Matemática Discreta 1

Lista de Exercícios 4 (2020.1)

Relações de Recorrência - Introdução

1. Encontre a solução para cada uma das relações de recorrência a seguir com suas respectivas condições iniciais. Utilize um método iterativo para fazê-lo.

(a) $a_n = 3a_{n-1}, a_0 = 2$
(b) $a_n = a_{n-1} + 2, a_0 = 3$
(c) $a_n = a_{n-1} + n, a_0 = 1$
(d) $a_n = a_{n-1} + 2n + 3, a_0 = 4$ '
(e) $a_n = 2a_{n-1} - 1, a_0 = 1$
(f) $a_n = 3a_{n-1} + 1, a_0 = 1$
(g) $a_n = na_{n-1}, a_0 = 5$
(h) $a_n = 2na_{n-1}, a_0 = 1$

2.

(a) Encontre uma relação de recorrência para o saldo devedor $B(k)$ ao fim de k meses de um empréstimo de l reais com taxa mensal r se for feito um pagamento de valor P a cada mês.(***Dica:*** Expresse $B(k)$ em termos de $B(k-1)$ e P.)

(a) Determine o valor do pagamento mensal P que deve ser feito para que o empréstimo seja pago fim de T meses.

3.

(a) Encontre uma relação de recorrência para o número de cadeias de bits de comprimento n que tenham dois $0's$ consecutivos.

(a) Quais são as condições iniciais?

(a) Quantas cadeias de bits de comprimento 7 têm dois $0's$ consecutivos?

4. No quebra-cabeça da Torre de Hanói suponha que o objetivo seja transferir todos os n discos do pino 1 para o pino 3 mas sem transferir nenhum disco diretamente do pino 1 para o pino 3 (cada movimento deve envolver o pino 2). Como sempre, não se pode colocar um disco maior sobre um menor.

(a) Encontre uma relação de recorrência para resolver o problema de encontrar o número de movimentos necessários para mover n discos com esta nova restrição.

(b) Resolva esta relação de recorrência e encontre uma fórmula fechada para o número de movimentos necessários para resolver o problema para n discos.

(c) Quantas combinações diferentes dos n discos em três pinos existem de modo que nenhum disco maior fique em cima de um menor?

(d) Mostre que cada arranjo permitido dos n discos corresponde a uma solução desta variação do quebra-cabeça.

5. Um empregado foi contratado por uma companhia em 2009 com um salário anual inicial de R$ 50.000,00. Todos os anos esse empregado recebe um aumento de R$ 1.000,00 mais 5% do salário do ano anterior.

(a) Encontre uma relação de recorrência para o salário desse empregado n anos após 2009.

(b) Qual o salário desse empregado em 2017?

(c) Encontre uma fórmula explícita para o salário desse empregado n anos após 2009.

6.

(a) Encontre uma relação de recorrência que satisfaça R_n, em que R_n é o número de regiões em que uma superfície de uma esfera é dividida por n circunferências perfeitas (que são interseções da esfera e de planos que passam pelo centro da esfera), se três dessas circunferências perfeitas não passam simultaneamente pelo mesmo ponto.

(b) Encontre R_n usando a iteração.

Resolução de Relações de Recorrência Lineares Homogêneas

7. Resolva as relações de recorrência abaixo com as condições inicias dadas.

(a) $a_n = 2a_{n-1},$ para $n \geq 1$ e $a_0 = 3$

(b) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2},$ para $n \geq 2, a_0 = 1$ e $a_1 = 0$

(c) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2},$ para $n \geq 2, a_0 = 6$ e $a_1 = 8$

(d) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2},$ para $n \geq 2, a_0 = 4$ e $a_1 = 1$

(e) $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3},$ para $n \geq 3, a_0 = 7, a_1 = -4$ e $a_2 = 8$

8. Resolva as relações de recorrência simultâneas

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} \end{aligned}$$

com $a_0 = 1$ e $b_0 = 2$.

9. Os **números de Lucas** satisfazem a relação de recorrência $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ e as condições iniciais $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$.

(a) Demonstre, via indução completa, que $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$ para $n \geq 2$, onde f_n é o n-ésimo número de Fibonnaci.

(b) Encontre uma fórmula explícita para os números de Lucas.

10. Determine a forma geral das soluções de uma relação de recorrência linear homogêneas cujas raízes são:

(a) $1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, 3, 3, -4$;

(b) $-1, -1, -1, 1, 2, 2, 5, 5, 7$.

11. Um modelo para o número de lagostas capturadas por ano baseia-se na hipótese de que o núemro de lagostas pescadas em um ano é a média do número de pesca dos dois anos anteriores.

(a) Encontre uma relação de recorrência para L_n, em que L_n é o número de lagostas capturadas em n anos, seguindo a hipótese para este modelo.

(b) Encontre L_n se 100.000 foram capturadas no ano 1 e 300.000 no ano 2.

Resolução de Relações de Recorrência Lineares e Heterogêneas

12. Encontre todas as soluções para a relação de recorrência $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$ $\Big($***Dica:*** Procure por uma solução particular na forma $qn2^n + p_1 n + p_2$, em que q, p_1 e p_2 são constantes. $\Big)$

13. Resolva as relações de recorrência abaixo com as condições inicias dadas.

(a) $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3} + n4^n,$ para $n \geq 3, a_0 = -2, a_1 = 0$ e $a_2 = 5$

(b) $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 2^n + n + 3,$ para $n \geq 2, a_0 = 1$ e $a_1 = 4$

(c) $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} + 1,$ para $n \geq 3, a_0 = 2, a_1 = 4$ e $a_2 = 8$

(d) $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$, para $n \geq 2, a_0 = 1$ e $a_1 = 2$ $\Big($***Dica:*** Calcule os logaritmos de ambos os lados para obter uma relação de recorrência para a sequência $\log_2 a_n,$ com $n = 0, 1, 2, ...$ $\Big)$

(e) $a_n = a_{n-1}^3 a_{n-2}^2$, para $n \geq 2$ e $a_0 = a_1 = 2$

14. – Forneça a forma geral da solução particular da relação de recorrência não-homogênea $a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4} + F(n)$, se

(a) $F(n) = n^3$
(b) $F(n) = (-2)^n$
(c) $F(n) = n2^n$
(d) $F(n) = n^2 4^n$
(e) $F(n) = (n^2 - 2)(-2)^n$
(f) $F(n) = n^4 2^n$
(g) $F(n) = 2$

15. Seja a_n a soma dos n primeiros números quadrados perfeitos, isto é, $a_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

(a) Demonstre que a sequência a_n satisfaz a relação de recorrência linear não-homogênea $a_n = a_{n-1} + n^2$ com a condição inicial $a_1 = 1$.
(b) Determine a fórmua para a_n resolvendo esta relação de recorrência.

16. Seja a_n a soma dos n primeiros números triangulares, isto é, $a_n = \sum_{k=1}^{n} t_k$, onde $t_k = \frac{k(k+1)}{2}$.

(a) Demonstre que a sequência a_n satisfaz a relação de recorrência linear não-homogênea $a_n = a_{n-1} + \frac{n(n+1)}{2}$ com a condição inicial $a_1 = 1$.
(b) Determine uma fórmula para a_n resolvendo esta relação de recorrência.

17. Suponha que haja inicialmente um casal de bode e cabra em uma ilha. O número de animais dobra todo ano por reprodução natural e alguns animais são colocados ou removidos todo ano.

(a) Construa uma relação de recorrência para o número de cabras/bodes na ilha no início do n-ésimo ano, assumindo que, durante cada ano, 100 animais são adicionados à ilha.
(b) Resolva a relação de recorrência do item (a) para encontrar o número de cabras/bodes na ilha no início do n-ésimo ano.
(c) Construa uma relação de recorrência para o número de cabras/bodes na ilha no início do n-ésimo ano, assumindo que n animais são retirados durante o n-ésimo ano, para todo $n \geq 3$.
(d) Resolva a relação de recorrência do item (c) para encontrar o número de cabras/bodes na ilha no início do n-ésimo ano.

18. Um jovem casal de coelhos é colocado em uma ilha. Cada casal de coelhos só procria, produzindo outro casal todo mês, até que eles tenham dois meses de idade. Supondo que um par de coelhos foge da ilha depois de se reproduzir duas vezes, determine uma relação de recorrência para o número de coelhos na ilha no meio do n-ésimo mês.

19. Resolva a relação de recorrência $T(n) = nT^2(n/2)$ com a condição inicial $T(1) = 6$.(***Dica:*** Considere $n = 2^k$ e então substitua $a_k = \log_2 T(2^k)$ para obter uma relação de recorrência linear e heterogênea.)

Respostas

1. (a) $2 \cdot 3^n$
   (b) $2n + 3$
   (c) $\frac{n^2+n+2}{2}$
   (d) $n^2 + 4n + 4$
   (e) 1
   (f) $\frac{3^{n+1}-1}{2}$
   (g) $5n!$
   (h) $2^n \cdot n!$

2. (a) $B(k) = \left(1 + \dfrac{r}{12}\right) B(k-1) - P$
   (b) $P = \dfrac{r\left(1 + \dfrac{r}{12}\right)^T B(0)}{12\left(\left(1 + \dfrac{r}{12}\right) - 1\right)}$

3. (a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-1}$
   (b) $a_0 = a_1 = 0$
   (c) $a_7 = 94$ cadeias de bits

4. (a) $H_n = 3H_{n-1} + 2, H_0 = 0$
   (b) $H_n = 3^n - 1$
   (c) 3^n

5. (a) $a_n = 1,05 \cdot a_{n-1} + 1000, a_0 = 50.000$
   (b) $83.421,88$
   (c) $70.000 \cdot 1,05^n - 20.000$

6. (a) $R_n = R_{n-1} + 2(n-1), R_0 = 1, R_1 = 2$
   (b) $R_n = 2 - n(1-n)$

7. (a) $3 \cdot 2^n$
   (b) $3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$
   (c) $-2^{n+1}(n-3)$
   (d) $4 - 3n$
   (e) $3 \cdot (-2)^n - 3^n + 5$

8. $a_n = 2^{2n+1} - 1$ e $b_n = 1 + 4^n$

9. (b) $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

10. (a) $\alpha_1+\alpha_2 n+\alpha_3 n^2+\alpha_4 n^3+(-2)^n(\alpha_5+\alpha_6 n+\alpha_7 n^2)+3^n(\alpha_8+\alpha_9 n)+(-4)^n\alpha_{10}$
    (b) $(-1)^n(\alpha_1+\alpha_2 n+\alpha_3 n^2)+2^n(\alpha_4+\alpha_5 n)+5^n(\alpha_6+\alpha_7 n)+\alpha_8 7^n$

11. (a) $L_n = \frac{L_{n-1}+L_{n-2}}{2}$
    (b) $L_n = \frac{700.000}{3} + \frac{800.000}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

12. $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 3^n - n2^{n+1} + \frac{3}{2}n + \frac{21}{4}$

13. (a) $2^{n-1}(2^{n+5}(n-5)+39n+34)+61\cdot 3^n$
    (b) $\frac{-2n(n+10)+13\cdot 3^n - 2^{n+5}+1}{8}$
    (c) $\frac{(n+2)(n^2+n+6)}{6}$
    (d) 2^n
    (e) $a_n = 2^{b_n}$, com $b_n = \frac{17+\sqrt{17}}{34}\left[\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n\right]$

14. (a) $p_3 n^3 + p_2 n^2 + p_1 n + p_0$
    (b) $n^2 p_0 (-2)^n$
    (c) $n^2(p_1 n + p_0)2^n$
    (d) $(p_2 n^2 + p_1 n + p_0)4^n$
    (e) $n^2(p_2 n^2 + p_1 n + p_0)(-2)^n$
    (f) $n^2(p_4 n^4 + p_3 n^3 + p_2 n^2 + p_1 n + p_0)2^n$
    (g) p_0

15. (b) $a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

16. (b) $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

17. (a) $a_n = 2a_{n-1} + 100, a_1 = 2$
    (b) $a_n = 51\cdot 2^n - 100$
    (c) $a_n = 2a_{n-1} - n, a_1 = 2$ e $a_2 = 4$
    (d) $a_1 = 1$ e $a_n = n+2, n > 1$

18. $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}, a_1 = a_2 = 1$

19. $T_n = \frac{24^n}{4n}, n \geq 1$