

**2ª PROVA**

**Matemática Discreta 1 – Turma A – 1o  Semestre 2020**

**07/10/2020**

**1 – (2 pontos)** Prove por indução que, para *n* ≥ 1, 6*n* – 1 é divisível por 5.

**Afirmação: P(n):**

**Base**:

Para n = 1, temos a seguinte situação: e , então a afirmação é verdadeira.

**Hipótese indutiva:**

Suponha que P(n) seja verdadeira, isto é, suponha que: .

**Passo indutivo:**

Queremos mostrar que .

Para temos:

Adicionando na expressão 1, temos:

Pela hipótese indutiva, .

Onde . Portanto, é divisível por 5.

Como foi provado que é verdadeira e , está provado que é verdadeira .

**2 – (2 pontos, item (a) 1 ponto, item (b) 1 ponto)**

1. Quantos dados diferentes existem em que as somas das faces opostas são iguais a 7?

Seja k o complemento de n para 7, ou seja, . Os números de 1 a 6 podem ser divididos em pares desses complementos (1 e 6; 2 e 5; 3 e 4). Para que a soma de faces opostas seja 7, esses pares de complementos devem estar em faces opostas. Então, uma vez escolhida a face para um dos complementos, a face para o outro número já estará determinada. Ou seja, precisamos fazer apenas três escolhas: para onde é um dos termos de cada um dos três pares de complementos.

* Para escolher a face para temos 6 possibilidades, qualquer uma das faces. Após escolhida, devemos posicionar o complemento de na face oposta, deixando então apenas 4 faces vazias para a próxima etapa.
* Para escolher a face para temos 4 possibilidades, e deixaremos apenas 2 faces vazias para a próxima etapa.
* Por fim, para escolher a face para temos 2 possibilidades.

Portanto, o número total de escolhas é escolhas.

Porém, um cubo possui 24 simetrias rotacionais, ou seja, é possível posicionar o mesmo dado de 24 formas diferentes em que a disposição dos números será a mesma. Logo, devemos dividir as 48 escolhas pelas 24 simetrias rotacionais:

1. Quinze pessoas, sendo 5 homens de alturas diferentes e 10 mulheres também de alturas diferentes, devem ser postas em fila, conforme o critério: homens em ordem crescente de altura e mulheres em ordem decrescente de altura. De quantas maneiras diferentes essas 15 pessoas poderão ser dispostas na fila?

Como os homens e mulheres devem estar em ordem crescente e decrescente de altura, não é possível permutar a posição entre eles. Apenas será possível trocar a disposição de homens e mulheres na fila. Podemos interpretar a situação da seguinte forma: queremos encontrar as permutações das posições de homens e mulheres, ou seja, os anagramas da palavra HHHHHMMMMMMMMMMM. Esse é um caso de permutação com repetição de elementos, como temos 5 homens (H) e 10 mulheres (M), teremos que as permutações são:

**3 – (2 pontos)** Prove por indução que: para *n* ≥ 4

Base:

e

Hipótese indutiva:

é verdadeiro, ou seja

Passo indutivo:

Pela hipótese indutiva, , então:

Como , então

Simplificando, temos:

Como P(4) é verdadeiro e , está provado que P(n) é verdadeira .

# 4 – (2 pontos) Um caixa contém 25 bolas brancas, 14 bolas azuis e 20 bolas pretas. De quantas modos diferentes podemos retirar (sem olhar) 13 bolas desta caixa de modo que:

# Tenhamos um número par de bolas brancas, um número ímpar de bolas azuis e um número par de bolas pretas? (considere o 0 como um possível número par)

# Sejam b, a e p respectivamente a quantidade de bolas brancas, azuis e pretas. A soma das quantidades de bolas de cada cor que foram tiradas da caixa deve ser 13, então temos a equação:

# Como a quantidade de bolas brancas e pretas deve ser par, podemos escrever:

# E como a quantidade de bolas azui deve ser ímpar, podemos escrever:

# Fazendo a substituição na equação acima, temos:

# , com

# A quantidade de soluções da equação é dada por maneiras.

# Portanto, há 28 maneiras de escolher um número par de bolas brancas e pretas e um número ímpar de bolas azuis.

# Tenhamos números ímpares de bolas das três cores?

# *Dica*: lembrar que um número par pode ser representado por e um número ímpar por .

Sejam b, a e p respectivamente a quantidade de bolas brancas, azuis e pretas. A soma das quantidades de bolas de cada cor que foram tiradas da caixa deve ser 13, então temos a equação:

Como as quantidades devem ser ímpares, sejam então:

, e

Substituindo as novas variáveis na equação inicial, ficamos com:

, com

O número de soluções dessa equação é dado por .

Então, há 21 formas de escolher quantidades ímpares de todas as cores.

**5 – (2 pontos)** Dos 12 estudantes da uma turma, seis serão escolhidos para participar de um debate em uma mesa circular. José, Cléber, Márcia e Luíza só irão se forem juntos; de tal forma que Márcia e Luíza vão sentar lado a lado, mas Samuel e Cléber nunca vão sentar lado a lado à mesa. De quantas maneiras distintas esta mesa de debate pode ser composta?

Vamos dividir o problema da escolha em dois casos:

* 1º caso: O quarteto de amigos (José, Cléber, Márcia e Luíza) foi escolhido para o debate. Agora basta escolher os outros alunos:

maneiras

Se o quarteto de amigos for escolhido, precisamos dispô-los de acordo com as condições:

→ Márcia e Luíza juntas.

**→** Cléber e José separados.

Vamos considerar Márcia e Luíza como um bloco só, que possui 2! formas diferentes de se dispor. Como elas formam um bloco, a disposição dos 6 estudantes em torno da mesa será na verdade a disposição de 5 estudantes em círculo, ou seja, permutação circular de 5:

maneiras

Nessas 24 maneiras foram contabilidades as vezes em que Cléber e José estavam juntos ou separados, vamos agora contar as disposições que contém os dois amigos juntos. Para isso, vamos contá-los como um bloco, e fazer a permutação dos dois blocos (ML e CJ) junto com os demais 2 alunos, considerando que os blocos ML e CJ tem duas possibilidades de disposição (cada).

maneiras.

Logo, as 48 formas de dispor as amigas Márcia e Luíza juntas, 24 formas têm os amigos Cléber e José juntos, então apenas formas estão de acordo com as **duas** restrições impostas.

Agora juntando as etapas:

Para a escolha dos alunos temos 48 maneiras e para a disposição dos mesmos em mesa redonda temos mais 24 maneiras, ao todo são: formas, caso os 4 amigos sejam escolhidos.

* 2º caso: O quarteto de amigos não foi escolhido, então temos que escolher os 6 alunos dentre os demais da alunos da turma:

maneiras

Após escolhidos os 6 alunos, devemos dispô-los em uma mesa redonda, fazendo a permutação circular desses 6 alunos:

maneiras

Juntando as duas etapas da escolha, são 28 maneiras e escolher os alunos e 120 formas de dispô-los, então: maneiras.

Agora, juntando os dois casos, já que os 4 amigos podem estar no grupo ou não, temos que existem:

**maneiras de fazer as escolhas.**