ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG VIỆT - HÀN
Vietnam - Korea University of Information and Communication Technology

GIẢI TÍCH

Bài giảng điện tử

GV: Hồ Thị Hồng Liên
Tổ Cơ bản

ĐÀ NẴNG - 2020

http://vku.udn.vn/

Mục tiêu học phần

Nắm được các kiến thức cơ bản về Giải tích như

- Giới hạn, đạo hàm, vi phân của hàm một biến số; Các ứng dụng của định lí giá trị trung bình để tính giới hạn và khảo sát, vẽ đồ thị hàm một biến;
- Các phương pháp tìm nguyên hàm và tính tích phân xác định, khái niệm tích phân suy rộng, ứng dụng của tích phân vào tích độ dài, diện tích, thể tích;
- Các khái niệm về chuỗi, sự hội tụ của chuỗi số và cách tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa;
- Các khái niệm và cách tính đạo hàm, vi phân của hàm nhiều biến.

- Vận dụng các kiến thức vào việc giải các dạng bài tập cơ bản và liên hệ để giải một số bài toán liên quan đến chuyên ngành.

Nội dung

Chương 1: Tập hợp, ánh xạ và số phức

Chương 2: Hàm số một biến số - Giới hạn và liên tục – Đạo Hàm và vi phân

Chương 3: Phép tính tích phân của hàm số một biến số

Chương 4: Chuỗi

Chương 5: Hàm nhiều biến số

Chương 1: Tập hợp, ánh xạ và số phức

1.1 Tập hợp

1.2 Ánh xạ

1.3 Số phức

Chương 2: Hàm số một biến số - Giới hạn và liên tục – – Đạo Hàm và vi phân

2.1 Hàm số một biến

2.2 Giới hạn của hàm số

2.3 Vô cùng bé và vô cùng lớn

2.4 Hàm số liên tục

2.5 Đạo hàm – vi phân

2.6 Các định lý về hàm khả vi

Chương 3: Phép tính tích phân của hàm số một biến số

3.1 Tích phân bất định

3.2 Tích phân xác định

3.3 Một số ứng dụng hình học của tích phân xác định

3.4 Tích phân suy rộng

Chương 4: Chuỗi

4.1 Đại cương về chuỗi số

4.2 Chuỗi số dương

4.3 Chuỗi có số hạng với dấu bất kỳ

4.4 Chuỗi lũy thừa

Chương 5: Hàm nhiều biến số

5.1 Khái niệm mở đầu

5.2 Đạo hàm riêng. Vi phân toàn phần

5.3 Cực trị hàm hai biến

Giáo trình chính:

[1] Nguyễn Đình Trí, *Toán cao cấp, tập 2* – Phép tính giải tích một biến số, NXB Giáo dục, 2006.

[2] Nguyễn Đình Trí, *Toán cao cấp, tập 3* – Phép tính giải tích nhiều biến số, NXB Giáo dục, 2006.

Tài liệu tham khảo:

[1] Nguyễn Đình Trí, *Bài tập toán cao cấp, tập 1*, NXB Giáo dục 2007.

[2] *Toán cao cấp - phần giải tích*, Thái Xuân Tiến, Đặng Ngọc Dục, Tủ sách Đại học Kinh tế Đà Nẵng.

Kiểm tra, đánh giá

- Chuyên cần: 10%
- Quá trình (bài tập nhóm): 10%
- Kiểm tra giữa kỳ (1 tiết, tự luận): 20%
- Thi cuối kỳ (tự luận, đề đóng, 90 phút) : 60%

Chương 1: TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

1.1 Tập hợp

1.2 Ánh xạ

1.3 Số phức

1.1. TẬP HỢP

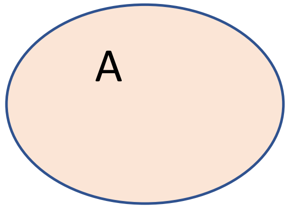
1.1.1. Tập hợp và các phần tử của tập hợp

a. Tập hợp là một khái niệm cơ bản của Toán học, dùng để chỉ một nhóm đối tượng nào đó mà ta quan tâm.

Cho tập A. Phần tử a thuộc tập A, ta viết $a \in A$. Phần tử a không thuộc tập A, ta viết $a \notin A$.

Tập hợp rỗng là tập hợp không có phần tử nào, ký hiệu $\emptyset$.

Để minh họa một tập hợp chúng ta dùng biểu đồ Ven.



b. Lực lượng của tập hợp A là số phần tử của tập hợp A, kí hiệu $|A|$. Nếu A có hữu hạn phần tử, ta nói A hữu hạn, ngược lại ta nói A vô hạn.

Ví dụ:

- $|\emptyset| = 0$.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ là các tập vô hạn.
- X={-1, 2, 3, 5} là tập hữu hạn với $|X| = 4$.

c. Cách xác định tập hợp

1. Cách liệt kê các phần tử của tập hợp

Ví dụ. A={1,2,3,5,6,15,30} là tập các ước nguyên dương của 30.

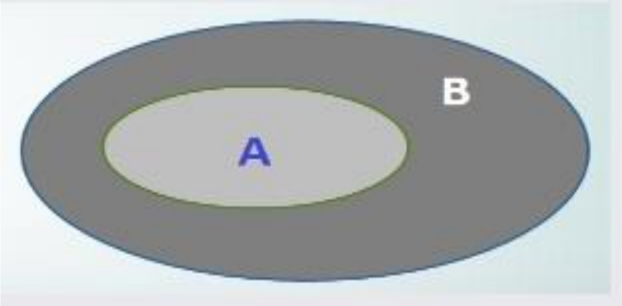
2. Cách đưa ra thuộc tính đặc trưng

Ví dụ. B={n∈ $\mathbb{N}$/n chia hết cho 3}

1.1.2. Quan hệ giữa các tập hợp:

a. Bao hàm-Tập hợp con. Nếu mọi phần tử của tập A đều là phần tử của tập B, ta nói tập A là con của tập B, ký hiệu là $A \subset B$, nghĩa là

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

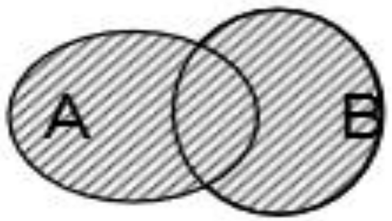


Tập hợp rỗng là tập con của mọi tập hợp.

b. Bằng nhau. Hai tập A và B được gọi là bằng nhau nếu $A \subset B$ và $B \subset A$, ký hiệu $A = B$.

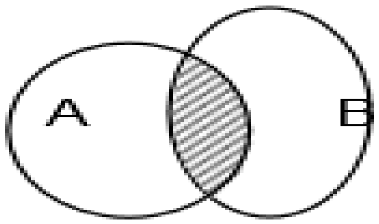
1.1.3. Các phép toán trên tập hợp:

a. Phép hợp



$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ hoặc } x \in \text{B}\}$$

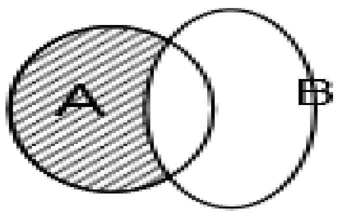
b. Phép giao



$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ và } x \in \text{B}\}$$

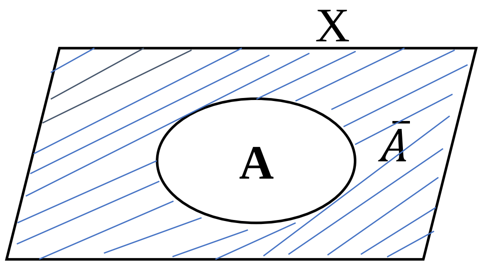
Chú ý: Nếu $A \cap B = \emptyset$ ta nói A, B là 2 tập rời nhau.

c. Hiệu của hai tập hợp



$$A \backslash B = \{x / x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

d. Phần bù. Nếu $A \subset X$ thì $X \backslash$A gọi là phần bù của A trong X, ký hiệu C_X^A hay $\bar{A}$



Vậy $C_X^A = X \backslash \text{A}$ khi $A \subset \text{X}$

Tính chất

Giả sử A, B, C là các tập con của tập X. Khi đó ta có các tính chất sau

1. $\bar{\bar{A}} = A$
2. $A \cup A = A$ $\quad$ $A \cap A = A$
3. $A \cup \bar{A} = X$ $\quad$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$
4. $A \cup X = X$ $\quad$ $A \cap X = A$
5. $A \cup \emptyset = A$ $\quad$ $A \cap \overline{\emptyset} = \emptyset$
6. $A \cup B = B \cup A$ $\quad$ $A \cap B = B \cap A$
7. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\quad$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
8. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ $\quad$ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
9. Công thức De Morgan

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\quad$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

1.1.4. Tích Descartes của các tập hợp:

a. Cho 2 tập A, B không rỗng, với mỗi $a \in A$ và mỗi $b \in B$, ta lập cặp (a, b) gọi là một cặp sắp thứ tự (viết phần tử $a \in A$ trước và phần tử $b \in B$ sau). Tích Descartes của 2 tập A & B, kí hiệu $A \times B$, là tập: $A \times B = \{(a, b) / a \in A, b \in B\}$

Chú ý:

* $A \times A$: kí hiệu A^2
* $A \times B \neq B \times A$
* $|A \times B| = |A|.|B|$

b. Tích Descartes của n tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$, là tập:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) / a_i \in A_i\}$$

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

$B^2 = B \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

1.2. ÁNH XẠ

1.2.1. Định nghĩa. Cho 2 tập X, Y khác $\varnothing$. Ta gọi ánh xạ f từ X vào Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với duy nhất 1 phần tử $y \in Y$.

Kí hiệu:
$$\begin{aligned} f:\ & X \to Y \\ & x \mapsto y = f(x) \end{aligned} \quad \text{hay} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

Trong đó: X: tập nguồn, Y: tập đích

y: ảnh của x, x: nghịch ảnh của y.

Chú ý:

1. Tập $f(X) = \{f(x)/\ x \in X\}$ gọi là ảnh của ánh xạ f. Vậy $f(X) \subseteq Y$.

   Nếu $A \subset X$ thì tập $f(A) = \{f(x)/\ x \in A\}$ gọi là ảnh của tập A.

2. Nếu $B \subset Y$ thì tập $f^{-1}(B) = \{x \in X / f(x) \in B\}$ gọi là nghịch ảnh của tập B.

1.2.2. Các loại ánh xạ

a. Đơn ánh:

Ánh xạ f: X $\to$ Y gọi là đơn ánh nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Hay $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

b. Toàn ánh:

Ánh xạ f gọi là toàn ánh nếu f(X) = Y.

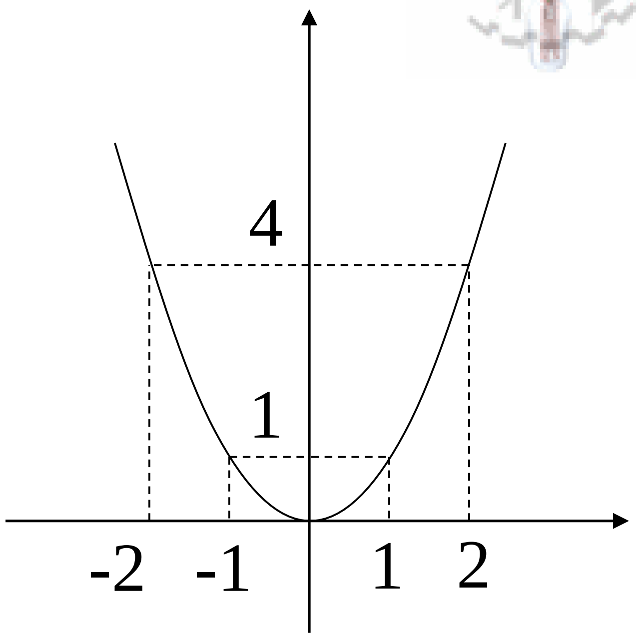
Nghĩa là: mọi phần tử bất kì $y \in Y$ tồn tại ít nhất một phần tử $x \in X$ sao cho y = f(x).

c. Song ánh:

f gọi là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

Ví dụ: 1. Xét ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto y = f(x) = x^2$$



- Ta có: $\forall x_1, x_2 \in R$, $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{array}\right.$$

Nên ánh xạ f không là đơn ánh.

- $\forall y \in R^+$, phương trình: $x^2 = y$ có nghiệm $\begin{cases} x = \sqrt{y} \\ x = -\sqrt{y} \end{cases}$

Vậy tồn tại $x = \sqrt{y} \in R$ hay $x = -\sqrt{y} \in R$

để $f(x) = x^2 = y$ hay f là toàn ánh.

2. Ánh xạ $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto y = f(x) = x^2$$

là một song ánh.

1.2.3. Ánh xạ ngược

Cho f: X → Y là một song ánh. Ánh xạ

$$f^{-1}: Y \to X$$

$$y \mapsto x = f^{-1}(y) \text{ với } y = f(x)$$

gọi là ánh xạ ngược của *f*.

Ví dụ. Song ánh $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x^3 + 1$$

Có ánh xạ ngược là $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y \mapsto x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$$

1.2.4. Tích (hợp) của hai ánh xạ

Cho 2 ánh xạ: $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$

Ta gọi ánh xạ hợp (tích) của ánh xạ f và g, kí hiệu *gof*, là ánh xạ:

$$g \circ f : X \to Z$$
$$x \mapsto (g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right]$$

Ví dụ. Cho 2 ánh xạ:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{và} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x) = x^2 + 3 \qquad\qquad y \mapsto z = g(y) = \cos y$$

Khi đó ta có:

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g \circ f(x) = g\left[f(x)\right] = \cos(x^2+3) \qquad x \mapsto f \circ g(x) = f\left[g(x)\right] = \cos^2 x + 3$$

1.3. SỐ PHỨC

1.3.1. Định nghĩa

- Số phức là biểu thức có dạng:

$$z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$$

Trong đó:

+ i: *đơn vị ảo*, $i^2 = -1$

+ a: *phần thực* của z, kí hiệu: Rez

+ b: *phần ảo* của z, kí hiệu: Imz

+ $\sqrt{a^2 + b^2}$: Module của số phức z, kí hiệu: $|z|$

- Tập hợp các số phức, ký hiệu là $\mathbb{C}$. Tức là:

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \,/\, a, b \in R, i^2 = -1\}$$

- Nếu $b = 0$ thì $z = a \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

  Nếu $a = 0$ thì $z = ib$ là *số ảo thuần túy*

  Nếu $a = b = 0$ thì $z = 0$: *số phức không*

- *Hai số phức bằng nhau:*

  Cho $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$

  $$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ và } b_1 = b_2$$

- Nếu $z = a + ib$ thì $-a - ib = -z$: gọi là *số phức đối* của z.

  $\bar{z} = a - ib$: số phức liên hợp của z

1.3.2. Các phép toán về số phức

Cho hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1$ và $z_2 = a_2 + ib_2$

a. Phép cộng: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

b. Phép nhân: $z_1.z_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

c. Nghịch đảo của số phức: Cho số phức $z = a + ib$.

Ta có: $z.\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$

Nếu $z \neq 0$ thì tồn tại số phức, kí hiệu: z^{-1}, sao cho:

$z.z^{-1} = 1$, z^{-1}: Nghịch đảo của số phức z.

Vậy $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib}$, và ta tính được: $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$.

d. Phép chia: Nếu $z_2 \neq 0$. Khi đó:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Ví dụ. Cho $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = 2 + 3i$

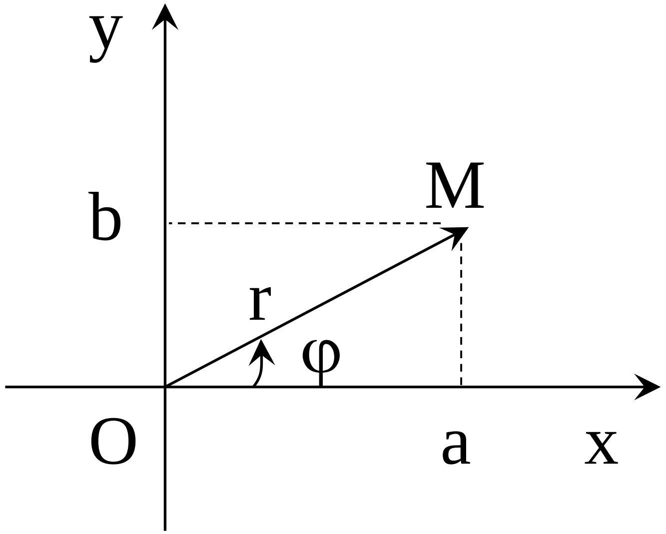
Xác định các số phức sau:

- $z_1 + z_2 = 3 + 2i$
- $z_1.z_2 = 5 + i$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{1}{13} - \dfrac{5}{13}i$
- Số phức nghịch đảo của z_1 : $z_1^{-1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

1.3.3. Dạng lượng giác của số phức

* Cho số phức: $z = a + bi,\ z \neq 0.$

z được biểu diễn bởi điểm M trên mặt phẳng phức.



Góc định hướng φ giữa $\overrightarrow{Ox}$ và $\overrightarrow{OM}$ được gọi là argument của z và ký hiệu:

$$\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z),$$

$$0 \le \varphi < 2\pi \text{ hay } -\pi \le \varphi < \pi$$

Ta có: $\begin{cases} a = r.\cos\varphi \\ b = r.\sin\varphi \end{cases}$; $\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \\ \tan\varphi = \dfrac{b}{a} \ (1) \end{cases}$

Khi đó dạng lượng giác của z = a + ib là

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Chú ý: Trong [0, 2π) hoặc [- π; π) có hai góc φ_1 và φ_2 thỏa pt (1), ta chọn φ sao cho sin φ cùng dấu với b.

Ví dụ. Đưa các số phức sau về dạng lượng giác:

a. $1-i$ b. $1+i\sqrt{3}$ c. $1-i\sqrt{3}$

d. i $e. -2i$ $f. 1$ $g. -2$

a. Ta có: a = 1, b = -1

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Trong [0, 2 π): $tg\varphi = -1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = {}^{3\pi}\!/_{4} \\ \varphi = {}^{7\pi}\!/_{4} \end{array}\right.$

Chọn φ = 7π/4 vì sinφ cùng dấu với b

Dạng lượng giác của z là:

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4})$$

$$b.\ 1+i\sqrt{3}=2(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3})$$

$$c.\ 1-i\sqrt{3}=2(\cos\frac{5\pi}{3}+i.\sin\frac{5\pi}{3})$$

$$d.\ i=\cos\frac{\pi}{2}+i.\sin\frac{\pi}{2}$$ (nằm trên phần dương của trục ảo)

$$e.\ -2i=2(\cos\frac{3\pi}{2}+i.\sin\frac{3\pi}{2})$$ (nằm trên phần âm của trục ảo)

f. 1 = cos0 + i sin0 (nằm trên phần dương của trục thực)

g. -2 = cosπ + i sinπ (nằm trên phần âm của trục thực)

Các phép tính của số phức dưới dạng lượng giác

Cho hai số phức $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i.\sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i.\sin\varphi_2)$

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2. Phép nhân

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i.\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]}$$

3. Phép chia

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i.\sin(\varphi_1 - \varphi_2)],\ r_2 \neq 0}$$

Đặc biệt: Nếu $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ thì $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i.\sin(-\varphi)]$

4. Lũy thừa:

$$\boxed{z^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]}$$

Công thức Moivre:

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)}$$

5. Công thức khai căn:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), k = \overline{0, n-1}$$

Ta có n căn bậc n của số phức z (chúng có cùng Module)

Ảnh của chúng là các đỉnh của một đa giác đều n cạnh.

6. Công thức Euler. Dạng mũ của số phức

- Công thức Euler

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$ (với e là cơ số Nê-pe (Napier))

- Dạng lượng giác của số phức:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Có thể được viết ở dạng mũ là

$$z = re^{i\varphi}$$

Ví dụ

1. Tính:

a. $\left(\sqrt{3}-i\right)^2$ b. $\left(1+2i\right)^3$ c. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}$

2. Tìm:

a. $\sqrt{i}$ b. $\sqrt[3]{1-i}$

3. Viết các số phức sau dưới dạng mũ

a. $1+i$ b. $1-i\sqrt{3}$