Matemática Discreta **1**

Relações de Recorrência Lineares Não-Homogêneas

AULA 19

Professor: Luiz Augusto Laranjeira

luiz.laranjeira@gmail.com

OBJETIVO

Nesta aula estudamos
relações de recorrência lineares
não-homogêneas com coeficientes constantes
em uma variável

Relações de Recorrência Lineares Não-Homogêneas de Ordem k com Coeficientes Constantes

Relação de Recorrência Linear Não-Homogênea de Ordem *k* com Coeficientes Constantes

Recordando: a forma geral de uma relação de recorrência linear de ordem k e com coeficientes constantes em uma variável é dada por:

$$f_n = c_1 f_{n-1} + c_2 f_{n-2} + \cdots + c_k f_{n-k} + g(n) \qquad \textbf{(6.35)}$$

onde $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{k-1}$ e c_k são constantes, e g(n) é uma função de n.

A recorrência linear expressa por **(6.35)** *é chamada não-homogênea quando g(n) ≢ 0.*

Relação de Recorrência Linear Não-Homogênea de Ordem *k* com Coeficientes Constantes

Forma Geral:

$$f_n = c_1 f_{n-1} + c_2 f_{n-2} + \cdots + c_k f_{n-k} + g(n) \qquad \textbf{(6.35)}$$

A solução da equação acima inclui a solução da relação de recorrência homogênea associada h(n)*, que consiste na equação acima com* $g(n) = 0$

$$f_n = c_1 f_{n-1} + c_2 f_{n-2} + \cdots + c_k f_{n-k}$$

mais uma solução particular de **(6.35)** *a que chamamos* $p(n)$*. Daí a solução completa será dada por:*

$$S_c(n) = h(n) + p(n)$$

Solução de Relações de Recorrência Lineares Não-Homogêneas (cont.)

Solução Completa:

$$S_c(n) = h(n) + p(n)$$

Já sabemos como encontrar a solução homogênea associada $h(n)$.

Agora vamos investigar a solução particular $p(n)$. Sabemos como achar uma solução particular para a relação de recorrência linear não-homogênea se $g(n)$ for da forma:

$$g(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + b_{t-2} n^{t-2} + \cdots + b_1 n + b_0) s^n$$

Se $g(n)$ é da forma mostrada acima teremos dois casos possíveis:

1) Caso em que *s* não é raiz da equação característica da relação de recorrência homogênea associada.
2) Caso em que *s* é raiz da equação característica da relação de recorrência homogênea associada.

Solução de Relações de Recorrência Lineares Não-Homogêneas (cont.)

Solução Completa: $S_c(n) = h(n) + p(n)$

A solução particular $p(n)$ *da relação de recorrência linear não-homogênea é conhecida caso* $g(n)$ *seja da forma:*

$$g(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + b_{t-2} n^{t-2} + \cdots + b_1 n + b_0) s^n$$

(*cuidado quando s* = 1)

Se assim for, dois casos são possíveis:

1) Se *s* não é raiz da equação característica da relação de recorrência homogênea associada temos uma solução $p_1(n)$ como se segue:

$$p_s(n) = (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + p_{t-2} n^{t-2} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n$$

2) Se *s* é raiz da equação característica da relação de recorrência homogênea associada temos uma solução $p_2(n)$ como se segue :

$$p_r(n) = n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + p_{t-2} n^{t-2} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n$$

(onde *m* é a multiplicidade da raiz *s* e *t* é a mais alta potência de *n* na relação de recorrência)

Solução de Relações de Recorrência Lineares Não-Homogêneas (cont.)

Se $g(n)$ for da forma

$$g(n) = \sum_{i=1}^{q} (b_{t_i} n^t + b_{t_i - 1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0) {s_i}^n$$

(onde q é o número dos s_i´s) então a solução particular $p(n)$ será uma combinação linear das soluções para cada um dos termos acima:

$$p(n) = \sum_{j=1}^{q_j} (p_{t_j} n^t + p_{t_j - 1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0) {s_j}^n +$$

$$+ \sum_{k=1}^{q_k} n^{m_k} (p_{t_k} n^t + p_{t_k - 1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0) {s_k}^n$$

onde q_j é o número dos s_i´s que não são raízes da equação característica, q_k é o número dos s_i´s que são raízes da equação característica e m_k é a multiplicidade destas raizes.

Exemplo 13

Resolver a relação de recorrência : $r_n = r_{n-1} + n$, $r_0 = 1$

Solução homogênea associada: $\boldsymbol{\alpha^n = \alpha^{n-1}}$ $\rightarrow$ $\alpha^n - \alpha^{n-1} = 0$ $\rightarrow$ $\alpha - 1 = 0$ $\rightarrow$ $\alpha = 1$

Daí: $h(n) = B1^n = B$

Solução particular: (1 é raiz da equação característica de *h* (*n*))

$\boldsymbol{p(n) = n(A_1 n + A_0) = A_1 n^2 + A_0 n}$ Substituindo na relação de recorrência original vem:

$A_1 n^2 + A_0 n = A_1 (n-1)^2 + A_0 (n-1) + n$ Daí se calculam os valores de A_1, A_0 e $p(n)$

$A_1 = A_1$ $\quad A_0 = -2A_1 + A_0 + 1 \rightarrow A_1 = \frac{1}{2}$ $\quad 0 = A_1 - A_0 \rightarrow A_0 = A_1$

$$A_1 = A_0 = \frac{1}{2} \rightarrow p(n) = \frac{n^2+n}{2}$$

Agora usamos a condição inicial ($r_0 = 1$) para calcular a constante *B*

$$S_c(n) = r_n = h(n) + p(n) = B + \frac{n^2+n}{2} \rightarrow r_0 = 1 = B \rightarrow B = 1$$

Finalmente: $S_c(n) = h(n) + p(n) = 1 + \frac{n^2+n}{2}$ (para $n \geq 0$) ou $r_n = \frac{n^2+n+2}{2}$

Exemplo 14

Proveja a solução homogênea $h(n)$ e a particular $p(n)$ da relação de recorrência:

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} - 5n^2 3^n + 3n2^n + n^2 + 3n - 8$$

com condições iniciais
$a(0) = -\frac{25}{4}, a(1) = -\frac{709}{18}$

$$g(n) = \underbrace{-5n^2 3^n}_{g_1(n)} + \underbrace{3n2^n}_{g_2(n)} + \underbrace{n^2 + 3n - 8}_{g_3(n)}$$

Equação característica da solução homogênea associada: $\alpha^n = 4\alpha^{n-1} - 3\alpha^{n-2}$

$\alpha^n - 4\alpha^{n-1} + 3\alpha^{n-2} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = 3 \qquad \alpha_2 = 1$

$$\boldsymbol{h(n) = h_1 1^n + h_2 3^n = h_1 + h_2 3^n}$$

Solução particular: $\boldsymbol{p(n) = p_1(n) + p_2(n) + p_3(n)}$

$p_1(n) = n(p_{12}n^2 + p_{11}n + p_{10})3^n$ (corresponde a $g_1(n)$ - 3 é raiz da eq. característica)

$p_2(n) = (p_{21}n + p_{20})2^n$ (corresponde a $g_2(n)$ - 2 ñ é raiz da eq. característica)

$p_3(n) = n(p_{32}n^2 + p_{31}n + p_{30})1^n$ (corresponde a $g_3(n)$ - 1 é raiz da eq. característica)

$$\boldsymbol{p(n) = (p_{12}n^3 + p_{11}n^2 + p_{10}n)3^n + (p_{21}n + p_{20})2^n + (p_{32}n^3 + p_{31}n^2 + p_{30}n)}$$

Exemplo 14 (cont.)

Vamos agora resolver a relação de recorrência para $a(0) = -\frac{25}{4}, a(1) = -\frac{709}{18}$.

Primeiramente vamos calcular os coeficientes da solução particular

$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} - 5n^2 3^n + 3n2^n + n^2 + 3n - 8$ (relação de recorrência)

$p(n) = (p_{12}n^3 + p_{11}n^2 + p_{10}n)3^n + (p_{21}n + p_{20})2^n + (p_{32}n^3 + p_{31}n^2 + p_{30}n)$

Construímos uma identidade de acordo com a solução particular e a relação de recorrência

$$
\begin{aligned}
&(p_{12}n^3 + p_{11}n^2 + p_{10}n)3^n + (p_{21}n + p_{20})2^n + (p_{32}n^3 + p_{31}n^2 + p_{30}n) = \\
&\quad 4[p_{12}(n-1)^3 + p_{11}(n-1)^2 + p_{10}(n-1)]3^{n-1} + 4[p_{21}(n-1) + p_{20}]2^{n-1} + \\
&\quad + 4[p_{32}(n-1)^3 + p_{31}(n-1)^2 + p_{30}(n-1)] + \\
&\quad - 3[p_{12}(n-2)^3 + p_{11}(n-2)^2 + p_{10}(n-1)]3^{n-2} - 3[p_{21}(n-1) + p_{20}]2^{n-2} + \\
&\quad - 3[p_{32}(n-2)^3 + p_{31}(n-2)^2 + p_{30}(n-2)] - 5n^2 3^n + 3n2^n + n^2 + 3n - 8
\end{aligned}
$$

Para o cálculo dos coeficientes da solução particular igualamos os coeficientes das construções semelhantes à esquerda e à direita da identidade acima

Exemplo 14 (cont.)

Construímos uma identidade de acordo com a solução particular e a relação de recorrência

$$(p_{12}n^3 + p_{11}n^2 + p_{10}n)3^n + (p_{21}n + p_{20})2^n + (p_{32}n^3 + p_{31}n^2 + p_{30}n) =$$

$$4[p_{12}(n-1)^3 + p_{11}(n-1)^2 + p_{10}(n-1)]3^{n-1} + 4[p_{21}(n-1) + p_{20}]2^{n-1} +$$

$$+ 4[p_{32}(n-1)^3 + p_{31}(n-1)^2 + p_{30}(n-1)] +$$

$$- 3[p_{12}(n-2)^3 + p_{11}(n-2)^2 + p_{10}(n-1)]3^{n-2} - 3[p_{21}(n-1) + p_{20}]2^{n-2} +$$

$$- 3[p_{32}(n-2)^3 + p_{31}(n-2)^2 + p_{30}(n-2)] - 5n^2 3^n + 3n2^n + n^2 + 3n - 8$$

Igualamos os coeficientes das construções semelhantes à esquerda e à direita da identidade acima

$$p_{12} = \frac{4}{3}p_{12} - \frac{1}{3}p_{12} = p_{12} \qquad \text{(termos em } n^3 3^n\text{)}$$

$$p_{11} = -4p_{12} + \frac{4}{3}p_{11} + 2p_{12} - \frac{1}{3}p_{11} - 5 \quad \rightarrow \quad p_{12} = -\frac{5}{2} \qquad \text{(termos em } n^2 3^n\text{)}$$

$$p_{10} = 4p_{12} - \frac{8}{3}p_{11} + \frac{4}{3}p_{10} - 4p_{12} + \frac{4}{3}p_{11} - \frac{1}{3}p_{10} \rightarrow p_{11} = 0 \qquad \text{(termos em } n3^n\text{)}$$

$$0 = -\frac{4}{3}p_{12} + \frac{4}{3}p_{11} - \frac{4}{3}p_{10} + \frac{8}{3}p_{12} - \frac{4}{3}p_{11} + \frac{1}{3}p_{10} \rightarrow p_{10} = \frac{4}{3}p_{12} = -\frac{10}{3} \qquad \text{(termos em } 3^n\text{)}$$

Exemplo 14 (cont.)

Construímos uma identidade de acordo com a solução particular e a relação de recorrência

$$(p_{12}n^3 + p_{11}n^2 + p_{10}n)3^n + (p_{21}n + p_{20})2^n + (p_{32}n^3 + p_{31}n^2 + p_{30}n) =$$

$$4[p_{12}(n-1)^3 + p_{11}(n-1)^2 + p_{10}(n-1)]3^{n-1} + 4[p_{21}(n-1) + p_{20}]2^{n-1} +$$

$$+ 4[p_{32}(n-1)^3 + p_{31}(n-1)^2 + p_{30}(n-1)] +$$

$$- 3[p_{12}(n-2)^3 + p_{11}(n-2)^2 + p_{10}(n-1)]3^{n-2} - 3[p_{21}(n-1) + p_{20}]2^{n-2} +$$

$$- 3[p_{32}(n-2)^3 + p_{31}(n-2)^2 + p_{30}(n-2)] - 5n^2 3^n + 3n2^n + n^2 + 3n - 8$$

Igualamos os coeficientes das construções semelhantes à esquerda e à direita da identidade acima

$$p_{21} = 2p_{21} - \frac{1}{3}p_{21} + 3 \quad \rightarrow \quad p_{21} = -\frac{9}{2} \qquad \text{(termos em } n2^n\text{)}$$

$$p_{20} = -2p_{21} + 2p_{20} + \frac{1}{3}p_{21} - \frac{1}{3}p_{20} \quad \rightarrow \quad p_{20} = \frac{5}{2}p_{21} = -\frac{45}{4} \qquad \text{(termos em } 2^n\text{)}$$

Exemplo 14 (cont.)

Construímos uma identidade de acordo com a solução particular e a relação de recorrência

$$(p_{12}n^3 + p_{11}n^2 + p_{10}n)3^n + (p_{21}n + p_{20})2^n + (p_{32}n^3 + p_{31}n^2 + p_{30}n) =$$

$$4[p_{12}(n-1)^3 + p_{11}(n-1)^2 + p_{10}(n-1)]3^{n-1} + 4[p_{21}(n-1) + p_{20}]2^{n-1} +$$

$$+ 4[p_{32}(n-1)^3 + p_{31}(n-1)^2 + p_{30}(n-1)] +$$

$$- 3[p_{12}(n-2)^3 + p_{11}(n-2)^2 + p_{10}(n-1)]3^{n-2} - 3[p_{21}(n-1) + p_{20}]2^{n-2} +$$

$$- 3[p_{32}(n-2)^3 + p_{31}(n-2)^2 + p_{30}(n-2)] - 5n^2 3^n + 3n2^n + n^2 + 3n - 8$$

Igualamos os coeficientes das construções semelhantes à esquerda e à direita da identidade acima

$$p_{32} = 4p_{32} - 3p_{32} = p_{32} \qquad (n^3)$$

$$p_{31} = -12p_{32} + 4p_{31} + 9p_{32} - 3p_{31} + 1 \quad \rightarrow \quad p_{32} = \frac{1}{3} \qquad (n^2)$$

$$p_{30} = 12p_{32} - 8p_{31} + 4p_{30} - 36p_{32} + 12p_{31} - 3p_{30} + 3 \quad \rightarrow \quad 4p_{31} - 3p_{30} = 5 \qquad (n)$$

$$0 = -4p_{32} + 4p_{31} - 4p_{30} + 24p_{32} - 12p_{31} + 6p_{30} - 8 \quad \rightarrow \quad -8p_{31} + 2p_{30} = \frac{1}{3} \qquad (n^0)$$

$$p_{31} = -\frac{11}{6} \qquad p_{30} = \frac{37}{9}$$

Exemplo 14 (cont.)

Após o cálculo dos coeficientes a solução particular fica

$$p(n) = \left(-\frac{5}{2}n^3 - \frac{10}{3}n\right)3^n + \left(-\frac{9}{2}n - \frac{45}{4}\right)2^n + \left(\frac{1}{3}n^3 - \frac{11}{6}n^2 + \frac{37}{9}n\right)$$

Agora podemos obter a solução completa

$$S_c(n) = \left(-\frac{5}{2}n^3 - \frac{10}{3}n\right)3^n + \left(-\frac{9}{2}n - \frac{45}{4}\right)2^n + \left(\frac{1}{3}n^3 - \frac{11}{6}n^2 + \frac{37}{9}n\right) + h_1 + h_2 3^n$$

Calculamos os coeficientes da equação homogênea associada usando as condições iniciais

$$S_c(0) = -\frac{25}{4} = -\frac{45}{4} + h_1 + h_2 \quad \rightarrow \quad h_1 + h_2 = 5$$

$$S_c(1) = -\frac{709}{18} = 3\left(-\frac{5}{2} - \frac{10}{3}\right) + 2\left(-\frac{9}{2} - \frac{45}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{11}{6} + \frac{37}{9}\right) + h_1 + 3h_2$$

$$-\frac{709}{18} = -\frac{35}{2} - \frac{63}{2} + \frac{47}{18} + h_1 + 3h_2 = -49 + \frac{47}{18} + h_1 + 3h_2$$

$$-\frac{709}{18} = -\frac{835}{18} + h_1 + 3h_2 \quad \rightarrow \quad h_1 + 3h_2 = 7 \quad \rightarrow \quad h_1 = 4 \quad e \quad h_2 = 1$$

$$\boldsymbol{S_c(n) = a(n) = \left(-\frac{5}{2}n^3 - \frac{10}{3}n\right)3^n + \left(-\frac{9}{2}n - \frac{45}{4}\right)2^n + \left(\frac{1}{3}n^3 - \frac{11}{6}n^2 + \frac{37}{9}n\right) + 3^n + 4}$$