ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG VIỆT - HÀN
Vietnam - Korea University of Information and Communication Technology

GIẢI TÍCH

Bài giảng điện tử

ĐÀ NẴNG - 2020

http://vku.udn.vn/

Chương 4: CHUỖI

4.1. ĐẠI CƯƠNG VỀ CHUỖI SỐ

4.1.1. Định nghĩa

Cho dãy số thực $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Biểu thức

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

gọi là chuỗi số.

- u_n, gọi là số hạng tổng quát thứ n.
- Tổng n số hạng đầu

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi (1).

- Nếu $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (hữu hạn) thì ta nói chuỗi số (1) hội tụ về S và S được gọi là tổng của chuỗi S_n. Ta viết:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

- Nếu $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ hoặc không tồn tại $\lim_{n\to\infty} S_n$ thì ta nói chuỗi số (1) phân kì.

Ví dụ

a. Chuỗi cấp số nhân

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + \dots. + q^n + \dots$$

- Khi $|q| < 1$: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$ hội tụ.
- Khi $|q| \geq 1$: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ phân kì.

b. Chuỗi số sau gọi là chuỗi điều hòa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots. + \frac{1}{n} + \dots$$

Chuỗi điều hòa phân kì.

b. Điều kiện cần của chuỗi số hội tụ:

Định lí 1: Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

Hệ quả: Nếu $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ (hoặc không tồn tại) thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

Chú ý: Nếu có $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ chưa chắc hội tụ.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2n+1}$ b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+1\right)$ c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$

c. Tính chất

Tính chất 1: Hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ; nếu chúng hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = C\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Tính chất 2: Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ cũng hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Tính chất 3: Hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$ $(k > 1)$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. (Nghĩa là tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số không đổi khi ta bớt đi hoặc thêm vào chuỗi số một số hữu hạn các số hạng đầu tiên).

Ví dụ. Xét sự hội tụ của các chuỗi số có số hạng tổng quát sau. Tính tổng (nếu có):

a. $u_n = 4\left(\frac{2}{3}\right)^n \ (n \geq 1)$

b. $u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^n} (n \geq 1)$

4.2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

4.2.1. Định nghĩa. Chuỗi số dương là chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, trong đó $u_n > 0, \forall n \geq 1$.

4.2.2.Các tiêu chuẩn xét sự hội tụ của chuỗi số dương

a. Tiêu chuẩn so sánh 1

Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, thỏa mãn

$0 < u_n \leq v_n, \forall n \geq 1$. Khi đó:

- *Nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *hội tụ thì* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ.*
- *Nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kì thì* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *phân kì.*

Ví dụ

Xét sự hội tụ của các chuỗi số dương sau

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n+2^n}$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+(-1)^n.3}{2^{n+3}}$

b. Tiêu chuẩn so sánh 2

Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = k$.

Khi đó:

- k = 0: $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.
- 0 < k < +∞: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.
- k = +∞: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ.

Ví dụ

Xét sự hội tụ của các chuỗi số dương sau

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n+1}{n^3+n^2+1}$

c. Quy tắc D’Alembert

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$

thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ khi $D < 1$, phân kì khi $D > 1$.

d. Quy tắc Cauchy

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Nếu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$

thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ khi $l < 1$, phân kì khi $l > 1$.

Ví dụ

Xét sự hội tụ của các chuỗi số dương sau

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$ b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$ c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

d. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{3n-2}\right)^{2n}$ e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$

e. Quy tắc tích phân

Nếu hàm f(x) liên tục, dương, giảm trên [k, +∞), và f(x) → 0 khi x → +∞. Đặt u_n *= f(n). Khi đó chuỗi số dương:*

$$\sum_{n=k}^{\infty} u_n = \sum_{n=k}^{\infty} f(n)$$

và tích phân suy rộng $\int_k^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc

phân kỳ.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a. Chuỗi Rieman $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$

4.3. CHUỖI CÓ SỐ HẠNG VỚI DẤU BẤT KÌ

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với $u_n \in \mathbb{R}$ được gọi là chuỗi có dấu bất kỳ.

4.3.1. Hội tụ tuyệt đối. Bán hội tụ

Định lý: Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Chú thích. Điều kiện $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ là điều kiện đủ để chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. Vì có thể $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ mà $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ.

Định nghĩa. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là

- Hội tụ tuyệt đối nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ.
- Bán hội tụ nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ.

Định lý. Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Đặt $\alpha = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$

hay $\alpha = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}$. Khi đó

- Nếu $\alpha < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ.
- Nếu $\alpha > 1$ thì chuỗi đã cho phân kỳ.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2)}{n\sqrt{n}}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^2}$

4.3.2. Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu là chuỗi có dạng:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n,\ u_n > 0.$$

Tiêu chuẩn Leibnitz

Cho chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ thỏa mãn điều kiện:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
2. Dãy $\{u_n\}$ là dãy giảm.

thì chuỗi đan dấu đã cho hội tụ và có tổng $S \leq u_1$.

Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

Ta thấy dãy $u_n = \frac{1}{n}$ là dãy giảm và có $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$

Ta có: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$

và $u_n = \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{\ln(n+2)} = u_{n+1}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

BÀI TẬP

Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n-1}{n(\sqrt[3]{n}+1)}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n!}$

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

4.4. CHUỖI LŨY THỪA

4.4.1. Định nghĩa

Chuỗi lũy thừa là chuỗi mà số hạng tổng quát của nó là hàm số có dạng $a_n x^n$, trong đó a_n là hằng số:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

a_n gọi là hệ số của chuỗi lũy thừa.

Nếu cho $x = x_0$ thì chuỗi lũy thừa trở thành chuỗi số

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

Nếu chuỗi số này hội tụ, khi đó chuỗi lũy thừa hội tụ tại x_0 và x_0 là điểm hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Tập hợp tất cả các điểm hội tụ gọi là miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

Ví dụ

Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ là một chuỗi nhân công bội x

Nếu |x|<1 nó hội tụ và có tổng $\dfrac{1}{1-x}$

Nếu |x| ≥ 1, nó phân kì

Vậy miền hội tụ của nó là (-1, 1)

Chú ý:

Chuỗi hàm số có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + ... + a_n (x - x_0)^n + ...$$

gọi là chuỗi lũy thừa theo $(x - x_0)$ hay chuỗi lũy thừa ở lân cận x_0

Nếu đặt $X = x - x_0$ thì đưa được về dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$

4.4.2. Bán kính hội tụ. Miền hội tụ

a. Bán kính hội tụ

Định lí Abel:

- Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x = x_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi x với $|x| < |x_0|$.
- Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kì tại x_0 thì nó phân kì tại mọi x với $|x| > |x_0|$.

Định nghĩa

Chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại x = 0.

Nếu tồn tại số R ≥ 0 sao cho chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ trong khoảng (-R, R) và phân kì trong các khoảng (- ∞, - R) và (R, + ∞) thì R gọi là bán kính hội tụ và khoảng (- R, R) gọi là khoảng hội tụ của chuỗi luỹ thừa.

Tại x = - R và x = R chuỗi có thể hội tụ, cũng có thể phân kì.

b. Quy tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa.

Định lí

Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nếu

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \quad \text{hoặc} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

thì bán kính hội tụ R của chuỗi luỹ thừa trên được xác định như sau:

$$R = \begin{cases} 1/\rho & \text{nếu } 0 < \rho < +\infty \\ 0 & \text{nếu } \rho = +\infty \\ +\infty & \text{nếu } \rho = 0 \end{cases}$$

c. Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

Muốn tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa, ta tìm bán kính hội tụ R để xác định khoảng hội tụ (- R, R) của nó, rồi xét sự hội tụ của nó tại hai điểm x = ± R.

Ví dụ

Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

$$a.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n} \qquad b.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}} \qquad c.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n (x-2)^n$$