ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG VIỆT - HÀN
Vietnam - Korea University of Information and Communication Technology

Chương 2:

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ - GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC - ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

2.4. HÀM SỐ LIÊN TỤC

2.4.1. Định nghĩa

- Hàm số f(x) xác định trong (a, b), $x_o \in (a, b)$, f(x) ***liên tục tại x_o*** nếu:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

- Hàm f(x) gọi là ***liên tục trái tại x_o*** nếu: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_o)$

- Hàm f(x) gọi là ***liên tục phải tại x_o*** nếu: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_o)$

- f(x) liên tục tại $x_o \Leftrightarrow$ f(x) liên tục trái và phải tại x_o.

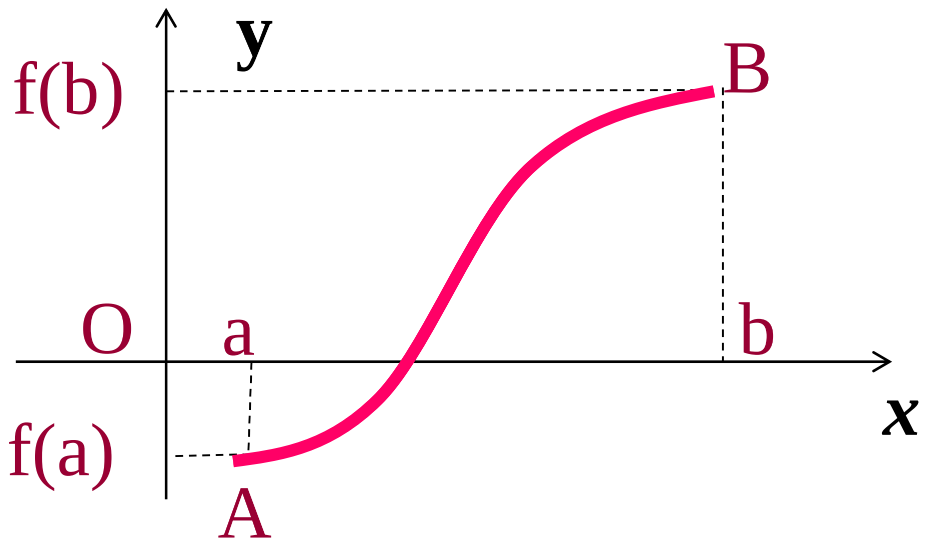
• Hàm số f(x) gọi là *liên tục trong (a, b)* nếu f(x) liên tục tại mọi điểm thuộc (a, b).

• Hàm số f(x) gọi là *liên tục trên [a, b]* nếu f(x) liên tục trong (a, b) và liên tục phải tại a, liên tục trái tại b.

Chú ý

Các hàm sơ cấp, hàm đa thức, hàm hữu tỉ liên tục trên miền xác định của nó.

Nếu hàm số y = f(x) liên tục trên đoạn [a, b] thì đồ thị của nó là một *đường nét liền* nối từ điểm A(a, f(a)) đến điểm B(b, f(b)).



Ví dụ. Xét xem hàm số sau có liên tục tại 0 không?

$$f(x)=\begin{cases}1 & khi \quad x>0\\ 0 & khi \quad x=0\\ -1 & khi \quad x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} -1=-1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

Do đó, hàm số không liên tục tại 0.

f(x)=1
f(x)=-1
f(x)=0

Ví dụ

Cho hàm số:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{khi } x\le 1 \\ 3-ax^2 & \text{khi } x>1 \end{cases}$$

Tìm a để hàm số liên tục tại x = 1

Ví dụ

Xét sự liên tục của hàm số sau trên R:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{khi } |x| > 1 \\ \cos\dfrac{\pi}{2}x & \text{khi } |x| \le 1 \end{cases}$$

2.4.2. Điểm gián đoạn của hàm số

Hàm số f(x) gọi là *gián đoạn tại x_o* nếu f(x) không liên tục tại x_o.

x_o là điểm gián đoạn của hàm số nếu xảy ra một trong các trường hợp sau:

- f(x) không xác định tại x_o
- Không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$
- f(x) xác định tại x_0, nhưng $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) \neq f(x_o)$

1. Nếu f(x) *không xác định tại x_o*, nhưng

$$\lim_{x \to x_o} f(x) \text{ tồn tại hữu hạn}$$

thì x_o gọi là *điểm gián đoạn bỏ được*.

2. Nếu $\lim\limits_{x \to x_o - 0} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to x_o + 0} f(x)$ *tồn tại hữu hạn* nhưng

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

thì x_o gọi là *điểm gián đoạn loại 1*

$\left| \lim\limits_{x \to x_o - 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_o + 0} f(x) \right|$: *bước nhảy* của f tại x_o.

Nếu điểm gián đoạn không thuộc 2 loại trên gọi là *điểm gián đoạn loại 2*.

Ví dụ

a. Hàm số $f(x) = \dfrac{\mathrm{tgx}}{x}$ không xác định tại x = 0

nhưng $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x} = 1.$

Nên x = 0 là điểm ***gián đoạn bỏ được.***

b. Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x-1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x-1) = 0$$

f(x)=x+1

f(x)=x-1

$$\Rightarrow \left|\lim_{x\to 1^+} f(x) - \lim_{x\to 1^-} f(x)\right| = 2$$

x = 1 là điểm gián đoạn loại 1, có bước nhảy là 2.

Ví dụ 2: Cho hàm số:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1}; & x>1\\ 2x+a; & x\le 1\end{cases}$$

a) Tính $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ & $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

b) Tìm a để x = 1 là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số với bước nhảy là 5.

Ví dụ

Tìm điểm gián đoạn và bước nhảy (nếu có) của các hàm số sau:

$$a.\ f(x)=\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$$

$$b.\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x^2+3) & \text{khi } x\le 1\\ 6-5x & \text{khi } 1<x<3\\ x-3 & \text{khi } 3\le x\end{cases}$$