ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG VIỆT - HÀN
Vietnam - Korea University of Information and Communication Technology

Chương 2:

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ - GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC - ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

2.5. ĐẠO HÀM – VI PHÂN

2.5.1. Đạo hàm

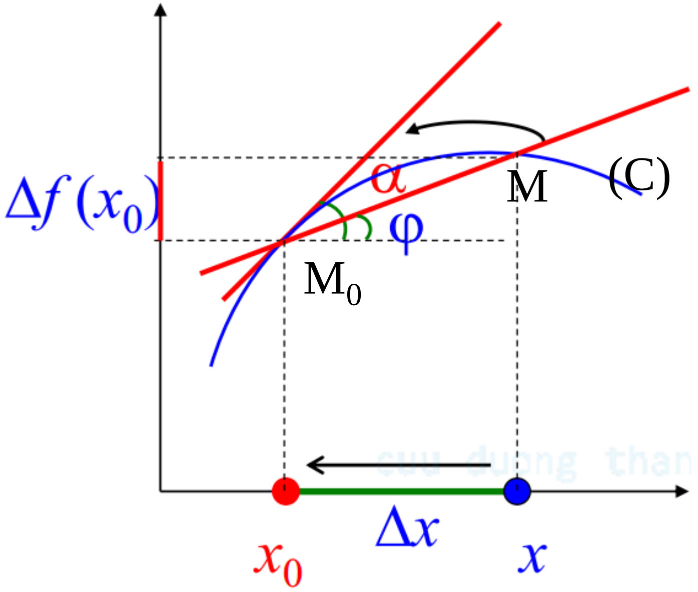
a. Định nghĩa

Cho hàm số f(x) xác định trong lân cận điểm x_o. Đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x_o là

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

- f(x) có đạo hàm tại điểm x = x_o thì liên tục tại x_o.

b. Ý nghĩa hình học của đạo hàm



$$\tan\varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\downarrow \qquad x \to x_0 \qquad \downarrow$$

$$\tan\alpha = f'(x_0)$$

$f'(x_0)$ là hệ số góc tiếp tuyến của đường cong (C):
y = f(x) tại tiếp điểm $M_0(x_0, f(x_0))$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M_0:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

c. Các phép tính đạo hàm

1. $(u+v)' = u' + v'$ $\quad\quad$ $(uv)' = u'v + uv'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}, \; v \neq 0$$

2. Cho hàm hợp y = y[u(x)]: $\quad y'(x) = y'(u).u'(x)$

3. Nếu hàm số y = f(x) có hàm số ngược x = φ(y) thì hàm hàm ngược x = φ(y) có đạo hàm

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Chú ý: Các hàm số có dạng $y = [u(x)]^{v(x)}$, với $u(x) > 0$:

Phương pháp:

* Lấy ln hai vế ta được: $\ln y = \ln[u(x)]^{v(x)} = v(x).\ln u(x)$

* Lấy đạo hàm hai vế theo biến x ta được:

$$(\ln y)' = [v(x).\ln u(x)]'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = v'(x).\ln u(x) + v(x).\frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\Rightarrow y' = y\left[v'(x).\ln u(x) + v(x).\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

Đạo hàm các hàm sơ cấp

$C' = 0$, với C là hằng số; $(x)' = 1$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad (\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Đạo hàm các hàm hợp

$$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1},\ \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a,\ (e^u)' = u' e^u$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}, \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\sin u)' = u' \cos u, \quad (\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}, \qquad (\cot u)' = -u'(1 + \cot^2 u) = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \qquad (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \sin(\ln x)$

b. $f(x) = \arctan(3x+1)$

c. $y = x^{\cos 2x}$

d. Đạo hàm cấp cao

+ Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm thì y' = f'(x) gọi là đạo hàm cấp 1 của f(x).

+ Nếu f'(x) có đạo hàm thì đạo hàm đó gọi là đạo hàm cấp 2: y''=f''(x) = [f'(x)]'

Tương tự:

+ Đạo hàm cấp 3: $y''' = f'''(x) = [f''(x)]'$

+ Đạo hàm cấp 4: $y^{(4)} = f^{(4)}(x) = [f'''(x)]'$

+ Đạo hàm cấp n: $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$

Ví dụ

Tính $y^{(n)}$ của :

a. $y = e^x$

b. $y = \sin x$

c. $y = \cos x$

d. $y = \ln(1 + x)$

Đs: a. $y^{(n)} = \left(e^x\right)^{(n)} = e^x$

b. $y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$

c. $y^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$

d. $y^{(n)} = [\ln(1+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

e. Công thức Lép-nit

Cho u(x), v(x) có đạo hàm đến cấp n. Khi đó:

- $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$
- $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

Ví dụ

Cho $y = f(x) = x^3\sin x$, tìm $y^{(20)}$.

2.5.2. VI PHÂN

a. Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x, có

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x).\Delta x + o(\Delta x)$$

Tích số $f'(x).\Delta x$ gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x, kí hiệu: dy hay df(x), tức là:

$$dy = f'(x).\Delta x \quad (1)$$

Chú ý: Nếu $y = x$ thì $dy = dx = 1.\Delta x$

Nên công thức (1) được viết lại là:

$$\boxed{dy = f'(x).dx}$$

Hàm số có vi phân tại x, ta nói f(x) ***khả vi tại x.***

Chú ý:

Đối với hàm một biến số, khái niệm ***hàm số có đạo hàm*** tại x và khái niệm ***hàm số khả vi*** tại x là tương đương nhau.

b. Ứng dụng để tính gần đúng

$$\boxed{f(x_o + \Delta x) \approx f(x_o) + f'(x_o).\,\Delta x}$$

Ví dụ

Tính gần đúng giá trị $(0{,}998)^{20}$

c. Vi phân cấp cao

+ Nếu hàm số $y = f(x)$ khả vi trong (a, b) thì:

$dy = f'(x)dx$ gọi là ***vi phân cấp 1*** của $f(x)$

+ Vi phân cấp 2: $d^2y = f''(x)(dx)^2$

+ Vi phân cấp 3: $d^3y = f'''(x)(dx)^3$

+ Vi phân cấp n: $d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n$

Ví dụ

Tìm vi phân cấp 2 của các hàm số:

a. $\mathrm{arctg}x^2$

b. $y = e^{\cos x}$