Содержание

Вопрос 1

1.1 Непрерывность действительных функций одного и многих действительных переменных. Свойства непрерывных функций.

Определение♣ 1 (Понятие функции)**.** Говорят, что на множестве X имеется функция со значениями в Y, если в силу некторого f каждому элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in Y$. Обозначается: $f : X \to Y$

$$f(x) := \{y \in Y \mid \exists\, x((x \in X) \wedge (y = f(x)))\}$$

Определение♣ 2 (Предел по коши)**.** Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $f : E \to \mathbb{R}$. Значение A функции $f(x)$ в точке x_0 называется <u>пределом</u>, если:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - a| < \delta$$

Определение♣ 3 (Непрерывность в точке)**.** Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Определение♣ 4 (Определение непрерывности по Гейне)**.** Говорят, что функция действительного переменного $f(x)$ является непрерывной в точке $a \in \mathbb{R}$ если для любой последовательности $\{x_n\}$, такой что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \text{выполняется соотношение} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$$

На практике удобно использовать следующие 3 условия непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = a$ (которые должны выполняться одновременно):

1) Функция $f(x)$ определена в точке a
2) Предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует
3) Выполняется равенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Определение♣ 5. Элементами пространства $\mathbb{R}^n$ являются упорядоченные наборы $(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$

Определение♣ 6. $\mathbb{R}^n$ векторное пространство над $\mathbb{R} \Rightarrow x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, $\lambda \cdot x = (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n)$

Определение♣ 7. $e_i = (\underbrace{0, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, 0}_{n})$, где $i = \overline{1, n}$ стандартный базис $\mathbb{R}^n$

Определение♣ 8. Скалярным произведением называется $x, y \in \mathbb{R}^n$, $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$, **Нормой вектора** $||x|| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$, **Расстояние между элементами** $\mathbb{R}^n$ $\rho(x,y) = ||x-y||$

Определение♣ 9 (Открытый шар)**.** Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Обозначим $U(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x-y|| < r\}$ – открытый шар радиуса r

Определение♣ 10. Множество $U \in \mathbb{R}^n$ называется открытым, если $\forall x \in U \ \exists \ r > 0 \ : U(x,r) \subset U$

Определение♣ 11. Окрестностью точки $x \in \mathbb{R}^n$ называется любое открытое подмножество, содержащее данную точку : $U(x)$

Определение♣ 12. Пусть $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{E}$. Говорят, что $\exists$ предел $f(x)$ при $x \to x_0$ по мн-ву E, равный $a \in \mathbb{R}^m$, если $\forall \ U(a) \ \exists \ U(x_0) \ \forall x \in \mathring{U}_E(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(a)$ и обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

Утверждение⋆ 1 (): Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = (a_1, \ldots, a_m) = a$, то $\forall k \in \overline{1,m} \ \exists \lim\limits_{x \to x_0} f_k(x) = a_k$
Верно и обратное, Где $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ – координатное представление функции $f(x)$

Определение♣ 13. Пусть $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$ Ф-я $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\forall U(f(x_0)) \ \exists U(x_0) : \ \forall x \in U_E(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0))$

- x_0 изолированная $\Rightarrow f(x)$ всегда непрерывна в точке x_0
- x_0 предельная точка $E \Rightarrow (f(x)$ непрерывна в точке $x_0) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Утверждение⋆ 2 (): Пусть $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$
Тогда $f(x)$непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \forall \ i = \overline{1,m} \ f_i(x)$ непрерывна x_0
Доказательство□ Если x_0 - изолированная, то все доказано. Пусть $x_0 \in E$, тогда $f(x)$непрерывна в точке $x_0 \ \Leftrightarrow \ \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ \overset{\text{по утв}}{\Leftrightarrow} \ \exists \lim\limits_{x \to x_0} f_i(x) = f_i(x_0) \forall i = \overline{1,m}$ ■

Утверждение⋆ 3 ():

1) $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}^m$, $E \in \mathbb{R}^n$, f_i непрерывна в точке $x_0 \in E \Rightarrow f_1 + f_2, \lambda \cdot f_1$ непрерывны в точке x_0
2) $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}^m$, $E \in \mathbb{R}^n$, f_i непрерывна в точке $x_0 \in E \Rightarrow f_1 \cdot f_2, \frac{f_1}{f_2}$, если $f_2 \neq 0$

Доказательство□ Следует из свойств предела функции ■

Определение♣ 14. $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Ф-я $f(x)$ называется непрерывной на E, если она непрерывна в любой точке множества E

Утверждение⋆ 4 (): Пусть $f(x) : E \to J, E \subseteq \mathbb{R}^n, J \subseteq \mathbb{R}^m,\ g(y) : J \to \mathbb{R}^k$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \in E \\ g(y) \text{ непрерывна в точке } y_0 \in f(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \text{ непрерывна в т. } x_0$$

Доказательство□ Зафиксируем любую $U(g(y_0))$ т.к $g(y)$ непрерывна в т. y_0, то $\exists U(y_0) = U(f(x_0)) : \forall y \in U_y(y_0) \Rightarrow g(y) \in U(g(y_0))$

С другой стороны $f(x)$непрерывна в точке $x_0 \in E \Rightarrow \exists U(x_0) : \forall x \in U_E(x_0) \Rightarrow g(x) \in U(f(x_0)) \Rightarrow g(f(x)) \in U(g(y_0))$

То есть имеем: $\forall\ U(g(f(x_0)))\ \exists\ U(x_0) : \forall x \in U_E(x_0) \Rightarrow g(f(x)) \in U(g(f(x_0)))$ ■

Определение♣ 15. Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется компактным $\overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow}$ из любого покрытия M открытыми подмножествами можно выделить конечное подпокрытие.

Теорема★ 1 (1-я теорема Вейерштрасса про ограниченность непрерывной функции): Если ф-я $f : E \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на E, E - компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, то f – ограничена. $f(E)$ ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$

Доказательство□ $\forall x \in E$ f-непрерывна в точке $x \Rightarrow \exists\ U(x, r_x)\ r_x > 0 : \forall z \in E \cap U(x, r_k)$

$||f(z)|| \subseteq M_x$, $E \subset \bigcup\limits_{x \in E} U(x, r_x)$ E-компактно $\Rightarrow$ можно выбрать конечное подпокрытие, т.е разбить $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} U(x_i, r_{x_i})$, $M = \max\limits_{1 \le i \le k} M_{x_i} \Rightarrow\ \forall x \in E\ \exists\ U(x_j, r_{x_j}) : x \in U(x_j, r_{x_j}) \Rightarrow ||f(x)|| \subseteq M_{x_j} \subseteq M$ ■

Теорема★ 2 (2-я теорема Вейерштрасса о достижении верхней и нижней границ): Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, f-непрерывна на E, E-компактное подмножество $\mathbb{R}^n$ Тогда $\exists\ x_1, x_2 : f(x_1) = \max\limits_{x \in E} f(x),\ f(x_2) = \min\limits_{x \in E} f(x)$

Доказательство□ f-непрерывна на $E \Rightarrow$ по 1 теореме Вейерштрасса f ограничена на $E \Rightarrow \exists \sup\limits_{x \in E} f(x) = M \in \mathbb{R}$

Покажем, что $\exists x_1 \in E : f(x_1) = M$ Предположим противное и рассмотрим ф-ю $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$, $M - f(x)$ непрерывна и не $\neq 0\ \ \Rightarrow g(x)$ непрерывна на E и по 1-й теореме Вейерштрасса ограничена на E

С другой стороны т.к. $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, то $\exists\ \{x_k\} : \lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = M\ \ \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} (M - f(x)) = 0\ \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{M - f(x)} = \infty$, <u>противоречие</u> с тем что $g(x)$ ограничена

Для минимума также ■

Теорема★ 3 (Кантора о равномерной непрерывности): Пусть $f : E \to \mathbb{R}^m$, f - непрерывна на E, E-компактое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Тогда f - равномерно непрерывна на E

Доказательство□ $x \in E,\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_x > 0 : \forall\ z \in U(x, \delta_x) \cap E : ||f(x) - f(z)|| < \frac{\varepsilon}{2}$
$E \subset \bigcup\limits_{x \in E} U()$ ■

Вопрос 11

2.1 Матрицы над полем. Ранг матрицы над полем. Эквивалентные матрицы и их ранги. Приведение матрицы к ступенчатому и каноническому видам. Теорема о ранге матрицы. Нахождение ранга и олратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

Определение♣ 16 (Матрица над полем)**.** Матрицей размеров mxn над полем P называют прямоугольную таблицу элементов поля P, состоящую из m строк и n столбцов.

Определение♣ 17 (Ранг матрицы)**.** Рангом ненулевой матрицы A называют наибольший из порядков отличных от нуля миноров матрицы А. Ранг нулевой матрицы равен 0.

Теорема★ 4 (О рангах эквивалентных матриц): Если матрицы A и B эквивалентны, то их ранги равны.
Доказательство□ Пусть матрицы A и B эквивалентны и $rangA = k$. По определению ранга в матрице A $\forall l > k$ или совсем нет миноров порядка l, или все они равны нулю. Тогда по теореме о минорах эквивалентных матриц (Если $A, B \in R_{m,n}, A\ B$ и все миноры k-го порядка матрицы A кратны элементу c кольца R, то все миноры k-го порядка матрицы B также кратны c) то же самое верно и для матрицы $B \Rightarrow rangB \leqslant k$, то есть $rangB \leqslant rangA$. Так как отношение эквивалентности матриц симметрично, то аналогичными рассуждениями имеем: $rangA \leqslant rangB \Rightarrow rangA = rangB$. ■

Определение♣ 18 (Ступенчатая матрица)**.** Ненулевая матрица $S = (s_{i,j})$ называется ступенчатой матрицей типа $S(i_1, \ldots, i_r)$, где $r \in \overline{1,m}, 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n$, если:

1) $s_{1i_1}, s_{2i_2}, \ldots, s_{ri_r} \neq 0$

2) $s_{l_t} = 0$ при $l > r, t \in \overline{1,n}$ и при $l \in \overline{1,r}, t < i_l$

Подробно:

$$\begin{pmatrix} 0\ldots0 & s_{1i_1}\ldots* & *\ldots* & * & *\ldots* \\ 0\ldots0 & 0\ldots0 & s_{2i_2}\ldots* & * & *\ldots* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\ldots0 & 0\ldots0 & 0\ldots0 & s_{ri_r} & *\ldots* \\ 0\ldots0 & 0\ldots0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\ldots0 & 0\ldots0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 \end{pmatrix}$$

Теорема★ 5 (Об ступенчатой матрице): Любую матрицу A над полем P можео элементарными преобразованиями строк привести к ступенчатой матрице.

Доказательство$\square$ Индукция по числу m строк матрицы. 1. База индукции. $m = 1$. Матрица A и есть ступенчатая, утверждение верно. 2. Предположим, что утверждение верно для m. 3. Докажем для $m+1$. Если A - нулевая матрица, то она ступенчатая и утверждение верно. Пусть $A \neq 0$ и $A_{i_1} \downarrow$ $\blacksquare$

Определение♣ 19 (Предел по коши)**.** Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $f : E \to \mathbb{R}$. Значение A функции $f(x)$ в точке x_0 называется предeлом, если:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta > 0 : \forall x \; 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - a| < \delta$$

Определение♣ 20 (Непрерывность в точке)**.** Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Определение♣ 21 (Определение непрерывности по Гейне)**.** Говорят, что функция действительного переменного $f(x)$ является непрерывной в точке $a \in \mathbb{R}$ если для любой последовательности $\{x_n\}$, такой что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \text{выполняется соотношение} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$$

На практике удобно использовать следующие 3 условия непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = a$ (которые должны выполняться одновременно):

1) Функция $f(x)$ определена в точке a
2) Предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует
3) Выполняется равенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Определение♣ 22. Элементами пространства $\mathbb{R}^n$ являются упорядоченные наборы $(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$

Определение♣ 23. $\mathbb{R}^n$ векторное пространство над $\mathbb{R} \Rightarrow x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, $\lambda \cdot x = (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n)$

Определение♣ 24. $e_i = (\underbrace{0, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, 0}_{n})$, где $i = \overline{1, n}$ стандартый базис $\mathbb{R}^n$

Определение♣ 25. Скалярным произведением называется $x, y \in \mathbb{R}^n$, $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$, **Нормой вектора** $||x|| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$, **Расстояние между элементами** $\mathbb{R}^n$ $\rho(x, y) = ||x - y||$

Определение♣ 26 (Открытый шар)**.** Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Обозначим $U(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \;:\; ||x - y|| < r\}$ – открытый шар радиуса r

Определение♣ 27. Множество $U \in \mathbb{R}^n$ называется открытым, если $\forall x \in U\ \exists\ r > 0\ :\ U(x,r) \subset U$

Определение♣ 28. Окрестностью точки $x \in \mathbb{R}^n$ называется любое открытое подмножество, содержащее данную точку : $U(x)$

Определение♣ 29. Пусть $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{E}$. Говорят, что $\exists$ предел $f(x)$ при $x \to x_0$ по мн-ву E, равный $a \in \mathbb{R}^m$, если $\forall\ U(a)\ \exists\ U(x_0)\ \forall x \in \mathring{U}_E(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(a)$ и обозначается $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$

Утверждение⋆ 5 (): Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = (a_1, \ldots, a_m) = a$, то $\forall k \in \overline{1,m}\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f_k(x) = a_k$
Верно и обратное, Где $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ – координатное представление функции $f(x)$

Определение♣ 30. Пусть $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$ Ф-я $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\forall U(f(x_0))\ \exists U(x_0) :\ \forall x \in U_E(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0))$

- x_0 изолированная $\Rightarrow f(x)$ всегда непрерывна в точке x_0
- x_0 предельная точка $E \Rightarrow$ ($f(x)$ непрерывна в точке x_0) $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Утверждение⋆ 6 (): Пусть $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ Тогда $f(x)$непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \forall\ i = \overline{1,m}\ f_i(x)$ непрерывна x_0
Доказательство□ Если x_0 - изолированная, то все доказано. Пусть $x_0 \in E$, тогда $f(x)$непрерывна в точке $x_0\ \Leftrightarrow\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\ \overset{\text{по утв}}{\Leftrightarrow}\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f_i(x) = f_i(x_0) \forall i = \overline{1,m}$
■
Утверждение⋆ 7 ():

1) $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}^m$, $E \in \mathbb{R}^n$, f_i непрерывна в точке $x_0 \in E \Rightarrow f_1 + f_2, \lambda \cdot f_1$ непрерывны в точке x_0
2) $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}^m$, $E \in \mathbb{R}^n$, f_i непрерывна в точке $x_0 \in E \Rightarrow f_1 \cdot f_2, \frac{f_1}{f_2}$, если $f_2 \neq 0$

Доказательство□ Следует из свойств предела функции ■

Определение♣ 31. $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Ф-я $f(x)$ называется непрерывной на E, если она непрерывна в любой точке множества E

Утверждение⋆ 8 (): Пусть $f(x) : E \to J, E \subseteq \mathbb{R}^n, J \subseteq \mathbb{R}^m,\ g(y) : J \to \mathbb{R}^k$
$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \in E \\ g(y) \text{ непрерывна в точке } y_0 \in f(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \text{ непрерывна в т. } x_0$$
Доказательство□ Зафиксируем любую $U(g(y_0))$ т.к $g(y)$ непрерывна в т. y_0, то $\exists U(y_0) = U(f(x_0)) : \forall y \in U_y(y_0) \Rightarrow g(y) \in U(g(y_0))$
С другой стороны $f(x)$непрерывна в точке $x_0 \in E \Rightarrow \exists U(x_0) : \forall x \in U_E(x_0) \Rightarrow g(x) \in U(f(x_0)) \Rightarrow g(f(x)) \in U(g(y_0))$
То есть имеем: $\forall\ U(g(f(x_0)))\ \exists\ U(x_0) : \forall x \in U_E(x_0) \Rightarrow g(f(x)) \in U(g(f(x_0)))$ ■

Определение♣ 32. Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется компактным $\overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow}$ из любого покрытия M открытыми подмножествами можно выделить конечное подпокрытие.

Теорема★ 6 (1-я теорема Вейерштрасса про ограниченность непрерывной функции): Если ф-я $f : E \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на E, E - компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, то f – ограничена. $f(E)$ ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$

Доказательство□ $\forall x \in E$ f-непрерывна в точке $x \Rightarrow \exists\ U(x, r_x)$ $r_x > 0 : \forall z \in E \cap U(x, r_k)$

$||f(z)|| \subseteq M_x$, $E \subset \bigcup\limits_{x \in E} U(x, r_x)$ E-компактно $\Rightarrow$ можно выбрать конечное подпокрытие, т.е разбить $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} U(x_i, r_{x_i})$, $M = \max\limits_{1 \le i \le k} M_{x_i} \Rightarrow\ \forall x \in E\ \exists\ U(x_j, r_{x_j}) : x \in U(x_j, r_{x_j}) \Rightarrow$ $||f(x)|| \subseteq M_{x_j} \subseteq M$ ■

Теорема★ 7 (2-я теорема Вейерштрасса о достижении верхней и нижней границ): Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, f-непрерывна на E, E-компактное подмножество $\mathbb{R}^n$ Тогда $\exists\ x_1, x_2 : f(x_1) = \max\limits_{x \in E} f(x),\ f(x_2) = \min\limits_{x \in E} f(x)$

Доказательство□ f-непрерывна на $E \Rightarrow$ по 1 теореме Вейерштрасса f ограничена на $E \Rightarrow \exists \sup\limits_{x \in E} f(x) = M \in \mathbb{R}$

Покажем, что $\exists x_1 \in E : f(x_1) = M$ Предположим противное и рассмотрим ф-ю $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$, $M - f(x)$ непрерывна и не $\neq 0\ \Rightarrow g(x)$ непрерывна на E и по 1-й теореме Вейерштрасса ограничена на E

С другой стороны т.к. $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, то $\exists\ \{x_k\} : \lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = M\ \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty}(M - f(x)) = 0\ \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{M - f(x)} = \infty$, противоречие с тем что $g(x)$ ограничена

Для минимума также ■

Теорема★ 8 (Кантора о равномерной непрерывности): Пусть $f : E \to \mathbb{R}^m$, f - непрерывна на E, E-компактое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Тогда f - равномерно непрерывна на E

Доказательство□ $x \in E,\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_x > 0 : \forall\ z \in U(x, \delta_x) \cap E : ||f(x) - f(z)|| < \frac{\varepsilon}{2}$
$E \subset \bigcup\limits_{x \in E} U()$ ■