ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG VIỆT - HÀN
Vietnam - Korea University of Information and Communication Technology

Chương 2:

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ - GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC - ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

2.2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

2.2.1. Định nghĩa và các phép toán

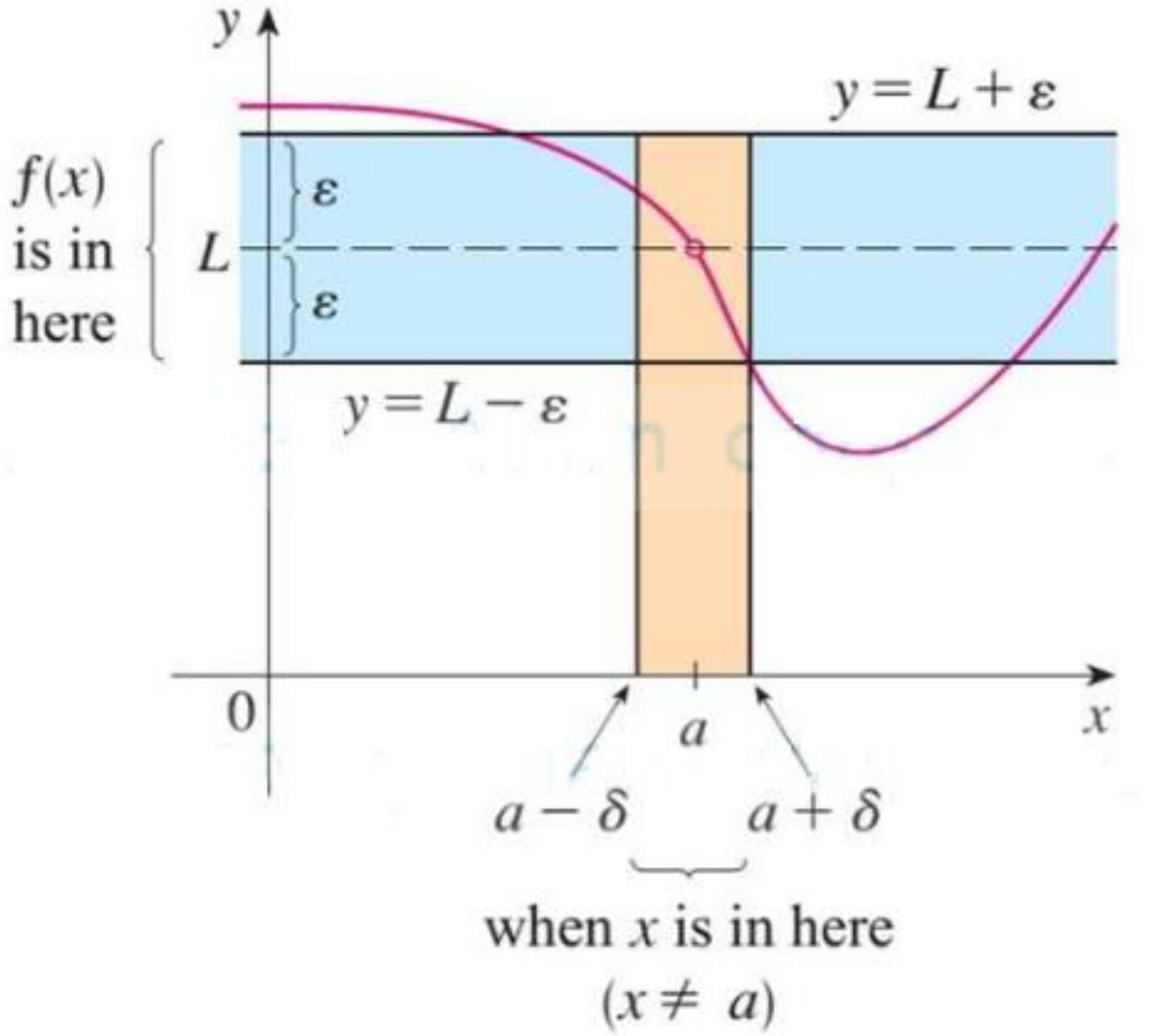
Cho hàm số y = f(x) xác định ở lân cận điểm *a* (có thể trừ *a*).

Định nghĩa 2.1. Số L được gọi là giới hạn của hàm số f(x) khi x dần đến *a*, ta viết

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ hay } f(x) \to L \text{ khi } x \to a$$

nếu với mọi ε > 0 cho trước, luôn tìm được δ > 0 (δ phụ thuộc ε) sao cho: $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

- $\lim_{x \to a} f(x) = L$ có nghĩa là giá trị của f(x) tiến càng ngày càng gần L khi x tiến càng gần *a*.


y
y = L + ε
f(x) is in here
ε
L
ε
y = L − ε
0
a
x
a − δ
a + δ
when x is in here
(x ≠ a)

Định nghĩa 2.2 (Giới hạn một phía):

a. Nếu *x* dần đến *a* từ phía trái (x < a), *f(x)* dần tới *L* thì ta nói giới hạn trái của hàm số *f(x)* khi x dần đến *a* bằng *L*.

Ta viết: $$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ hay } f(x) \to L \text{ khi } x \to a^-$$

b. Nếu *x* dần đến *a* từ phía phải (x > a), *f(x)* dần tới *L* thì ta nói giới hạn phải của hàm số *f(x)* khi x dần đến *a* bằng *L*.

Ta viết: $$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \text{ hay } f(x) \to L \text{ khi } x \to a^+$$

Định lí 2.1. Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L;\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=M$. Khi đó:

- $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=L\pm M$
- $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$
- $\lim\limits_{x\to a}\left[c.f(x)\right]=c.A$ (c: constant)
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M},\ M\neq 0.$

Hệ quả

- $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=L^n,\ n\in\mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x\to a} x^n=a^n$
- $\lim\limits_{x\to a} P_n(x)=P_n(a)$ với $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}=\dfrac{P_n(a)}{Q_n(a)};\ Q_n(a)\neq 0.$

Định lí 2.2: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\mathrm{L} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\mathrm{L}$

Ví dụ 2.1. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{-x}=-1$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$

Ví dụ 2.2. Cho $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-4}, & \text{khi } x\geq 4\\ 8-2x, & \text{khi } x<4\end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

Ta có $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(8-2x)=0$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}\sqrt{x-4}=0$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=0$

Định nghĩa 2.3: Giới hạn tại vô cực

Hàm số f(x) có giới hạn là L khi x dần đến $+\infty$ nếu với mọi ε > 0 cho trước, luôn tìm được M > 0 (M phụ thuộc ε) đủ lớn:

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Kí hiệu:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \text{ hay } f(x) \to L \text{ khi } x \to +\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ nghĩa là f(x) rất gần L nếu lấy x đủ lớn.
- Giới hạn $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ được định nghĩa tương tự.

Định nghĩa 2.4. Giới hạn vô cực

Hàm số f(x) có giới hạn là +∞ khi x dần đến a nếu với mọi M > 0 cho trước, luôn tồn tai δ > 0 (δ phụ thuộc M):

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Kí hiệu:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ hay } f(x) \to +\infty \text{ khi } x \to a$$

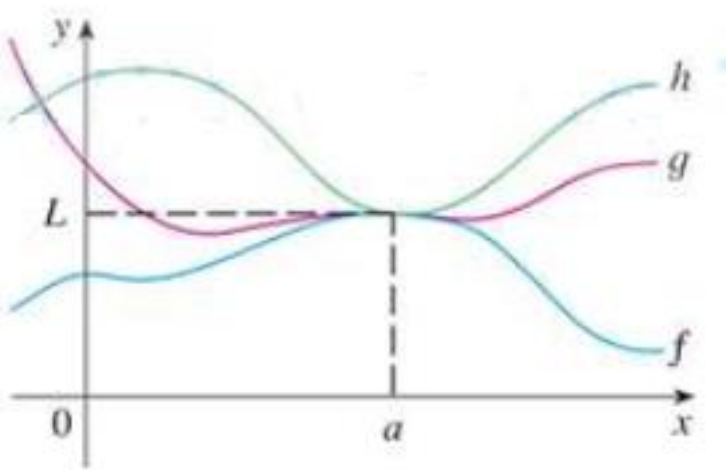
- $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ nghĩa là f(x) sẽ càng lớn khi x càng gần a.
- Giới hạn $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

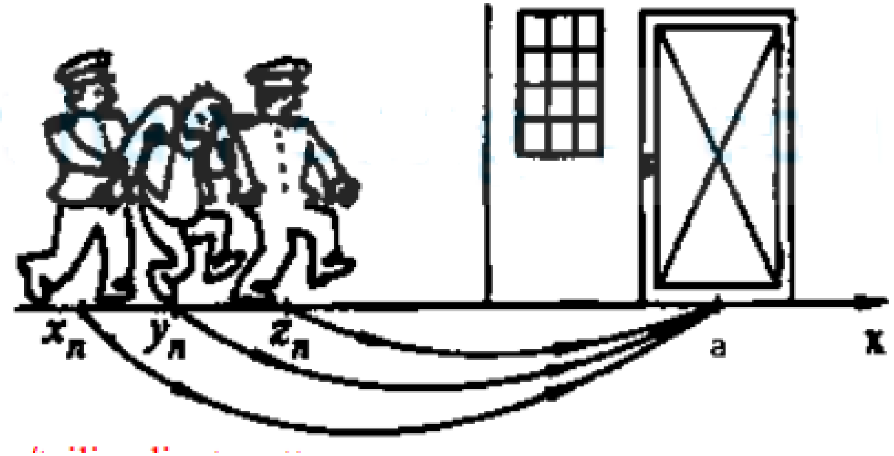
2.2.2. Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

Tiêu chuẩn 1. Nếu

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ trong lân cận a (có thể trừ a)
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} h(x)$

thì $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L.$





Dựa vào tiêu chuẩn 1 người ta chứng minh được:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1\ ;\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$$

b. Nếu $u(x)\to 0$ khi $x\to a$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1 \quad \text{và} \quad \lim_{x\to a}\frac{\sin\left[c.u(x)\right]}{u(x)}=c,\ c\neq 0$$

Ví dụ 2.3. Tìm $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$

Ta có $-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$

$$\Rightarrow -x^2 \le x^2\cos\frac{1}{x} \le x^2$$

và $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0.$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x} = 0.$

Tiêu chuẩn 2

a. Nếu hàm số f(x) tăng và bị chặn trên bởi số M ở lân cận a thì hàm f(x) có giới hạn khi x $\to$ a và

$$\lim_{x\to a} f(x) \le M$$

b. Nếu hàm số f(x) giảm và bị chặn dưới bởi số m ở lân cận a thì hàm f(x) có giới hạn khi x $\to$ a và

$$m \le \lim_{x\to a} f(x)$$

Dựa vào tiêu chuẩn 2 người ta chứng minh được:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \text{ hay } \lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e$$

và

- $$\lim_{u(x)\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{u(x)}\right)^{u(x)}=e^{a}, a\neq 0;$$
- $$\lim_{\alpha(x)\to 0}\left[1+a.\alpha(x)\right]^{1/\alpha(x)}=e^{a}, a\neq 0.$$

2.2.3. Một số giới hạn đặc biệt của các hàm số sơ cấp

1. $$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{khi } \alpha > 0 \\ 0 & \text{khi } \alpha < 0. \end{cases}$$

2. $$a > 1 \quad : \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

$$0 < a < 1 : \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0$$

3. $$a > 1 \quad : \lim_{x\to 0+0} \log_a x = -\infty \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$$

$$0 < a < 1 : \lim_{x\to 0+0} \log_a x = +\infty \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$$

4. Khi $x \to \pm\infty$ hàm sinx và cosx không có giới hạn.

5. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + k\pi - 0} tgx = +\infty$ & $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + k\pi + 0} tgx = -\infty$

$\lim\limits_{x \to k\pi + 0} \cot gx = +\infty$ & $\lim\limits_{x \to k\pi - 0} \cot gx = -\infty$

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$ & $\lim\limits_{x \to -\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2}$

2.3. VÔ CÙNG BÉ VÀ VÔ CÙNG LỚN

2.3.1. Vô cùng bé

- Hàm f(x) đgl vô cùng bé (VCB) khi $x \to x_o$ nếu

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = 0$$

(x_0 ở đây có thể là hữu hạn hoặc vô cùng).

Các VCB thường được kí hiệu $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ …

Ví dụ:

- $\sin x$ là 1 VCB khi $x \to 0$
- $(e^x - 1)$ là 1 VCB khi $x \to 0$
- $\dfrac{1}{x}$ là 1 VCB khi $x \to \infty$

Tính chất

- Tổng hữu hạn các VCB là một VCB.
- Tích 2 VCB là một VCB.
- Tích một VCB với một hàm bị chặn là một VCB.
- Thương 2 VCB chưa chắc là VCB.

So sánh các VCB

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB khi $x \to x_o$

1. Nếu $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$

thì $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ và viết là:

$$\alpha(x) = o(\beta(x)).$$

Khi đó ta cũng nói $\beta(x)$ là VCB bậc thấp hơn $\alpha(x)$.

2. Nếu $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = L \ (L \neq 0, \infty)$

thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB cùng bậc.

Đặc biệt: Nếu L = 1 thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB tương đương, kí hiệu: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Ví dụ

So sánh bậc của các VCB sau đây:

a. $f(x) = 1 - \cos x,\ g(x) = \sin^2 x$, khi $x \to 0$

b. $f(x) = \sqrt{x+3} - 2,\ g(x) = x^2 - 1$, khi $x \to 1$

Chú ý

Các VCB tương đương cơ bản khi $x \to 0$:

1. $\sin x \sim x$
2. $\arcsin x \sim x$
3. $\tan x \sim x$
4. $\arctan x \sim x$
5. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$
6. $e^x - 1 \sim x$
7. $\ln(1+x) \sim x$
8. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
9. $a^x - 1 \sim x.\ln a$

Các tương đương trên vẫn đúng khi ta thay x bởi VCB $\alpha(x)$ khi $x \to x_0$ (nào đó).

Định lí

a) Nếu $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ và $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ khi $x \to x_o$ thì:

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$
- $$\lim_{x \to x_0} \alpha(x)\beta(x) = \lim_{x \to x_0} \alpha_1(x)\beta_1(x)$$

b) Nếu $\beta(x)$ là VCB bậc cao hơn $\alpha(x)$ thì:

$\alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x)$ khi $x \to x_o$

Quy tắc ngắt bỏ các VCB bậc cao:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\text{Tổng hữu hạn các VCB}}{\text{Tổng hữu hạn các VCB}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\text{VCB bậc thấp nhất của tử}}{\text{VCB bậc thấp nhất của mẫu}}$$

Ví dụ

Tìm giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x^3+\sin^3 x}{2x^2+3x^4-tg^5 x}$ d. $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+3x\right]^{1/\sin x}$

e. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$ f. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$

2.3.2. Vô cùng lớn

Hàm số f(x) được gọi là một **vô cùng lớn (VCL)** khi $x \to x_o$ nếu:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \pm\infty$$

Ví dụ:

- $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ là 1 VCL khi $x \to \infty$
- $\dfrac{1}{x^2 - 1}$ là 1 VCL khi $x \to 1$

So sánh các VCL

Giả sử f(x) và g(x) là 2 VCL khi $x \to x_o$

1. Nếu $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$

thì ***f(x) là VCL bậc cao hơn g(x)*** hay ***g(x) là VCL bậc thấp hơn f(x)*** khi $x \to x_o$

2. Nếu $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = L \ (L \neq 0)$

thì ***f(x) và g(x) là 2 VCL cùng bậc*** khi $x \to x_o$

- Nếu **L = 1** thì ta nói ***f(x) và g(x) là 2 VCL tương đương*** khi $x \to x_o$, kí hiệu: ***f(x) ~ g(x)***

Định lí

a) Nếu các VCL $f(x) \sim f_1(x)$ và $g(x) \sim g_1(x)$ khi $x \to x_o$ thì:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

b) Nếu $g(x)$ là VCL bậc thấp hơn $f(x)$ thì:

$$f(x) + g(x) \sim f(x) \text{ khi } x \to x_o$$

Quy tắc ngắt bỏ các VCL bậc thấp:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\text{Tổng hữu hạn các VCL}}{\text{Tổng hữu hạn các VCL}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\text{VCL bậc cao nhất của tử}}{\text{VCL bậc cao nhất của mẫu}}$$

Ví dụ

Tìm: $$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^4-x^2+3\sqrt{x}}{-7x^4+\sqrt{x^3}+2x}$$

Giải

Ta có $4x^4$ là VCL bậc cao nhất trong các VCL ở tử và $-7x^4$ là VCL cao nhất trong mẫu nên

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^4-x^2+3\sqrt{x}}{-7x^4+\sqrt{x^3}+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^4}{-7x^4}=-\frac{4}{7}$$

2.3.3. Các dạng vô định và cách khử

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0.\infty; \infty - \infty; 1^{\infty}; 0^{0}; \infty^{0}, 0^{\infty}$$

1. Dạng $\frac{0}{0}$ $\left(\lim \frac{f(x)}{g(x)} \text{ \& } \lim f(x) = \lim g(x) = 0\right)$

- Phân tích f(x), g(x) tích hoặc nhân dạng liên hiệp có thừa số chung, rút gọn rồi tính giới hạn.

- Dùng VCB tương đương hoặc giới hạn đặc biệt

$$\lim_{u(x)\to 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$$

- Dùng quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao.

- Dùng quy tắc Lôpitan (xét ở chương Đạo hàm và vi phân).

2. Dạng $\frac{\infty}{\infty}$ $(\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ & $f(x), g(x) \to \pm\infty)$

- Chia tử & mẫu cho x^p với p là số mũ lớn nhất, biến đổi áp dụng các định lý về giới hạn, các quy tắc tìm giới hạn vô cực để tính.

- Dùng VCL tương đương.

- Dùng quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp.

- Dùng quy tắc lôpitan (xét ở chương Đạo hàm và vi phân).

3. Dạng $0.\infty$ và $\infty - \infty$

Biến đổi đưa về dạng: $\frac{0}{0} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

4. Dạng 1^{∞}

- Biến đổi đưa về giới hạn đặc biệt

$$\lim_{u(x)\to\pm\infty}\left[1+\frac{a}{u(x)}\right]^{u(x)} = e^a \quad \text{hay}$$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\left[1+a\alpha(x)\right]^{1/\alpha(x)} = e^a \quad (a \neq 0)$$

- Dùng giới hạn hàm hợp qua ln đưa về dạng $\frac{0}{0} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

5. Dạng 0^0 và ∞^0

Dùng giới hạn hàm hợp qua ln đưa về dạng $\frac{0}{0}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Ví dụ 1: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x\sin x}$

c. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3 - 4x + 1}{x(2x+1)^2}$

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{(x+1)(x+2)} - x \right]$

e. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 3x)^{1/\sin x}$

Ví dụ 2:

Tìm các giới hạn sau:

$$a.\ \lim_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}$$

$$b.\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$$

$$c.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$$

$$d.\ \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2/\sin x}$$

$$e.\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{x-1/3}$$

$$f.\ \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)}{1-tgx}$$