Matemática Discreta 1

Lista de Exercícios 3 (2020.1)

Princípio da inclusão e exclusão

1. (a) De quantos modos 5 casais podem sentar-se ao redor de uma mesa circular com número exato de cadeiras de tal forma que marido e mulher não fiquem juntos?
   (b) Generalize o problema para n casais.

2. De quantoas maneiras se podem comprar 15 latas de refrigerante se existem 4 tipos disponíveis e:
   (a) há um número tão grande quanto se queira de latas de cada tipo?
   (b) há somente 6 latas de cada tipo?

3. De quantas maneiras podemos ordenar as 9 letras de $\{a, a, b, b, b, c, c, d, d\}$ de modo que letras iguais nunca fiquem juntas?

4. Numa classe de 40 crianças, 26 estudam português, 20 estudam italiano e 14 estudam francês. Se 10 crianças não estudam nenhuma dessas três línguas e nenhuma estuda as três línguas, quantas crianças estudam
   (a) português e italiano?
   (b) italiano e francês?
   (c) português e francês?

5. Quantos são os inteiros de 1 a 100.000 que são divisíveis por 2 ou por 3?

6. Uma caravana composta por 10 camelos dispostos em fila viaja pelo deserto. A viagem dura muitos dias e os *viajantes* consideram cansativo er que ver sempre o mesmo camelo à sua frente. De quantas maneiras os camelos podem permutar entre si de modo que cada camelo seja precedido por um diferente daquele que o precedia na fila anterior?

7. Considere o conjunto de todas as permutações das letras de AAABBBCCC para responder o que se segue:
   (a) Quantas dessas permutações não possuem duas letras A juntas?
   (b) Quantas dessas permutaçes não possuem duas letras A juntas nem duas letras B juntas?

(c) Quantas dessas permutações não possuem letras iguais juntas?

8. Utilize o princípio da inclusão e exclusão para determinar o número de soluções para a equação $x_1+x_2+x_3+x_4 = 17$, em que $x_i, i = 1,2,3,4$, são números inteiros não negativos, tal que $x_1 \leq 3, x_2 \leq 4, x_3 \leq 5$ e $x_4 \leq 8$.

9. Escolhe-se, aleatoriamente, um elemento do conjunto $\{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n \leq 500\}$. Qual a probabilidade de que este número não seja divisível por 2, nem por 3, nem por 5?

10. Determine o número de permutações simples dos elementos $a_1, a_2, \ldots, a_0$, nas quais a_1 está em primeiro lugar ou a_2 está em segundo lugar ou a_3 em último lugar.

Funções Geradoras Ordinárias

11. Determine a função geradora ordinária das sequências a seguir.

(a) $(1,1,1,0,0,0,0,\ldots)$

(b) $(1,3,3^2,3^3,3^4,\ldots)$

(c) $(0,0,1,3,1,1,\ldots)$

(d) $(0,0,1,1,1,\ldots)$

(e) $(0,1,0,1,0,1,\ldots)$

(f) $(0,4,0,4,0,4,\ldots)$

(g) $(1,-1,1,-1,1,-1,\ldots)$

(h) $\left(1,-1,\dfrac{1}{2!},\dfrac{-1}{3!},\dfrac{1}{4!},\dfrac{-1}{5!},\ldots\right)$

(i) $a_k = \dfrac{2^k}{k!}$

12. Para cada uma das funções geradoras abaixo, forneça uma fórmula fechada para a sequência que ela determina.

(a) $\dfrac{x^4}{1-x^4} - (x^3+x^2+x+1)$

(b) $(1+3x)^{-1}$

(c) $\dfrac{x^3}{1-4x}$

(d) $\dfrac{x}{1+x+x^2}$

(e) $\dfrac{1+x^3}{(1+x)^3}$

(f) $e^{3x^2}-1$

(g) $(1+x)^q$ $(q \in \mathbb{Z}^+)$

(h) $e^{-x}+3x$

(i) x^2e^x

13. (a) Qual é o coeficiene de x^r em $(1+x+x^2+\cdots)^n$?

    (b) Qual é o coeficiene de x^{rm} em $(1+x^m+x^{2m}+\cdots)^n$?

14. (a) Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x_1+x_2+x_3+x_4=30$ se cada variável deve estar compreendida entre 4 e 9?

    (b) Qual a função geradora que controla o número de soluçõs inteiras não negtivas (a,b,c,d) da equação $2a+3b+5c+3d=r$?

15. (a) Prove, por argumentos combinatórios, que:

$$(1+x^m)^n = 1+\binom{n}{1}x^m+\binom{n}{2}(x^m)^2+\cdots+(x^m)^n$$

    sendo $m,n \in \mathbb{N}$.

    (b) Considere as seguintes funçóes de x : $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n)^3$ e $g(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})^3$. Prove, por argumentos combinatórios, que o coeficiente de x^{2n+1} em $f(x)$ coincide com o coeficiente de x^{2n-2} em $g(x)$. Encontre este coeficiente.

16. (a) De quantas maneiras podemos selecionar 275 balas de seis tipos distintos, se cada tipo se apresentar em pacoes de 25 balas cada um, e devendo as seleções constarem de um a quatro pacotes de cada tipo?

    (b) De quantas maneiras podemos dividir 13 livros idênticos de Matemática, 10 idênticos de Português e 17 idênticos de História entre 2 alunos, se cada um deve ficar com 20 livros, dos quais pelo menos 2 de cada matéria?

17. Determine o número de maneiras de escolher uma dúzia de biscoitos a partir de três variedades - ovos, salgado e tradicional -, se, pelo menos, dois biscoitos de cada tipo mas não mais que três salgados são escolhidos.

18. Explique como as funções geradoras podem ser utilizadas para para encontrar o número de maneiras de uma postagem de r centavos ser feita em um envelope, usando selos de 3, 4 e 20 centavos.

    (a) Suponha que a ordem em que os selos são utilizados não é relevante.

    (b) Suponha que os selos são postos em uma fila e que a ordem em que aparecem é relevante.

(c) Utilize sua resposta do item (a) para determinar o número de maneiras de uma postagem de 46 centavos ser utilizada em um envelope, utilizando selos de 3, 4 e 20 centavos, quando a ordem dos selos não for relevante.

(d) Utilize sua resposta do item (b) para determinar o número de maneiras de uma postagem de 46 centavos ser posta em fila em um envelope, utilizando selos de 3, 4 e 20 centavos, quando a ordem for relevante.

19. Determine a função geradora para o número de maneiras de obter a soma de n quando um dado é jogado repetidamente e a ordem dos lançamentos é relevante.

20. Use funções geradoras para encontrar o número de maneiras de escolher r objetos de n tipos diferentes, sabendo-se que devemos escolher pelo menos 1 objeto de cada tipo.

21. Utilize funções geradoras para determinar o número de maneiras em que 12 figurinhas podem ser distribuídas entre cinco crianças, para que cada criança receba, no máximo, três figurinhas.

22. De quantas maneiras 25 rosquinhas idênticas podem ser distribuídas entre quatro policiais para que cada um receba, pelo menos três, mas não mais que sete rosquinhas?

Funções Geradoras Exponenciais

23. Determine a função geradora exponencial das sequências a seguir.

(a) $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots)$

(b) $(1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, \dots)$

(c) $(0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots)$

(d) $a_k = \dfrac{1}{k+1}$

(e) $a_k = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$

(f) $a_k = k$

(g) $a_k = k + 1$

(h) $a_k = (-2)^k$

(i) $a_k = k(k+1)$

24. Para cada uma das funções geradoras abaixo, forneça uma fórmula fechada para a sequência que ela determina.

    (a) e^{-x}
    (b) $e^{3x} - 3e^{2x}$
    (c) e^{x^2}
    (d) xe^{x}
    (e) e^{x^3}
    (f) $(1 + 2x) + e^{3x}$
    (g) $e^{4x} + e^{-4x}$
    (h) $e^{x} - \dfrac{1}{1+x}$
    (i) $2e^{-3x+1}$

25. (a) Considerando-se as 23 letras do nosso alfabeto, encontre a função geradora exponencial para a_n, o número de palavras de n letras contendo, no máximo, uma vogal de cada tipo.

    (b) Em certo sistema criptográfico, as mensagens constam de 14 símbolos distintos, distribuídos em 4 palavras consecutivas. Quantas são as possíveis mensagens sujeitas à condição de que sua primeira palavra contenha pelo menos dois símbolos (desconsidere a existência de palavras "vazias")?

    (c) Com relação ao item anterior, qual seria a resposta caso não importasse a ordem dos símbolos em cada palavra, mas apenas quais os símbolos presentes em cadda uma?

26. Achar a função geradora exponencial da sequência usada para se encontrar o número de "palavras" de r letras ($r \leq 6$) formadas pelas letras a, b e c, em que a letra a aparece no máximo 1 vez, a letra b aparece no máximo 2 vezes e a letra c aparece no máximo 3 vezes.

27. (a) Utilizando funções geradoras, encontre o número de r-sequências quanternárias (sequências de r dígitos formadas por elementos do conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$) que contêm um número par de 0's e um número ímpar de 1's.

    (b) Forneça uma solução por argumentos combinatórios para o item (a), sem fazer uso de funções geradoras.

28. Nove novos técnicos são contratados por uma cia. telefônica. De quantas maneiras pode ela alocá-los em quatro diferentes escritórios dado que um dado escritório pode não receber nenhum técnico?

Partições de um Inteiro

29. De uma interpretação em termos de partições, para:

    (a) O coeficiente de x^{12} na expansão de

    $$(1+x^2+x^6+x^8+x^{10}+x^{12})(1+x^4+x^8+x^{12})(1+x^6+x^{12})(1+x^8)(1+x^{10})(1+x^{12})$$

    (b) O coeficiente de x^{15} na expansão de

    $$(1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+x^{15})(1+x^6+x^{12})(1+x^9)$$

30. Calcule os coeficientes dos itens (a) e (b) do exercício anterior.

31. Determine os coeficientes do polinômio $a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_rx^r$ que têm a propriedade que $a_n = p(n \mid$ duas partes: $1 \leq p_1 \leq 100$ e $101 \leq p_2 \leq 200)$ para todo inteiro positivo n tal que $102 \leq n \leq 300$.

32. Mostre que o coeficiente $p_d(n)$ de x^n na expansão da série de potência formal de $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots$ é igual ao número de partições de n em partes distintas, ou seja, o número de maneiras de escrever n como a soma de números inteiros positivos, em que a ordem não é relevante, mas não podem ocorrer repetições.

33. Encontre o número de partições de 9 com uma parte par e outra ímpar multiplicando os dois polinômios abaixo e encontrando o coeficiente de x^9.

    $$(x+x^3+x^5+x^7)(x^2+x^4+x^6+x^8)$$

34. Suponha um conjunto de números inteiros positivos $S = \{1, 2, 3, ..., K\}$ mostre que a função geradora para o número de partes de um inteiro positivo n com partes em S repetidas não mais que d vezes é

    $$\sum_{n=1}^{k} \frac{1-x^{(d+1)n}}{1-x^n}$$

35. Demonstre a seguinte identidade usando a patição quadrada de um inteiro n quadrado perfeito ($n = r^2$) e o gráfico de Ferrer:

$$r^2 = r + 2\sum_{k=1}^{r-1} k$$

Explique porque o número total de partes é ímpar e porque as partes distintas têm valores consecutivos (diferem exatamente de 1).

36. Através de considerações em relação ao Diagrama de Ferrers de uma partição, demonstre os resultados a seguir.

    (a) O número de partições de n tendo k como a maior parte é igual ao número de partições de n em exatamente k partes;

    (b) O número de partições autoconjugadas de n é igual ao número de partições de n em partes ímpares distintas;

    (c) Para $1 \leq j \leq n$, o número de partições de n nas quais j aparece como parte é igual ao número de partições irrestritas de $n - j$.

37. Suponha que $q_k(n)$ denote o número de partições de n em *exatamente* k partes.

    (a) Prove, por argumentos combinatórios, que:

    $$q_k(n) = q_{k-1}(n-1) + q_k(n-k);$$

    (b) Utilizando o resultado do item anterior, prove que:

    $$q_k(n) = \sum_{i=1}^{k} q_i(n-k).$$

38. O total de maneiras de se distribuirem n objetos distintos em k caixas idênticas sem que nenhuma fique vazia é denotado por $S(n, k)$ e denominado *número de Stirling de segunda espécie*. Este número também pode ser interpretado como o número de partições de um conjunto de cardinalidade n em exatamente k partes. Assim, é imediato que $\sum_{k=1}^{n} S(n, k)$ conta o total de partições de um conjunto de n elementos, que é denotado por B_n, e chamado *número de Bell*.

    (a) Prove, por argumentos combinatórios, que os números de Stirling de segunda espécie satisfazem a relação:

    $$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k),$$

    para $n \geq k$;

    (b) Encontre uma forma sucinta de função geradora exponencial para $S(n, k)$, supondo k fixo, isto é, encontre uma simplificação para:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)\frac{x^n}{n!};$$

(*Dica:* Use o fato de que $S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$);

(c) Com base no item anterior, encontre uma expressão simplificada para a função geradora exponencial de B_n.

Respostas, soluções e sugestões

1. (a) 112.512
   (b) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(2^i\cdot(2n-i-1)!)$
2. (a) 816
   (b) 180
3. 1.686
4. (a) 16
   (b) 4
   (c) 10
5. 66.667
6. 1.468.423
7. (a) 1.120
   (b) 340
   (c) 174
8. 20
9. $\dfrac{67}{250}$
10. $(3n^2-12n+13)(n-3)!$
11. (a) $1+x+x^2$
    (b) $\dfrac{1}{1-3x}$
    (c) $x^2\left(\dfrac{1}{1-x}+2x\right)$
    (d) $\dfrac{1}{1-x}-(1+x)$
    (e) $\dfrac{x}{1-x^2}$
    (f) $\dfrac{4x}{1-x^2}$
    (g) $\dfrac{1}{1+x}$
    (h) e^{-x}
    (i) e^{2x}

12. (a) $a_n = \begin{cases} 1, n \text{ é múltiplo de } 4 \\ -1, n < 4 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$

 (b) $a_n = (-3)^n$

 (c) $\big(0, 0, 0, 1, 4, 4^2, 4^3, \dots\big)$

 (d) $a_n = \begin{cases} 1,\ n \textbf{ mod } 3 = 1 \\ -1,\ n \textbf{ mod } 3 = 2 \\ 0,\ n \textbf{ mod } 3 = 0 \end{cases}$

 (e) $a_n = \begin{cases} 1,\ n = 0 \\ -3,\ n = 1 \\ 6,\ n = 2 \\ (-1)^n \left(\binom{2+n}{n} + \binom{n-1}{n-3}\right), \text{ caso contrário} \end{cases}$

 (f) $a_n = \begin{cases} \dfrac{3^n}{n!}, \text{ n par e } n > 0 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$

 (g) $\left(\binom{q}{0}, \binom{q}{1}, \binom{q}{2}, \cdots \binom{q}{q}\right)$

 (h) $\left(1, 2, \dfrac{1}{2!}, \dfrac{-1}{3!}, \dfrac{1}{4!}, \dfrac{-1}{5!}, \cdots\right)$

 (i) $\left(0, 0, 1, 1, \dfrac{1}{2!}, \dfrac{1}{3!}, \dfrac{1}{4!} \cdots\right)$

13. (a) $\binom{n+r-1}{r}$

 (b) $\binom{n+r-1}{r}$

14. (a) 80

 (b) $\dfrac{1}{(1-x^2)(1-x^3)^2(1-x^5)}$

15. (b) $\binom{2n}{2} - 3\binom{n}{2}$

16. (a) 216

 (b) 68

17. 13

18. (c) 7

 (d) 3.224

19. $\dfrac{1}{1-(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)}$

20. $\binom{r-1}{r-n}$

21. 50

22. 20

23. (a) $1 + x + \dfrac{x^2}{2}$
    (b) e^{3x}
    (c) $e^x - e^{-x}$
    (d) $\dfrac{e^x - 1}{x}$
    (e) $\dfrac{e^x - (1+x)}{x^2}$
    (f) xe^x
    (g) $e^x(x+1)$
    (h) e^{-2x}
    (i) $x(x+2)e^x$

24. (a) $(-1)^k$
    (b) $3^k - 3 \cdot 2^k$
    (c) $a_k = \begin{cases} \dfrac{k!}{(k/2)!}, k \text{ par} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$
    (d) $a_k = k$
    (e) $a_k = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n/3)!}, k \text{ múltiplo de } 3 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$
    (f) $a_k = \begin{cases} 2, k = 0 \\ 5, k = 2 \\ 3^k, \text{ caso contrário} \end{cases}$
    (g) $a_k = \begin{cases} 2, k = 0 \\ 5, k = 2 \\ 3^k, \text{ caso contrário} \end{cases}$
    (h) $4^k + (-4)^k$
    (i) $2e(-3)^k$

25. (a) $(1+x)^5 e^{18x}$
    (b) $\binom{12}{3} \cdot 14!$

(c) 227.425.380

26. $1 + 3\frac{x}{1!} + 8\frac{x^2}{2!} + 19\frac{x^3}{3!} + 80\frac{x^4}{4!} + 60\frac{x^5}{5!} + 120\frac{x^6}{6!}$

27. (a) 4^{r-1}

28. 262.144

29. (a) é o número de partições de 12 em partes pares;

    (b) é o número de partições de 15 em partes restritas ao conjunto $\{3, 6, 9\}$

30. (a) 11; (b) 5

31. Os coeficientes obedecem a

$$a_r = 100 - |r - 201|, \text{ com } 102 \le r \le 300$$

33. 4

38. (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}$

    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} S(n,k)\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^x - 1)^k}{k!} = e^{e^x} - 1$