x \in A)]$$

Relações entre Conjuntos

Conjuntos Disjuntos:

A é ***disjunto*** de B se: $(A \cap B) = \varnothing$

Conjuntos de Conjuntos

Dado um conjunto *S, podemos criar um novo conjunto cujos elementos sejam todos os subconjuntos de S.* Este novo conjunto é chamado de **conjunto das partes** de *S*, ***𝒫(S)***, *e* conterá pelo menos dois elementos, Ø e o próprio *S*, uma vez que Ø ⊆ S e S ⊆ S são sempre verdade.

Conjuntos de Conjuntos

Dado um conjunto *S* com *n* elementos pode-se mostrar que o conjunto das partes de *S*, $\mathscr{P}(S)$, terá 2^n elementos.

Notar que se S = Ø, o único subconjunto de Ø é Ø, isto é $\mathscr{P}(S) = \{Ø\}$. Neste caso $n = 0$ e $2^n = 1$.

Conjuntos de Conjuntos

Exemplo 1:

Para A = {1, 2, 3 }, qual será $\mathscr{P}$(A)?

$\mathscr{P}$(A) = {Ø, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1, 2, 3} }

Como o número de elementos de A é $n = 3$, então o número de elementos de $\mathscr{P}$(A) será $2^3 = 8$.

Operações em Conjuntos

Operação Binária:

¤ é uma ***operação binária*** em um conjunto S se para cada par ordenado (x, y) de elementos de S, x ¤ y existe, é único, e é membro de S.

x ¤ y existe e é único → a operação binária ¤ é **bem definida**

x ¤ y é membro de S → S é **fechado** com respeito à operação ¤

Operações em Conjuntos

Operação Unária:

\# é uma ***operação unária*** em um conjunto S se para cada $x \in S$, $\#x$ é bem definida e S é fechado com respeito a #.

Operações em Conjuntos

Dado um conjunto arbitrário S, chamado *conjunto universo*, denotado por U, e $\mathscr{P}$(U) o *conjunto das partes* de U pode-se definir operações unárias e binárias em $\mathscr{P}$(U).

Nas definições que se seguem os conjuntos A e B são subconjuntos de S, isto é A, B $\in \mathscr{P}$(U).

Teoria dos Conjuntos

Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$?

Se $(\forall x)\ [(x \in A \rightarrow x \in B)]$ e $(\forall x)\ [\ (x \in B \rightarrow x \in C)]$,

então

$$(\forall x)\ [\ (x \in A \ \rightarrow\ x \in C)\ ]$$

Isto quer dizer que $A \subset C$.

Operações sobre Conjuntos

União: $A \cup B$

$x \in A \cup B$ se, e somente se, $x \in A$ ou $x \in B$

Interseção: $A \cap B$

$x \in A \cap B$ se, e somente se, $x \in A$ e $x \in B$

Diferença: $A - B$

$x \in A - B$, se e somente se, $x \in A$ e $x \notin B$

Complemento: $A' = U - A$ $A' = \{ x \mid x \in U \text{ e } x \notin A \}$

Operações sobre Conjuntos

Não Confundir!!!

Interseção: $A \cap B$

$x \in A \cap B$ se, e somente se, $x \in A$ e $x \in B$

Produto Cartesiano: $A \times B$

$(x, y) \in A \times B$, se e somente se, $x \in A$ e $y \in B$

Operações sobre Conjuntos Propriedades

Elemento Neutro (da União e Interseção):

$\varnothing \cup A = A$ $\quad\quad$ $U \cap A = A$

Idempotência (da União e Interseção):

$A \cup A = A$ $\quad\quad$ $A \cap A = A$

Complemento:

$A \cup A' = U$ $\quad\quad$ $A \cap A' = \varnothing$

Operações sobre Conjuntos Propriedades

Propriedades Comutativas:

$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$

Propriedades Associativas:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Propriedades Distributivas:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Operações sobre Conjuntos
Propriedades

Outras Propriedades:

$A \subset B$ se, e somente se, $B' \subset A'$

$$[(x \in A) \rightarrow (x \in B)] \equiv [(x \in B') \rightarrow (x \in A')]$$
$$\equiv [(x \notin B) \rightarrow (x \notin A)]$$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ (De Morgan)

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ (De Morgan)

Operações sobre Conjuntos
Propriedades

Outras Propriedades:

$$A - B = A \cap B'$$

$$(A')' = A$$

$$\varnothing' = U$$

Exercício 1

Prove que se $A \cup B = A - B$, então $B = \varnothing$.

(Dica: provar que a contraposição é verdadeira)

Exercício 1

Prove que se A U B = A – B, então B=Ø.

(Dica: provar que a contraposição é verdadeira)

Solução 1:

O exercício pede que provemos a seguinte condicional:

$$\underbrace{(A \cup B) = (A - B)}_{P} \rightarrow \underbrace{B = \emptyset}_{Q}\,, \qquad \text{ou seja, provar} \qquad P \rightarrow Q$$

Onde as proposições P e Q são: $P \equiv ((A \cup B) = (A - B))$ e $Q \equiv (B = \emptyset)$

isto equivale a provar a contraposição $\sim Q \rightarrow \sim P$

onde $\sim Q \equiv (B \neq \emptyset)$, isto é, B não é vazio, é o mesmo que $\exists\, y \in B$

Exercício 1 – Solução 1 (cont.)

Investiguemos agora as proposições P e ~P:

De P e da definição da igualdade entre dois conjuntos vem

$P \equiv [(x \in A \cup B) \rightarrow (x \in A - B)] \bullet [(x \in A - B) \rightarrow (x \in A \cup B)] \equiv P_1 \bullet P_2$

$P_1 \equiv (x \in A \cup B) \rightarrow (x \in A - B)$ e $P_2 \equiv (x \in A - B) \rightarrow (x \in A \cup B)$

$\sim P \equiv \sim(P_1 \bullet P_2) \equiv \sim P_1 + \sim P_2$

i.e., para se ter $P \equiv F$ basta se ter $P_1 \equiv F$ ou $P_2 \equiv F$

Assim, para se provar que $\sim Q \rightarrow \sim P$, basta provar que $\sim Q \rightarrow \sim P_1$

Exercício 1 – Solução 1 (cont.)

De P_1 e das definições da união e subtração de dois conjuntos vem

$P_1 \equiv (x \in A \cup B) \rightarrow (x \in A - B)$ e, da definição da condicional:

$P_1 \equiv ((x \in A) + (x \in B)) \rightarrow ((x \in A) \bullet (x \notin B))$

Como $\sim Q \equiv \exists\ y \in B$, fazendo $x = y$ e substituindo em P_1 vem

$P_1 \equiv ((y \in A) + (y \in B)) \rightarrow ((y \in A) \bullet (y \notin B))$

$P_1 \equiv ((y \in A) + \quad V\ )) \rightarrow ((y \in A) \bullet \quad F\ ) \equiv V \rightarrow F$

Da tabela verdade da condicional $V \rightarrow F \equiv F$, logo $P_1 \equiv F$ e $P \equiv F$.

Em outras palavras, provamos que $\sim Q \rightarrow \sim P$ **CQD**

Exercício 1

Prove que se $A \cup B = A - B$, então $B = \varnothing$.

(Dica: provar a validade do argumento $(A \cup B) = (A - B) \vdash B = \varnothing$)

Solução 2:

Vamos provar o seguinte argumento:

$$\underbrace{(A \cup B) = (A - B)}_{P} \vdash \underbrace{B = \varnothing}_{Q}, \quad \text{ou seja, provar} \quad P \vdash Q$$

Para provar por contradição consideremos que $\sim Q \equiv V$ e mostremos que se chega a uma contradição. Isto é: $P \bullet \sim Q \rightarrow$ contradição.

onde $\sim Q \equiv (B \neq \varnothing)$, isto é, B não é vazio, é o mesmo que $\sim Q \equiv \exists\, y \in B$

Exercício 1 – Solução 2 (cont.)

Temos que: $P \equiv ((A \cup B) = (A - B))$

Usando a notação que descreve as propriedades dos elementos:

$P \equiv [(x \in AUB) \rightarrow (x \in A - B)] \bullet [(x \in A - B) \rightarrow (x \in AUB)] \equiv P_1 \bullet P_2$

Das definições da união e subtração de dois conjuntos vem

$P_1 \equiv (x \in A \cup B) \rightarrow (x \in A - B)$ e, da definição da condicional:

$P_1 \equiv ((x \in A) + (x \in B)) \rightarrow ((x \in A) \bullet (x \notin B))$

Como $\sim Q \equiv \exists\, y \in B$, fazendo $x = y$ e substituindo em P_1 vem

$P_1 \equiv ((y \in A) + (y \in B)) \rightarrow ((y \in A) \bullet (y \notin B))$

$P_1 \equiv ((y \in A) + \quad V\ )) \rightarrow ((y \in A) \bullet \quad F\ ) \equiv V \rightarrow F$

Exercício 1 – Solução 2 (cont.)

Havíamos obtido que

$$P_1 \equiv ((y \in A) + \quad V\,)) \;\rightarrow ((y \in A) \bullet \quad F\,) \;\equiv\; V \rightarrow F$$

Da tabela verdade da condicional temos que $V \rightarrow F \equiv F$,

logo $P_1 \equiv F$ e, consequentemente, $P \equiv P_1 \bullet P_2 \equiv F$

Mas, a premissa do argumento era que $P \equiv V$,

logo, chegamos a uma contradição $(P \equiv F) \bullet (P \equiv V)$.

Assim, provamos o argumento $P \vdash Q$ por contradição. **CQD**