

Quantum error-correction



DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Procesamiento cuántico de información
Segundo cuatrimestre de 2020

2 de diciembre de 2020

Quantum error correction

Corrección de errores clásicos

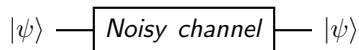
Corrección de errores cuánticos

- 3 qubit flip code

- 3 qubit phase code

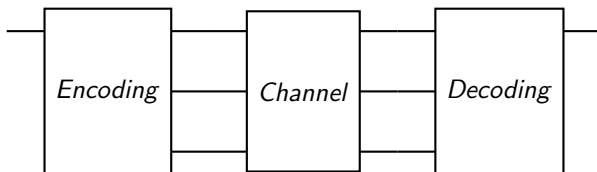
- Shor code

Objetivo:



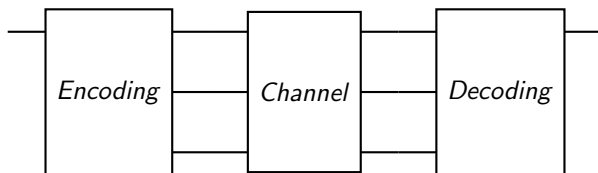
Las ideas presentadas se usan como base para tolerar fallas en cualquier operación cuántica

Idea principal: Agregar redundancia a los mensajes para que sean resilientes al ruido



- Asumimos que el encodeo y decodeo de mensajes se puede hacer sin error (existen formas de quitar esta asunción)

Corrección de errores clásicos



► **Channel:** *binary symmetric channel*, alterna cada bit con probabilidad p

► **Encoding:**

$0 \rightarrow 000$

$1 \rightarrow 111$

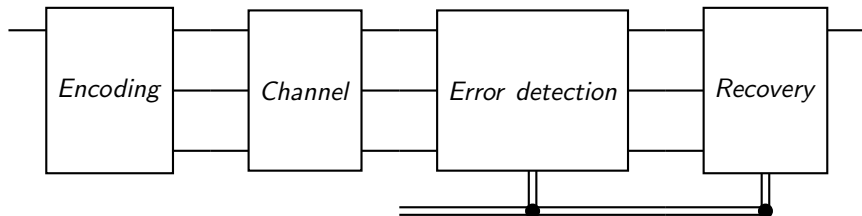
► **Decoding:** Majority voting

Corrección de errores clásicos (cont.)

- ▶ Sin corrección: p
- ▶ Con corrección: $p_e = 3p^2 - 2p^3$ \leftarrow 2 o 3 bits se alternaron

$$p_e < p \text{ si } p < \frac{1}{2}$$

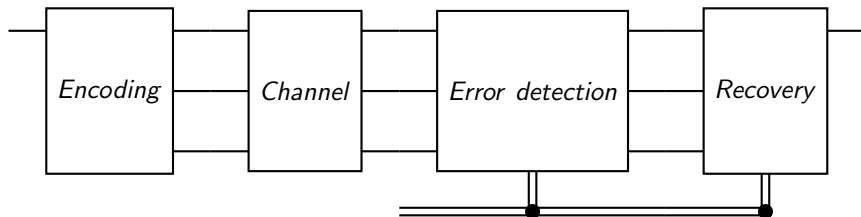
Corrección de errores cuánticos



Dificultades:

- ▶ No cloning
- ▶ Los errores son continuos
- ▶ Medir puede destruir información

3 qubit flip code



- **Channel:** *bit flip channel*, alterna $|\psi\rangle$ a $X|\psi\rangle$ con probabilidad p
- **Encoding:** $a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow a|000\rangle + b|111\rangle$

$$|0\rangle \rightarrow |000\rangle$$

$$|1\rangle \rightarrow |111\rangle$$

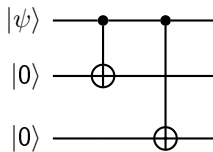
- **Error detection & recovery:** error syndromes

3 qubit flip code (cont.)

► **Encoding:** $a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow a|000\rangle + b|111\rangle$

$$|0\rangle \rightarrow |000\rangle$$

$$|1\rangle \rightarrow |111\rangle$$



3 qubit flip code (cont.)

► Error detection & recovery:

Error syndrome: medición que no altera el estado medido

Error detection	Recovery
$P_0 \equiv 000\rangle\langle 000 + 111\rangle\langle 111 \rightarrow$ no error	$I \otimes I \otimes I$
$P_1 \equiv 100\rangle\langle 100 + 011\rangle\langle 011 \rightarrow$ first flipped	$X \otimes I \otimes I$
$P_2 \equiv 010\rangle\langle 010 + 101\rangle\langle 101 \rightarrow$ second flipped	$I \otimes X \otimes I$
$P_3 \equiv 001\rangle\langle 001 + 110\rangle\langle 110 \rightarrow$ third flipped	$I \otimes I \otimes X$

Análisis simplificado: El algoritmo funciona perfectamente si hay bit flips en 1 o menos de los 3 qubits, lo cual sucede con probabilidad

$$p_c = (1 - p)^3 + 3p(1 - p)^2 = 1 - 3p^2 + 2p^3$$

Comparado con no utilizarlo:

$$p_c > 1 - p \text{ si } p < \frac{1}{2}$$

3 qubit flip code - análisis de error (cont.)

Fidelidad: medición de cercanía de estados

$$F(|\psi\rangle, \rho) = \sqrt{\langle\psi|\rho|\psi\rangle}$$
$$0 \leq F(|\psi\rangle, \rho) \leq 1$$

Fidelidad sin corrección:

$$\rho = (1 - p) |\psi\rangle \langle\psi| + pX |\psi\rangle \langle\psi| X$$
$$F(|\psi\rangle, \rho) = \sqrt{1 - p}$$

Fidelidad mínima con corrección:

$$\rho = [(1 - p)^3 + 3p(1 - p)^2] |\psi\rangle \langle\psi| + \dots$$
$$F(|\psi\rangle, \rho) \geq \sqrt{(1 - p)^3 + 3p(1 - p)^2}$$

3 qubit flip code - alternative error detection

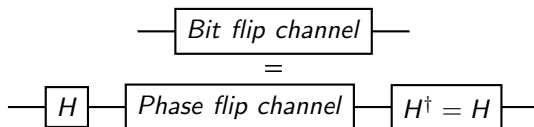
En vez de medir los proyectores, se miden los observables

- ▶ $Z_1 Z_2 = Z \otimes Z \otimes I = (|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \otimes I - (|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) \otimes I$
 $\rightarrow +1$, 1^{er} y 2^{do} qubit son iguales, o -1 si son distintos
- ▶ $Z_2 Z_3 = I \otimes Z \otimes Z = I \otimes (|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) - I \otimes (|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$
 $\rightarrow +1$, 2^{do} y 3^{er} qubit son iguales, o -1 si son distintos

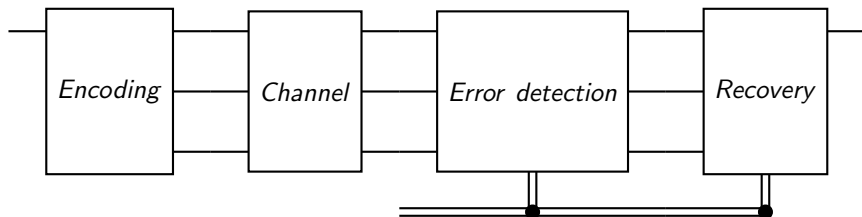
Proyectores	1 ^{er} medición	2 ^{da} medición
P_0	+1	+1
P_1	-1	+1
P_2	-1	-1
P_3	+1	-1

- **Channel:** *phase flip channel*, alterna $|\psi\rangle$ a $Z|\psi\rangle$ con probabilidad p

Es unitarly equivalent a los *bit flip channel* ya que $X = HZH$:



3 qubit phase code (cont.)



- **Channel:** *phase flip channel*, alterna $|\psi\rangle$ a $Z|\psi\rangle$ con probabilidad p
- **Encoding:** $a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow a|+++ \rangle + b|--- \rangle$

$$|0\rangle \rightarrow |+++ \rangle$$

$$|1\rangle \rightarrow |--- \rangle$$

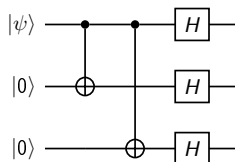
- **Error detection & recovery:** error syndromes

3 qubit phase code (cont.)

- **Encoding:** $a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow a|+++ \rangle + b|--- \rangle$

$$|0\rangle \rightarrow |+++ \rangle$$

$$|1\rangle \rightarrow |--- \rangle$$



- **Error detection & recovery:**

$$P_j \rightarrow H^{\otimes 3} P_j H^{\otimes 3}$$

$$H^{\otimes 3} Z_1 Z_2 H^{\otimes 3} = X_1 X_2$$

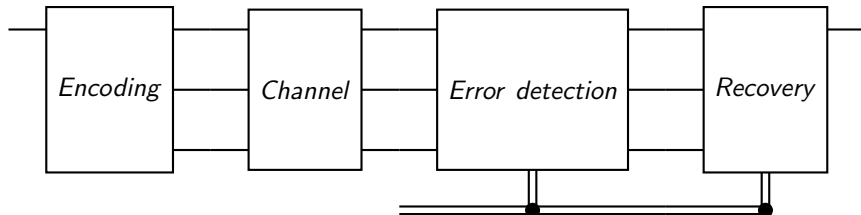
$$H^{\otimes 3} Z_2 Z_3 H^{\otimes 3} = X_2 X_3$$

(a) Projectores
adaptados

(b) Observables adaptados

- **Análisis de error:** mismos resultados que los de *3 qubit flip code*

Shor code



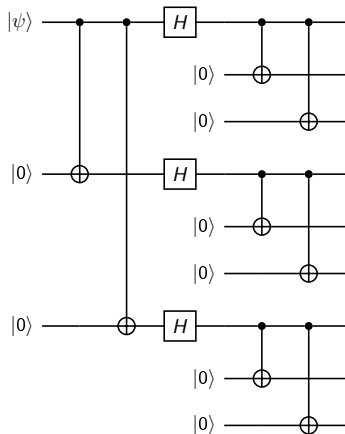
- ▶ **Channel:** cualquier error en un único qubit
- ▶ **Encoding:** concatenation de 3 qubit phase flip code y 3 qubit bit flip code
- ▶ **Error detection & recovery:** primero corriendo el procedimiento para bit flip y luego para phase flip

Shor code (cont.)

- **Encoding:** concatenation de 3 qubit phase flip code y 3 qubit bit flip code

$$|0\rangle \rightarrow |0_L\rangle \equiv \frac{(|000\rangle + |111\rangle)^{\otimes 3}}{2\sqrt{2}}$$

$$|1\rangle \rightarrow |1_L\rangle \equiv \frac{(|000\rangle - |111\rangle)^{\otimes 3}}{2\sqrt{2}}$$



- ▶ **Error detection & recovery:** suponiendo que hubo bit flip en algún qubit:
 - *Detection:* Son detectadas mediante mediciones de $Z_i Z_j$
 - *Recovery:* Se aplica X al qubit afectado

► **Error detection & recovery:** suponiendo que hubo phase flip en algún qubit:

- *Detection:* Phase flip en un qubit causa que se cambie el signo del bloque afectado

$$|000\rangle + |111\rangle \rightarrow |000\rangle - |111\rangle$$

Por lo que puede ser detectado comparando los signos de los bloques

- *Recovery:* Se aplica Z a cualquier qubit del bloque afectado

- ▶ **Error detection & recovery:** suponiendo que hubo phase y bit flip en algún qubit:
 1. Correr el procedimiento de corrección y detección de bit flip, después del cual solo quedará un phase flip en el qubit afectado
 2. Correr el procedimiento de corrección y detección de phase flip

- **Error detection & recovery:** cualquier error en algún qubit:

Representando el error como una operación que preserva traza ξ ,
dado un estado inicial $|\psi\rangle$:

$$\xi(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_i E_i |\psi\rangle\langle\psi| E_i^\dagger$$

Cada E_i puede expandirse como:

$$E_i = e_{i0}I + e_{i1}X_1 + e_{i2}Z_1 + e_{i3}X_1Z_1$$

Entonces un error arbitrario se puede pensar como que lleva un estado $|\psi\rangle$ a una superposición de los estados:

$$|\psi\rangle, X_1 |\psi\rangle, Z_1 |\psi\rangle, X_1 Z_1 |\psi\rangle$$

Por lo que el procedimiento para corregirlo es:

1. Correr el procedimiento de corrección y detección de bit flip, después del cual el estado quedará en superposición de:

$$|\psi\rangle, X_1 |\psi\rangle$$

2. Correr el procedimiento de corrección y detección de phase flip

Shor code - error en más de un qubit

Que pasa si el error afecta a más de un qubit?

- ▶ Si el error de cada qubit es independiente se lo puede achicar mediante los procedimientos descritos hasta ahora
- ▶ Sino hay que utilizar otros procedimientos

- [1] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000, págs. 425-434.