Matemática Discreta 1

Análise Combinatória
Exercícios II

AULA 11

Professor: Luiz Augusto Laranjeira

luiz.laranjeira@gmail.com

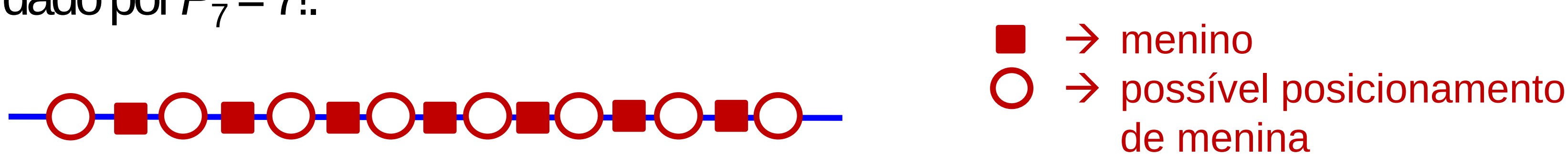
Exemplo 1: Permutações

Exemplo 1

De quantas maneiras 7 meninos e 5 meninas podem ser colocados numa fila de modo que duas meninas não fiquem juntas?

Solução:

Vamos dispor os meninos na fila e colocar espaços entre eles onde potencialmente uma menina pode ser colocada. Consideremos primeiramente o número de maneiras de se dispor os 7 meninos na fila. Este número é dado por $P_7 = 7!$.



Agora, dado um posicionamento dos meninos vamos posicionar as 5 meninas nos 8 "espaços" entre os meninos (incluindo as extremidades). O nº de posicionamentos distintos de meninas será $C_5^8 = 56$. Mas, dada uma disposição dos 7 meninos e uma escolha de 5 espaços (dentre os 7 existentes) para as meninas, teremos diferentes soluções se permutarmos as meninas entre si. O número de permutações possíveis das meninas neste cenário é dado por $P_5 = 5!$

Assim, o número total de soluções que satisfazem ao enunciado será dado por:

$$N = 7! \times 56 \times 5! = 5040 \times 56 \times 120 = 33.868.800$$

Exercício 1

De quantos modos podemos formar um subconjunto com 4 elementos do conjunto { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } de modo que não haja números consecutivos?

Exercício 1

De quantos modos podemos formar um subconjunto com 4 elementos do conjunto { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } de modo que não haja números consecutivos?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 ?

Exercício 1

De quantos modos podemos formar um subconjunto com 4 elementos do conjunto { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } de modo que não haja números consecutivos?

Solução: Precisamos escolher 4 números não-contíguos dentre { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9 }. Como temos 9 números, 5 dentre eles não serão escolhidos. Podemos representar os números não escolhidos por sinais de –, que estarão separados por 6 espaços (incluindo as extremidades) dentre os quais os 4 números escolhidos poderão ser colocados.

□ – □ – □ – □ – □ – □

Assim teremos C(6,4) = 15 possibilidades de escolha dos 4 números.

■ – □ – ■ – ■ – □ – ■ ≡ { 1, 4, 6, 9 }

□ – ■ – ■ – ■ – ■ – □ ≡ { 2, 4, 6, 8 }

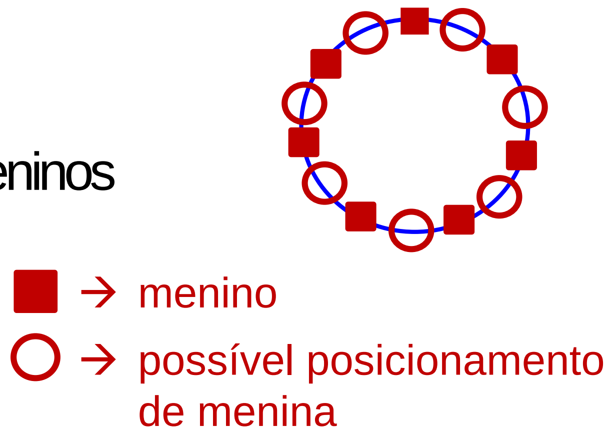
■ – ■ – □ – ■ – ■ – □ ≡ { 1, 3, 6, 8 }

Exemplo 2: Permutações Circulares

Exemplo 2

De quantas maneiras 7 meninos e 5 meninas podem dar as mãos para brincar de roda, dado que duas meninas não podem ficar juntas?

Solução:



Consideremos primeiramente as possíveis maneiras de se dispor os 7 meninos em um círculo. O número das possíveis maneiras é dado por $(PC)_7 = 6!$.

Agora vamos posicionar as meninas nos 7 "espaços" entre os meninos. O número dos possíveis posicionamentos de meninas será $C_5^7 = 21$.

Mas, dada uma disposição dos 7 meninos e uma escolha de 5 espaços (dentre os 7 existentes) para posicionamento das meninas, teremos diferentes soluções se permutarmos as meninas entre si. O número de permutações possíveis das meninas neste cenário é dado por $P_5 = 5!$ (e não por permutação circular de 5).

O número total de soluções que satisfazem ao enunciado será dado por:

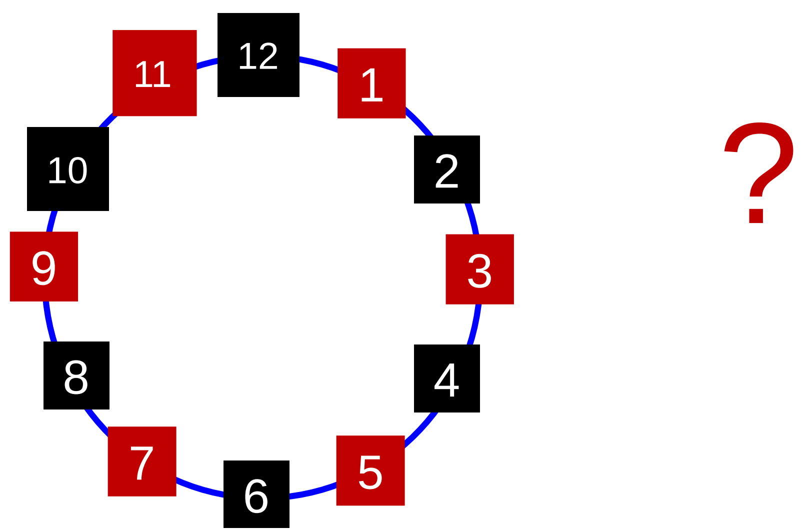
$$N = 6! \times 21 \times 5! = 720 \times 21 \times 120 = 1.814.400$$

Exercício 2

Doze cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa, nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível formar tal grupo.

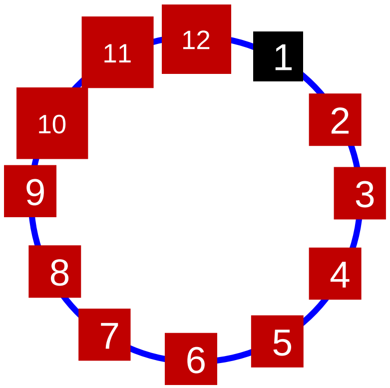
Exercício 2

Doze cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa, nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível formar tal grupo.



Exercício 2

Doze cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa, nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível formar tal grupo.



Solução:

Separe em dois casos a partir de um dos cavaleiros (1, por exemplo). Calcule o número de possibilidades para cada caso e use o princípio da adição para calcular a resposta final.

1) Se o 1 está incluido precisamos escolher 4 cavaleiros dentre {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,11}
2) Se o 1 não está incluído precisamos escolher 5 cavaleiros dentre {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Exercício 2

Solução:

1) Incluído o 1. Vamos escolher 4 números não-contíguos dentre { 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,11 }. Como temos 9 números, 5 dentre eles não serão escolhidos. Representamos os números não escolhidos por sinais de –, que estarão separados por 6 espaços, incluindo as extremidades, onde os 4 números escolhidos poderão ser colocados.

□ – □ – □ – □ – □ – □

Assim teremos C(6,4) = 15 possibilidades de escolha dos 4 números.

■ – □ – ■ – ■ – □ – ■ ≡ { 3, 6, 8, 11 }

□ – ■ – ■ – ■ – ■ – □ ≡ { 4, 6, 8, 10 }

■ – ■ – □ – ■ – ■ – □ ≡ { 3, 5, 8, 10 }

Exercício 2

Solução:

2) Não incluído o 1. Vamos escolher 5 números não-contíguos dentre {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Usando raciocínio semelhante ao usado no item anterior temos 11 números, 6 não serão escolhidos e serão representados por 6 sinais de – separados por 7 espaços, onde os 5 números escolhidos poderão ser colocados:

$$\square - \square - \square - \square - \square - \square - \square$$

Isto nos dá C(7,5) = 21 possibilidades de escolha dos 5 números.

A solução final será dada pela soma do número de possibilidades de cada um dos casos, isto é 15 + 21 = 36.

Exercício 3

Qual o número de soluções inteiras e não-negativas da seguinte inequação $x + y + w + z \leq 29$?

Exercício 3

Qual o número de soluções inteiras e não-negativas da seguinte inequação $x + y + w + z \leq 29$?

Não podemos resolver este problema diretamente pelo método de equações com coeficientes unitários. Podemos porém usar um artifício matemático para reduzir este problema a uma equação com coeficientes unitários.

Definimos o conceito de “sobra” *s*. Isto é, para cada solução da inequação acima corresponde uma solução da equação

$$x + y + w + z + s = 29$$

E o número de soluções da equação de coeficientes unitários acima é

$$C_{29}^{33} = \frac{33!}{29!\,6!} = \frac{33.32.31.30}{720} = 1364$$

Exercício 4

Quantos números inteiros entre 1 e 10000 têm a soma dos seus algarismos igual a 6?

Exercício 4

Quantos números inteiros entre 1 e 10000 têm a soma dos seus algarismos igual a 6?

- Dentre os números de 1 algarismo somente o 6 é igual a 6 ($n_1 = 1$).
- O único número de 5 algarismos é 10000 cuja soma $S \neq 6$.
- Temos que calcular quantos números de 2, 3 e 4 algarismos têm soma 6. Denotamos estes números por WX, WXY e WXYZ, onde W ≥ 1 e X,Y,Z ≥ 0.

  Para usarmos a solução da equação com coeficientes unitários e valores ≥ 0, fazemos W=w+1, onde W > 0 e w ≥ 0. Assim,

  1) Para 2 algarismos: w+1+X = 6 → w+X = 5 e $n_2 = C_5^6 = 6$.
  2) Para 3 algarismos: w+X+Y = 5 e $n_3 = C_5^7 = 21$.
  3) Para 4 algarismos: w+X+Y+Z = 5 e $n_4 = C_5^8 = 56$.

A solução completa será: $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 1 + 6 + 21 + 56 = 84$

Exercício 5

Prove por indução matemática que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

Exercício 5

Prove por indução matemática que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

Sabemos que a soma $(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Logo, o problema se reduz a provar que: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercício 5

Prove por indução matemática que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

a) Passo base: n=1 $\quad 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$

b) Hipótese indutiva: n=k $\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

c) Passo indutivo: n=k+1, provar $\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)(k+1)^2$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)(k+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

CQD

Exercício 6

Ache a fórmula fechada para a soma

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

Dica: usar indução finita.

Exercício 6

Ache a fórmula fechada para a soma $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

Dica: usar indução finita.

Resposta:

Prova (por indução matemática):

Somando os primeiros termos e simplificando temos que:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}$$

o que leva a conjectura que para todos os inteiros positivos n,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Exercício 6 (cont.)

(a) Passo base: Para $n = 1$, $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$, que é o valor da fórmula fechada. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

– Deve-se mostrar que:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k+1}{k+2}
\end{aligned}$$

CQD