UnB GAMA

Matemática Discreta 1

Análise Combinatória Exercícios -Teorema do Binômio

AULA 13a

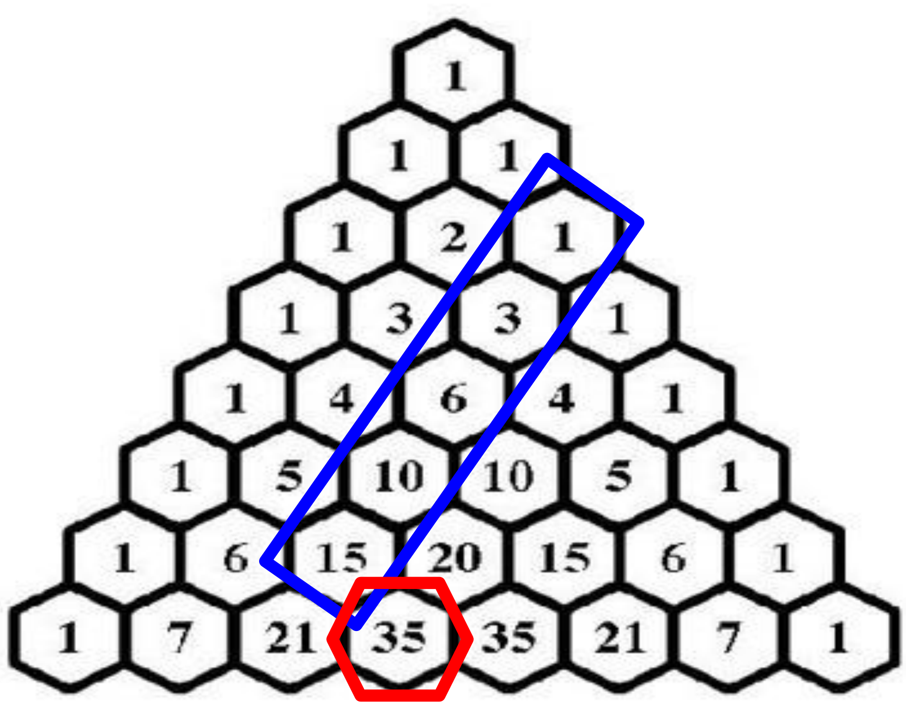
Professor: Luiz Augusto Laranjeira

luiz.laranjeira@gmail.com

Exercício 1

Prove que, no Triângulo de Pascal, a soma dos elementos da coluna *p*, da indo 1ª linha da coluna (linha *p*) até a linha *n*, com *p* < *n*, é igual ao elemento da linha *n*+1 e coluna *p*+1.
(*Dica*: use a fórmula de Pascal.)

1+3+6+10+15 = 35



Fórmula de Pascal:

$C(n,k) = C(n-1, k) + C(n-1, k-1)$

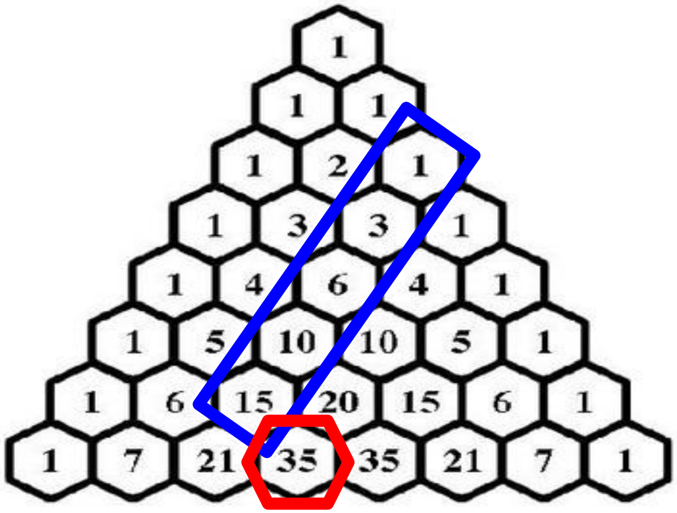
Exercício 1

Prove que, no Triângulo de Pascal, a soma dos elementos da coluna *p*, indo da 1ª linha da coluna (linha *p*) até a linha *n*, com *p* < *n*, é igual ao elemento da linha *n*+1 e coluna *p*+1.

Use a fórmula de Pascal: $C(n,k) = C(n-1, k) + C(n-1, k-1)$

No exemplo ao lado temos $p=2$ e $n=7$:

C(7,3) = C(2,2) + C(3,2) + C(4,2) + C(5,2) + C(6,2)



Generalizando, queremos provar que:

$$C_{p+1}^{n+1} = C_p^p + C_p^{p+1} + C_p^{p+2} + C_p^{p+3} + \cdots + C_p^n$$

Ou, fazendo $n=p+k$, queremos provar que (Exemplo 3.17, Livro do Plínio):

$$C_{p+1}^{p+k+1} = C_p^p + C_p^{p+1} + C_p^{p+2} + C_p^{p+3} + \cdots + C_p^{p+k-1} + C_p^{p+k} \quad \text{(I)}$$

Exercício 1 – Solução 1

Queremos provar a identidade abaixo (Ex 3.17 – Livro do Plínio):

$$C_{p+1}^{p+k+1} = C_p^p + C_p^{p+1} + C_p^{p+2} + C_p^{p+3} + \cdots + C_p^{p+k-1} + C_p^{p+k} \quad \text{(I)}$$

Usando a fórmula de Pascal e trabalhando sobre a direita da identidade:

$$C_{p+1}^{p+1} = \overset{0}{C_{p+1}^{p}} + C_p^p \rightarrow C_p^p = C_{p+1}^{p+1}$$

$$C_{p+1}^{p+2} = C_{p+1}^{p+1} + C_p^{p+1} \rightarrow C_p^{p+1} = C_{p+1}^{p+2} - C_{p+1}^{p+1}$$

$$C_{p+1}^{p+3} = C_{p+1}^{p+2} + C_p^{p+2} \rightarrow C_p^{p+2} = C_{p+1}^{p+3} - C_{p+1}^{p+2}$$

$$C_{p+1}^{p+4} = C_{p+1}^{p+3} + C_p^{p+3} \rightarrow C_p^{p+3} = C_{p+1}^{p+4} - C_{p+1}^{p+3}$$

...

$$C_{p+1}^{p+k} = C_{p+1}^{p+k-1} + C_p^{p+k-1} \rightarrow C_p^{p+k-1} = C_{p+1}^{p+k} - C_{p+1}^{p+k-1}$$

$$C_{p+1}^{p+n+1} = C_{p+1}^{p+n} + C_p^{p+n} \rightarrow C_p^{p+k} = C_{p+1}^{p+k+1} - C_{p+1}^{p+k}$$

Somando-se as expressõess em azul e cancelando-se os termos com sinais opostos obtemos a identidade (I) desejada:

$$\boldsymbol{C_{p+1}^{p+k+1} = C_p^p + C_p^{p+1} + C_p^{p+2} + C_p^{p+3} + \cdots + C_p^{p+k-1} + C_p^{p+k}} \qquad \mathcal{CQD}$$

Exercício 1 – Solução 2

Queremos provar a identidade abaixo (Ex 3.17 – Livro do Plínio):

$$C_{p+1}^{p+k+1} = C_p^p + C_p^{p+1} + C_p^{p+2} + C_p^{p+3} + \cdots + C_p^{p+k-1} + C_p^{p+k} \qquad \text{(I)}$$

Trabalhando sobre a porção esquerda da identidade e usando a fórmula de Pascal repetidamente temos:

$$C_{p+1}^{p+k+1} = C_p^{p+k} + C_{p+1}^{p+k} \;\rightarrow\; C_{p+1}^{p+k} = C_p^{p+k-1} + C_{p+1}^{p+k} \;\overset{\rightarrow}{\ldots}\; C_{p+1}^{p+4} = C_p^{p+3} + C_{p+1}^{p+3}$$

$$C_{p+1}^{p+3} = C_p^{p+2} + C_{p+1}^{p+2} \;\rightarrow\; C_{p+1}^{p+2} = C_p^{p+1} + C_{p+1}^{p+1} \;\rightarrow\; C_{p+1}^{p+1} = C_p^{p} + \cancelto{0}{C_{p+1}^{p}}$$

Somando-se as igualdades e cancelando-se os termos iguais em ambos os lados obtemos a identidade (I) desejada:

$$C_{p+1}^{p+k+1} = C_p^p + C_p^{p+1} + C_p^{p+2} + C_p^{p+3} + \cdots + C_p^{p+k-1} + C_p^{p+k} \qquad \mathcal{CQD}$$

Exercício 2

Calcular a soma:

$$S = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$$

Exercício 2

Calcular a soma: $S = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$

$$S = 1.2.3 + 2.3.4 + 4.5.6 + \cdots + \mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)$$

$$\frac{S}{3!} = \frac{1.2.3}{3!} + \frac{2.3.4}{3!} + \frac{3.4.5}{3!} + \frac{4.5.6}{3!} + \cdots + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

$$\frac{S}{3!} = C_3^3 + C_3^4 + C_3^5 + C_3^6 + \cdots + C_3^n + C_3^{n+1} + C_3^{n+2}$$

Usando o resultado do Exercício 1: $\boxed{C_{p+1}^{p+k+1} = C_p^p + C_p^{p+1} + C_p^{p+2} + C_p^{p+3} + \cdots + C_p^{p+k-1} + C_p^{p+k}}$

$$\frac{S}{3!} = C_3^3 + C_3^4 + C_3^5 + C_3^6 + \cdots + C_3^n + C_3^{n+1} + C_3^{n+2} = C_4^{n+3}$$

$$\frac{S}{3!} = C_4^{n+3} = \frac{(n+3)!}{(n-1)!\,4!} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!} \rightarrow \boldsymbol{S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$$

Exercício 3

Calcular *m* sabendo que:

$$C_1^m + C_2^m + C_3^m + C_4^m + \cdots + C_{m-1}^m = 254$$

Exercício 3

Calcular *m* sabendo que:

$$C_1^m + C_2^m + C_3^m + C_4^m + \cdots + C_{m-1}^m = 254$$

Observando a expressão notamos que, para formar uma linha do Triângulo de Pascal, faltam os termos $C_0^m = 1$ e $C_m^m = 1$ no lado esquerdo da equação.

Acrescentando-se estes termos teremos:

$$C_0^m + C_1^m + C_2^m + C_3^m + C_4^m + \cdots + C_{m-1}^m + C_m^m = 254 + 1 + 1 = 256$$

Daí concluímos que: (soma dos termos de uma linha do Triângulo de Pascal)

$$C_0^m + C_1^m + C_2^m + C_3^m + C_4^m + \cdots + C_{m-1}^m + C_m^m = 2^m = 256$$

Portanto:

$$\boldsymbol{m = 8}$$

Exercício 4

Explicar porque não existe o termo independente de *x* no desenvolvimento de:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n+1}$$

Exercício 4

Explicar porque não existe o termo independente de *x* no desenvolvimento de:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$$

Primeiramente, fazendo $2n+1=m$ o binômio se torna: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n+1}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{m}$

Para que haja um termo independente de x é necessário que os expoentes de x e de $\frac{1}{x}$ no desenvolvimento deste binômio sejam idênticos.

O termo independente seria igual a: $C_{m-k}^{m}(x)^k\left(\frac{1}{x}\right)^{m-k}$ com $m-k=k$, isto é, $m=2k$.

Isto implicaria que m teria que ser par, o que não pode ser, pois m é ímpar ($m=2n+1$).