



ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG VIỆT - HÀN  
Vietnam - Korea University of Information and Communication Technology

# Xác suất thống kê

Thời  
lượng

Nội dung

Mục tiêu

Kiểm tra,  
đánh giá

Tài liệu tk giảng  
dạy&học tập



## 1. Thời lượng

Lý thuyết:  $1,5 \text{ TC} = 22,5 \text{ tiết}$

Bài tập thực hành:  $0,5 \text{ TC} = 15 \text{ tiết}$

## 2. Nội dung

**Chương 1. Biến cố và xác suất (12 tiết: 6 LT, 6 BT)**

**Chương 2. Biến ngẫu nhiên và Luật phân phối XS**  
**(10 tiết: 6 LT, 4 BT)**

**XÁC SUẤT**

**Chương 3. Lý thuyết chọn mẫu (4LT)**

**Chương 4. Lý thuyết ước lượng và kiểm định**  
**(4LT, 6BT)**

**THỐNG KÊ**



### 3. Mục tiêu

#### - Về xác suất:

- + Một số quy tắc và công thức tính xác suất như quy tắc cộng, quy tắc nhân, công thức xác suất có điều kiện, công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes và công thức Bernoulli.
- + Biến ngẫu nhiên và các luật phân phối xác suất thông dụng: hàm phân phối và luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên, các tham số đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên, các luật phân phối xác suất như: phân phối đơn giản, phân phối nhị thức, phân phối Poisson, phân phối chuẩn.

#### - Về thống kê:

- + Lý thuyết chọn mẫu: các phương pháp chọn mẫu và các cách biểu diễn mẫu, đặc biệt là các tham số đặc trưng của mẫu.
- + Lý thuyết ước lượng và kiểm định: các phương pháp, tiêu chuẩn ước lượng, khoảng ước lượng đối xứng, kiểm định giá trị trung bình, phương sai.



## Tài liệu tk giảng dạy&học tập

- [1] Tổng Đình Quỳ, *Giáo trình Xác suất thống kê*, NXB ĐH Quốc gia HN, 2004
- [2] Đậu Thế Cấp , *Xác suất thống kê*, NXB Giáo Dục.
- [3] PTS. Trần Lộc Hùng , *Lý thuyết xác suất và thống kê toán học*, (1998), NXB Giáo Dục.
- [4] Đào Hữu Hồ, *Xác suất thống kê*, NXB ĐH và THCN-Hà Nội. 1996.
- [5] Đặng Hùng Thắng, *Bài tập Xác suất*, NXB GD, 2010



# Chương 1: Biến cố và xác suất

1.1

Giải tích tổ hợp

1.2

Phép thử và biến cố

1.3

Xác suất của biến cố

1.4

Các công thức tính xác suất

## 1.1. GIẢI TÍCH TỔ HỢP



Các quy tắc đếm cơ bản



Giải tích tổ hợp

### 1.1.1. Các quy tắc đếm cơ bản

## 1. QUY TẮC CỘNG

Một công việc được phân làm  $n$  phương án hoàn toàn độc lập. Phương án 1 có  $m_1$  cách thực hiện, phương án 2 có  $m_2$  cách thực hiện, ..., phương án  $n$  có  $m_n$  cách thực hiện. Khi đó tổng số cách thực hiện công việc đó là  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  cách.



## Ví dụ

1. Trong một kho có 3 loại sản phẩm (loại 1, 2, 3), số lượng mỗi loại là 20, 45, 72. Chọn một sản phẩm bất kỳ từ kho, hỏi có bao nhiêu cách chọn?

### Giải:

Sản phẩm lấy ra là một trong 3 loại sản phẩm

Số cách chọn sản phẩm loại 1: 20 cách

Số cách chọn sản phẩm loại 2: 45 cách

Số cách chọn sản phẩm loại 3: 72 cách

Vậy có  $20 + 45 + 72 = 137$  cách chọn





2. Đi từ Đà Nẵng vào TPHCM có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa, máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hỏa và 3 chuyến bay. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ ĐN vào TPHCM trong một ngày?

### 2. QUY TẮC NHÂN

Một công việc được chia làm  $n$  công đoạn liên tiếp để hoàn thành:

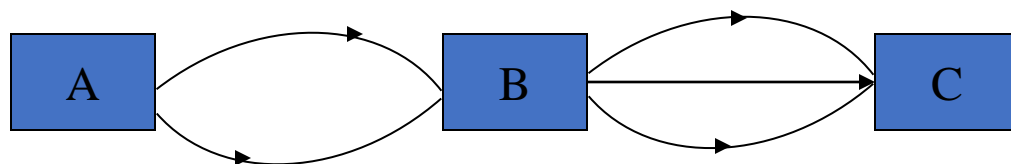
- Công đoạn 1: Có  $m_1$  cách thực hiện
- Công đoạn 2: Có  $m_2$  cách thực hiện
- .....
- Công đoạn  $n$ : Có  $m_n$  cách thực hiện

Vậy số cách thực hiện công việc là:

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$$

## Ví dụ:

1. Một người có 5 cái áo, 7 cái quần, hỏi có bao nhiêu cách mặc đồ?
2. Có hai con đường đi từ A sang B, có ba con đường đi từ B sang C. Vậy có mấy cách đi từ A sang C.



## Giải:

Để đi từ A tới B tới C chia làm 2 giai đoạn:

Giai đoạn 1: đi từ A đến B có 2 cách đi.

Giai đoạn 2: đi từ B đến C có 3 cách đi.

Số cách đi từ A tới B tới C là:  $2 \times 3 = 6$



**3.** Dùng các chữ số 0, 1, 2,..., 9 để viết các số  $x$  gồm 3 chữ số.  
Hỏi:

- a. Có mấy số  $x$ ?
- b. Có mấy số  $x$  với 3 chữ số khác nhau?
- c. Có mấy số  $x > 600$

**Giải**

a. Chọn chữ số hàng trăm: có 9 cách

Chọn chữ số hàng chục: có 10 cách

Chọn chữ số hàng đơn vị: có 10 cách

Vậy số các số  $x$  là:  $9 \times 10 \times 10 = 900$

b. Số các số  $x$  với 3 chữ số khác nhau là:  $9 \times 9 \times 8 = 648$

c. Số các số  $x > 600$  là:  $4 \times 10 \times 10 - 1 = 399$

### 3. QUY TẮC BÙ TRỪ

Một công việc được phân làm 2 phương án (không độc lập với nhau). Khi đó ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số các cách thực hiện công việc đã cho, do 2 phương án có thể có những cách trùng lặp nhau.

Khi đó, số cách thực hiện công việc đã cho là:

*Lấy tổng số cách thực hiện ở 2 trường hợp trừ đi số các cách trùng lặp.*

## Chú ý

1. Quy tắc bù trừ (cho 2 hoặc 3 trường hợp) có thể mô tả dưới dạng tập hợp như sau:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| \\ - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

2. Quy tắc cộng là trường hợp đặc biệt của quy tắc bù trừ.



### 1.1.1. Các quy tắc đếm cơ bản

**Ví dụ :**

Một lớp có 40 sv, đăng kí ít nhất một trong 2 môn thể thao: bóng đá và cầu lông. Có 30 sv đăng kí bóng đá, 25 sv đăng kí cầu lông. Hỏi có bao nhiêu sv đăng kí cả 2 môn.

**Giải:**

Gọi A là tập hợp sv đăng kí bóng đá

B là tập hợp sv đăng kí cầu lông

Theo nguyên lí bù trừ ta có:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Vậy số sv đăng kí cả 2 môn là:

$$30 + 25 - 40 = 15$$



## 1.1.2. GIẢI TÍCH TỔ HỢP

### Bài toán:

Phân biệt cách chọn  $k$  phần tử từ tập hợp có  $n$  phần tử?  
( $n$  phần tử này được coi là khác nhau mặc dù bản chất của chúng có thể giống nhau).

### HD:

1. Chọn 1 lần ra  $k$  phần tử:

↕ Nếu không để ý thứ tự: **Tổ hợp**

↕ Nếu để ý thứ tự: **Chỉnh hợp**

2. Chọn  $k$  lần, mỗi lần 1 phần tử:

↕ Không hoàn lại: như **chỉnh hợp**

↕ Hoàn lại: **chỉnh hợp lặp**



# 1. TỔ HỢP

- Một tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử ( $0 \leq k \leq n$ ) là một bộ không phân biệt thứ tự gồm  $k$  phần tử khác nhau được chọn từ  $n$  phần tử đã cho.
- Số các tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử được ký hiệu và tính như sau:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



## Ví dụ

Có 10 sv được phân thành 3 nhóm. Nhóm I: 4 sv, nhóm II: 3 sv, nhóm III: 3 sv. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp?

### Giải:

Việc xếp 10 sv vào 3 nhóm chia thành 3 giai đoạn:

Giai đoạn 1: xếp 4 sv vào nhóm I có  $C_{10}^4$  cách

Giai đoạn 2: xếp 3 sv vào nhóm II có  $C_6^3$  cách

Giai đoạn 3: xếp 3 sv vào nhóm III có  $C_3^3$  cách

Vậy có  $C_{10}^4 \times C_6^3 \times C_3^3 = 4200$  cách

## 2. CHỈNH HỢP

- Một chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử ( $0 \leq k \leq n$ ) là một bộ *có thứ tự* gồm  $k$  phần tử khác nhau được chọn từ  $n$  phần tử đã cho.

- Số các chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử, ký hiệu và tính như sau:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Đặc biệt, nếu  $k = n$  thì được gọi là hoán vị.



## Ví dụ

**1.** Có 5 bức tranh và 7 cái móc treo tường. Hỏi có bao nhiêu cách treo 5 bức tranh (mỗi móc chỉ treo 1 bức tranh)?

### Giải:

Việc treo 5 bức tranh vào 7 cái móc chính là việc chọn có thứ tự 5 cái móc treo từ 7 cái móc.

Vậy số cách treo 5 bức tranh là  $A_7^5 = 2520$  cách

**2.** Cho tập hợp  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau thuộc tập  $A$ ?



### 3. CHỈNH HỢP LẬP

- Một chỉnh hợp lập chập  $k$  của  $n$  phần tử là một bộ có thứ tự gồm  $k$  phần tử không nhất thiết khác nhau được chọn từ  $n$  phần tử đã cho.
- Số các chỉnh hợp lập chập  $k$  của  $n$  phần tử được ký hiệu và tính như sau:

$$\overline{A}_n^k = n^k$$



## Ví dụ

Cho tập hợp  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đều thuộc tập  $A$ ?

### Giải:

Mỗi số tự nhiên là một chỉnh hợp lặp chập 3 của 5 phần tử.

Vậy có tất cả  $5^3 = 125$  số tự nhiên.



## Bài tập:

1. Trong một lô sản phẩm có 20 bóng đèn (trong đó có 6 bóng 110v còn lại là 220v). Hỏi:
  - a. Có bao nhiêu cách lấy ra 4 bóng đèn?
  - b. Có bao nhiêu cách lấy ra 4 bóng đèn mà trong đó có 2 bóng 110v?
  - c. Có bao nhiêu cách lấy ra 4 bóng đèn mà trong đó có ít nhất 2 bóng 110v?
2. Một hộp kín có 2 bi trắng, 4 bi đỏ hoàn toàn giống nhau về hình dạng và trọng lượng. Lấy lần lượt từng bi trong hộp (không hoàn lại) cho đến viên cuối cùng. Có bao nhiêu cách lấy bi sao cho
  - a. Lần cuối lấy được bi đỏ.
  - b. Lần thứ 5 và lần thứ 6 là bi đỏ.



## Các hàm thông dụng trong Excel:

$$\text{combin}(n,k) = C_n^k$$

$$\text{fact}(n) = n!$$

$$\text{permut}(n,k) = A_n^k$$

$$\text{power}(n,k) = n^k$$



## 1.2. PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

1.2.

*Phép thử ngẫu nhiên*

*Biến cố*

*Các phép toán trên các biến cố*

*Quan hệ giữa các biến cố*

## 1.2.1. Phép thử ngẫu nhiên

\* Phép thử NN là một thí nghiệm hay hành động mà:

+ Kết quả của nó không thể biết trước;

+ Có thể xác định được tập hợp các kết quả có thể xảy ra.

\* Tập hợp các kết quả có thể xảy ra gọi là không gian mẫu, thường ký hiệu là:  $\Omega$

**Ví dụ :**

**a.** Hành động “tung một đồng xu” là một phép thử.

Không gian mẫu:  $\Omega = \{S, N\}$

**b.** Gieo một con súc sắc là một phép thử.

Không gian mẫu:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



## 1.2.2. Biến cố

Là tập con của không gian mẫu  $\Omega$ , kí hiệu là: A, B, C, ...

### Ví dụ :

Xét phép thử gieo con xúc xắc.

Không gian mẫu  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$ : biến cố xuất hiện mặt chẵn

$B = \{1, 2, 3\}$ : biến cố xuất hiện mặt không vượt quá 4



## Chú ý:

1. Mỗi phần tử của không gian mẫu gọi là một biến cố sơ cấp.
2. Biến cố không chứa kết quả nào của phép thử hay biến cố không xảy ra gọi là biến cố không chắc chắn, kí hiệu  $\emptyset$ .
3. Biến cố chứa mọi kết quả của phép thử gọi là biến cố chắc chắn, kí hiệu  $\Omega$
4. Để tính xác suất của một biến cố, cần phải tính số phần tử của không gian mẫu và số phần tử của biến cố đó. Khi đó cần áp dụng các kĩ thuật đếm đã học.

## 1.2.3. Các phép toán trên các biến cố

### 1. Hợp các biến cố

\* Hợp của 2 biến cố  $A, B$ , kí hiệu  $A \cup B$ , là biến cố: “ $A$  hoặc  $B$  xảy ra”

\* Hợp của  $k$  biến cố:  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ , là biến cố:  
“có ít nhất một trong  $k$  biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_k$  xảy ra”

### Ví dụ :

Người thợ săn bắn hai viên đạn vào một con thú.

Gọi  $A_1$ : “viên đạn thứ nhất trúng con thú”

$A_2$ : “viên đạn thứ hai trúng con thú”

$A$ : “con thú trúng đạn”

thì  $A = A_1 \cup A_2$



## 2. Giao các biến cố

\* Giao (hay tích) của 2 biến cố A và B, kí hiệu  $A \cap B$  hay  $AB$ , là biến cố: “Cả A và B cùng xảy ra”

\* Giao của k biến cố:  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$ , là biến cố: “Tất cả k biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_k$  đều xảy ra”

### Ví dụ :

Một người dự thi lấy bằng lái xe.

Gọi A: “người đó thi đạt vòng lí thuyết”

B: “người đó thi đạt vòng thực hành”

C: “người đó lấy được bằng lái xe”

thì  $C = A \cap B$



### 3. Biến cố đối:

Cho biến cố A, biến cố đối của A, kí hiệu là  $\bar{A}$  là biến cố “không xảy ra A”, tức là

$$\begin{cases} A \cap \bar{A} = \phi \\ A \cup \bar{A} = \Omega \end{cases}$$

Trong thực hành, để đơn giản ta xem  $\bar{A}$  là biến cố “không phải A”

#### Ví dụ :

Ba xạ thủ A, B, C cùng nổ súng vào một mục tiêu.

A: “ có ít nhất 1 xạ thủ bắn trúng”

thì biến cố đối của biến cố A là: “Cả 3 xạ thủ bắn trượt”



## Bài tập :

Ba sinh viên A, B, C cùng thi môn XSTK

Gọi A là biến cố: “sv A thi đạt”

B là biến cố: “sv B thi đạt”

C là biến cố: “sv C thi đạt”

a. Hãy mô tả các biến cố sau:

$$ABC, A \cup B \cup C, \overline{A}\overline{B}\overline{C}, \overline{A}BC$$

b. Hãy biểu diễn các biến cố sau theo 3 biến cố A, B, C:

D: “Có ít nhất hai sv thi đạt”

E: “Có nhiều nhất 1 sv thi đạt”

F: “Có duy nhất sv A thi đạt”





## Giải:

a. ABC: “Cả 3 sv thi đỗ”

$A \cup B \cup C$ : “có ít nhất 1 sv thi đỗ”

$\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}$ : “cả 3 sv thi trượt”

$\overline{A}BC$ : “chỉ có sv A thi trượt”

b.  $D = AB \cup BC \cup CA$

$$= A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup ABC$$

$$E = \overline{A}\overline{B} \cup \overline{B}\overline{C} \cup \overline{C}\overline{A}$$

$$= \overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}BC$$

$$F = A\overline{B}\overline{C}$$

### 1. Xung khắc

A và B là hai biến cố xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra, tức là  $A \cap B = \emptyset$ .

Họ các biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_n$  được gọi là họ xung khắc nếu một biến cố bất kì trong họ xảy ra thì các biến cố còn lại không xảy ra, tức là  $A_i A_j = \emptyset, \forall i, j (i \neq j)$

### 2. Độc lập

A và B là hai biến cố độc lập nếu A xảy ra không ảnh hưởng đến việc B xảy ra và ngược lại.

### 3. Họ đầy đủ

Họ các biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_n$  được gọi là đầy đủ nếu:

$$* A_i A_j = \emptyset, \forall i, j (i \neq j)$$

$$* \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$



## Ví dụ :

Xét phép thử gieo một con súc sắc. Gọi  $A_i$  là biến cố mặt  $i$  xuất hiện.

Ta có:

$A_1, A_2$  xung khắc

$A_1, A_2, A_3, A_4$  là một họ xung khắc

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  là độc lập

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  là một họ đầy đủ



## **1.3. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ**

Xác suất của một biến cố là một con số đo khả năng xảy ra biến cố đó khi thực hiện phép thử.

### 1.3.1. Định nghĩa cổ điển của xác suất

• **Định nghĩa:** Gọi  $T$  là phép thử có số kết quả hữu hạn và đồng khả năng. Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu và  $A$  là một biến cố bất kỳ. Khi đó xác suất của biến cố  $A$  được ký hiệu và xác định như sau:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Số phần tử của } A}{\text{Số phần tử của không gian mẫu}}$$



## Ví dụ

1. Chọn ngẫu nhiên một viên bi trong một bình có 3 bi xanh, 4 bi đỏ, 5 bi vàng. Tính xác suất để chọn được bi đỏ.

### Giải:

Gọi A là biến cố chọn được bi đỏ.

Số phần tử của không gian mẫu:  $|\Omega| = C_{12}^1 = 12$

Số phần tử của biến cố A:  $|A| = C_4^1 = 4$

Nên

$$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$



2. Một hộp chứa 4 bi đỏ và 9 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 3 bi từ hộp đó.
- a. Tìm xác suất để 3 bi lấy ra đều màu đỏ?
  - b. Tìm xác suất để trong 3 bi lấy ra có ít nhất một bi đỏ?



**3.** Một hộp chứa 10 sản phẩm, trong đó có 4 phế phẩm. Lấy 2 sản phẩm theo 2 cách lấy sau:

a. Lấy cùng lúc 2 sản phẩm.

b. Lấy lần lượt có hoàn lại từng sản phẩm.

Tìm xác suất để lấy được 2 chính phẩm theo 2 cách lấy trên



4. Một hộp kín có 2 bi trắng, 4 bi đỏ hoàn toàn giống nhau về hình dạng và trọng lượng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng bi trong hộp (không hoàn lại) cho đến viên cuối cùng.

- Tính xác suất để viên bi chọn ra lần cuối là bi đỏ.
- Tính xác suất để viên bi chọn ra lần thứ 5 và lần thứ 6 là bi đỏ.

### Giải

Số kết quả đồng khả năng:  $6!$  hay  $|\Omega| = 6!$

**a.** Gọi A là biến cố bi chọn ra cuối cùng là bi đỏ

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5!4}{6!} = \frac{2}{3}$$

**b.** Gọi B là biến cố bi chọn ra lần 5, 6 là bi đỏ

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4!A_4^2}{6!} = \frac{2}{5}$$



5. Trước cổng trường có 3 quán cơm bình dân chất lượng ngang nhau. Ba sinh viên A, B, C độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên một quán để ăn trưa. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a. Ba sinh viên vào cùng một quán
- b. Hai sv vào cùng một quán, còn người kia thì vào quán khác



**HD:**

Số phần tử của không gian mẫu = số cách 3 sv chọn ngẫu nhiên một quán = số cách để sv A chọn 1 trong 3 quán và sv B chọn 1 trong 3 quán và sv C chọn 1 trong 3 quán =

Gọi A: “3 sv vào cùng một quán”

B: “Hai sv vào cùng một quán, còn người kia thì vào quán khác”

$|A|$  = Số cách 3 sv vào cùng một quán được chọn trong 5 quán là:

$$P(A) =$$

$|B|$  = Số cách để 2 sv trong 3 sv vào một quán chọn từ 5 quán và người kia thì vào 1 quán chọn từ 2 quán là:

$$P(B) =$$

1. Gọi  $T$  là phép thử gieo một con súc sắc cân đối đồng chất. Tính xác suất của biến cố  $A$ : “số chấm xuất hiện chia hết cho 3”.
2. Trong một kho hàng có 30 sản phẩm tốt và 5 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm từ kho hàng. Tính xác suất để trong 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm tốt?
3. Một lớp học có 20 sinh viên nam và 10 sinh viên nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 sinh viên trong lớp. Tính xác suất để:
  - a. Chọn được 2 sinh viên nữ
  - b. Có ít nhất một sinh viên nữ
  - c. Có nhiều nhất là 3 nữ
  - d. Cả 5 sinh viên đều là nữ



## Hạn chế của định nghĩa cổ điển xác suất:

\* Trong một số trường hợp thực tế, ta không thể tính được  $|A|$ .

### Ví dụ:

Một lô hàng có  $N$  sản phẩm sữa hộp, để kiểm tra chất lượng của lô hàng, người ta lấy ngẫu nhiên ra  $n$  ( $n < N$ ) sản phẩm. Hỏi xác suất để lấy được phế phẩm?

*Vậy để biết lô hàng có bao nhiêu phế phẩm ta phải kiểm tra mở nắp từng hộp sữa, điều này không thể được.*

\* Trong thực tế có nhiều phép thử vô hạn các biến cố và biến cố không đồng khả năng

### 1.3.2. Định nghĩa thống kê của xác suất

- Thực hiện phép thử nào đó  $n$  lần thấy có  $k$  lần biến cố  $A$  xuất hiện thì tỉ số  $\frac{k}{n}$  được gọi là tần suất của biến cố  $A$ .
- Khi  $n$  thay đổi, tần suất cũng thay đổi nhưng luôn dao động quanh 1 số cố định  $p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{n}$ . Số  $p$  này đglà xác suất của biến cố  $A$  theo nghĩa thống kê.
- Trong thực tế, khi  $n$  đủ lớn thì  $P(A) = \frac{k}{n}$



### 1.3.2. Định nghĩa thống kê của xác suất

#### Ví dụ:

Một công ty bảo hiểm muốn xác định xác suất để một người Mỹ 50 tuổi chết trong năm tới, người ta theo dõi 100.000 người 50 tuổi, thấy có 798 người chết trong vòng 1 năm sau đó.

Vậy xác suất cần tìm xấp xỉ bằng 0.008



## Nhận xét

Đ/n xác suất theo thống kê chỉ cho giá trị xấp xỉ và để cho kết quả chính xác thì số lần thực hiện phép thử  $n$  phải đủ lớn.



### 1.3.3. Một số tính chất của xác suất

Xác suất của biến cố dù được định nghĩa theo cách nào thì cũng đều có các tính chất sau đây:

i.  $0 \leq P(A) \leq 1$  , với  $A$  là biến cố bất kỳ

ii.  $P(\Omega) = 1; P(\emptyset) = 0$

iii. Nếu  $A \subset B$  thì  $P(A) \leq P(B)$

### 1.3.4. Một số quy tắc tính xác suất

#### QUY TẮC CỘNG

- Nếu  $A, B$  là hai biến cố xung khắc thì:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Nếu  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là  $n$  biến cố xung khắc từng đôi một thì :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$



## Ví dụ

Xác suất để một xạ thủ bắn bia trúng điểm 10 là 0,1; trúng điểm 9 là 0,2; trúng điểm 8 là 0,25; nhỏ hơn 8 là 0,45.

Xạ thủ bắn 1 viên đạn. Tìm xác suất để xạ thủ được ít nhất 9 điểm.

## Giải:

Gọi  $A_1$  : "xạ thủ bắn bia trúng điểm 10 "

$A_2$ : "xạ thủ bắn bia trúng điểm 9 "

$A$  : "xạ thủ được ít nhất 9 điểm"

Ta có:  $A_1, A_2$  là 2 biến cố xung khắc và  $A = A_1 \cup A_2$

Nên  $P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 0,1 + 0,2 = 0,3$

### 1.3.4. Một số quy tắc tính xác suất

#### Đặc biệt:

1. Với  $A$  là một biến cố bất kỳ, ta có

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

**Ý nghĩa:** Trong nhiều bài toán việc tính xác suất của biến cố  $A$  phức tạp hơn việc tính xác suất của biến cố đối. Khi đó ta áp dụng công thức trên.

2. Nếu  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là một hệ đầy đủ các biến cố thì:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

3. Nếu  $A, B$  là hai biến cố bất kỳ thì:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



### 1.3.4. Một số quy tắc tính xác suất

#### Quy tắc nhân và tính độc lập của các biến cố

##### Quy tắc nhân

Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau. Khi đó ta có quy tắc nhân xác suất như sau:

$$P(AB) = P(A).P(B)$$



## Ví dụ

Ba xạ thủ A, B, C cùng nổ súng vào một mục tiêu với xác suất trúng đích của từng xạ thủ lần lượt là 0,4; 0,5; 0,7  
Tính xác suất để có ít nhất 1 xạ thủ bắn trúng.



### 1.3.4. Một số quy tắc tính xác suất

#### Ví dụ:

Cho hai hộp, mỗi hộp có 10 viên bi. Hộp thứ 1 có 1 viên bi đỏ và 9 viên bi xanh, hộp thứ 2 có 2 viên bi đỏ và 8 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp 1 viên bi.

a/ Tính xác suất để hai viên bi lấy ra đều màu đỏ

b/ Tính xác suất để hai viên bi lấy ra có 1 đỏ, 1 xanh.



## 1.4 . CÁC CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT

1.4.1

Công thức xác suất có điều kiện

1.4.2

Công thức xác suất đầy đủ

1.4.3

Công thức Bayes

1.4.4

Dãy phép thử Bernoulli





## 1.4.1. Công thức xác suất có điều kiện

### 1. Định nghĩa

Cho  $A, B$  là hai biến cố của cùng một phép thử.

Nếu  $A, B$  là hai biến cố không độc lập thì xác suất của biến cố  $A$  sẽ thay đổi tùy theo biến cố  $B$  có xảy ra hay không.

Khi đó, xác suất của biến cố  $A$  được tính với điều kiện *biến cố  $B$  đã xảy ra*, được gọi là xác suất có điều kiện của  $A$ , ký hiệu là  $P(A/B)$ .



## Ví dụ:

1. Trong hộp kín có 10 thẻ ATM: 6 thẻ của ACB, 4 thẻ Agribank. Lấy lần lượt không hoàn lại 2 thẻ. Tính xác suất để lần 2 lấy được thẻ Agribank biết lần 1 lấy được thẻ ACB.

## Giải:

Gọi A: “ Lần 2 lấy được thẻ Agribank ”

B: “ Lần 1 lấy được thẻ ACB ”

Sau khi lấy lần 1 được thẻ ACB thì trong bình còn lại 9 thẻ, trong đó có 4 thẻ Agribank.

Nên

$$P(A/B) = 4/9$$



## Ví dụ:

2. Trong bình có 5 quả cầu trắng và 3 quả cầu đen.

Lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 quả cầu.

Tính xác suất để lần thứ 2 lấy được cầu trắng nếu biết lần thứ nhất đã lấy được cầu trắng.

## Giải:

Gọi A: “ Lần 2 lấy được cầu trắng”

B: “ Lần 1 lấy được cầu trắng”

Sau khi lấy lần 1 được cầu trắng thì trong bình còn lại 7 quả cầu, trong đó có 4 quả cầu trắng.

Nên

$$P(A/B) = 4/7$$



## 2. Quy tắc nhân xác suất

Giả sử A, B là 2 biến cố bất kỳ trong cùng một phép thử và  $P(B) > 0$ .

Khi đó :

$$P(A B) = P(A) P(B / A) = P(B) P(A / B)$$

## 3. Công thức xác suất có điều kiện

$$P(A / B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(B / A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$



## Ví dụ:

Lớp MA04B có 45 sv, trong đó có 15 nam và 30 nữ. Trong kỳ thi môn XSTK có 10 sinh viên đạt điểm giỏi (trong đó có 3 nam và 7 nữ). Gọi tên ngẫu nhiên một sv trong danh sách lớp. Tìm xác suất gọi được sv đạt điểm giỏi môn XSTK, biết rằng sv đó là nữ?

## Giải:

Gọi A: “gọi được sinh viên đạt điểm giỏi môn XSTK”,

B: “gọi được sinh viên nữ”,

Xác suất của biến cố cần tìm là  $P(A/B)$

Ta có:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{7}{45} \frac{45}{30} = \frac{7}{30}$$

## Chú ý:

Giả sử  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  là các biến cố trong cùng một phép thử.

Khi đó :

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2 / A_1) \dots P(A_n / A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

## 1.4.2. Công thức xác suất đầy đủ

Giả sử hệ  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là hệ đầy đủ các biến cố và  $A$  là một biến cố bất kỳ của cùng một phép thử.

Khi đó, xác suất của biến cố  $A$  được tính như sau:

$$P(A) = P(A_1)P(A / A_1) + P(A_2)P(A / A_2) + \dots + P(A_n)P(A / A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n P(A_i)P(A / A_i)$$



## Ví dụ:

1. Có 3 hộp hoàn toàn giống nhau.

Hộp 1 có 4 chính phẩm, 2 phế phẩm

Hộp 2 có 3 chính phẩm, 3 phế phẩm

Hộp 3 có 5 chính phẩm, 1 phế phẩm

Lấy ngẫu nhiên một hộp rồi từ đó lấy ra một sản phẩm.

Tìm xác suất để sản phẩm lấy ra là chính phẩm.



Gọi  $A_i$ : “hộp  $i$  được lấy ra” ( $i = 1, 2, 3$ )

Ta có  $A_1, A_2, A_3$  tạo thành hệ đầy đủ các biến cố.

Gọi  $A$  là biến cố sản phẩm lấy ra là chính phẩm.

Ta có:  $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$

$$P(A/A_1) = 4/6, P(A/A_2) = 3/6, P(A/A_3) = 5/6$$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta được:

$$P(A) = P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + P(A_3)P(A/A_3)$$

Vậy

$$P(A) = \frac{2}{3}$$



2. Để sản xuất một loại sản phẩm có thể dùng một trong 2 máy. Xác suất để máy thứ nhất và thứ hai là ra sản phẩm tốt lần lượt là 0,95 và 0,87. Trong một kho hàng có  $\frac{2}{3}$  số sản phẩm do máy thứ nhất làm ra và  $\frac{1}{3}$  số sản phẩm do máy thứ hai làm ra. Từ kho, lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm.

Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là phế phẩm?

### 1.4.3. Công thức Bayes

Giả sử  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là một hệ đầy đủ các biến cố và  $A$  là một biến cố bất kỳ của cùng một phép thử (với  $P(A) > 0$ ).

Khi đó, ta có công thức Bayes như sau:

$$P(A_i / A) = \frac{P(A_i)P(A / A_i)}{P(A)}; \forall i = 1, 2, \dots, n$$

1. Một nhà máy có 3 phân xưởng sản xuất. Phân xưởng 1 sản xuất 50%, phân xưởng 2 sản xuất 30%, phân xưởng 3 sản xuất 20%. Biết rằng tỉ lệ phế phẩm do phân xưởng 1, 2, 3 sản xuất tương ứng là 2%, 1%, 3%.

Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy.

- a. Tìm xác suất để sản phẩm lấy được là phế phẩm
- b. Biết sản phẩm lấy ra là phế phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm đó do phân xưởng 1 sản xuất.

Gọi  $A_i$ : “sản phẩm của phân xưởng  $i$  sản xuất” ( $i = 1, 2, 3$ )

$$P(A_1) = 0,5; P(A_2) = 0,3; P(A_3) = 0,2$$

Ta có  $A_1, A_2, A_3$  tạo thành hệ đầy đủ các biến cố.

Gọi  $A$ : “sản phẩm lấy ra là phế phẩm”

a. Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(A) = P(A_1)P(A / A_1) + P(A_2)P(A / A_2) + P(A_3)P(A / A_3)$$

b. Áp dụng công thức Bayes ta được:

$$P(A_1 / A) = \frac{P(A_1)P(A / A_1)}{P(A)}$$



2. Để sản xuất một loại sản phẩm có thể dùng một trong 2 máy. Xác suất để máy thứ nhất và thứ hai là ra sản phẩm tốt lần lượt là 0,95 và 0,87. Trong một kho hàng có  $\frac{2}{3}$  số sản phẩm do máy thứ nhất làm ra và  $\frac{1}{3}$  số sản phẩm do máy thứ hai làm ra. Từ kho, lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm.

a. Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là phế phẩm?

b. Nếu sản phẩm lấy ra không là phế phẩm, hãy tính xác suất để sản phẩm đó do máy thứ 2 làm ra.



3. Trước khi đưa sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó. Có 34 người trả lời “sẽ mua”, 96 người trả lời “có thể sẽ mua”, và 70 người trả lời “Không mua”. Kinh nghiệm cho thấy, tỷ lệ thực sự sẽ mua sp tương ứng với những cách trả lời trên là: 40%, 20%, 1%.
- a. Hãy đánh giá thị trường tiềm năng của sp.
  - b. Trong số khách hàng thực sự mua sp thì có bao nhiêu % trả lời “sẽ mua”

### 1.4.4. Dãy phép thử Bernoulli

Sau đây ta đưa ra một số khái niệm mới:

**Phép thử lặp:** Là các phép thử được thực hiện trong cùng một điều kiện và có không gian mẫu bằng nhau.

**Phép thử độc lập:** Là các phép thử mà kết quả của mỗi phép thử không ảnh hưởng tới kết quả của những phép thử còn lại.

**Dãy phép thử Bernoulli:** Là một dãy gồm các phép thử lặp, độc lập và mỗi phép thử chỉ có hai kết quả (thường ký hiệu là 1 và 0 hoặc “thành công” và “thất bại”).





#### 1.4.4. Dãy phép thử Bernoulli

##### Ví dụ:

- Gieo một đồng xu cân đối, đồng chất 10 lần ta được một dãy gồm 10 phép thử Bernoulli.
- Một người bắn 12 viên đạn vào bia, mỗi lần bắn một viên ta được 12 phép thử Bernoulli.
- Có 12 người, mỗi người bắn một viên đạn vào bia thì đó không phải là 12 phép thử Bernoulli. Vì lúc này, 12 phép thử không còn có tính chất lặp.



## 1.4.4 Dãy phép thử Bernoulli

### Công thức Bernoulli

Cho dãy gồm  $n$  phép thử Bernoulli. Trong mỗi phép thử, gọi  $p$  là xác suất “thành công” (khi đó  $1 - p$  là xác suất “thất bại”). Gọi  $k$  là biến cố “có  $k$  lần phép thử thành công trong  $n$  phép thử Bernoulli” và xác suất của biến cố đó ký hiệu là  $p_n(k)$ . Khi đó ta có công thức Bernoulli như sau:

$$p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}; k = \overline{0, n}$$

## Ví dụ

Một xạ thủ bắn 10 viên đạn một cách độc lập vào bia. Xác suất trúng bia là 0,8. Tính xác suất để trong 10 lần bắn có 7 lần trúng bia?

### Giải

Gọi A là biến cố bắn trúng đích.

Theo giả thiết bài toán: Ta thực hiện 10 phép thử độc lập.

Trong mỗi phép thử biến cố A xảy ra với xác suất không đổi.

$$P(A) = 0,8 \Rightarrow P(\bar{A}) = 0,2$$

Áp dụng công thức Becnuli ta có:

Xác suất trong 10 phát bắn có 7 lần trúng là:

$$P_{10}(7) = C_{10}^7 (0,8)^7 (0,2)^3 \approx 0,2$$



## MỘT SỐ BÀI TẬP

1. Một lớp học có 20 sinh viên nam và 10 sinh viên nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 sinh viên trong lớp. Tính xác suất để:
- a. Chọn được 2 sinh viên nữ
  - b. Có ít nhất một sinh viên nữ
  - c. Có nhiều nhất là 3 nữ
  - d. Cả 5 sinh viên đều là nữ



2. Một khoá học có 100 sinh viên, trong đó có 50 sinh viên giỏi Anh văn, 45 sinh viên giỏi Pháp văn, 10 sinh viên giỏi cả hai ngoại ngữ. Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên trong khoá học. Tính xác suất để:
- a. Sinh viên này giỏi ít nhất một ngoại ngữ?
  - b. Sinh viên này không giỏi ngoài ngữ nào hết?
  - c. Sinh viên này chỉ giỏi Anh văn?
  - d. Sinh viên này chỉ giỏi đúng một ngoại ngữ?



**3.** Trong một trường THPT có:

10% học sinh thuận tay trái,

8% học sinh cận thị

và 2% vừa thuận tay trái vừa cận thị.

Chọn ngẫu nhiên một học sinh trường đó.

Tính xác suất để :

- a. Học sinh đó thuận tay trái nếu biết học sinh đó cận thị
- b. Học sinh đó cận thị nếu biết học sinh đó thuận tay trái



**4.** Một hộp có 5 viên bi: 3 bi đỏ, 2 bi xanh.

Lan lấy ngẫu nhiên 1 viên bi (không hoàn lại), sau đó Điệp lấy ngẫu nhiên 1 bi.

**a.** Tính xác suất để Lan lấy được bi xanh.

**b.** Tính xác suất để Lan lấy được bi xanh còn Điệp lấy được bi đỏ.

**c.** Tính xác suất để Điệp lấy được bi đỏ biết Lan lấy được bi xanh



# KẾT THÚC CHƯƠNG 1