ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG VIỆT - HÀN
Vietnam - Korea University of Information and Communication Technology

GIẢI TÍCH

Bài giảng điện tử

ĐÀ NẴNG - 2020

http://vku.udn.vn/

Chương 5: HÀM NHIỀU BIẾN SỐ

5.1 KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

5.1.1 Định nghĩa hàm số nhiều biến số

5.1.2 Giới hạn của hàm số hai biến số

5.1.3 Tính liên tục của hàm số hai biến số

5.1.1. Định nghĩa hàm số nhiều biến số

a. Định nghĩa

Cho $D \subset R^2$ (tập các điểm trên mặt phẳng toạ độ Oxy).

Một ánh xạ
$$\begin{aligned} f:\ D &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$

được gọi là hàm số hai biến số.

D là *miền xác định* của hàm số;

$f(D) = \{z = f(x, y) / (x, y) \in D\}$ là *miền giá trị* của hàm số f.

Hàm n biến số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được định nghĩa tương tự.

b. Miền xác định

Miền xác định của hàm số: tập hợp những (x,y) sao cho biểu thức f(x,y) có nghĩa.

Ví dụ

Tìm miền xác định của hàm số:

a. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

b. $f(x,y)=\ln(1+x-y)$

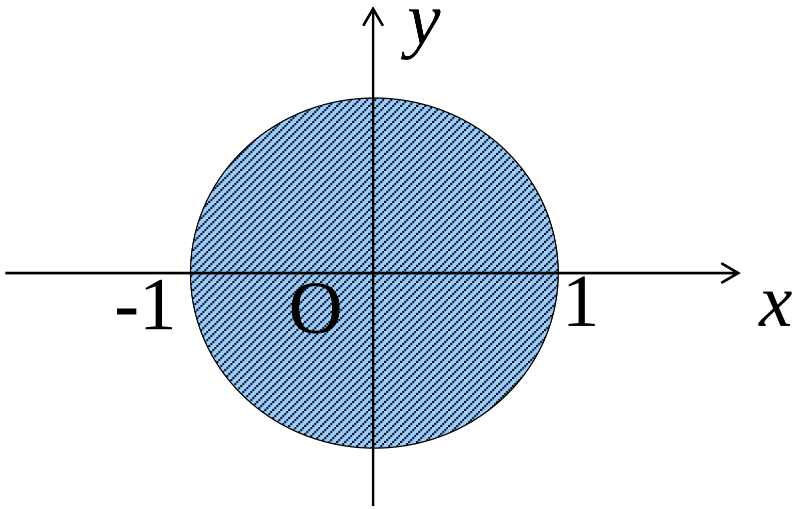
Giải:

a. Hàm số $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ xác định khi $1- x^2 - y^2 \geq 0$

hay $x^2 + y^2 \leq 1$

Miền xác định của nó là hình tròn đóng tâm O, bán kính 1

$$D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$



b. $f(x,y) = \ln(1+x-y)$

Hàm số $z = \ln(1+x-y)$ xác định khi $1 + x - y > 0$

hay $x - y + 1 > 0$

Miền xác định $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x - y + 1 > 0\}$

c. Đồ thị của hàm số z = f(x, y)

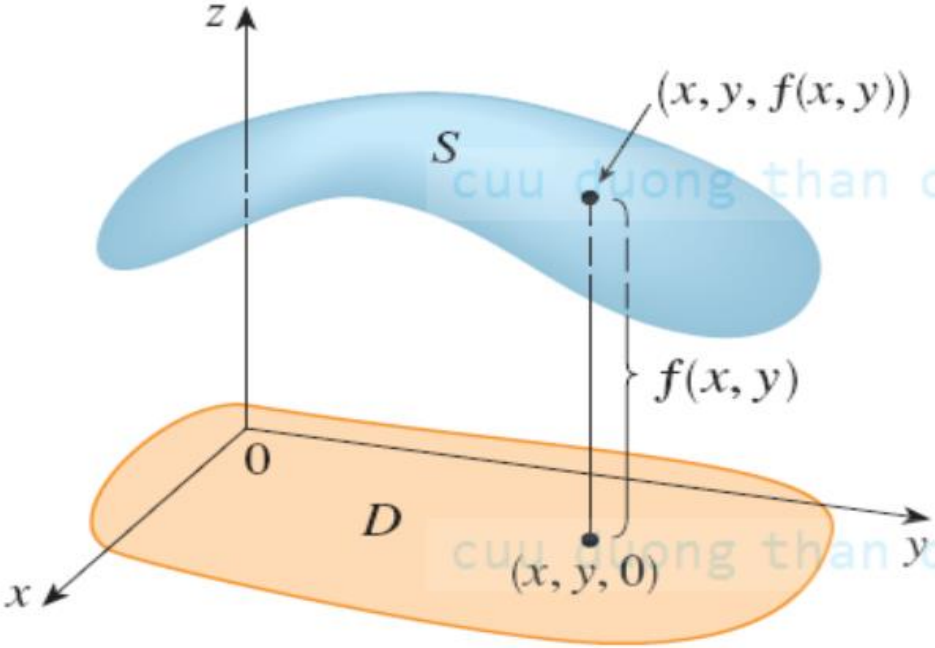
Cho hàm số hai biến z = f(x, y), có tập xác định D

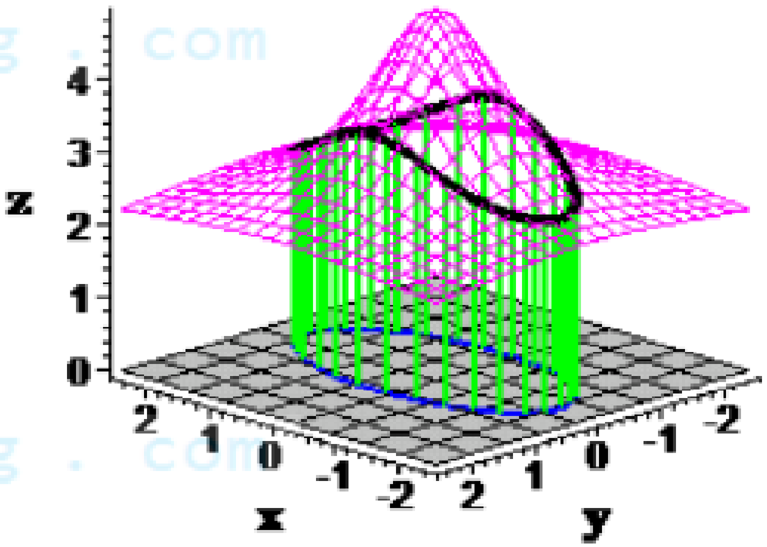
Qua điểm M(x,y,0) trong miền D dựng đường thẳng song song và cùng hướng với trục Oz, lấy điểm P trên đó sao cho

$$\overline{MP} = f(x, y) = z$$

Khi điểm M biến thiên trong miền D thì điểm P biến thiên trong R^3 và sinh ra mặt cong S – gọi là *đồ thị của hàm số z = f(x,y)*

z = f(x,y) gọi là *phương trình của mặt S.*


z
(x, y, f(x, y))
S
f(x, y)
0
D
(x, y, 0)
y
x


4
3
z
2
1
0
2
1
0
-1
-2
x
2
1
0
-1
-2
y

5.1.2. Giới hạn của hàm số hai biến số

1. Định nghĩa.

a. Ta nói *dãy điểm $M_n(x_n,y_n)$ dần tới điểm $M_0(x_0,y_0)$* trong R^2 và viết $M_n \to M_0$ khi $n \to \infty$ (hay $(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$) nếu

$$\lim_{n\to\infty} d(M_0, M_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0$$

b. Cho hàm số *f(x,y)* xác định trong miền D chứa điểm $M_0(x_0,y_0)$, có thể trừ điểm M_0.

Số L được gọi là giới hạn của *f(x,y)* khi điểm M(x,y) dần tới điểm $M_0(x_0,y_0)$ khi và chỉ khi:

với mọi dãy $M_n(x_n,y_n)$(khác M_0) thuộc miền D dần tới M_0 ta đều có:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L$$

Kí hiệu: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ hay $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = L$

Chú ý

1. Giới hạn tồn tại là duy nhất.

2. Để chứng minh $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ không tồn tại

Ta chỉ ra rằng khi $(x, y) \to (x_0, y_0)$ theo những phương khác nhau thì f(x, y) dần tới các giới hạn khác nhau.

3. Các tính chất giới hạn của tổng, tích, thương của hàm hai biến hoàn toàn tương tự với tính chất của hàm một biến.

4. Định lí giới hạn kẹp:

Giả sử f(x, y), g(x, y), h(x, y) cùng xác định trên D và

$$+\ h(x, y) \le f(x, y) \le g(x, y),\quad \forall (x, y) \in D$$

$$+\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = a$$

thì $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \mathrm{a}$$

Ví dụ:

Tìm giới hạn (nếu có) của các hàm số sau:

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\cos x + y}{x^2 + 2y^2}$

b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2 + x^2 + y^2}{2y} \sin y$

c. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

d. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

5.1.3. Tính liên tục của hàm số hai biến số

Cho hàm số f(x,y) xác định trong miền D, $M_0(x_0,y_0)$ là một điểm thuộc D. Ta nói rằng hàm số f(x,y) *liên tục tại M_0* nếu:

1. Tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

Hàm số f(x,y) gọi là liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm của miền D.

5.2. ĐẠO HÀM RIÊNG. VI PHÂN TOÀN PHẦN

5.2.1 Đạo hàm riêng

1. Định nghĩa

2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng

3. Đạo hàm riêng cấp cao

5.2.2 Vi phân toàn phần

5.2.1. Đạo hàm riêng

1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong miền D, $(x_0, y_0) \in D$.

Khi đó $f(x, y_0)$ là 1 hàm theo biến số x, đạo hàm của hàm số này theo biến x tại x_0 gọi là *đạo hàm riêng đối với x* của hàm số $f(x,y)$ tại (x_0, y_0). Ta ký hiệu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Tương tự, *đạo hàm riêng đối với biến y* của hàm số f(x, y) tại (x_0, y_0) , kí hiệu là:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Như vậy:

Khi tính đạo hàm riêng đối với x của f, chỉ việc xem y là hằng số và lấy đạo hàm của f đối với x.

Ví dụ

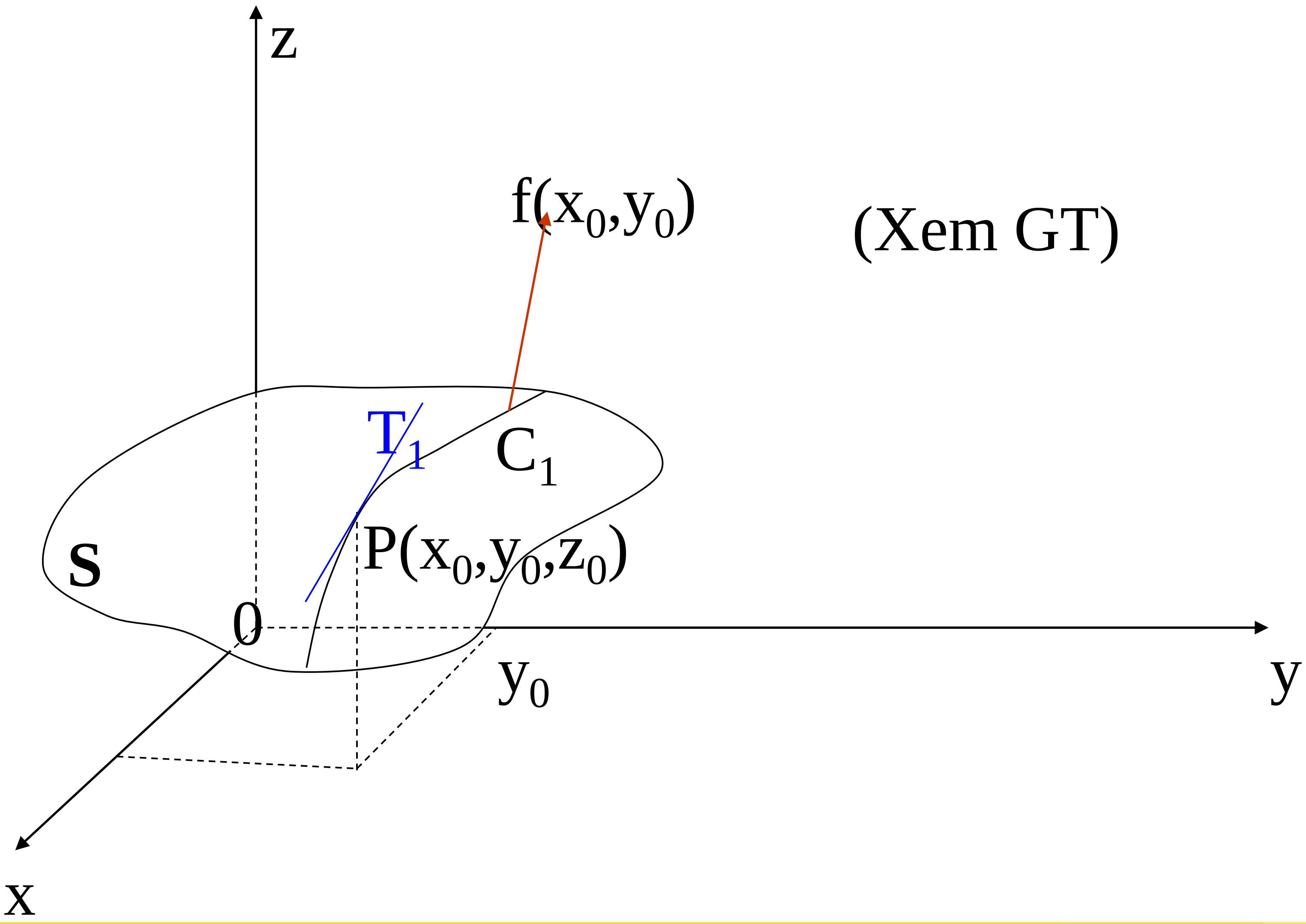
Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau:

a. $z = x^2 + y^2 + 2xy$

b. $z = e^{\frac{x}{y}}$

c. $z = \text{arctg}(xy)$

2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng



(Xem GT)

3. Đạo hàm riêng cấp cao

Cho f là hàm 2 biến, các đạo hàm riêng f'_x, f'_y cũng là các hàm số hai biến. Do đó có thể tính các đạo hàm riêng của chúng gọi là các *đạo hàm riêng cấp 2 của f.*

Kí hiệu:

$$\left(f'_x\right)'_x = f''_{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \left(f'_x\right)'_y = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\left(f'_y\right)'_x = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \left(f'_y\right)'_y = f''_{y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Ví dụ

Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số:

a. $z = f(x,y) = e^x \cos y$

b. $z = f(x,y) = x^3y^2 + y^3$

5.2.2. Vi phân toàn phần

1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y trong miền D chứa điểm $M_0(x_0, y_0)$ và nếu các đạo hàm riêng đó liên tục tại M_0 thì ta có:

$$f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy$$

được gọi là vi phân toàn phần của hàm số f(x, y) tại (x_0,y_0), kí hiệu là $df(x_0,y_0)$

Khi đó, ta nói hàm số khả vi tại (x_0,y_0).

Như vậy: $\boxed{df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy}$

Chú ý:

Vi phân toàn phần của hàm số f(x, y) tại điểm bất kì.

$$\boxed{df = f'_x\,dx + f'_y\,dy}$$

Ví dụ:

Tính vi phân toàn phần của các hàm số sau:

a. $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

b. $f(x,y) = e^{x+y}\sin(x-y)$

2. Ứng dụng vi phân toàn phần vào tính gần đúng

$$\Delta f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

Hay

$$\boxed{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta x) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y}$$

Ví dụ.

Tính gần đúng các số sau:

a) $A = \sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$

b) $B = \ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)$

3. Điều kiện để biểu thức P(x,y)dx + Q(x,y)dy là một vi phân toàn phần

Định lí:

Giả sử các hàm số P(x,y), Q(x,y) có các đạo hàm riêng liên tục trong một miền D nào đó.

Biểu thức P(x,y)dx + Q(x,y)dy là một vi phân toàn phần khi và chỉ khi:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ví dụ:

Chứng minh biểu thức sau là vi phân toàn phần:

$$(2x - 5y^2)dx + (6y^2 - 10xy)dy$$

Tìm hàm số $f(x, y)$.

4. Vi phân cấp cao

Cho hàm số khả vi *f(x, y)*, vi phân cấp 1 *df(x, y)* cũng là hàm 2 biến *x, y*. Vi phân nếu có của vi phân cấp 1 này được gọi là vi phân cấp 2.

$$d^2 f = d(df) = d\left(f'_x dx + f'_y dy\right)$$

$$= \left(f'_x dx + f'_y dy\right)'_x dx + \left(f'_x dx + f'_y dy\right)'_y dy$$

$$= f''_{x^2} dx^2 + 2 f''_{xy} dxdy + f''_{y^2} dy^2$$

Tiếp tục quá trình trên (nếu được) ta có vi phân cấp cao hơn của hàm *f*.

5.3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP. ĐẠO HÀM CỦA HÀM ẨN

7.3.1. Đạo hàm của hàm số hợp

1. $\begin{cases} f = f(u,v) \\ u = u(x) \\ v = v(x) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{dv}{dx}$ hay: $f' = f'_u . u' + f'_v . v'$

2. $\begin{cases} f = f(u,v) \\ u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{df}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{dv}{dx} \\ \dfrac{df}{dy} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dy} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{dv}{dy} \end{cases}$ hay $\begin{cases} f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x \\ f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y \end{cases}$

Ví dụ:

Tính $\dfrac{df}{dx}, \dfrac{df}{dy}$ của hàm hợp

$$\begin{cases} f = f(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \mathrm{e}^{uv} \\ \mathrm{u} = x^2 + 2y^3 \\ \mathrm{v} = 3\mathrm{x} \end{cases}$$

5.3.2. Đạo hàm của hàm số ẩn

1. Đạo hàm hàm số ẩn một biến số.

Giả sử hai biến số x, y được ràng buộc với nhau bởi PT:

$$F(x, y) = 0 \quad (*)$$

Nếu $y = f(x)$ là hàm số sao cho khi thế $y = f(x)$ vào (*) thì ta được đồng nhất thức.

Ta nói $y = f(x)$ là hàm số ẩn xác định bởi PT (*).

Khi đó,

$$\boxed{y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}}$$

2. Đạo hàm hàm số ẩn hai biến số.

Ta nói rằng hàm số hai biến số z = f(x, y) là hàm số ẩn xác định bởi phương trình F(x, y, z) = 0

nếu $F(x, y, f(x, y)) = 0$

với mọi x, y thuộc miền xác định của f

Khi đó,

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Ví dụ:

Tìm đạo hàm của hàm ẩn xác định bởi các phương trình sau

a. $y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 9$, tính y′

b. $\ln\sqrt{x^2+y^2} = arctg\,\dfrac{y}{x}$, tính y′

c. $x + y + z = e^z$, tính z'_x, z'_y

5.4. CỰC TRỊ

5.4.1 Cực trị tự do của hàm hai biến số

5.4.2 Cực trị có điều kiện của hàm hai biến số

5.4.3 Giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số hai biến số

5.4.1. Cực trị tự do

Định nghĩa

Giả sử hàm $z = f(x, y)$ xác định, liên tục trên miền D.

$M_0(x_0, y_0) \in D$. Với mọi $M(x, y)$ khá gần M_o. Nếu

- $f(M_0) \geq f(M)$ thì

  điểm M_0 *điểm cực đại*, giá trị $f(M_0)$ *giá trị cực đại*.

- $f(M_0) \leq f(M)$ thì

  điểm M_0 *điểm cực tiểu*, giá trị $f(M_0)$ *giá trị cực tiểu*.

* Cực đại và cực tiểu gọi chung là cực trị, điểm M_0 gọi là điểm cực trị.

Định lí (điều kiện cần)

Nếu hàm số f(x,y) đạt cực trị tại điểm (x_0,y_0) và tại đó các đạo hàm riêng tồn tại thì

$$f'_x(x_0,y_0) = 0 \text{ và } f'_y(x_0,y_0) = 0$$

Chú ý:

Điều ngược lại, nếu có $f'_x(x_0,y_0) = 0$ và $f'_y(x_0,y_0) = 0$ thì ta **không** suy ra hàm *f* đạt cực trị tại (x_0,y_0).

Điểm (x_0,y_0) gọi là *điểm dừng* nếu $f'_x(x_0,y_0) = 0$ và $f'_y(x_0,y_0) = 0$

Định lý (Điều kiện đủ)

Cho hàm f(x, y). Giả sử (x_0, y_0) là một điểm dừng của f và f có đạo hàm riêng cấp hai liên tục ở lân cận của (x_0, y_0) . Đặt

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0),\ B = f''_{xy}(x_0, y_0),\ C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

Khi đó:

1. Nếu $B^2 - AC < 0$ thì f(x, y) đạt cực trị tại M_0. Đó là cực tiểu nếu $A > 0$, là cực đại nếu $A < 0$;

2. Nếu $B^2 - AC > 0$ thì f(x, y) không đạt cực trị tại M_0;

3. Nếu $B^2 - AC = 0$ thì f(x, y) chưa kết luận được.

Ví dụ:

Tìm cực trị tự do của hàm số:

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

5.4.2. Cực trị có điều kiện

Định nghĩa

Cực trị của hàm số $z = f(x,y)$ trong đó các biến x, y bị ràng buộc bởi hệ thức $g(x, y) = 0$ gọi là cực trị có điều kiện.

Điểm M(a, b) được gọi là điểm kỳ dị của đường cong $g(x, y) = 0$ nếu $g'_x(a, b) = g'_y(a, b) = 0$.

Định lý (điều kiện cần)

Cho hàm số z = f(x,y) và điểm M(a, b) thỏa các điều kiện:

i. M(a, b) không là điểm kỳ dị của đường cong g(x, y) = 0.

ii. f(x, y) và g(x, y) và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong một lân cận của M.

iii. Hàm f(x, y) đạt cực trị tại M với điều kiên g(x, y) = 0.

Khi đó tồn tại số λ thỏa $\begin{cases} f'_x(a,b) + \lambda g'_x(a,b) = 0 \\ f'_y(a,b) + \lambda g'_y(a,b) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$

Số λ được gọi là nhân tử Lagrange.

Hàm $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ được gọi là hàm Lagrange.

Định lý (điều kiện đủ)

Giả sử f(x,y), g(x, y) khả vi liên tục đến cấp 2 trong lân cận của M(a, b) và M thỏa:

i. M(a, b) không là điểm kỳ dị của đường cong g(x, y) = 0.

ii. f(x, y) và g(x, y) và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong một lân cận của M.

iii. Hàm f(x, y) đạt cực trị tại M với điều kiên g(x, y) = 0.

thì ta có

1. $d^2L(a, b) > 0$ thì M là điểm cực tiểu có điều kiện;
2. $d^2L(a, b) < 0$ thì M là điểm cực đại có điều kiện;
3. $d^2L(a, b)$ không xác định dấu thì M không là điểm cực trị.

Phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị có điều kiện

Khảo sát cực trị của hàm số $f(x,y)$ với điều kiện $g(x, y) = 0$.

Bước 1. Lập hàm Lagrange $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ và tìm các điểm dừng là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow M(a,b), \lambda$$

Bước 2. Tính tất cả các đạo hàm riêng cấp 2: L''_{xx}, L''_{yy}, L''_{xy}. Thế vào vi phân của $L(x, y, \lambda)$ tại M và λ

$$d^2L(a,b) = L''_{xx}(a,b)dx^2 + 2L''_{xy}(a,b)\,dxdy + L''_{yy}(a,b)dy^2$$

Bước 3. Với điều kiện $g(x, y) = 0 \Rightarrow g'_x(a, b)dx + g'_y(a, b)dy = 0$ ta xét tính xác định của vi phân d^2L và rút ra kết luận.

Ví dụ:

Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

5.4.3. Giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số hai biến số trong một miền đóng giới nội

Các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số f(x,y) trong miền đóng giới nội D.

B1. Tính giá trị của f tại các điểm dừng của f nằm trong miền D

B2. Tính giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của f trên biên của miền D

B3. Số lớn nhất (bé nhất) trong các giá trị tính ở B1 và B2 là giá trị lớn nhất (bé nhất) phải tìm.

Ví dụ:

Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số:

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

trên miền D giới hạn bởi các đường thẳng:

$$x = 0,\ y = 0,\ x + y = -3$$