

研究目的

本欄には、研究の全体構想及びその中での本研究の具体的な目的について、冒頭にその概要を簡潔にまとめて記述した上で、適宜文献を引用しつつ記述し、特に次の点については、焦点を絞り、具体的かつ明確に記述してください（記述に当たっては、「科学研究費助成事業における審査及び評価に関する規程」（公募要領 8 1 頁参照）を参考にしてください。）。

- ① 研究の学術的背景（本研究に関連する国内・国外の研究動向及び位置づけ、応募者のこれまでの研究成果を踏まえ着想に至った経緯、これまでの研究成果を発展させる場合にはその内容等）
- ② 研究期間内に何をどこまで明らかにしようとするのか
- ③ 当該分野における本研究の学術的な特色・独創的な点及び予想される結果と意義

研究目的（概要）※ 当該研究計画の目的について、簡潔にまとめて記述してください。

量子力学が生み出すことができる相関を情報の観点から特徴付けるというのが、この研究の大きな目標である。量子力学によって達成される最大の CHSH 確率 $(2 + \sqrt{2})/4 \approx 0.854$ を情報の観点から特徴付ける研究は「情報因果律」によって一定の決着を見たものの、「より簡潔で直感的な原理によって特徴付けることはできないのだろうか？」という問題意識は依然として存在する。また一方で、量子力学によって生み出される相関の集合そのものを操作的意味のある条件で特徴付けるという研究はまだあまり進展しているとは言えない。応募者は理論計算機科学の最先端の数理的道具である「二元関数のフーリエ解析の手法」を用いて、これらの問題の解決を目指す。

① 研究の学術的背景**非局所性と CHSH 確率**

量子力学は数学的に大変美しく、完成された理論であるその一方で、それを「説明」する原理を持たない。最近、「情報」こそが量子力学を「説明」する言語であるという共通認識が物理学者の間で確立しつつある。量子力学を「説明」という目標に対して様々なアプローチが考えられるが、本研究では量子力学の持つ相関（非局所性）を情報の観点から特徴付けることを目標にする。古典ビットを 2 者が共有することによって生み出される相関の集合が CHSH 確率の上界 $3/4 = 0.75$ によって特徴付けられる一方で、量子状態を 2 者が共有することによって生み出される相関が真に大きい CHSH 確率 $(2 + \sqrt{2})/4 \approx 0.854$ を持ちうることは大変よく知られている。また一方で no-signaling 条件（情報は光よりも速く伝わらないという条件）のみを満たす理論は最大の CHSH 確率「1」を持つ。これらの考察によって、「量子力学によって得られる CHSH 確率を操作的意味のある条件で特徴付けることはできないのだろうか？」という問題意識が生まれる。

「情報」による量子相関の特徴付け: 通信複雑度

2005 年に van Dam は no-signaling 条件だけを満たす理論が生み出す相関は任意の関数の通信複雑度を 1 にすることを証明した。ここで、通信複雑度とは理論計算機科学の分野で Andrew Chi-Chih Yao 氏 (2000 年チューリング賞) が 1979 年に導入した概念であり、二元関数 $f: \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ の通信複雑度は Alice が $x \in \{0, 1\}^n$ を Bob が $y \in \{0, 1\}^n$ を知っているときに $f(x, y)$ を両者が評価するのに必要な通信ビット数として定義される。No-signaling 条件だけを満たす理論の上で、 x や y には依存しない「状態」を Alice と Bob が事前に共有していれば、任意の二元関数 f について Alice はたった 1 ビット Bob から教えてもらうだけで $f(x, y)$ を評価できる、ということを van Dam は示したという訳である。この極めて直感に反する事実（実際に量子力学のもとで通信複雑度が $\Omega(n)$ となる二元関数が存在することは知られている）より、「任意の二元関数の通信複雑度が 1 になる、ということはいけない」ということを「自然」への要請とすれば、no-signaling 条件だけを満たすような理論を排除することができることになる。さらに Brassard らは 2006 年に CHSH 確率が $(3 + \sqrt{6})/6 \approx 0.908$ より大きい理論の元では、通信複雑度がやはり 1 となることを証明した [1]。しかしながら量子力学によって得られる最大の CHSH 確率 $(2 + \sqrt{2})/4 \approx 0.854$ との間にはギャップがあり、量子力学によって得られる CHSH 確率を特徴付けるには至っていない。もしも「CHSH 確率が量子力学の限界を少しでも超えると通信複雑度が 1 となる」ことが証明できると、量子力学が許す CHSH 確率を操作的に意味のある条件で特徴付けたことになるので量子力学を「説明」する上で大きな一歩となる。

応募者のこれまでの研究成果: 証明の限界

この通信複雑度に基づく CHSH 確率の特徴付けの研究は 10 年間、ある意味では進展がなかったの

研究目的（つづき）

だが、2016 年に応募者は Brassard らのアイデアを一般化しても $(3 + \sqrt{6})/6$ よりも小さな閾値を導出することができないことを証明した [2]。その研究の中では理論計算機科学の分野で強力な道具である「二元関数のフーリエ解析の手法」を用いている。この研究は理論計算機科学に深い理解があるからこそ実現できたものであると自負している。またその結果そのものもさることながら、「二元関数のフーリエ解析の手法」を持ち込んだことにより、この通信複雑度の問題は数学的な問題としてより簡潔に定式化され、これからの研究に大きな広がり期待させるものになった。

関連研究: 情報因果律

公平性を期すために、ごく簡単に関連研究について説明する。2009 年に Pawłowski らは「情報因果律」という新しい物理原理を導入し、CHSH 確率が量子力学によって達成される最大値 $(2 + \sqrt{2})/4$ を超えると情報因果律が破られることを示した [3]。その意味では「量子力学によって得られる最大の CHSH 確率を情報の観点から特徴付ける」という研究には終止符が打たれたと見ることもできるが、量子相関の完全な特徴付けには至っておらず、その目標のために情報因果律という要請が通信複雑度に対する要請より優れているかどうかは明らかではない。また情報因果律はその操作的意味がはっきりしていない（これには異論もあるかもしれないが）、という点も問題である。

② 研究期間内に何をどこまで明らかにしようとするのか

(1) 量子力学で達成できる CHSH 確率の通信複雑度による特徴付け

Brassard らの導出した、通信複雑度に対する CHSH 確率の閾値 $(3 + \sqrt{6})/6$ を量子力学の元での CHSH 確率の限界である $(2 + \sqrt{2})/4$ に改善することを目標とする。上で紹介した応募者の研究により「二元関数のフーリエ解析の手法」が持ち込まれ、数学的な問題として簡潔に定式化された。このことで、Brassard らの手法をより複雑な方法で一般化することが可能になり、Brassard らの導出した閾値が改善できる可能性が生まれた。この複雑な一般化を解析することによって、量子力学の限界まで閾値を改善することが目標である。

(2) 量子力学によって生成される相関の集合の特徴付け

CHSH 確率という一次元の量ではなく、量子力学によって生成される相関そのものの集合を操作的に意味のある条件で特徴付けるというのがより大きな目標である。この分野の研究はまだ余り進展していないが、最近理論計算機科学の分野で指摘された XOR ゲームの勝率と通信複雑度の関係を用いて量子力学の理解を深めることを中心にアプローチしていく（より具体的には「研究計画・方法」に記す）。

③ 当該分野における本研究の学術的な特色・独創的な点及び予想される結果と意義

本研究は「量子相関の情報の観点からの特徴付け」というテーマに理論計算機科学の最先端の道具である「二元関数のフーリエ解析の手法」を使ってアプローチするという点で非常に独創的であり、応募者であるからこそなし得るものであると信じている。通信複雑度に対する要請で CHSH 確率の量子力学による限界 $(2 + \sqrt{2})/4$ を導出することができれば、情報因果律を重要視する必要はなくなるので、この分野の今後の研究の方向性に大きな影響を及ぼすことは間違いない。また、「量子力学によって生成される相関の集合の特徴付け」の研究は極めて重要であるものの未だ発展途上なので、なにか指針を発見すれば分野に与える影響はとても大きい。

参考文献

- [1] G. Brassard, H. Buhrman, N. Linden, A.A. Méthot, A. Tapp, and F. Unger, “Limit on nonlocality in any world in which communication complexity is not trivial,” *Physical Review Letters*, 96(25), p.250401, 2006.
- [2] R. Mori, “Three-input majority function is the unique optimal for the bias amplification using nonlocal boxes,” <https://arxiv.org/abs/1604.05663>, 2016.
- [3] M. Pawłowski, T. Paterek, D. Kaszlikowski, V. Scarani, A. Winter, and M. Żukowski, “Information causality as a physical principle,” *Nature*, 461(7267), pp.1101-1104, 2009.