ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG VIỆT - HÀN
Vietnam - Korea University of Information and Communication Technology

Chương 3

PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN

ĐÀ NẴNG - 2020

http://vku.udn.vn/

CHƯƠNG 3

3.1 TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

3.2 TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

3.3 TÍCH PHÂN SUY RỘNG

3.4 MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TP

3.1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

3.1.1. Định nghĩa

F(x) là nguyên hàm của f(x) nếu F'(x) = f(x).

Tích phân bất định của hàm f(x):

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

với F(x) là nguyên hàm của f(x).

Bảng công thức nguyên hàm

1. $\int a dx = ax + C$ với a là hằng số;

2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1;$

$\int e^x dx = e^x + C;$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

6. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C;$

7. $\int \text{cotg}\, x dx = \ln|\sin x| + C;$

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C;$

9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \text{cotg}^2 x) dx = -\text{cotg}\, x + C;$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2;$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C_1 = -\arccos \frac{x}{a} + C_2;$ a > 0

12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C_1 = -\text{arccotg}\, x + C_2;$

13. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C_1 = -\frac{1}{a} \text{arccotg} \frac{x}{a} + C_2;$ a > 0

14. $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C; \quad a > 0$

15. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C; \quad a > 0$

16. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + b}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C; \; b \neq 0$

17. $\int \sqrt{x^2 + b}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + b} + \frac{b}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C; \; b \neq 0.$

3.1.2. Phương pháp tính tích phân bất định

a. Phương pháp đổi biến

PP đổi biến 1: $x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t)dt$

Lúc đó, $\int f(x)dx = \int f[u(t)]u'(t)dt$

PP đổi biến 2: $u(x) = t \Rightarrow u'(x)dx = u'dt$

Lúc đó, $\int f\left[u(x)\right]u'(x)dx = \int f(t)dt$

Ví dụ. Tìm các tích phân sau:

$a.\ I_1 = \int \sqrt{1-x^2}dx$ $\qquad$ $b.\ I_2 = \int e^x\sqrt{4+e^x}dx$

b. Phương pháp tích phân từng phần

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Nhận xét

+ $\int f(x).\begin{bmatrix} \sin ax \\ cosax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx$ ta đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx \end{cases}$

+ $\int f(x)\begin{bmatrix} \ln(ax) \\ \arcsin x \\ \arctan x \end{bmatrix} dx$ ta đặt: $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \ln(ax) \\ \arcsin x \\ \arctan x \end{bmatrix} \\ dv = f(x)dx \end{cases}$

Ví dụ. Tính các tích phân sau:

a. $I_1 = \int x.\sin x dx$

b. $I_2 = \int \arcsin x \, dx$

c. $I_3 = \int x \ln x dx$

d. $I_4 = \int x^2 e^{-x} dx$

e. $I_5 = \int e^x \cos x dx$

3.1.3. Tích phân của một số hàm thường gặp

a. Tích phân hàm hữu tỉ

- Tích phân hàm hữu tỉ đơn giản

1. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C, \quad a \neq 0$$

2. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^k} = \int (ax+b)^{-k}dx = \frac{1}{a(1-k)}(ax+b)^{1-k} + C, \ \ a \neq 0, k \neq 1$$

3. $$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx + \left(B - \frac{Ab}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$$

4. $$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}} = \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$$

• Tích phân của các hàm hữu tỉ dạng $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$

Trường hợp bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu (n < m)

- Phân tích $Q_m(x)$ thành các nhị thức, tam thức bậc hai hoặc các lũy thừa của chúng:

Giả sử $Q_m(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^r$

- Phân tích

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + $$

$$+ \frac{C_1x+D_1}{x+px+q} + \frac{C_2x+D_2}{(x+px+q)^2} + \ldots + \frac{C_rx+D_r}{(x+px+q)^r}$$

- Quy đồng, đồng nhất thức ở tử hoặc cho x các giá trị đặc biệt đưa đến một hệ phương trình đối với các hệ số đó (phương pháp này gọi là hệ số bất định).

Ví dụ. Tìm

a. $I_1 = \int \frac{(2x+1)}{x^3-1}dx$ b. $I_2 = \int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx$

Giải

a. $\frac{(2x+1)}{x^3-1} = \frac{(2x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$

Quy đồng phân số $2x+1 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$

hay $2x+1 = (A+B)x^2 + (A-B+C)x + A - C$

Đồng nhất đa thức

Bậc 2: A + B = 0

Bậc 1: A – B + C = 2

Bậc 0: A – C = 1

$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \end{cases}$

$$I_1=\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{-x}{x^2+x+1}dx=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\int\frac{dx}{\left(x+1/2\right)^2+3/4}$$

$$=\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C$$

$$=\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

b. Tích phân các hàm lượng giác

- Dạng $\int f(\sin x, \cos x)dx$

- Nếu $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$: đặt t = cosx

- Nếu $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$: đặt t = sinx

- Nếu $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$: đặt t = tanx

- Tổng quát: đặt $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$

Khi đó: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\mathrm{tg}x = \frac{2t}{1-t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Ví dụ: Tính:

a. $\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x}$

Đặt t = cosx

b. $\int \sin^2 x.\cos^3 x dx$

Đặt t = sinx

c. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$

Đặt t = tgx

d. $I = \int \frac{dx}{\sin x + 1}$

Đặt $t = tg\frac{x}{2}$

Dạng $\int \sin^n x \cos^m dx \qquad (n, m \in \mathbb{Z})$

Áp dụng trường hợp đặc biệt trên:

- Nếu n hoặc m là số lẻ thì đổi biến t = cosx hoặc t = sinx
- Nếu n và m là hai số chẵn và dương thì dùng CT hạ bậc.
- Nếu n và m là hai số chẵn và có 1 số âm thì đổi biến t = tgx hoặc t = cotgx

Ví dụ: Tính:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx$$

Đặt t = cosx

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$$

Đặt t = tgx

Dạng $\int \cos ax \cos bx dx, \int \sin ax \sin bx dx, \int \cos ax \sin bx dx$

Biến đổi hàm dưới dấu tích phân thành tổng

Dạng $\int \sin^n x dx, \int \cos^n x dx$

- Dùng công thức hạ bậc (nếu n chẵn)

- Dùng các dạng đặc biệt của tích phân dạng lượng giác

c. Tích phân hàm vô tỉ.

a. Dạng $\int R[x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m}{n}}, \ldots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{s}}]dx$

trong đó, a, b, c, d là những hằng số thoả mãn điều kiện $ad - bc \neq 0$, m, n,.., r là những số nguyên.

Đặt $t^k = \frac{ax+b}{cx+d}$

(k là mẫu số chung của m/n,…, r/s)

Ví dụ: Tính:

Đặt $t^6 = x$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

Dạng $\int R(x, \sqrt{(ax^2 + bx + c)}\, dx$

Bằng cách đổi biến: u = x + b/2a đưa về 1 trong 3 dạng sau:

- $\int R(u, \sqrt{a^2 - u^2})du$, đặt u = asint
- $\int R(u, \sqrt{a^2 + u^2})du$, đặt u = a tgt
- $\int R(u, \sqrt{u^2 - a^2})du$, đặt u = a/cost

Ví dụ: Tính:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}$$

Đặt u = x + 1

Đặt u = x + 2

XIN CHÂN THÀNH CẢM ƠN !!