Matemática Discreta 1

Princípio da Indução Matemática

AULA 10

Professor: Luiz Augusto Laranjeira

luiz.laranjeira@gmail.com

5- Indução

Motivação

Imagine que Jorge está subindo uma escada infinitamente alta. Como poderá saber se conseguirá alcançar um degrau arbitrariamente alto?

Façamos as seguintes premissas:

1) Jorge pode subir no 1º degrau.
2) Uma vez que Jorge esteja em um degrau qualquer ele sempre consegue subir para o degrau seguinte.

Se estas duas premissas são verdadeiras pode-se demonstrar que Jorge conseguirá alcançar qualquer degrau da escada.

5- Indução

Seja P(n) uma propriedade sobre os valores de n pertencentes a um domínio D, onde $D \subseteq \mathbb{N}$.

Para se provar que P(n) é válido para qualquer n pertencente a D precisamos demonstrar que:

1) $P(n_1) \equiv V$ (n_1 tem a propriedade P, onde n_1 é o primeiro elemento de D)

2) $\forall n_k \in D, P(n_k) \rightarrow P(n_{k+1})$
Se um número (elemento) do domínio D tem a propriedade P, também a terá o próximo número (elemento) deste domínio

Indução
(Enunciado Alternativo)

1) P(1) ≡ V (1 tem a propriedade P, onde 1 é o primeiro número de D)

2) $\forall$ k $\in$ D, P(k) $\rightarrow$ P(k+1)
Se um número (elemento) do domínio D tem a propriedade P, também a terá o próximo número (elemento)

Indução Forte ou Completa

Princípio da Indução Matemática (PIM)

Se 1) $P(1) \equiv V$ ($P(1)$ é verdadeira)

2) $(\forall k, k \geq 1)\ [\ P(k) \equiv V \ \Rightarrow\ P(k+1) \equiv V\ ]$

Então 3) $P(n) \equiv V$ para $\forall n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ (isto é, $D = \mathbb{N}$)

Princípio da Indução Forte (PIF)

Se 1) $P(1) \equiv V$ ($P(1)$ é verdadeira)

2) $(\forall k, k \geq 1)\ [\ P(r) \equiv V$ (para $\forall r, 1 \leq r \leq k$) $\Rightarrow P(k+1) \equiv V\ ]$

Então 3) $P(n) \equiv V$ para $\forall n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ (isto é, $D = \mathbb{N}$)

PIM => PIF => PBO(*) => PIM

Estes princípios são, portanto equivalentes!

(*) Princípio da Boa Ordenação (PBO): toda coleção de números inteiros positivos que contenha pelo menos um elemento tem um mínimo.

Princípio da Boa Ordenação

Teorema: $D \subset \mathbb{N}$ satisfaz o PBO se todo $A \subset D \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$, tem um **menor elemento**, ou seja, $\exists\, a \in A$ tal que $\forall x, x \in A, x \geq a$.

Demonstração:

Se $1 \in A$ então 1 é o menor elemento de A, pois $1 \leq n$ para $\forall n, n \in \mathbb{N}$ **cqd**

Para $1 \notin A$, definamos o conjunto $X = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall k, k \in A, k > x\}$, $1 \in X$.

Se fosse verdade que $\forall x \in X \Rightarrow (x+1) \in X$ (por indução), teríamos $X = \mathbb{N}$ e $A = \emptyset$. Mas isto não é verdade pois, por definição, $\forall k \in A$, temos $k \notin X$, e $A \neq \emptyset$. Logo, existe (pelo menos um) $m \in X$ tal que $(m+1) \notin X$. Daí:

$$(m+1) \notin X \Rightarrow (m+1) \in A \qquad (1)$$
$$m \in X \Rightarrow \forall x, x \in A, x > m \qquad (2)$$
$$k \in A \Rightarrow k > m \qquad (3)$$

Finalmente, de (1) e (3) vem que $k \in A \Rightarrow k > m \Rightarrow k \geq (m+1)$
Fazendo $a = (m+1)$ temos que para $x \in A \Rightarrow x > m, x \geq a$ **cqd**

Demonstração PIM => PIF

Isto é óbvio, pois a hipótese do PIM é mais fraca do que a hipótese do PIF ou, em outras palavras, a hipótese do PIF inclui a hipótese do PIM (e ainda tem condiçoes adicionais).

Demonstração PIF => PBO

Proposição: seja um conjunto A, $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$, que satisfaz o Princípio da Indução Forte, então A satisfaz o Princípio da Boa Ordenação. Em outras palavras A tem um **mínimo.**

Demonstração:

Vamos supor que A não tenha um mínimo ($1 \notin A$, senão ele seria o mínimo). Seja $\bar{A} = \mathbb{N} - A$. Aplicando a hipótese 1 do PIF sobre $\bar{A}$ temos que $1 \in \bar{A}$.

Supomos que $[1, x] \subseteq \bar{A}$. Então $\forall z \in A$, $z > x$ e, portanto, $z \geq x+1$. Daí, como $x+1 \in A$, teríamos que $x+1$ é o mínimo de A, o que é absurdo pois supusemos que A não tinha um mínimo. Portanto é necessário que $x+1 \in \bar{A}$.

Daí, aplicando a hipótese 2 do PIF a $\bar{A}$ concluiríamos que $\bar{A} = \mathbb{N}$ e que $A = \varnothing$, o que é uma contradição, já que $A \neq \varnothing$. Então, A tem que ter um mínimo. **cqd**

Demonstração PBO => PIM

Proposição: seja um conjunto $D \subset \mathbb{N}$, $D \neq \emptyset$, que satisfaz o Princípio da Boa Ordenação, então D satisfaz o Princípio da Indução Matemática, isto é: Se $1 \in D$ ($1 = \min D$) e $\forall x \in \mathbb{N}$, $x \in D \Rightarrow x+1 \in D$, então $D = \mathbb{N}$.

Demonstração **(por contradição):**

Seja $T \subseteq D$ tal que: (1) $1 \in T$ ($1 = \min T$);
(2) para $\forall x \in D$, $x \in T$
(3) para $\forall x \in D$, $x \in T \Rightarrow x+1 \in T$.

Suponhamos porém que $T \neq D$ (T não satisfaz o PIM), isto é, $\exists$ o conjunto $\overline{T} = D - T$, $\overline{T} \neq \emptyset$. Como $\overline{T} \subseteq D$, pelo PBO existe $m \in \overline{T}$, tal que $m = \min$ de $\overline{T}$.

É claro que $m \neq 1$, pois $1 \in T$. Dado que $m > 1$, então $m \geq 2$ e $m-1 \geq 1$. Como $m-1 < m$, $m-1 \notin \overline{T}$. Logo, $m-1 \in T$.

Pela proposição (3) temos que $(m-1)+1 \in T$, ou seja, $m \in T$. Chegamos a uma contradição pois, por hipótese, $m \in \overline{T}$ (isto é $m \notin T$). Logo, $\overline{T} = \emptyset$ e T satisfaz o PIM. Daí temos que $T = D = \mathbb{N}$. **cqd**

PBO => PIM	Verdadeiro
PBO	Verdadeiro
Então PIM	Verdadeiro

Demonstrações por Indução

O que se quer demonstrar é $P(n) \equiv V$, onde $n \in D \subset \mathbb{N}$

1) Mostrar que $P(1) \equiv V$ **(base)**

2) Assumir que $P(k) \equiv V$ **(hipótese indutiva)**

3) Provar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$ **(passo indutivo)**

Então, $P(k) \equiv V$ para $\forall k \in D$, $D = \mathbb{N}$

Exemplo 1

Prove que, dado um conjunto S com n elementos, o conjunto das partes de S, $\mathscr{P}(S)$, terá 2^n elementos.

Exemplo de conjunto $\mathscr{P}(S)$, o conjunto das partes do conjunto S:

$S = \{1, 2, 3\}$ $\quad\quad$ $\mathscr{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$\mathfrak{N}_{\mathfrak{p}}(\mathscr{P}(S)) = 2^n$ $\quad\quad$ para $n = 3$, $\mathfrak{N}_{\mathfrak{p}}(\mathscr{P}(S)) = 2^3 = 8$

$\mathscr{P}(S)$, o conjunto das partes do conjunto S (S tem n elementos)

$\mathfrak{N}_{\mathfrak{p}}(\mathscr{P}(S)) = 2^n$ = número de elementos do conjunto $\mathscr{P}(S)$

Exemplo 1 (cont.)

Prove que, dado um conjunto *S* com n elementos, o conjunto das partes de *S*, $\mathscr{P}(S)$, terá $\mathfrak{N}_p = 2^n$ elementos.

(1) Para n = 0 ($S = \emptyset$), $\mathfrak{N}_p = 2^0 = 1$ $\mathscr{P}(S) = \{\emptyset\}$
Para n = 1, $\mathfrak{N}_p = 2^1 = 2$ $\mathscr{P}(S) = \{\emptyset, \{e_1\}\}$

2) Assumimos que para n = k, $\mathfrak{N}_p = 2^k$

3) Precisamos provar que para n = k+1, $\mathfrak{N}_p = 2^{k+1}$

UnB GAMA

Exemplo 1 (cont.)

(1) Para n = 0 ($S = \varnothing$), $\mathfrak{N}_{\mathfrak{p}} = 2^0 = 1$ $\mathscr{P}(S) = \{\varnothing\}$

Para n = 1, $\mathfrak{N}_{\mathfrak{p}} = 2^1 = 2$ $\mathscr{P}(S) = \{\varnothing, \{e_1\}\}$

2) Assumimos que, para n = k, $\mathfrak{N}_{\mathfrak{p}} = 2^k$

3) Precisamos provar que, para n = k+1, $\mathfrak{N}_{\mathfrak{p}} = 2^{k+1}$

O Triângulo de Pascal nos dá: $2^n = 1 + C_{n,1} + C_{n,2} + \ldots + C_{n,n-1} + C_{n,n}$

De (2) vem: $\mathfrak{N}_{\mathfrak{p}}(k) = 2^k$ (n = k)

$\mathfrak{N}_{\mathfrak{p}}(k) = 2^k = 1 + C_{k,1} + C_{k,2} + \ldots + C_{k,k-1} + C_{k,k}$

$\mathfrak{N}_{\mathfrak{p}}(k+1)$ (n = k+1)

$\mathfrak{N}_{\mathfrak{p}}(k+1) = 1 + C_{k+1,1} + C_{k+1,2} + \ldots + C_{k+1,k-1} + C_{k+1,k} + C_{k+1,k+1}$

Exemplo 1 (cont.)

O Triângulo de Pascal nos dá: $2^k = 1 + C_{k,1} + C_{k,2} + \ldots + C_{k,k-1} + C_{k,k}$

$\mathcal{P}(k) = 2^k = 1 + C_{k,1} + C_{k,2} + \ldots + C_{k,k-1} + C_{k,k}$

$\mathcal{P}(k+1) \qquad (n = k+1)$

$\mathcal{P}(k+1) = 1 + C_{k+1,1} + C_{k+1,2} + \ldots + C_{k+1,k-1} + C_{k+1,k} + C_{k+1,k+1}$

Usando a fórmula de Pascal: $C_{k+1,m} = C_{k,m} + C_{k,m-1}$

$\mathcal{P}(k+1) = 1 + C_{k,1} + 1 + C_{k,2} + C_{k,1} + \ldots + C_{k,k-1} + C_{k,k-2} + C_{k,k} + C_{k,k-1} + C_{k+1,k+1}$

E como $C_{k,k} = C_{k+1,k+1} = 1$, para $\forall k \in \mathbb{N}$, vem:

$\mathcal{P} = 1 + C_{k,1} + 1 + C_{k,2} + C_{k,1} + \ldots + C_{k,k-1} + C_{k,k-2} + C_{k,k} + C_{k,k-1} + C_{k,k}$

$\mathcal{P} = 2^k + 2^k = 2.2^k = 2^{k+1}$ **cqd**

Exemplo 1 (cont.)

$\mathfrak{N}_p\,(k+1) = 1 + C_{k+1,1} + C_{k+1,2} + \ \ldots + C_{k+1,k-1} + C_{k+1,k} + C_{k+1,k+1}$

Usando a fórmula de Pascal: $C_{k+1,m} = C_{k,m} + C_{k,m-1}$

$\mathfrak{N}_p\,(k+1) = 1 + C_{k,1} + 1 + C_{k,2} + C_{k,1} + \ldots + C_{k,k-1} + C_{k,k-2} + C_{k,k} + C_{k,k-1} + C_{k+1,k+1}$

$C_{k+1,1} = C_{k,1} + C_{k,1-1} = C_{k,1} + C_{k,0} = C_{k,1} + 1$

E como $C_{k,k} = C_{k+1,k+1} = 1$, para $\forall k \in \mathbb{N}$, vem:

$\mathfrak{N}_p = 1 + C_{k,1} + 1 + C_{k,2} + C_{k,1} + \ldots + C_{k,k-1} + C_{k,k-2} + C_{k,k} + C_{k,k-1} + C_{k,k}$

$\mathfrak{N}_p = 2^k + 2^k = 2.2^k = 2^{k+1}$ **cqd**

Exemplo 2

Provar que $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1, \quad n \geq 1$

Exemplo 2

Provar que $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \quad n \geq 1$

1) $1 + 2 = 2^{1+1} - 1$
   $3 = 2^2 - 1 = 4 - 1$
   $3 = 3$

2) Assumimos que $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1 \quad (n = k)$

3) Precisamos provar que

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k+1} = 2^{k+1+1} - 1 \qquad (n = k+1)$$

ou seja

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$$

Exemplo 2 (cont.)

Dado que $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^k = 2^{k+1} – 1$ (hipótese indutiva)

Provar que $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k+1} = 2^{k+2} – 1$ (passo indutivo)

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k+1} &= 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^k + 2^{k+1} \\
&= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \quad \text{(pela hipótese indutiva)} \\
&= 2(2^{k+1}) - 1 \\
&= 2^{k+1+1} - 1 \\
&= 2^{k+2} - 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

Provar que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1) / 2, \quad n \geq 1$

Exemplo 3

Provar que $1 + 2 + 3 + ... + n = n(n+1) / 2, \quad n \geq 1$

1) $1 = 1(1+1) / 2$
   $1 = 1.2 / 2 = 2 / 2 = 1$
   $1 = 1$

2) Assumimos que $1 + 2 + 3 + ... + k = k(k+1) / 2 = (k^2 + k) / 2$

3) Precisamos provar que

$$1 + 2 + 3 + ... + (k+1) = (k+1)(k+2) / 2 = (k^2 + 3k + 2) / 2$$

Exemplo 3 (cont.)

Dado que $1 + 2 + 3 + \ldots + k = (k^2 + k) / 2$ (hipótese indutiva)

Provar que $1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) = (k^2 + 3k + 2) / 2$ (passo indutivo)

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) &= 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) \\
&= (k^2 + k) / 2 + (k+1) \qquad \text{(pela hipótese indutiva)} \\
&= (k^2 + k) / 2 + (2k + 2) / 2 \\
&= (k^2 + 3k + 2) / 2 \\
&= (k+1)(k+2) / 2
\end{aligned}
$$

Exemplo 4

Provar que $2^{3n} - 1$ é divisível por 7, $n \geq 1$

Exemplo 4

Provar que $2^{3n} - 1$ é divisível por 7, $n \geq 1$

1) $2^{3.1} - 1 = 8 - 1 = 7$ $(n = 1)$ (base)

2) Assumimos que $2^{3k} - 1$ é divisivel por 7 $(n = k)$ (hip. Indutiva)
   Isto é: $2^{3k} - 1 = 7m$

3) Precisamos provar que $2^{3(k+1)} - 1$ é divisível por 7   (passo indutivo)
   Isto é: $2^{3(k+1)} - 1 = 7t$

Exemplo 4 (cont.)

Dado que $2^{3k} - 1 = 7m$ (hipótese indutiva)

Provar que $2^{3(k+1)} - 1 = 7t$ (passo indutivo)

$$
\begin{aligned}
2^{3(k+1)} - 1 &= 8.2^{3k} - 1 \\
&= 8(7m + 1) - 1 \quad \text{(pela hipótese indutiva)} \\
&= 8(7m) + 8 - 1 \\
&= 7(8m) + 7 \\
&= 7(8m + 1) \\
&= 7t
\end{aligned}
$$

Exemplo 5

Provar que $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$, $x \neq 1$

Exemplo 5

Provar que $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$, $x \neq 1$

1) $x^1 - 1 = x - 1$ que é divisível por $x - 1$ $(n = 1)$ (base)

2) Assumimos que $x^k - 1$ é divisivel por $x - 1$ $(n = k)$
   Isto é: $x^k - 1 = (x - 1)m$

3) Precisamos provar que $x^{k+1} - 1$ é divisível por $x - 1$
   Isto é: $x^{k+1} - 1 = (x - 1)t$

Exemplo 5 (cont.)

Dado que $x^k - 1 = (x - 1)m$ (hipótese indutiva)

Provar que $x^{k+1} - 1 = (x - 1)t$ (passo indutivo)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} - 1 &= x.x^k - 1 \\
&= x.x^k - 1 - x + x \\
&= x.x^k - x + x - 1 \\
&= x(x^k - 1) + (x - 1) \\
&= x.(x - 1)m + (x - 1) \quad \text{(pela hipótese indutiva)} \\
&= (x - 1)[xm + 1] \\
&= (x - 1)t
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 (cont.)

Dado que $x^k - 1 = (x - 1)m$ (hipótese indutiva)

Provar que $x^{k+1} - 1 = (x - 1)t$ (passo indutivo)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} - 1 &= x.x^k - 1 \\
&= x.[(x - 1)m + 1] - 1 \\
&= x(x - 1)m + (x - 1) \\
&= (x - 1)\,[\,xm + 1] \\
&= (x - 1)t
\end{aligned}
$$

$x^k = (x - 1)m + 1$ (Hip Ind)

Exemplo 6

Provar por indução que $n^2 > 3n, \quad n \geq 4$

Exemplo 6

Provar por indução que $n^2 > 3n$, $n \geq 4$

1) Para n=4 temos: $4^2 > 3.4$ ou $16 > 12$ (base)
2) Assumimos que $k^2 > 3k \rightarrow 3k < k^2$ (hipótese indutiva)
3) Precisamos provar que $(k+1)^2 > 3(k+1)$ (passo indutivo)

$$
\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\
&> 3k + 2k + 1 && \text{(pela hipótese indutiva)} \\
&> 3k + 8 + 1 && \text{(dado que } k > 4) \\
&> 3k + 9 \\
&> 3k + 3 \\
&> 3(k+1)
\end{aligned}
$$

Exercício 1:

Provar que $(1 + x)^n > 1 + x^n \quad n > 1, \quad x \neq 0$

Exercício 1:

Provar que:

$(1 + x)^n > 1 + x^n \qquad n, x \in \mathbb{N}, \quad n > 1, \quad x \neq 0$

1) $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + x^2$ (n = 2)

2) $(1 + x)^k > 1 + x^k$ (n = k)

3) Precisamos provar que $(1 + x)^{k+1} > 1 + x^{k+1}$ (n = k+1)

Exercício 1 (cont.)

Dado que $(1 + x)^k > 1 + x^k$ (hipótese indutiva)

Provar que $(1 + x)^{k+1} > 1 + x^{k+1}$ (passo indutivo)

$$
\begin{aligned}
(1 + x)^{k+1} &= (1 + x)(1 + x)^k \\
(1 + x)^{k+1} &> (1 + x)(1 + x^k) \qquad \text{(pela hipótese indutiva)} \\
&> (1 + x^k) + x(1 + x^k) \\
&> 1 + x^k + x + x^{k+1} \\
&> 1 + x^{k+1} + x^k + x \\
&> 1 + x^{k+1}
\end{aligned}
$$

Atenção!!!

Na tentativa de provar por indução se provarmos que P(k+1) é verdadeiro sem utilizar o fato de que P(k) é verdadeiro teremos feito uma **prova direta** de P(k+1), onde k+1 é arbitrário.

Exercício 2

Provar por indução o teorema de DeMoivre:

$$(\cos\theta + i \,\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\, n\theta, \quad n \geq 1,\ i^2 = -1$$

Dica! Lembrar das fórmulas trigonométricas de adição:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\beta$$
$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha\, \text{sen}\,\beta$$

Exercício 3

Provar que $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$, $n \geq 1$, $i^2 = -1$

Para n=1, $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^1 = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

Para n=k, $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^k = \cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta$

Para n = k+1 $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^{k+1} = \cos(k+1)\theta + i \operatorname{sen}(k+1)\theta$

Usando as fórmulas trigonométricas de adição, temos:

$$\cos(k+1)\theta = \cos(k\theta + \theta) = \cos k\theta \cos\theta - \operatorname{sen} k\theta \operatorname{sen}\theta$$
$$\operatorname{sen}(k+1)\theta = \operatorname{sen}(k\theta + \theta) = \operatorname{sen} k\theta \cos\theta + \cos k\theta \operatorname{sen}\theta$$

Exercício 2

Provar que $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$

Dado que $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^k = \cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta$

Provar que $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^{k+1} = \cos (k+1)\theta + i \operatorname{sen} (k+1)\theta$

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^k \\
&= (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)(\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta) \\
&= \cos k\theta \cos\theta + i \operatorname{sen} k\theta \cos\theta + i^2 \operatorname{sen} k\theta \operatorname{sen}\theta + i \cos k\theta \operatorname{sen}\theta \\
&= \cos k\theta \cos\theta + i \operatorname{sen} k\theta \cos\theta - \operatorname{sen} k\theta \operatorname{sen}\theta + i \cos k\theta \operatorname{sen}\theta \\
&= (\cos k\theta \cos\theta - \operatorname{sen} k\theta \operatorname{sen}\theta) + i (\operatorname{sen} k\theta \cos\theta + \cos k\theta \operatorname{sen}\theta) \\
&= \cos (k\theta + \theta) + i \operatorname{sen} (k\theta + \theta) \\
&= \cos (k+1)\theta + i \operatorname{sen} (k+1)\theta
\end{aligned}
$$