Matemática Discreta 1

Lista de Exercícios 2 (2020.1)

Princípio da Indução Matemática

1. Use o princípio da indução matemática para provar as identidades a seguir. Não se esqueça de, na apresentação de sua resposta, expor o passo base, a hipótese indutiva, o que é necessário para demonstrar o passo de indução, o passo de indução e, ao menos em um dos itens, justificar o porquê de tais passos mostrarem a veracidade da identidade.

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$

   (c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2 \cdot (-7)^i = \frac{1-(-7)^{n+1}}{4}$

   (d) $\displaystyle\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.$

2. Use o princípio da indução matemática para provar as identidades a seguir. Não se esqueça de, na apresentação de sua resposta, expor o passo base, a hipótese indutiva, o que é necessário para demonstrar o passo de indução, o passo de indução e, ao menos em um dos itens, justificar o porquê de tais passos mostrarem a veracidade da identidade.

   (a) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{i}\right) = n+1$

   (b) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = \frac{n^n}{n!}$

3. Use o princípio da indução matemática para provar as desigualdades a seguir. Não se esqueça de, na apresentação de sua resposta, expor o passo base, a hipótese indutiva, o que é necessário para demonstrar o passo de indução, o passo de indução e, ao menos em um dos itens, justificar o porquê de tais passos mostrarem a veracidade da desigualdade.

(a) $3^n < n!$ $(n > 6)$

(b) $n! < n^n$ $(n > 1)$

(c) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$

(e) $\displaystyle\frac{2^{2n}}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ $(n > 1)$

(f) $1 + nh \leq (1+h)^n$ $(h > -1$ e $n \in \mathbb{Z}^*)$

(g) $a^n - b^n \leq na^{n-1}(a-b)$ $(0 < b < a$ e $n \in \mathbb{Z}^+)$

(h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} \leq \frac{n^2}{n+1}$

(i) $\displaystyle\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n} \geq (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n}$ $(a_1, a_2, \ldots, a_n > 0)$

4. Considere o produto

$$P_n = \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) \ (n \geq 2)$$

(a) Calcule P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6.

(b) Observe os denominadores de P_3 e P_5 e, em separado, de P_2, P_4 e P_6.

(c) Observe os numeradores e denominadores em relação ao índice n e P_n.

(d) Faça a sua conjectura para P_n.

(e) Prove sua conjectura pelo princípio da indução matemática.

5. Demonstre, utilizando a indução matemática, os fatos de divisibilidade a seguir.

(a) Demonstre que 21 divide $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ sempre que n for um número inteiro positivo.

(b) Demonstre que, se n for um número inteiro positivo, então 133 divide $11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

6. Considere n, com $n \geq 3$, pontos distintos sobre uma circunferência. Se pontos consecutivos são unidos por segmentos de reta criando um polígono com n lados, prove, por indução, que a soma dos ângulos internos desse polígono é igual a $(n-2)180°$.

7. Conjecture e prove, via indução matemática, uma fórmula para calcular o número máximo de regiões em que n retas dividem o plano.

8. Demonstre, atavés do princípio da indução matemática, que um tabuleiro de damas $2^n \times 2^n \times 2^n$ tridimensional, em que falta um cubo $1 \times 1 \times 1$, pode ser completamente preenchido com cubos $2 \times 2 \times 2$, considerando-se que um cubo $1 \times 1 \times 1$ tenha sido removido.

Princípio da Indução Forte e Princípio da Boa Ordenação

9. Use a indução forte para demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

10. Use a indução forte para mostrar que todo número inteiro positivo n pode ser escrito como uma soma de potências distintas de dois, ou seja, como uma soma de um subconjunto de números inteiros $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, e assim por diante.

11. O **teorema de Pick** diz que a área de um polígono simples P no plano com vértices que são todos pontos reticulados (isto é, com coordenadas internas) é igual a $I(P)+B(P)/2-1$, em que $I(P)$ e $B(P)$ são os números de pontos reticulados no interior de P e na borda de P, respectivamente. Use a indução forte sobre o número de vértices de P para demonstrar o teorema de Pick.

12. Use a propriedade da boa ordenação para mostrar que se x e y forem números reais tais que $x < y$, então existe um número racional r tal que $x < r < y$.

13. Considere a e b como números inteiros positivos, e considere S como o conjunto dos números inteiros positivos na forma $as + bt$, em que s e t são números inteiros.

    (a) Mostre que S não é vazio.

    (b) Use a propriedade da boa ordenação para mostrar que S tem um menor elemento c.

14. Um quebra-cabeça é montado por junções sucessivas de peças que se organizam em blocos. Um movimento é feito cada vez que uma peça é adicionada a um bloco, ou quando dois blocos são agrupados. Use a indução forte para demonstrar que não importa como os movimentos são realizados, são necessários $n-1$ movimentos para montar um quebra-cabeça com n peças.

Princípios Fundamentais de Contagem

15. Uma loja de iogurte congelado permite escolher um sabor (baunilha, morango, limão, cereja ou pêssego), um acompanhamento (raspas de chocolate, jujuba ou castanha de caju) e uma calda (creme batido ou coco ralado). Quantas sobremesas diferentes são possíveis?

16. No exercício 15, por quantas escolhas de sobremesa podemos optar se formos alérgicos a chocolate e a morangos?

17. Uma bandeira é formada por 7 listras, que devem ser coloridas com as cores A, B e C, não podendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos se pode colorir à bandeira?

18. Listando os números inteiros de 1 a 100.000, quantas vezes o dígito 5 aparece?

19. Determine a quantidade de números

    (a) de 3 dígitos distintos;

    (b) pares de 3 dígitos distintos;

    (c) naturais distintos que podem ser obtidos pela soma de 2 ou mais números do conjunto $\{1, 3, 5, 10, 20, 50, 90\}$;

    (d) distintos que podem ser formados pelo produto de dois ou mais números do multiconjunto $\{3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7\}$ (*multiconjunto* é aquele conjunto que considera relevante o número de cópias de cada elemento em sua composição).

20. Há 5 estradas disitintas ligando as cidades A e B, 3 distintas ligando B e C e 2 distintas ligando A e C, diretamente.

    (a) Quantas são as possíveis rotas ligando A e C?

    (b) Quantas são as possíveis rotas que partem de A, vão até C e voltam a A? (considere que cada estrada possa ser utilizada nos dois sentidos)

    (c) Quantas das rotas de (b) passam pela cidade B, ao menos uma vez?

    (d) Quantas das rotas de (b) não utilizam uma mesma estrada duas vezes?

21. Um palíndrome é uma cadeia de caracteres que é igual quando lido normalmente ou de trás para frente. Quantas palíndromes de cinco letras são possíveis na língua portuguesa?

22. De quantas maneiras pode-se selecionar duas cartas, sem reposição, de um baralho de 52 cartas, de modo que:

(a) a primeira carta seja um valete e a segunda não seja uma dama?

(b) a primeira carta seja de copas e a segunda não seja um rei?

23. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes do plano cartesiano se dispomos de quatro cores e quadrantes cuja fornteira é uma *linha* não podem receber a mesma cor?

24. Considere a expressão *a aranha arranhou o jarro* para responder o que se segue:

    (a) Qual o número total de seleções não vazias que podem ser feitas a partir das letras de tal expressão?

    (b) A partir dessas mesmas letras, quantas seleções de três letras podem ser feitas?

    (c) Quantas permutações de 3 letras podem ser realizadas?

Permutações, arranjos e combinações simples

25. Quantos são os anagramas da palavra *capítulo*:

    (a) possíveis?

    (b) que começam e terminam por vogal?

    (c) que têm as vogais e as consoantes intercaladas?

    (d) que têm as letras c, a, p juntas nessa ordem?

    (e) que têm as letra c, p, p juntas em qualquer ordem?

    (f) que têm a letra p em primeiro lugar e a letra a em segundo lugar.

    (g) que têm a letra p em primeiro lugar ou a letra a em segundo lugar?

    (h) que têm a letra p em primeiro lugar ou a a em segundo ou c em terceiro?

    (i) nos quais a letra a é uma das letras à esquerda de p e a letra c é uma das letras à direita de p?

26. Quantas são as permutações simples dos números 1, 2, 3, ..., 10, nas quais o elemento que ocupa o lugar de ordem k, da esquerda para a direita, é sempre maior que $k - 3$?

27. Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos da primeiro rodada?

28. Qual o erro da solução abaixo?
"Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens, podem ser formadas?
Solução: Primeiramente vamos escolher 3 homens para a comissão, o que pode ser feito de $\binom{5}{3}$ modos. Agora devemos escolher mais duas pessoas para a comissão, homens ou mulheres, entre as 6 pessoas restantes, o que pode ser feito de $\binom{6}{2}$. A resposta é $10 \cdot 15 = 150$".

29. Determine quantos dados diferentes é possível formar gravando números de 1 a 6 sobre as faces de um cubo supondo

    (a) uma face de cada cor;

    (b) faces iguais;

    (c) faces iguais e que a soma dos pontos de faces opostas deva ser igual a 7.

30. Uma fila de cadeiras no cinema tem 10 poltronas. De quantos modos 3 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado da sua mulher?

31. Numa classe existem 8 alunas das quais uma se chama Maria e 7 alunos, sendo José o nome de um deles. Formam-se comissões constituídas de 5 alunas e 4 alunos. Quantas são as comissões das quais:

    (a) Maria participa?

    (b) Maria participa sem José?

    (c) José participa?

    (d) José participa sem Maria?

    (e) Maria e José participam simultaneamente?

32. Determine os valores de n que tornam a igualdade a seguir verdadeira usando:

$$\binom{n+1}{4} = \binom{n}{3}$$

    (a) a fórmula da combinação;

    (b) a identidade de Vandermonde $\left(\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}; m, n \text{ e } r \in \mathbb{Z}^*\right)$.

33. Depois de ter dado um curso, um professor resolve se despedir de seus 7 alunos oferecendo, durante 7 dias consecutivos, 7 jantares para 3 alunos cada. De quantos modos ele pode fazer os convites se ele não deseja que um mesmo par de alunos compareça a mais de um jantar?

34. Marcam-se 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta R' paralela a R. Quantos triângulos existem com vértices em 3 desses 13 pontos?

35. De quantos modos podemos selecionar p elementos do conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ sem selecionar dois números consecutivos?

36. Considere os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Quantos números distintos, superiores a 100 e inferiores a 1000, pode-se formar se:

    (a) o número é par?

    (b) o número é ímpar?

    (c) o número é par ou ímpar?

37. Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevem-se os números assim formados em de ordem crescente. Determine:

    (a) que lugar ocupa o número 62417.

    (b) que número ocupa o 66° lugar.

    (c) qual é o 166° algarismo escrito.

    (d) à soma dos números assim formados.

38. Este procedimento é usado para desempatar os jogos nos campeonatos da Copa do Mundo de Futebol. Cada time escolhe cinco jogadores em uma ordem prescrita. Cada um desses jogadores chuta um penânlti, com um jogador do primeiro time seguido do jogador do segundo time e assim por diante, seguindo a ordem específica dos jogadores. Se o placar continuar empatado no final da primeira rodada de 10 pênaltis, o procedimento é repetido. Se o placar continuar empatado na segunda rodada, um lance de morte-súbita acontece, sendo que o primeiro time que marcar sem ter um gol de resposta vence sem contestações.

    (a) Quantos placares diferentes são possíveis se o jogo terminar na primeira rodada de 10 pênaltis, sendo que, quando a rodada termina, é impossível para um time igualar o número de gols do outro time?

    (b) Quantos placares diferentes são possíveis para a primeira ea segunda rodada, se o jogo termina na segunda rodada?

    (c) Quantos placares são possíveis para um conjunto completo de rodadas de pênaltis, se o jogo termina com não mais de 10 chutes adicionais depois das duas rodadas de cinco chutes para cada time?

Permutações, arranjos e combinações com repetição

39. De quantas formas diferentes pode-se retirar (sem olhar) 10 bolas de uma caixa que contém pelo menos 10 bolas brancas, pelo menos 10 bolas azuis e pelo menos 10 bolas vermelhas?

40. Quinze pessoas, sendo 5 homens de alturas diferentes e 10 mulheres tambem de alturas diferentes, devem ser dispostas em fila, obedecendo ao criterio: homens em ordem crescente de altura e mulheres em ordem decrescente de altura. De quantos modos diferentes essas 15 pessoas podem ser dispostas na fila?

41. Há quantos modos possíveis de distribuir cinco bolas em sete caixas, se a caixa deve ter no máximo uma bola e se
    (a) ambas, bolas e caixas, são distinguíveis?
    (b) as bolas são distiguíveis, mas as caixas indistiguíveis?
    (c) as bolas são indistiguíveis, mas as caixas distinguíveis?
    (d) ambas, bolas e caixas, são indistiguíveis?

42. Qual o total de placas de carro que podem ser construídas constando de 7 símbolos, sendo os 3 primeiros constituídos por letras e os 4 últimos dígitos?

43. Determine de quantos modos pode-se escolher 3 números no conjunto $\{1, 2, \ldots, 150\}$ de modo que a soma dos números escolhidos seja divisível por 3 se os números escolhidos devem ser:
    (a) não necesssariamente distintos;
    (b) distintos.

44. Suponha que um inspetor de armas deva inspecionar cada um dos cinco lugares diferentes duas vezes, visitando um lugar por dia. O inspetor tem permissão para escolher ordem em que irá visitar esses lugares, mas não pode visitar X, o lugar mais suspeito, em dois dias consecutivos. Há quantas maneiras piossíveis de o inspetor visitar tais lugares?

45. Determine o número de sequências das palavras a seguir com as restrições dadas.
    (a) *AARDVARK* usando-se todas as letras, se todos os três *A*s devem ser consecutivos.
    (b) *ORONO* usando-se até o total das cinco letras.
    (c) *SEERESS* com cinco ou mais caracteres.

(d) *PIRACICABA* que não possuem duas letras A juntas.

46. Uma prateleira tem 12 livros em uma sequência. Há quantas maneiras de escolher cinco livros de maneira que livros adjacentes não sejam escolhidos?

Permutações circulares e equações lineares com coeficientes unitários

47. Uma pulseira deve ser cravejada com um rubi, uma esmeralda, um topázio, uma água-marinha , uma tumalina e uma ametista. De quantos modos isso pode ser feito supondo:

    (a) que a pulseira tem fecho e um relógio engastado no fecho;

    (b) que a pulseira tem fecho;

    (c) que a pulseira não tem fecho e o braço só pode entrar na pulseira em um sentido;

    (d) que a pulseira não tem fecho e o braço pode entrar na pulseira nos dois sentidos.

48. (a) Encontre o número de maneiras de se acomodarem 12 pessoas tais que 7 delas fiquem numa mesa redonda e as 5 restantes em outra mesa redonda.

    (b) Encontre o número de maneiras de se acomodarem 12 pessoas tais que 7 delas fiquem numa mesa redonda e as 5 restantes fiquem num banco.

49. De quantos modos n casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado de sua mulher e que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

50. De quantas maneiras 12 crianças podem ocupar os seis bancos de dois lugares em uma roda gigante se a ordem de duas crianças sentadas em um dado banco:

    (a) for relevante;

    (b) não for relevante.

51. De quantos modos n crianças podem formar uma roda de ciranda de modo que:

    (a) duas dessas crianças permaneçam juntas?

    (b) $p\,(p < n)$ dessas crianças permaneçam juntas?

52. Um grupo constituído por 4 casais se sentará entorno de uma mesa com 8 cadeiras. As pessoas se sentarão de modo alternado pelo sexo e além disso, João e Maria estão brigados e não querem sentar-se lado a lado. Quantas arrumações diferentes poderão ser feitas com essas pessoas sentando-se nos lugares disponíveis?

53. De quantas maneiras pode-se distribuir 30 laranjas para 4 crianças de modo que cada uma receba pelo menos duas laranjas?

54. Determine o número de soluções inteiras não-negativas das equações e inequações a seguir com as restrições dadas.

    (a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$, com $0 \leq x_1 \leq 10$.
    (b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$, com $x_4 \geq 3$
    (c) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$

55. De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em uma loja que os oferece em 7 sabores?

56. Há 10 questões na prova final de matemática discreta. Há quantas maneiras possíveis de distribuir as notas aos problemas se a soma das notas é 100 e cada questão vale pelo menos 5 pontos?

57. Quantas cadeias de bits diferentes podem ser transmitidas se a cadeia deve começar com um bit 1, deve incluir três bits 1 adicionais (para que tenha quatro bits enviados), deve incluir um total de 12 bits 0 e deve ter pelo menos dois bits 0 depois de cada bit 1?

Triângulo de Pascal e teorema binomial

58. Dê a fórmula para o coeficiente de x^k, em que k é um número inteiro, nos desenvolvimentos a seguir.

    (a) $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{100}$
    (b) $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{100}$

59. Determine:

    (a) o coeficiente de $ab^4c^2d^5$ no desenvolvimento $(a + b + c + d)^{12}$;
    (b) o coeficiente de $a^3b^4c^2d^3$ no desenvolvimento de $(3a - b + c - 4d)^{12}$;
    (c) a quantidade de termos distintos existentes no desenvolvimento de $(a + b + c + d)^{12}$;

(d) o termo independente de x no desenvolvimento de $(x^3 - x^{-2})^{10}$;

(e) o termo máximo do desenvolvimento de $(1 + 3^{-1})^{50}$

(f) o termo máximo do desenvolvimento de $(1 + 2^{-1})^{120}$;

(g) o coeficiente de $x^{101}y^{99}$ no desenvolvimento de $(2x - 3y)^{100}$;

(h) o coeficiente de x^n no desenvolvimento de $(1 - x)^2(x + 2)^n$;

(i) o último termo do desenvolvimento de $(ab + 3x)^6$;

(j) o quarto termo no desenvolvimento de $(3x - 1/2)^8$.

60. Prove as identidades a seguir por argumentos combinatórios, isto é, sem fazer cálculos explícitos, mostre que ambos os membros das igualdades "contam"o mesmo número de possibilidades de um dado evento.

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, n \geq k \geq 1$

(b) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ para $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $n \geq k \geq 1$;

(c) $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$ para $n, k, m \in \mathbb{N}$ tais que $n \geq k \geq m \geq 1$;

61. Utilize o teorema binomial para expressar as somas a seguir de maneira mais concisa.

(a) $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 3^2\binom{n}{2} + \cdots + 3^n\binom{n}{n}$

(b) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$

(c) $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + \cdots + (2n + 1)\binom{n}{n}$

(d) $1 \cdot 2\binom{n}{2} + 2 \cdot 3\binom{n}{3} + 3 \cdot 4\binom{n}{4} + \cdots + (n - 1) \cdot n\binom{n}{n}$

62. Utilize o teorema binomial para determinar o valor da soma dos quadrados nos n primeiros números ímpares positivos.

63. Demonstre o binômio de newton usando a indução matemática.

64. Demonstre a validade das igualdades a seguir utilizando ferramentas do cálculo e o teorema binomial (***Dica:*** Integre a expansão de $(1 + x)^n$).

(a) $\dfrac{2^{n+1} - 1}{n + 1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i + 1}\binom{n}{i}$

(b) $\dfrac{1}{n + 1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i + 1}\binom{n}{i}$

Respostas, soluções e sugestões

4. $P_n = \dfrac{n+1}{2n}$

5. Solução de apoio

8. Considere demonstrar a proposição P_n : *Todo tabuleiro* $2^n \times 2^n \times 2^n$ *com um cubo* $1 \times 1 \times 1$ *removido pode ser preeenchido por um tijolo; isto é, um cubo* $2 \times 2 \times 2$ *que teve um cubo* $1 \times 1 \times 1$ *removido.*

9. Considere $P_n : \sqrt{2} \neq \dfrac{n}{b}, \forall b \in \mathbb{Z}^+$

11. Ilustração do teorema

12. Dica: Use o fato de que para todo número real x existe um inteiro n tal que $n > x$ (propriedade Arquimediana) para encontrar um número inteiro positivo A, com $A > \dfrac{1}{y-x}$. Então, mostre que existe um número racional r com denominador A entre x e y, procurando os números $\lfloor x \rfloor + \dfrac{j}{A}$, em que j é um número inteiro positivo.

15. 30

16. 16

17. 192

18. 50.000

19. (a) 648
    (b) 328
    (c) 120
    (d) 138

20. Solução de problema análogo

    (a) 17
    (b) 289
    (c) 289 - 4 = 285
    (d) 182

21. $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 1 \cdot 1 = 17.576$

22. (a) 188

(b) 612

23. 84

24. (a) 6911

    (b) 68

    (c) 303

25. (a) $8! = 40.320$

    (b) 8640

    (c) 1152

    (d) $6! = 720$

    (e) $3! \cdot 6! = 4320$

    (f) $6! = 720$

    (g) $7! \cdot 7! \cdot 6! = 9360$

    (h) 13.080

    (i) 6720

26. $3^8 \cdot 2 \cdot 1 = 13.122$

27. 10.395

29. (a) $6! = 720$

    (b) $\dfrac{720}{24} = 30$

    (c) $\dfrac{48}{24} = 2$

30. $2^3 \cdot \binom{7}{4} \cdot 3! = 1680$

31. (a) 1225

    (b) 525

    (c) 1120

    (d) 420

    (e) 700

32. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

33. $7! \cdot 30 = 151.200$

34. 220

35. $\binom{n-p+1}{p}$

36. (a) $2A_4^2 = 24$
    (b) $3A_4^2 = 36$
    (c) 60
37. (a) 81° lugar
    (b) 46.721
    (c) 2
    (d) 5.333.280
38. (a) 264
    (b) 200.640
    (c) 5.776.000
39. 66
40. 3003
41. (a) $A_7^5 = 2520$
    (b) 1
    (c) 21
    (d) 1
42. 175.760.000
43. (a) 191.300
    (b) 183.800
44. 90.720
45. (a) 360
    (b) 63
    (c) 370
    (d) 70.560
46. 56 maneiras
47. (a) 720
    (b) 360
    (c) 120
    (d) 60
48. (a) $\binom{12}{7} \cdot (7-1)! \cdot (5-1)! = 13.685.760$

(b) $\binom{12}{7} \cdot (7-1)! \cdot 5! = 68.428.800$

49. $2 \cdot (n-1)!$

50. (a) $\dfrac{12!}{6}$

    (b)

51. (a) $2 \cdot (n-2)!$

    (b) $p! \cdot (n-p)!$

52. 72

53. $C_{25}^{3} = 2300$

54. (a) 11.649

    (b) 1001

    (c) 364

55. $C_{10}^{4} = 210$

56. C_{59}^{50}

57. 35

58. (a) $\binom{100}{\frac{100-k}{2}}$

    (b) $(-1)^{\frac{200-k}{3}} \binom{100}{\frac{200-k}{3}}$

59. (a) 83.160

    (b) -479.001.600

    (c) 455 termos

    (d) 210

    (e) 13° termo $= \dfrac{\binom{50}{12}}{3^{12}}$

    (f) 41° termo $= \dfrac{\binom{120}{40}}{2^{40}}$

    (g) $200 \cdot (-3)^{99}$

    (h) $\dfrac{n^2 - 5n + 2}{2}$

    (i) $729x^6$

    (j) $-1701x^5$

61. (a) 4^n

(b) $n2^{n-1}$

(c) $(n+1)2^n$

(d) $n(n-1)2^{n-2}$

62. $\dfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$