Lời giải

Ta có $y' = -2 + \dfrac{a(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+5}}, \forall x; y'' = \dfrac{a}{\left(\sqrt{x^2-4x+5}\right)^3}, \forall x$.

- Xét $a = 0: y = -2x + 2$. Suy ra hàm số không có cực trị.
- Xét $a \neq 0$:

Hàm số có cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ y'' < 0 \end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow a < 0$ và phương trình $y' = 0$ có nghiệm.

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+5}} = 2 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \dfrac{2}{a}$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2-4x+5}\right)^3} > 0, \forall x; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

Vậy hàm số có cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ -1 < \dfrac{2}{a} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow a < -2$.

Dạng 10. Số điểm cực trị của hàm hợp không chứa dấu GTTĐ

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ *(Đề có thể cho bằng hàm, đồ thị, bảng biến thiên của $f(x), f'(x)$)*. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(u)$ trong đó u là một hàm số đối với x

Ta thực hiện phương pháp tương tự xét số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

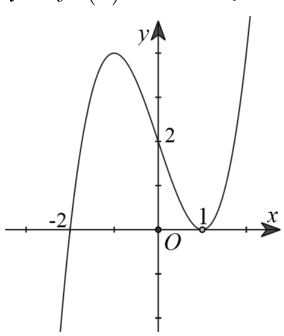
Bước 1. Tính đạo hàm $y' = u'.f'(u)$

Bước 2. Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{array}\right.$

Bước 3.Tìm số nghiệm đơn và bội lẻ hoặc các điểm mà y' không xác định.

Kết luận

Câu 40. **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.



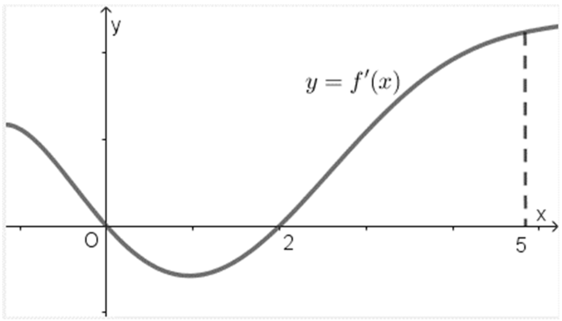
Lời giải

Quan sát đồ thị ta có $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

Ta có $y' = \left[f\left(x^2-3\right)\right]' = 2x.f'\left(x^2-3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3=-2 \\ x^2-3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Mà $x=\pm 2$ là nghiệp kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y=f\left(x^2-3\right)$ có ba cực trị.

Câu 41. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2\right)$ trên khoảng $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.



Lời giải

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2\right) \Rightarrow g'(x)=2xf'\left(x^2\right)$.

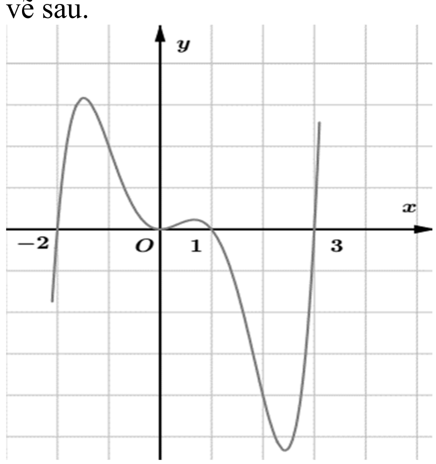
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=0 \\ x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{5}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $y=f\left(x^2\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 42. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau.



Hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Có $g'(x)=\left[f\left(x^2\right)\right]'=2xf'\left(x^2\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 43. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biên thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4[f(x-1)]^2$

Lời giải

Ta có : $f(x)=4x^4-8x^2+3\Rightarrow f'(x)=16x(x^2-1)$

Ta có $g'(x)=2x^3.f(x-1).[2f(x-1)+x.f'(x-1)]$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^3=0 & (1)\\f(x-1)=0 & (2)\\2f(x-1)+x.f'(x-1)=0 & (3)\end{array}\right.$$

Phương trình (1) có $x=0$ (nghiệm bội ba).

Phương trình (2) có cùng số nghiệm với phương trình $f(x)=0$ nên (2) có 4 nghiệm đơn.

Phương trình (3) có cùng số nghiệm với phương trình :

$$2f(x)+(x+1).f'(x)=0\Leftrightarrow 2(4x^4-8x^2+3)+16x(x+1)(x^2-1)=0$$

$\Leftrightarrow 24x^4+16x^3-32x^2-16x+6=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Dễ thấy 9 nghiệm trên phân biệt nên hàm số $g(x)=0$ có tất cả 9 điểm cực trị.

Câu 44. **(Sở Hà Tĩnh 2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có bảng biến thiên như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=2^{-\frac{1}{x^4}}\left[f(2x+1)\right]^3$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải

Ta có:

$$g'(x)=\frac{4}{x^5}.2^{-\frac{1}{x^4}}.\ln 2.\left[f(2x+1)\right]^3+2^{-\frac{1}{x^4}}.6.\left[f(2x+1)\right]^2.f'(2x+1)$$

$$=2.2^{-\frac{1}{x^4}}.\left[f(2x+1)\right]^2\left[\frac{2\ln 2}{x^5}f(2x+1)+3f'(2x+1)\right]$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[f(2x+1)\right]^2=0\ (1)\\ \dfrac{2\ln 2}{x^5}f(2x+1)+3f'(2x+1)=0\ (2)\end{array}\right.$$

Xét phương trình $\left[f(2x+1)\right]^2=0$ có các nghiệm đều là nghiệm bội chẵn do đó $g'(x)$ không đổi dấu khi qua các nghiệm đó.

Xét phương trình $\dfrac{2\ln 2}{x^5}f(2x+1)+3f'(2x+1)=0$. Đặt $2x+1=t$; phương trình tương đương

$$\frac{64\ln 2}{(t-1)^5}f(t)+3f'(t)=0\ (*).$$

Do $f(t)$ và $f'(t)$ không đồng thời bằng 0 nên $\dfrac{64\ln 2}{(t-1)^5}+3\dfrac{f'(t)}{f(t)}=0\ (*)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f(t)=a(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)$.

Tính $f'(t)$ thay vào $(*)$ ta được phương trình: $\dfrac{64\ln 2}{(t-1)^5}+\dfrac{3}{t-t_1}+\dfrac{3}{t-t_2}+\dfrac{3}{t-t_3}+\dfrac{3}{t-t_4}=0$

Xét hàm số

$$h(t)=\frac{64\ln 2}{(t-1)^5}+\frac{3}{t-t_1}+\frac{3}{t-t_2}+\frac{3}{t-t_3}+\frac{3}{t-t_4};$$

$$h'(t)=-\frac{320\ln 2}{(t-1)^6}-\frac{3}{(t-t_1)^2}-\frac{3}{(t-t_2)^2}-\frac{3}{(t-t_3)^2}-\frac{3}{(t-t_4)^2}<0;\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Ta có bảng biến thiên của $h(t)$:

x	$-\infty$		t_1		t_2		t_3		1		t_4		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$h(t)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$ $y=0$	0

Phương trình có 4 nghiệm nên hàm số có 4 điểm cực trị.

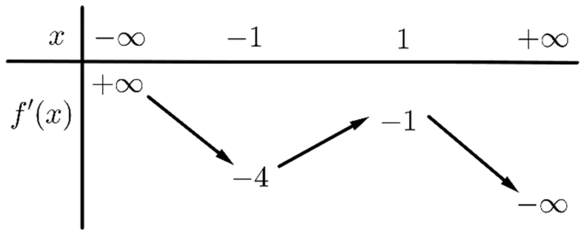
Dạng 11. Số điểm cực trị của hàm hợp chứa dấu GTTĐ

Bài toán tìm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left[u(x)\right]+h(x)\right|$

Bước 1. Tìm cực trị của hàm số $v(x)=f\left[u(x)\right]+h(x)$

Bước 2. Sử dụng phương pháp biến đổi đồ thị hàm số trị tuyệt đối để tìm số cực trị của hàm số $g(x)$

Câu 45. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0)=-\dfrac{1}{\ln 2}$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $g(x)=\left|f\left(-x^2\right)-x^2+\dfrac{2^{x^2}}{\ln 2}\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

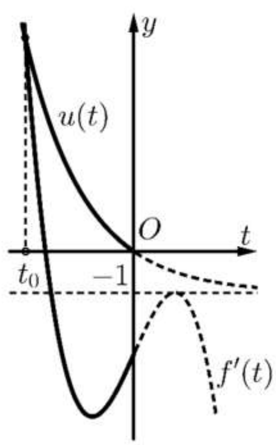
Từ bảng biến thiên, ta tìm được $f'(x)=-\dfrac{3}{4}x^3+\dfrac{9}{4}x-\dfrac{5}{2}$.

Đặt $h(x)=f\left(-x^2\right)-x^2+\dfrac{2^{x^2}}{\ln 2}$. Ta có $h(0)=f(0)+\dfrac{1}{\ln 2}=0$.

$h'(x)=-2x\cdot f'\left(-x^2\right)-2x+2x\cdot 2^{x^2}=-2x\left[f'\left(-x^2\right)+1-2^{x^2}\right]$,

$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(-x^2\right)=2^{x^2}-1\ (*)\end{array}\right.$.

Đặt $t=-x^2$, $t\le 0$. Phương trình (*) trở thành: $f'(t)=u(t)$, với $u(t)=2^{-t}-1$



Từ đồ thị ta thấy phương trình $f'(t)=u(t)\Leftrightarrow t=t_0$, với $t_0<-1$.

Từ đó, phương trình (*) $\Leftrightarrow -x^2=t_0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-t_0}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{-t_0}$		0		$\sqrt{-t_0}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)=|h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 46. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3\right|\right)-3|x|$.

Lời giải

Ta thấy $g(x)=f\left(\left|x^3\right|\right)-3|x|$ là hàm chẵn.

Ta chỉ xét $x>0$ khi đó hàm số $g(x)=f\left(x^3\right)-3x \Rightarrow g'(x)=3x^2 f'\left(x^3\right)-3$

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2 f'\left(x^3\right)-3=0 \Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=\frac{1}{x^2}$.

Đặt $t=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{t}$ khi đó ta được:

$f'(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$

Xét hàm số $h(t)=f'(t)-\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$ Vì $h'(t)=f''(t)+\frac{2}{3\sqrt[3]{t^5}}>0$ $\forall t>0$ nên $h(t)$ là hàm đồng biến

Bảng biến thiên của $h(t)$ là

t	0		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	
$h(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

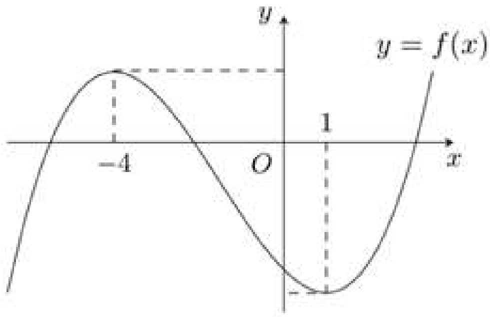
Vậy phương trình $h(t)=0$ chỉ có một nghiệm $t=a>0$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ khi $x>0$ là

x	0		$\sqrt[3]{a}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(a)-3\sqrt[3]{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 47. **(Cụm Ninh Bình – 2021)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(x^2-4|x|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Lời giải

Ta có $g(x)=f\left(x^2-4|x|\right) \Rightarrow g'(x)=\left(x^2-4|x|\right)' f'\left(x^2-4|x|\right)=2x\left(1-\dfrac{2}{|x|}\right) f'\left(x^2-4|x|\right)$.

Hàm số $g'(x)$ không xác định tại $x=0$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|=2\\ f'\left(x^2-4|x|\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|=2\\ x^2-4|x|=-4\\ x^2-4|x|=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 2\\ x=\pm\left(2+\sqrt{5}\right)\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{5}$		-2		0		2		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 48. **(Sở Quảng Bình - 2021)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$, $(a\neq 0)$ với các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c>2019$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=\left|g(x-2019)\right|$ với $g(x)=f(x)-2020$

Lời giải

Ta có:

Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|g(x-2019)\right|$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $y=\left|g(x)\right|$

Mà $g(x)=f(x)-2020=ax^3+bx^2+cx-2019$

Có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow a<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \Rightarrow$ tồn tại số $\alpha>1$ thỏa mãn $g(\alpha)<0$

Có $a<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty \Rightarrow$ tồn tại số $\beta<0$ thỏa mãn $g(\beta)>0$

$g(1)=a+b+c-2019>0$

$g(0)=-2019<0$

Vậy $g(1).g(\alpha)<0$ và $g(1).g(0)<0, g(0).g(\beta)<0$, mà $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ suy ra phương trình $g(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Từ đó đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực trị và cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt. Vậy hàm số $y=\left|g(x)\right|$ có 5 điểm cực trị. Tức là số điểm cực trị của hàm số $y=\left|g(x-2019)\right|$ là 5.

Câu 49. **(Sở Nam Định - 2021)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3)=0$ đồng thời có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=\left|2(x+1)^6-6(x+1)^2-3f\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Đặt $h(x)=2(x+1)^6-6(x+1)^2-3f\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)$

$\Rightarrow h'(x)=12(x+1)^5-12(x+1)-3\left(-4x^3-12x^2-8x\right).f'\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)$

$=12(x+1)\left(x^2+2x\right)\left(x^2+2x+2\right)+12(x+1)\left(x^2+2x\right).f'\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)$

$=12(x+1)\left(x^2+2x\right)\left[x^2+2x+2+f'\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)\right]$

Mà $-x^4-4x^3-4x^2-2=-\left[x(x+2)\right]^2-2\le -2, \forall x\in\mathbb{R}$ nên dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta suy ra $f'\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)\ge 0$.

$\Rightarrow x^2+2x+2+f'\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)>0, \forall x\in\mathbb{R}$

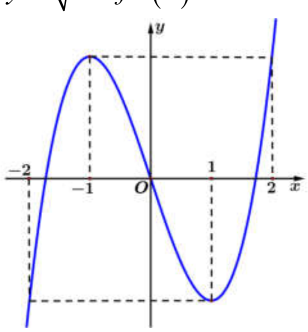
Do đó dấu của $h'(x)$ cùng dấu với $u(x)=12(x+1)\left(x^2+2x\right)$, tức là đổi dấu khi đi qua các điểm $x=-2; x=-1; x=0$.

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $h(-1)=-3f(-3)=0$ nên đồ thị hàm số $y=h(x)$ tiếp xúc Ox tại $x=-1$ và cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Vậy $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 50. **(THPT Hương Sơn - Hà Tĩnh - 2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hìnhh vẽ. Hàm số $y=\sqrt{4-f^2(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Lời giải

$$y=\sqrt{4-f^2(x)}\Rightarrow y'=\frac{\left[4-f^2(x)\right]'}{2\sqrt{4-f^2(x)}}=\frac{-2f(x).f'(x)}{2\sqrt{4-f^2(x)}}=\frac{-f(x).f'(x)}{\sqrt{4-f^2(x)}}$$

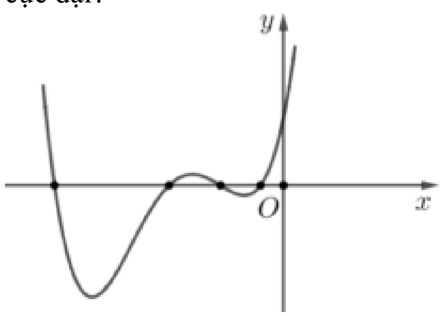
Xét $y'=0\Leftrightarrow f(x).f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0\\ f'(x)=0\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $f(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-2;-1)\\ x=b\in(1;2)\\ x=0\end{array}\right.$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy $y'=0$ có 5 nghiệm phân biệt. Nên hàm số $y=\sqrt{4-f^2(x)}$ có 5 điểm cực trị.

Câu 51. **(Sở Bắc Giang 2022)** Biết rằng $f(0)=0$. Hỏi hàm số $g(x)=\left|f\left(x^6\right)-x^3\right|$ có bao nhiêu điểm cực đại?



Lời giải

$$h(x)=f\left(x^6\right)-x^3 \Rightarrow h'(x)=6x^5 f'\left(x^6\right)-3x^2=3x^2\left(2x^3 f'\left(x^6\right)-1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ 2x^3 f'\left(x^6\right)-1=0 \end{array}\right.$$

Đặt: $u(x)=2x^3 f'\left(x^6\right)-1 \Rightarrow u'(x)=6x^2 f'\left(x^6\right)+12x^8 f''\left(x^6\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

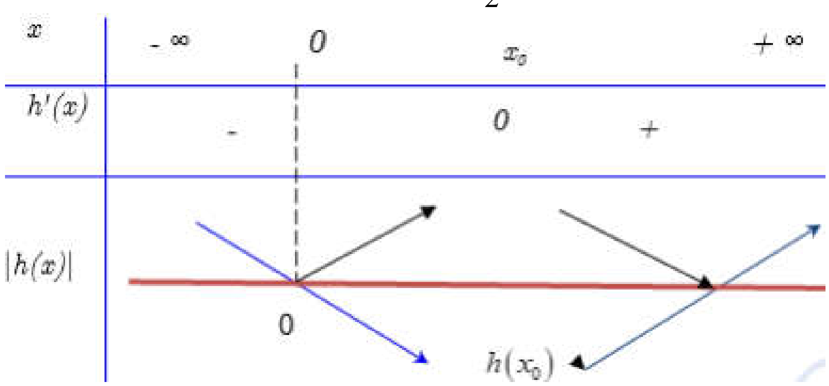
(Từ đồ thị ta có $x^6 \geq 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'\left(x^6\right)>0 \\ f''\left(x^6\right)>0 \end{array}\right.$ do đó $\left\{\begin{array}{l} 6x^2 f'\left(x^6\right) \geq 0 \\ 12x^8 f''\left(x^6\right) \geq 0 \end{array}\right., \forall x \in \mathbb{R}$)

Nên $u(x)=2x^3 f'\left(x^6\right)-1$ đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$

(do $f(x)$ là hàm đa thức $\Rightarrow u(x)$ là hàm đa thức) và $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} u(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x)=+\infty \end{array}\right.$

suy ra phương trình $u(x)=2x^3 f'\left(x^6\right)-1=0$ có nghiệm duy nhất.

Giả sử $2x^3 f'\left(x^6\right)-1=0 \Leftrightarrow x^3 f'\left(x^6\right)=\frac{1}{2}$ có nghiệm là x_0 (do $f'\left(x_0^6\right)>0$) $\Rightarrow x_0^3>0 \Rightarrow x_0>0$.



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)=|h(x)|$ có 1 điểm cực đại.

Câu 52. **(Sở Vĩnh Phúc 2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)$

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ ta có hàm số $f(x)$ có 2 cực trị tại $x=-1$ và $x=4$.

Xét $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)=\begin{cases} f\left(x^3+2x-4\right) \text{ khi } x\geq 0 \\ f\left(x^3-2x-4\right) \text{ khi } x<0 \end{cases}$

$g'(x)=\begin{cases} \left(3x^2+2\right).f'\left(x^3+2x-4\right) \text{ khi } x\geq 0 \\ \left(3x^2-2\right).f'\left(x^3-2x-4\right) \text{ khi } x<0 \end{cases}$.

Xét $g'(x)=0$

TH1: $x\geq 0$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left(3x^2+2\right).f'\left(x^3+2x-4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+2x-4=-1 \\ x^3+2x-4=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+2x-3=0 \\ x^3+2x-8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1>0 \\ x\simeq 1,67>0 \end{array}\right.$

Với $x\geq 0$ có 2 cực trị.

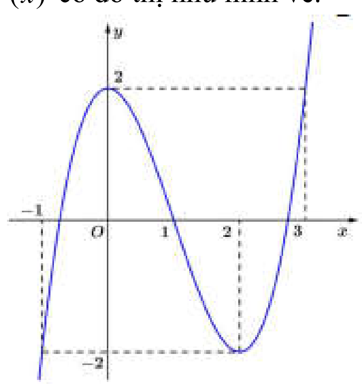
TH2: $x<0$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left(3x^2-2\right).f'\left(x^3-2x-4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-2=0 \\ x^3-2x-4=-1 \\ x^3-2x-4=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{2}{3} \\ x^3-2x-3=0 \\ x^3-2x-8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ x=\sqrt{\dfrac{2}{3}} \text{ (loại)} \\ x\simeq 1.89 \text{ (loại)} \\ x\simeq 2,33 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Với $x<0$ có 1 cực trị.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)$ có 3 cực trị.

Câu 53. **(Sở Thái Nguyên 2022)** Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ thỏa mãn $f(0)=\dfrac{1}{2}$, hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|18f\left(1-\dfrac{x}{3}\right)-x^2\right|$

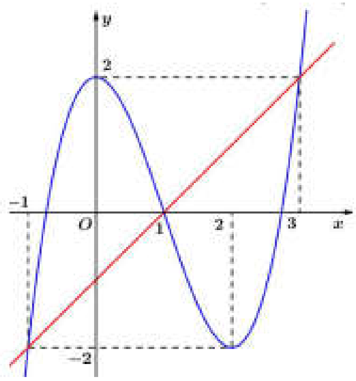
Lời giải

Ta xét: $h(x)=18f\left(1-\dfrac{x}{3}\right)-x^2; g(x)=|h(x)|$ có

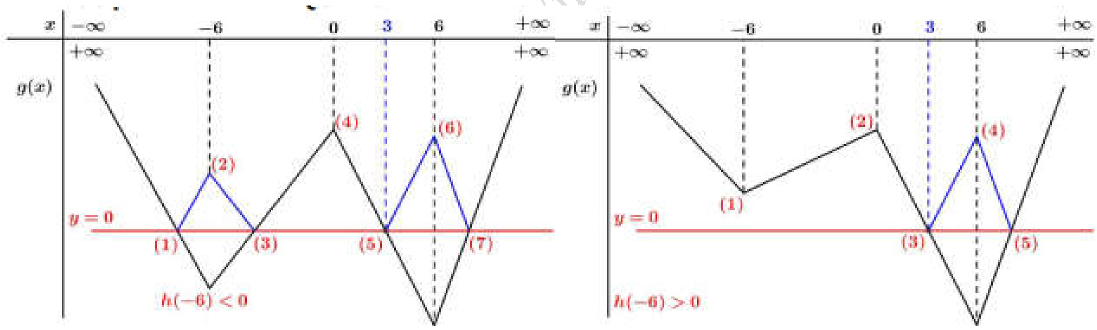
$h'(x)=-6f'\left(1-\dfrac{x}{3}\right)-2x=0 \Leftrightarrow f'\left(1-\dfrac{x}{3}\right)=\left(1-\dfrac{x}{3}\right)-1(1)$

Đặt $t=1-\dfrac{x}{3}$ thì khi đó (1) trở thành: $f'(t)=t-1$. Nghiệm của phương trình này chính là số giao điểm của hàm số $f'(t)$ và đường thẳng $y=t-1$.

Nhìn vào đồ thị trên ta suy ra phương trình có nghiệm: $t=\{-1;1;3\} \Rightarrow x=\{-6;0;6\}$.



Ta lại có: $h(3)=18f(0)-9=0$ nên ta suy ra $h(0)>0, h(6)<0$ Nên ta có hai trường hợp như sau:



Như vậy hàm số $g\left(x\right)$ chỉ có 2 trường hợp là có 5 điểm cực trị hoặc 7 điểm cực trị.

Dạng 12. Tìm m để hàm số f(u) không chứa dấu GTTĐ thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 54. **(THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2\left(x-a\right)\left(13x-15\right)^3$. Tìm tập hợp các giá trị của a để hàm số $y=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$ có 6 điểm cực trị

Lời giải

$$y'=f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)=\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)'.\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)^2\left(\frac{5x}{x^2+4}-a\right)\left(13\frac{5x}{x^2+4}-15\right)^3$$

$$=\frac{20-5x^2}{\left(x^2+4\right)^2}.\frac{25x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\left(\frac{-ax^2+5x-4a}{x^2+4}\right)\left(\frac{-15x^2+65x-60}{x^2+4}\right)^3.$$

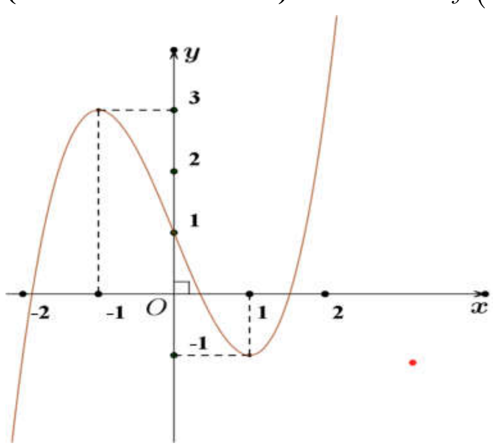
$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=0 \\ x=3 \\ x=\dfrac{4}{3} \\ -ax^2+5x-4a=0 \quad (1) \end{array}\right. \quad (x=0 \text{ là nghiệm kép}).$$

đặt $g(x)=-ax^2+5x-4a$

Ycbt thỏa mãn khi phương trình $y'=0$ có 6 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $\pm 2;0;1;4$. (Nếu $g(0)=0$ thì $y'=0$ chỉ có 5 nghiệm bội lẻ).

Điều kiện: $$\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=5^2-4a.4a>0 \\ g(2)\neq 0 \\ g(-2)\neq 0 \\ g(0)\neq 0 \\ g(3)\neq 0 \\ g\left(\dfrac{4}{3}\right)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ -\dfrac{5}{4}<a<\dfrac{5}{4} \\ a\neq \pm\dfrac{5}{4} \\ a\neq 0 \\ a\neq \dfrac{15}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{5}{4}<a<\dfrac{5}{4} \\ a\neq 0 \\ a\neq \dfrac{15}{13} \end{cases}.$$

Câu 55. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Cho hàm số $f(x)$. Biết $f'(x)$ là hàm bậc 3. Có đồ thị như hình vẽ sau

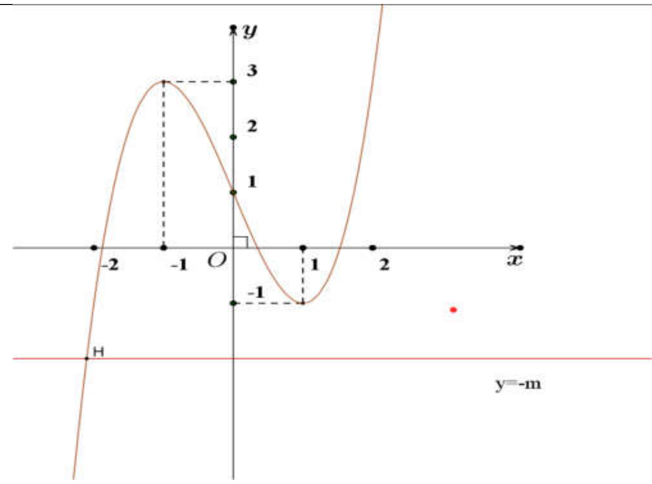


Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10,10]$ để hàm số $g(x)=f(x)+mx+2021$ có đúng 1 cực trị?

Lời giải

Ta có $g'(x)=f'(x)+m \Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow g'(x)=-m \ (1)$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường $d: y=-m$



Dựa vào đồ thị trên. Để $g(x)$ có đúng 1 cực trị thì điều kiện là

$$\begin{cases} m \in [-10,10] \\ m < -1 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{4,5,6,7,8,9,10,-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2\}$$

Số giá trị của m là 16.

Câu 56. **(Sở Hưng Yên 2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+3)^2(x^2 - x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 6x + m)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 (nghiem\, boi\, chan) \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Đặt $g(x) = f(x^2 - 6x + m) \Rightarrow g'(x) = (2x-6).f'(x^2 - 6x + m)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x^2 - 6x + m = -3 (nghiem\ boi\ chan) \\ x^2 - 6x + m = 0\ (1) \\ x^2 - 6x + m = 1\ (2) \end{array}\right.$$

Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt khác 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - m > 0 \\ 10 - m > 0 \\ -9 + m \neq 0 \\ -10 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 9 \\ m < 10 \\ m \neq 9 \\ m \neq 10 \end{cases} \Leftrightarrow m < 9$$

Mà $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{1;2;3;...;8\}$. Vậy có 8 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 57. **(THPT Đồng Lộc - Hà Tĩnh 2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, và có bảng xét đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2}.\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)-m\right)$ có ít nhất 4 điểm cực trị.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2}.\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)-m\right)=f\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+1}-m\right)$.

Ta có $g'(x)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)f'\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+1}-m\right)$ với $\forall x\neq 0$.

Suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+1}-m\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+1}-m=-1\\ \sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+1}-m=0\\ \sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+1}-m=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+1}=m-1 & (1)\\ \sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+1}=m & (2)\\ \sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+1}=m+1 & (3)\end{array}\right..$$

Đặt $h(x)=\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+1}\Rightarrow h'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ với $\forall x\neq 0$.

Ta có bảng biến thiên của hàm với $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2}.\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)-m\right)$ có ít nhất 4 điểm cực trị thì hai trong ba phương trình (1), (2), (3) phải có ít nhất một nghiệm và một phương trình phải có ít nhất hai nghiệm.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi $m>1$.

Câu 58. **(THPT Phan Châu Trinh - Đà Nẵng 2022)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=f\left(x^3-mx^2+(m-2)x+1\right)$ có đúng 8 cực trị?

Lời giải

Ta có: $f'(x)=x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$.

Xét hàm số $y=f\left(x^3-mx^2+(m-2)x+1\right)$.

Ta có: $y'=\left(3x^2-2mx+m-2\right)f'\left(x^3-mx^2+(m-2)x+1\right)$

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-mx^2+(m-2)x+1=0(1)\\x^3-mx^2+(m-2)x+1=1(2)\\g(x)=3x^2-2mx+m-2=0(3)\end{array}\right.$.

Xét phương trình (1):

$x^3-mx^2+(m-2)x+1=0\Leftrightarrow(x-1).\left[x^2+(1-m)x-1\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\h(x)=x^2+(1-m)x-1=0\end{array}\right.$

Xét phương trình (2):

$x^3-mx^2+(m-2)x+1=1\Leftrightarrow x\left(x^2-mx+m-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\k(x)=x^2-mx+m-2=0\end{array}\right.$

Xét phương trình (3):

Ta có $g(x)=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt do $\Delta'_{g(x)}=m^2-3m+6>0,\forall m\in\mathbb{R}$.

Yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow\begin{cases}g(1).g(0).h(1).h(0).k(1).k(0)\neq0\\\Delta_h>0\\\Delta_k>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq1\\m\neq2\\m^2-2m+5>0,\forall m\in\mathbb{R}\\m^2-4m+8>0,\forall m\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq1\\m\neq2\end{cases}$.

Do tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ và $m\neq1,m\neq2$ nên có 19 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 59. **(Sở Nam Định 2023)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Tìm giá trị tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x^2+m\right)$ có 8 điểm cực trị

Lời giải

Ta có: $g'(x)=\left(3x^2-6x\right)f'\left(x^3-3x^2+m\right)=3x(x-2)f'\left(x^5-3x^2+m\right)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\f'\left(x^5-3x^2+m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x^3-3x^2+m=0\\x^3-3x^2+m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x^3-3x^2=-m\\x^5-3x^2=-m+2\end{array}\right.$

Xét $h(x)=x^3-3x^2\Rightarrow h'(x)=3x^2-6x$; $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Để hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị thì phương trình (1),(2) phải có tổng 6 nghiệm phân biệt khác 0 và 2. Từ bảng biến thiên $h(x)$ ta có:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

$\begin{cases}-4<-m<0\\-4<-m+2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<m<4\\2<m<6\end{cases}\Leftrightarrow2<m<4$

Dạng 13. Tìm m để hàm số f(u) chứa dấu GTTĐ thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 60. **(Mã 102 - 2021 Lần 1)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-8)(x^2-9)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(\left|x^3+6x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

Lời giải

$g(x) = f\left(\left|x^3+6x\right|+m\right) \Rightarrow g'(x) = \left(\left|x^3+6x\right|+m\right)'.f'\left(\left|x^3+6x\right|+m\right)$

$= \dfrac{(x^3+6x).(3x^2+6)}{\left|x^3+6x\right|}.f'\left(\left|x^3+6x\right|+m\right)$.

Ta thấy $x = 0$ là một điểm tới hạn của hàm số $g(x)$.

Mặt khác $f'\left(\left|x^3+6x\right|+m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^3+6x\right|+m = 8 \\ \left|x^3+6x\right|+m = 3 \\ \left|x^3+6x\right|+m = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^3+6x\right| = 8-m \\ \left|x^3+6x\right| = 3-m \\ \left|x^3+6x\right| = -3-m \end{array}\right.$.

Xét hàm số $h(x) = x^3+6x$, vì $h'(x) = 3x^2+6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $k(x) = |h(x)| = \left|x^3+6x\right|$ như sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	||	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f\left(\left|x^3+6x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị khi phương trình $f'\left(\left|x^3+6x\right|+m\right) = 0$ có ít nhất hai nghiệm khác 0. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $8-m > 0$ hay $m < 8$.

Kết hợp điều kiện m nguyên dương ta được $m \in \{1;2;3...;7\}$. Vậy có 7 giá trị của m thoả mãn.

Câu 61. **(Chuyên Bắc Giang - Lần 4 - 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^2(x-1)\left(x^2-2(m+1)x+m^2-1\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

Dựa vào cách vẽ đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$, số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$ bằng số điểm cực trị dương của đồ thị hàm số $y = f(x)$ cộng thêm 1.

Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị dương.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \\ x^2-2(m+1)x+m^2-1 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$

Có $x = 2$ là nghiệm bội 2, $x = 1$ là nghiệm đơn.

Vậy $x^2-2(m+1)x+m^2-1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm $x \le 0$

Trường hợp 1: Có nghiệm $x = 0$ khi đó $x^2-2(m+1)x+m^2-1 = 0 \Leftrightarrow m^2-1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Với $m = 1$, có $x^2-2(m+1)x+m^2-1 = 0 \Leftrightarrow x^2-4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$ (TM)

Với $m = -1$, có $x^2-2(m+1)x+m^2-1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Loại)

Trường hợp 2: $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x\neq 1$, có một nghiệm âm

Điều kiện tương đương $\begin{cases} m^2-1<0 \\ 1^2-2(m+1).1+m^2-1\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} m\in(-1;1) \\ m\neq 1\pm\sqrt{3} \end{cases}$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=0$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 62. **(Chuyên Long An - 2021)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f(|6x-5|)+2021+m\right|$ có 3 điểm cực đại?

Lời giải

◆ Xét hàm số $y=f(|6x-5|)+2021+m$.

Đặt $u=|6x-5|=\sqrt{(6x-5)^2}\Rightarrow u'=\dfrac{6(6x-5)}{\sqrt{(6x-5)^2}}=\dfrac{6(6x-5)}{|6x-5|}$.

Khi đó $u'=0\Leftrightarrow \dfrac{6(6x-5)}{|6x-5|}=0\Rightarrow x=\dfrac{5}{6}$.

Với $x=\dfrac{7}{6}\Rightarrow u=2\Rightarrow f(2)=-4$;

Bảng biến thiên

x	$-\infty$				$\frac{5}{6}$				$+\infty$
u					0		2		
$f(u)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$
$f(u)+2021+m$	$+\infty$	$\searrow$	$m+2017$	$\nearrow$	$m+2014$	$\searrow$	$m+2017$	$\nearrow$	$+\infty$

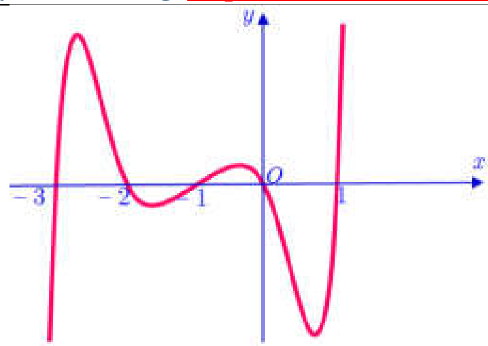
Suy ra hàm số $y=\left|f(u)+2021+m\right|$ có ba điểm cực đại

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2017<0 \\ m+2014>0 \end{cases}\Leftrightarrow -2024<m<-2017$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2023;-2022;-2021;-2020;-2019;-2018\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có 3 cực đại.

Câu 63. **(Đại học Hồng Đức 2022)** Cho hàm đa thức $y=\left[f\left(x^2+2x\right)\right]'$ có đồ thị cắt trục Ox tại 5 điểm phân biệt như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m với $2022m\in\mathbb{Z}$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)$ có 9 điểm cực trị?



Lời giải.

Ta có:

$$\left[f\left(x^2+2x\right)\right]'=(2x+2)f'\left(x^2+2x\right)=a(x+3)(x+2)(x+1)(x)(x-1)\quad(a>0)$$

$$\Rightarrow f'\left(x^2+2x\right)=\frac{a}{2}(x+3)(x+2)x(x-1)=\frac{a}{2}\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+2x\right).$$

Đặt $t=x^2+2x\Rightarrow f'(t)=\frac{a}{2}(t-3)t$.

Ta có $g(x)=f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)=f\left(|x-1|^2-2|x-1|+m-1\right)$.

Ta thấy $g(2-x)=g(x),\forall x\in\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số $y=g(x)$ nhận đường thẳng $x=1$ làm trục đối xứng. Do đó số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng $2a+1$ với a là số điểm cực trị lớn hơn 1 của hàm số $g(x)$. Theo bài ra ta có $2a+1=9\Leftrightarrow a=4$. Vì vậy ta cần tìm m để hàm số $g(x)$ có đúng 4 điểm cực trị lớn hơn 1.

Khi $x>1$ thì $g(x)=f\left(x^2-4x+m+2\right)$.

$$g'(x)=(2x-4)f'\left(x^2-4x+m+2\right),g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x^2-4x+m+2=0(1).\\x^2-4x+m+2=3\ (2)\end{array}\right.$$

Đặt $u(x)=x^2-4x+m+2$, ta có bảng biến thiên

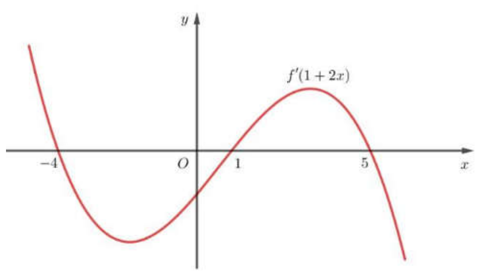
x	1		2		$+\infty$
$u(x)$	$m-1$	$\searrow$	$m-2$	$\nearrow$	$+\infty$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để 2 phương trình (1), (2) có đúng 3 nghiệm phân biệt khác 2, điều này xảy ra khi và chỉ khi $m-2<0<m-1\Leftrightarrow 1<m<2$,

suy ra $2022<2022m<4044\Rightarrow 2022m\in\{2023;2024;\ldots;4043\}$,

do đó có 2021 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 64. **(Sở Nam Định 2023)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e(a\neq 0)$, hàm số $y=f'(1+2x)$ có đồ thì như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3+5x\right|+m\right)$ có ít nhất 5 điểm cực trị?

Lời giải

Từ đồ thi ta có: $f'(1+2x)=k(x+4)(x-1)(x-5)$ với $k<0$.

Đặt $t=1+2x \Rightarrow x=\dfrac{t-1}{2}$. Suy ra:

$$f'(t)=k\left(\frac{t-1}{2}+4\right)\left(\frac{t-1}{2}-1\right)\left(\frac{t-1}{2}-5\right)=\frac{k}{8}(t+7)(t-3)(t-11)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-7 \\ t=3 \\ t=11 \end{array}\right.$$

Ta có: $g(x)=f\left(\left|x^3+5x\right|+m\right)=f\left(\left|\left(x^2+5\right)x\right|+m\right)=f\left(|x|\left(x^2+5\right)+m\right)$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$ nên ta có: $\begin{cases} \forall x_0 \in D \Rightarrow -x_0 \in D \\ g(-x)=f\left(|-x|\left((-x)^2+5\right)+m\right)=f\left(|x|\left(x^2+5\right)+m\right)=g(x) \end{cases}$.

Do đó hàm $g(x)$ là hàm chẵn nên đồ thị đối xứng nhau qua trục tung, suy ra số điểm cực trị hàm $g(x)$ có dạng $(2m+1)$ trong đó m là số điểm cực trị có hoành độ dương của đồ thị hàm số $y=f\left(x^3+5x+m\right)$

Theo giả thiết ta có: $2m+1 \geq 5 \Rightarrow m \geq 2$. Vậy yêu cầu bài toán tương đương với: "Tìm m để hàm số $y=f\left(x^3+5x+m\right)$ có ít nhất hai điểm cực trị có hoành độ dương".

Xét hàm $y=f\left(x^3+5x+m\right)$ với $x \in (0;+\infty)$.

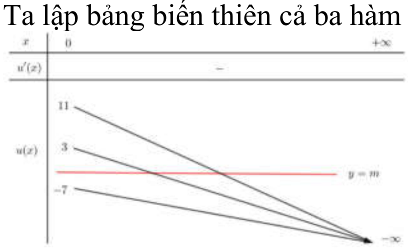
Ta có:

$y'=\left(3x^2+5\right)f'\left(x^3+5x+m\right)=0 \Leftrightarrow f'\left(x^3+5x+m\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+5x+m=-7 \\ x^3+5x+m=3 \\ x^3+5x+m=11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-x^3-5x-7 \\ m=-x^3-5x+3 \\ m=-x^3-5x+11 \end{array}\right.$$

có ít nhất hai nghiệm dương.

Ta lập bảng biến thiên cả ba hàm trên cùng một bảng ta có:



Để có ít nhất hai nghiệm dương thì $m<3$. Mà $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m=\{1;2\}$.

Vậy có hai giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

NHÓM CÂU HỎI CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** -4.

Lời giải