Chương 2:

BIẾN NGẪU NHIÊN & CÁC LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

2.1 BIẾN NGẪU NHIÊN

2.2 HÀM PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

2.3 CÁC THAM SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

2.4 CÁC PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CƠ BẢN

2.1. BIẾN NGẪU NHIÊN

2.1.1 ĐINH NGHĨA

2.1.2 PHÂN LOẠI BIẾN NGẪU NHIÊN

2.1.3 BNN RỜI RẠC, BẢNG PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

2.1.4 BNN LIÊN TỤC, HÀM MẬT ĐỘ

2.1.1. Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên hay ĐLNN là đại lượng mà tùy theo mỗi kết quả của phép thử, nó chỉ nhận một giá trị bằng số xác định nào đó tương ứng.

Đ/n một cách chặt chẽ:

Cho phép thử T có không gian mẫu là Ω.

Một ánh xạ:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to R \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

gọi là đại lượng ngẫu nhiên hay biến ngẫu nhiên.

Các biến ngẫu nhiên được ký hiệu: *X*, *Y*, *Z*, …

Các giá trị tương ứng của chúng là *x*, *y*, *z*,…

Ví dụ:

a) Xét phép thử: “Gieo 1 đồng xu 1 lần”. Gọi X là đại lượng “ chỉ số mặt sấp xảy ra”. Khi đó, X là một BNN nhận các giá trị {0,1}.

b) Xét phép thử: “Tung 1 con súc xắc”.
Gọi X là đại lượng “chỉ số chấm xuất hiện”. Khi đó, X là một BNN nhận các giá trị {1,2,3,4,5,6}.

c) Xét phép thử: “Chọn ngẫu nhiên một sinh viên của trường A”.
Gọi X là đại lượng “chỉ tổng số điểm thi vào trường của SV đó”
Y là đại lượng “chỉ chiều cao của SV đó”
Z là đại lượng “chỉ trọng lượng và chiều cao của SV đó”
Khi đó, X, Y, Z là các BNN và Z là biến ngẫu nhiên 2 chiều.

2.1.2. PHÂN LOẠI BIẾN NGẪU NHIÊN

**** Có hai loại biến ngẫu nhiên:***

- Nếu tập giá trị của X là hữu hạn hoặc vô hạn đếm được thì X gọi là biến ngẫu nhiên rời rạc.

- Nếu tập giá trị của X là một đoạn hay khoảng số thực thì X gọi là biến ngẫu nhiên liên tục.

Ví dụ

1. Một rổ cam có 10 quả trong đó có 4 quả hỏng. Lấy ngẫu nhiên 5 quả. Gọi X là số quả hỏng trong 5 quả lấy ra.

Khi đó X nhận các giá trị 0, 1, 2, 3, 4 nên X là BNN rời rạc.

2. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên của một trường đại học A, chiều cao của sinh viên được chọn ra là một BNN liên tục.

2.1.3. BNN RỜI RẠC, BẢNG PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

X là BNN rời rạc, X = $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, \}$, với xác suất tương ứng là $p_i = P(X = x_i)$, bảng sau:

X	x_0	x_1	x_2	...
p_i	p_0	p_1	p_2	...

được gọi là bảng phân phối xác suất của BNN X

+ Xác định các giá trị có thể có x_i của X

+ Tính các xác suất p_i tương ứng với các giá trị x_i.

Ví dụ

1. Tung một đồng xu 2 lần. Gọi X là số lần được mặt sấp. Lập bảng ppxs của X.

Giải:

X có thể nhận các giá trị: 0, 1, 2

Không gian mẫu Ω = {SS, NN, SN, NS}

P(X = 0) =1/4

P(X = 1)= 2/4

P(X = 2) = 1/4

Bảng ppxs của X là:

X	0	1	2
p_i	$1/4$	$2/4$	$1/4$

2. Ba sv làm bài thi, xác suất đạt yêu cầu của mỗi em lần lượt là 0.8, 0.7, 0.6. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số sv đạt yêu cầu.

Lập bảng phân bố xác suất của X?

HD:

X có thể nhận các giá trị: 0, 1, 2, 3

Gọi A_i là biến cố chỉ i sv đạt yêu cầu (i =0, 1,2,3)

$P(X = 0) = P(A_0) =$

$P(X = 1) = P(A_1) =$

$P(X = 2) = P(A_2) =$

$P(X = 3) = P(A_3) =$

Bảng ppxs của X là:

X	0	1	2	3
p_i				

Chú ý

1. Phải kiểm tra lại xem tổng xs có bằng 1 không

2. Không được tính:

$$P(X=x_n) = 1 - P(X=x_0) - P(X= x_1) - \ldots$$

3. Không được tính xs ra số thập phân nếu phép chia không hết, nếu có giản ước thì để cùng mẫu.

3. Một hộp có 6 viên bi, trong đó có 4 bi trắng, 2 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 bi trong hộp. Gọi X là số bi trắng lấy được. Lập bảng ppsx của X.

HD:

X có thể nhận các giá trị: 0, 1, 2

Không gian mẫu có C_6^2 phần tử

P(X = 0) =

P(X = 1)=

P(X = 2) =

Bảng ppxs của X là:

X	0	1	2
p_i	$1/15$	$8/15$	$6/15$

2.1.4. BNN LIÊN TỤC, HÀM MẬT ĐỘ

Cho X là BNN liên tục, hàm f(x), x ∈ R được gọi là hàm mật độ xác suất của X nếu thỏa mãn hai điều kiện:

- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathrm{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Khi đó, $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Chú ý

1. Vì P(X= a) = $\int_a^a f(x)dx = 0$ nên suy ra:

$$P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = P(a < X < b)$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

2. Về mặt hình học, sx của BNN X nhận giá trị trong (a, b) bằng diện tích hình thang cong giới hạn bởi x = a, x= b, y = f(x) và trục Ox.

3. Nếu f(x) thỏa mãn 2 điều kiện trong đ/n thì f(x) là hàm mật độ của BNN X nào đó

Ví dụ

1. Chứng tỏ

$$f(x)=\begin{cases}4x^3, & x\in(0,1)\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases}$$

là hàm mật độ của BNN X

2. Cho biến NN X có hàm mật độ:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \dfrac{k}{x^2}, & x\geq 1\end{cases}$$

Tìm k và tính P(-3< X ≤ 2)

2.2. HÀM PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

2.2.1. Định nghĩa

Hàm phân phối xác suất của BNN X, kí hiệu F(x), là xác suất để X nhận giá trị nhỏ hơn x, nghĩa là:

$$\forall x \in R,\ F(x) = P(X < x)$$

- Nếu X là BNN rời rạc với xác suất $P(X = x_i) = p_i$ thì

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

- Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ f(x) thì

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

2.2.2. Tính chất

Gọi F(x) là hàm phân phối xác suất của BNN X. Khi đó ta có một số kết quả sau đây:

$$a.\ \ 0 \le F(x) \le 1,\quad \forall x \in R$$

b. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$

$$c.\quad F(-\infty) = 0,\qquad F(+\infty) = 1$$

d. F(x) là một hàm không giảm trên R

NHẬN XÉT

1. Mối liên hệ giữa bảng phân phối xác suất và hàm phân phối xác suất:

Bảng ppxs của X:

X	x_0	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_0	p_1	p_2	...	p_n

Hàm phân phối xs của *X*:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{nếu } x \le x_0 \\ p_0 & \text{nếu } x_0 < x \le x_1 \\ p_0+p_1 & \text{nếu } x_1 < x \le x_2 \\ \ldots & \\ p_0+p_1+\ldots+p_{n-1} & \text{nếu } x_{n-1} < x \le x_n \\ 1 & \text{nếu } x_n < x \end{cases}$$

2. Mối liên hệ giữa hàm phân phối và hàm mật độ xác suất.

Nếu X là BNN liên tục thì F(x) liên tục tại mọi x $\in$ R và

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= F'(x) \\ F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \end{aligned}}$$

Ví dụ

1. Xét phép thử gieo một đồng xu cân đối, đồng chất 2 lần. Gọi X là BNN chỉ số lần xuất hiện mặt sấp trong 2 lần gieo. Lập hàm phân phối xác suất của X.

Giải

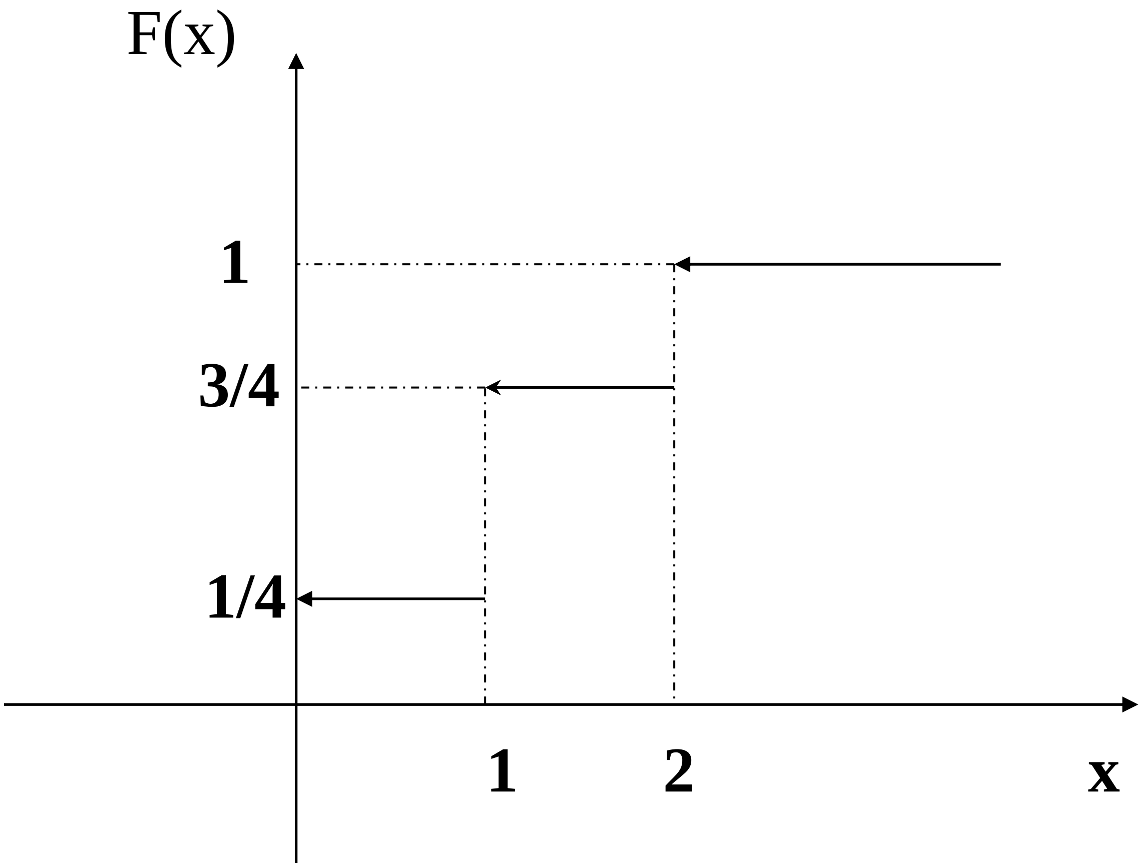
Bảng ppxs của X là:

X	0	1	2
p_i	$1/4$	$2/4$	$1/4$

Vậy hàm phân phối xác suất của X là:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & \textbf{nếu } \mathbf{x \le 0} \\ \dfrac{1}{4} & \textbf{nếu } \mathbf{0 < x \le 1} \\ \dfrac{3}{4} & \textbf{nếu } \mathbf{1 < x \le 2} \\ 1 & \textbf{nếu } \mathbf{2 < x} \end{cases}$$

Đồ thị:



Ví dụ

2. Cho X là BNN nhiên liên tục có hàm phân phối:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \le 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{nếu } 0 < x \le 2 \\ 1 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ của X.

Giải:

Hàm mật độ của X là:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \le 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } 0 < x \le 2 \\ 0 & \text{nếu } 2 < x \end{cases}$$

3. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất là:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \le 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } 0 < x \le 2 \\ 1 & \text{nếu } 2 < x \end{cases}$$

Tìm hàm phân phối xác suất của X.

Bài tập

1. Một rổ trứng có 10 quả, trong đó có 4 quả hỏng, ta mua ngẫu nhiên 3 quả. Gọi X là số quả hỏng mua được.

a. Lập bảng phân phối xác suất của X.

b. Xác định hàm phân phối F(X).

2. Cho BNN liên tục X có hàm mật độ xác suất :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin [0; 10] \\ ax^2 & \text{nếu } x \in [0; 10] \end{cases}$$

a. Xác định hệ số a.

b. Tìm P(4<x<8)

Giải:

Gọi X là số trứng hỏng trong 3 quả ta mua thì X là BNN rời rạc có thể nhận các giá trị 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6};\qquad P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10};\qquad P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$$

a. Bảng phân phối xác suất của X:

X	0	1	2	3
P	1/6	1/2	3/10	1/30

b. hàm phân phối của X:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \begin{cases} 0 & \textbf{nếu } \mathbf{x \le 0} \\ \dfrac{1}{6} & \textbf{nếu } \mathbf{0 < x \le 1} \\ \dfrac{2}{3} & \textbf{nếu } \mathbf{1 < x \le 2} \\ \dfrac{29}{30} & \textbf{nếu } \mathbf{2 < x \le 3} \\ 1 & \textbf{nếu } \mathbf{x > 3} \end{cases}$$

Giải

a) * Theo tính chất của hàm mật độ ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^{10} ax^2 dx = 1 \Leftrightarrow a\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{10} = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{1000}$$

* Hàm phân phối:

- Khi $x \le 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

- Khi $0 < x \le 10$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^{x} \frac{3}{1000} t^2 dt = \frac{x^3}{1000}$$

- Khi $10 < x$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{10} \frac{3}{1000} t^2 dt = 1$

Vậy:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \le 0 \\ \dfrac{x^3}{1000} & \text{khi } 0 < x \le 10 \\ 1 & \text{khi } 10 < x \end{cases}$$

b. $P(4 < X < 8) = F(8) - F(4)$

$$= \frac{8^3}{1000} - \frac{4^3}{1000} = 0{,}448$$

2.3. CÁC THAM SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

2.3.1 Kỳ vọng toán

2.3.2 Phương sai

2.3.3 Mod và số trung vị

2.3.1. Kỳ vọng

1. Nếu X là BNN rời rạc với bảng phân phối xác suất như sau:

X	x_0	x_1	x_2	…
p_i	p_0	p_1	p_2	…

Kì vọng của X:

$$E(X) = x_0 p_0 + x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots$$

2. Nếu X là BNN liên tục có hàm mật độ xác suất là f(x) thì kì vọng của X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Với điều kiện tích phân suy rộng hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ

1. Cho X là BNN rời rạc có bảng phân phối xác suất như sau:

X	0	1	2
p_i	1/4	1/2	1/4

Tìm kỳ vọng của X?

2. Cho X là BNN liên tục có hàm mật độ xác suất là:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \textbf{nếu } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \textbf{nếu } x < 0 \textbf{ hoặc } 1 < x \end{cases}$$

Tìm kỳ vọng X?

Tính chất:

1) $E(C) = C$ với C là hằng số.

2) $E(CX) = CE(X)$ với C là hằng số.

3) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

4) X, Y độc lập thì $E(XY) = E(X).E(Y)$

Ý nghĩa của kì vọng

Ví dụ:

Lớp học có 100sv. Điểm số môn xstk của lớp như sau:

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số sv	1	3	5	8	23	25	15	7	8	3	2

a. Tính điểm TB môn xstk của lớp

b. Chọn ngẫu nhiên 1 sv của lớp ra để xem điểm. Goi X là điểm số của sv này. Hãy lập bảng ppxs của X và tính EX

2.3.2. Phương sai

a. Định nghĩa

Cho X là BNN có kỳ vọng toán $E(X) = a$.

Phương sai của X là một số, kí hiệu là **D(X)**, được xác định như sau:

$$D(X) = E[(X - E(X))^2]$$

- Nếu X là BNN rời rạc thì:

$$\boxed{D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 p_i}$$

- Nếu X là BNN liên tục với hàm mật độ f(x) thì:

$$\boxed{D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 f(x) dx}$$

b. Hệ quả

Nếu tồn tại kì vọng của BNN X và X^2 thì phương sai được tính theo công thức sau:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

c. Tính chất

$a.\ D(c) = c$ (c : hằng số)

$b.\ D(cX) = cD(X)$

c. X, Y độc lập: $D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y)$

Độ lệch chuẩn

Cho BNN X có phương sai là D(X).

$\sqrt{D(X)}$: Gọi là độ lệch chuẩn của BNN X, kí hiệu: $\sigma(X)$

Ví dụ

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất là:

X	0	1	2
p_i	1/4	1/2	1/4

Tìm phương sai của X?

Giải

Ta có: E(X) = 1

Cách 1:

$$D(X) = (0-1)^2\frac{1}{4} + (1-1)^2\frac{1}{2} + (2-1)^2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Cách 2:

$$D(X) = 0^2\frac{1}{4} + 1^2\frac{1}{2} + 2^2\frac{1}{4} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

3.2.3. Mod và Trung vị

a. Mod

- ***Mod của BNN rời rạc*** X là giá trị của X nhận được mà tại đó xác suất lớn nhất.

- Cho X là ***BNN liên tục*** có hàm mật độ là f(x). Nếu f(x) đạt giá trị lớn nhất tại x = a trên R thì a được gọi là mod của X.

Ví dụ

a. X là BNN rời rạc có bảng phân phối xác suất:

X	10	20	30
P	$0,2$	$0,5$	$0,3$

Mod(X) = 20

b. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ là:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}; \forall x \in R$$

$M_o(X) = 0$

b. Số trung vị

Cho X là một BNN. Nếu tồn tại số a sao cho:

$$P(X < a) \le \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad P(X > a) \le \frac{1}{2}$$

thì a gọi là số trung vị của X, kí hiệu: Med(X) = a

+ Nếu ***X là BNN rời rạc*** và có:

$$\sum_{x_i < a} P_i \le \frac{1}{2}; \quad \sum_{x_i > a} P_i \le \frac{1}{2}$$ thì **Med(X) = a**

+ Nếu ***X là BNN liên tục*** và có:

$$F(a) = \frac{1}{2} \quad \text{hay} \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2}$$ thì **Med(X) = a**

Ví dụ

a. X là BNN có bảng phân phối xác suất sau:

X	0	1	2	3
P	$0{,}2$	$0{,}1$	$0{,}3$	$0{,}4$

$P(X < 2) = 0{,}3 < 0{,}5$ và $P(X > 2) = 0{,}4 < 0{,}5$

$\mathrm{Med}(X) = 2$

b. X là biến ngẫu nhiên có hàm phân phối:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{900} & \text{nếu } 0 < x \le 30 \\ 1 & \text{nếu } 30 < x \end{cases}$$

Tìm số trung vị

2.3. CÁC LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT THÔNG DỤNG

2.3.1. Luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

1. Luật phân phối nhị thức

2. Luật phân phối Poisson

2.3.2. Luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục

1. Luật phân phối chuẩn

2. Luật phân phối khi- bình phương

2.3.1. Luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

a. Định nghĩa:

BNN ***rời rạc*** X được gọi là có luật phân phối nhị thức kích thước n tham số p, kí hiệu: X~ B(n, p) nếu:

◊ X = {0, 1, 2,…,n}

◊ $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,...,n$

b. Các tham số đặc trưng:

E(X) = np

D(X) = np(1-p)

ModX = [(n + 1)p]

Nhận xét

Thực hiện dãy n phép thử Bernoulli với tham số $P(A) = p$, $(0 < p < 1)$. X là BNN chỉ số lần xuất hiện A trong n phép thử. Khi đó, $X \sim B(n, p)$

Ví dụ

Một xạ thủ bắn 20 phát vào bia xác suất bắn trúng đích của mỗi phát là 0,8.

a) Tính xác suất để bắn 20 phát có 18 phát trúng.

b) Tìm số phát trúng trung bình khi bắn 20 phát.

c) Tìm xác suất để có ít nhất 18 phát trúng.

d) Tìm số phát trúng có khả năng xảy ra nhiều nhất.

Giải

Gọi X là số phát bắn trúng đích khi bắn 20 phát. Khi đó X là BNNRR có phân phối nhị thức với tham số n = 20, p = 0,8.

a) Xác suất để trong 20 phát bắn có 18 phát trúng là:

$$P(X = 18) = C_{20}^{18}(0,8)^{18}(0,2)^{2} \approx 0,137$$

b) Số phát trúng đích trung bình trong 20 phát bắn là:

$$E(X) = np = 20.0,8 = 16$$

c) Xác suất để có ít nhất 18 phát trúng là:

$$P(18 \le X \le 20) = P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20)$$
$$= C_{20}^{18}(0,8)^{18}(0,2)^{2} + C_{20}^{19}(0,8)^{19}(0,2)$$
$$+ C_{20}^{20}(0,8)^{20} \approx 0,21$$

d) Số phát trúng có khả năng xảy ra nhiều nhất là:

ModX= 16

Vậy số phát trúng có khả năng xảy ra nhiều nhất là 16

2. Luật phân phối Poisson

a. Định nghĩa:

BNN rời rạc X gọi là có luật phân phối Poisson tham số $\lambda > 0$, kí hiệu: $X \sim P(\lambda)$ nếu:

◊ $X = \{0, 1, \ldots\}$

◊ $$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

b. Các tham số đặc trưng:

$E(X) = \lambda$

$D(X) = \lambda$

$ModX = [\lambda]$

Nhận xét

Cho X là biến nhị thức B(n, p), khi n khá lớn và p khá bé thì nó xấp xỉ biến Poisson P(λ) với $\lambda = np$.

Ví dụ

Gieo 1000 hạt giống, biết xác suất không nảy mầm của 1 hạt là 0,005. Tìm xác suất để trong 1000 hạt đó có 10 hạt không nẩy mầm.

Giải

Gọi X là số hạt giống không nảy mầm khi gieo 1000 hạt thì X ~ B(n, p) với n = 1000, p = 0,005

Vì p khá lớn, n khá bé nên X ~ P(λ), với λ = np = 5

Xác suất để khi gieo 1000 hạt có 10 hạt không nảy mầm là:

$$P(X = 10) = C_{1000}^{10}(0,995)^{990}(0,005)^{10} \approx \frac{e^{-5}5^{10}}{10!}$$

2.3.2. Luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục

a. Định nghĩa

- BNN liên tục X được gọi là có phân phối chuẩn tham số a, σ , kí hiệu X~ N(a, σ) hoặc N(a, σ^2) nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} ;\forall x \in R$$

- Hàm phân phối xác suất của BNN chuẩn tham số a và σ:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

b. Các tham số đặc trưng của biến chuẩn N(a, σ)

$\text{Med}(X) = a$

$\text{Mod}(X) = a$

$E(X) = a$

$D(X) = \sigma^2$

c. Hàm Laplace

- Hàm số được ký hiệu và xác định như sau gọi là hàm Laplace:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt; \forall x \in R$$

- Một số tính chất của hàm Laplace

1. Hàm Laplace là hàm lẻ, tức là:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x); \forall x \in R$$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \frac{1}{2};\ \lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = -\frac{1}{2}$

3. Giá trị của hàm Laplace được tính như sau:

+ Nếu $0 \leq x \leq 5$ thì giá trị $\Phi(x)$ được tính gần đúng theo bảng tính sẵn (cuối quyển sách).

+ Nếu $x > 5$ thì $\Phi(x) \approx \frac{1}{2}$

+ Nếu $x < 0$: Sử dụng công thức:

$$\Phi(x) = -\Phi(-x)$$

Ví dụ: $\Phi(1{,}96) = 0{,}475$, $\Phi(-1{,}96) = -0{,}475$

Mối liên hệ giữa hàm phân phối N(a; σ) và hàm Laplace:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

Nhận xét :

Cho X là biến ngẫu nhiên chuẩn N(a; σ) và Φ(x) là hàm Laplace. Khi đó ta có các công thức sau:

i) $$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}); \forall \alpha < \beta$$

ii) $$P(|X - a| < \alpha) = 2\Phi(\frac{\alpha}{\sigma}); \forall \alpha > 0$$

Ví dụ

Một phân xưởng sản xuất một loại chi tiết máy với độ dài thiết kế là 20cm. Gọi X là BNN đo độ dài các chi tiết máy do phân xưởng sản xuất ra.

Biết rằng X có phân phối chuẩn $N(a; \sigma)$ với $a = 20$cm, $\sigma = 0,2$ cm.

Nếu chi tiết có độ dài sai lệch so với độ dài thiết kế quá 0,3cm được cho là phế phẩm. Tính xác suất để chọn 1 chi tiết máy là phế phẩm?

Gọi A là biến cố chi tiết máy chọn ra là phế phẩm

$\overline{A}$ là biến cố chi tiết máy chọn ra là sản phẩm tốt.

$$\Rightarrow \overline{A} = \left(\left|X - 20\right| \le 0{,}3\right)$$

Theo định lý ta có:

$$P(\overline{A}) = P\left(\left|X - 20\right| \le 0{,}3\right) = 2\Phi\left(\frac{0{,}3}{0{,}2}\right) \approx 0{,}8664$$

Vậy P(A) = 1-0,8664 = 0,1336

2. Luật phân phối khi-bình phương

(Xem GT)