

# ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Студент	Долженко Анастасия Тимофеевна
Группа	РК6-62Б
Тип задания	Лабораторная работа
Тема лабораторной работы	1.4 Интерполяция Лагранжа и кусочная интерполяция

Студент	<hr/>	<u>Долженко А.Т.</u>
	<i>подпись, дата</i>	<i>фамилия, и.о.</i>
Студент	<hr/>	<u>Соколов А.П.</u>
	<i>подпись, дата</i>	<i>фамилия, и.о.</i>

Москва, 2025 г.

# Содержание

<b>Интерполяция Лагранжа и кусочная интерполяция</b>	<b>2</b>
Задание . . . . .	2
Базовая часть . . . . .	2
Продвинутая часть . . . . .	3
Цель выполнения лабораторной работы . . . . .	3
<b>1 Выполненные задачи</b>	<b>3</b>
<b>2 Базовая часть</b>	<b>3</b>
2.1 Разработка функции $l(i, x, x\_nodes)$ . . . . .	4
2.2 Разработка функции $L(x, x\_nodes, y\_nodes)$ . . . . .	4
2.3 Демонстрация работы функции $L(i, x\_nodes, y\_nodes)$ . . . . .	5
2.4 Анализ влияния количества интерполяционных узлов на точность интерполяции	6
2.4.1 Случай 1 - равномерно расположенные узлы . . . . .	6
2.4.2 Случай 2 - оптимально расположенные узлы . . . . .	8
2.4.3 Случай 3 - кусочно-линейная интерполяция . . . . .	10
2.4.4 Сравнение трёх рассмотренных случаев . . . . .	13
<b>3 Продвинутая часть</b>	<b>14</b>
3.1 Использование кусочно-линейной интерполяции для приближения значения функций . . . . .	14
Заключение . . . . .	15
Список использованных источников . . . . .	15

# Интерполяция Лагранжа и кусочная интерполяция

## Задание

Дана функция

$$f(t) = e^{-t^2}, \quad (1)$$

где  $t \in [-5; 5]$ , и функция ошибок:

$$erf x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x f(t) dt, \quad (2)$$

где  $x \geq 0$ .

## Требуется (базовая часть)

1. Разработать функцию  $l(i, x, x\_nodes)$ , которая возвращает значение базисного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами  $x\_nodes$ , в точке  $x$ .
2. Написать функцию  $L(x, x\_nodes, y\_nodes)$ , которая возвращает значение интерполяционного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами  $x\_nodes$  и ординатами  $y\_nodes$ , в точке  $x$ .
3. Для демонстрации работы функции интерполяции  $L(x, x\_nodes, y\_nodes)$  выбрать от 5 до 10 произвольных значений некоторой величины и вывести результат работы функции на графике. В качестве интерполируемой величины, на свое усмотрение, можно выбрать любую характеристику доступную в публичных источниках: статистику температуры воздуха или скорости ветра в городе за несколько дней, курс валют, население страны и пр.
4. Провести следующий анализ.
  - а) Для равномерно расположенных узлов (случай 1) на отрезке  $[-5; 5]$  построить графики  $f(x)$  и полученных интерполяционных полиномов  $L_{n-1}(x)$  для нескольких различных количеств узлов, обозначаемых  $n$ . Описать, что наблюдается при увеличении количества узлов  $n$ ?
  - б) Для каждого  $n \in [4, 5..20]$  рассчитать расстояние между  $f(x)$  и  $L_{n-1}(x)$  в лебеговом пространстве  $L_\infty$ .
  - в) Используя формулу для остаточного члена интерполяции, аналитически оценить верхнюю границу погрешности интерполяции полиномами Лагранжа  $L_{n-1}(x)$  в зависимости от  $n$ . Представить в отчёте в графическом виде сравнение полученного результата с зависимостью расстояния между  $f(x)$  и  $L_{n-1}(x)$  в лебеговом пространстве  $L_\infty$  от  $n$ . Как соотносятся друг с другом полученные аналитическая и численная оценки погрешности аппроксимации?
5. Повторить пункт 4 для случая оптимально расположенных узлов (случай 2) и для случая кусочно-линейной интерполяции (случай 3, опциональная часть: аналитическая оценка верхней границы погрешности в общем виде).
6. Вывести на одном графике зависимости расстояния между  $f(x)$  и  $L_{n-1}(x)$  в лебеговом пространстве  $L_\infty$  от  $n$  для всех трёх рассмотренных случаев. Как влияет расположение узлов на погрешность аппроксимации? Какое расположение узлов и для каких  $n$  даёт

более точную интерполяцию? Как влияет использование локальной или глобальной интерполяции на точность интерполяции?

### Требуется (продвинутая часть):

7. Найти приближённое значение функции ошибок  $\operatorname{erf} x$  в точке  $x = 2$ , используя кусочно-линейную интерполяцию для  $f(t)$   $n \in \{3, 5, 7, 9\}$  при  $n \in [0; 5]$  и сравнить полученные значения между собой.
8. Представить аналитическое выражение для аппроксимации функции  $\operatorname{erf} x$ , получаемой за счёт использования кусочно-линейной интерполяции  $f(t)$  при  $n = N_j$ , где  $N_j$  –  $j$ -й элемент множества  $N$ ,  $j = M \bmod |N| + 1$ , где  $M$  – номер обучающегося по журналу.

## Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы: исследовать построение полиномов Лагранжа по равномерно и оптимально распределённым узлам и исследовать влияние количества интерполяционных узлов и их расположения на точность интерполяции полиномами Лагранжа.

## 1 Выполненные задачи

1. Разработаны функции  $l(i, x, x\_nodes)$  и  $L(x, x\_nodes, y\_nodes)$ .
2. Проведена демонстрация работы функции  $L(x, x\_nodes, y\_nodes)$  с использованием данных об изменении курса доллара (USD) за 2024 год, взятая с официального сайта ЦБ РФ.
3. Проведен анализ влияния количества узлов интерполяции на точность интерполяции Лагранжа с равномерно и оптимально расположенными узлами интерполяции.
4. Проведено сравнение точности интерполяции Лагранжа с равномерно и оптимально расположенными узлами интерполяции.
5. Проведено исследование влияния количества узлов интерполяции на точность кусочно-линейной интерполяции.

## 2 Базовая часть

Для выполнения базовой части лабораторной работы была написана функция  $f(t)$  на языке Python, которая возвращает значение функции (1) в точке  $t$  (листинг 1).

Листинг 1: Программная реализация функции  $f(t)$

```
def f(t):  
    return exp(-t**2)
```

## 2.1 Разработка функции $l(i, x, x\_nodes)$

Согласно пункту 1 задания базовой части, необходимо разработать функцию, возвращающую значение  $i$ -го базисного полинома Лагранжа, построенного по интерполяционным узлам с абсциссами  $x\_nodes$ , в точке  $x$ .

Формула для получения значения  $i$ -го базисного полинома Лагранжа:

$$l(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (3)$$

где  $x$  - точка, в которой вычисляется значение полинома,  $x_i, x_j$  - абсциссы интерполяционных узлов.

Таким образом, была разработана функция  $l(i, x, x\_nodes)$ . На вход функции подаются: индекс  $i$  базисного полинома Лагранжа, точка  $x$ , в которой требуется найти значение полинома, и абсциссы интерполяционных узлов  $x\_nodes$ . Функция возвращает значение  $i$ -го базисного полинома Лагранжа, построенного по интерполяционным узлам с абсциссами  $x\_nodes$ , в точке  $x$ .

Программная реализация формулы (3) представлена на листинге 2:

Листинг 2: Программная реализация функции  $l(i, x, x\_nodes)$

```
def l(i, x, x_nodes):
    res = 1
    x_i = x_nodes[i]
    for j, x_j in enumerate(x_nodes):
        if i != j:
            res *= (x - x_j) / (x_i - x_j)
    return res
```

## 2.2 Разработка функции $L(x, x\_nodes, y\_nodes)$

Согласно пункту 2 задания базовой части, необходимо разработать функцию, возвращающую значение интерполяционного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами  $x\_nodes$  и ординатами абсциссами  $y\_nodes$ , в точке  $x$ .

Формула для получения значения  $i$ -го базисного полинома Лагранжа:

$$L(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x), \quad (4)$$

где  $x$  - точка, в которой вычисляется значение интерполяционного полинома Лагранжа,  $f(x_i)$  - значение интерполируемой функции в точке  $x_i$ ,  $l_i(x)$  - значение базисного полинома Лагранжа в точке  $x$ .

Таким образом, была разработана функция  $L(x, x\_nodes, y\_nodes)$ . На вход функции подаются: точка  $x$ , в которой требуется найти значение интерполяционного полинома, абсциссы интерполяционных узлов  $x\_nodes$  и ординаты интерполяционных узлов  $y\_nodes$ . Функция возвращает значение интерполяционного полинома Лагранжа, построенного по интерполяционным узлам с абсциссами  $x\_nodes$  и ординатами  $y\_nodes$  в точке  $x$ .

Программная реализация формулы (4) имеет вид:

Листинг 3: Программная реализация функции  $L(x, x\_nodes, y\_nodes)$

```
def L(x, x_nodes, y_nodes):
```

```

res = 0
for i, y_i in enumerate(y_nodes):
    res += y_i * l(i, x, x_nodes)
return res

```

## 2.3 Демонстрация работы функции $L(i, x\_nodes, y\_nodes)$

Согласно пункту 3 задания базовой части, необходимо продемонстрировать работу функции  $L(i, x\_nodes, y\_nodes)$ , выбрав от 5-10 произвольных значений некоторой величины и показав результат работы функции на графике.

Для демонстрации были выбраны данные об изменении курса доллара США (USD) с официального сайта ЦБ РФ в период с 01.01.2024 по 01.01.2025. Часть данных представлена на рисунке 1.

1	nominal	data	curs	cdx
2	1	29.12.2024	101,6797	Доллар США
3	1	28.12.2024	100,5281	Доллар США
4	1	27.12.2024	99,2295	Доллар США
5	1	26.12.2024	99,6125	Доллар США
6	1	25.12.2024	99,8729	Доллар США
7	1	24.12.2024	101,6143	Доллар США
8	1	21.12.2024	102,3438	Доллар США
9	1	20.12.2024	103,4207	Доллар США
10	1	19.12.2024	102,7763	Доллар США
11	1	18.12.2024	102,9979	Доллар США
12	1	17.12.2024	102,9125	Доллар США
13	1	14.12.2024	103,4305	Доллар США

Рис. 1: Данные (частичные) об изменении курса доллара США (USD)

Был построен график зависимости курса доллара от порядкового номера дня в году. Для построения графика случайным образом были выбраны 8 дней в 2024 году и соответствующие им значения курса доллара. Для вывода графика была написана программа на Python, а также были использованы библиотеки Pandas и Matplotlib.

В результате работы программы был получен график, представленный на рисунке 2:

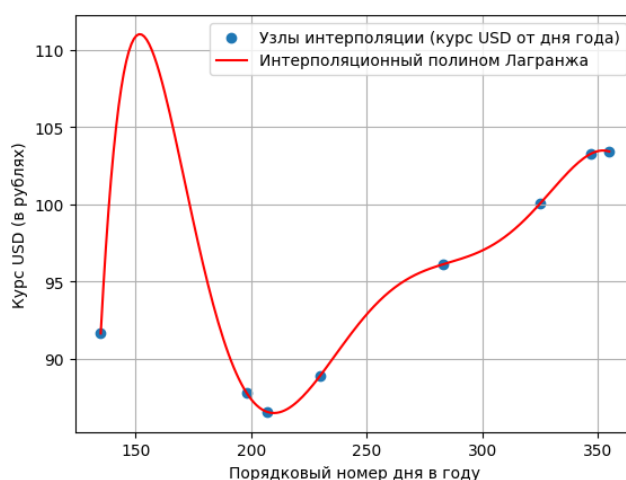


Рис. 2: Демонстрация работы функции для интерполяции

## 2.4 Анализ влияния количества интерполяционных узлов на точность интерполяции

### 2.4.1 Случай 1 - равномерно расположенные узлы

Согласно пункту 4.а задания базовой части, для равномерно расположенных узлов на отрезке  $[-5; 5]$  необходимо построить графики  $f(x)$  и полученных интерполяционных полиномов  $L_{n-1}(x)$  для нескольких различных количеств узлов, обозначаемых  $n$ .

Для построения интерполяционных полиномов были выбраны 5 значений  $n$  от 5 до 30, а затем для каждого значения  $n$  были выбраны соответствующие равномерно расположенные узлы интерполяции. Для построения графиков был написан программный код на языке Python, а также использовались библиотеки Numpy и Matplotlib. Результат работы программы приведены на рисунке 3:

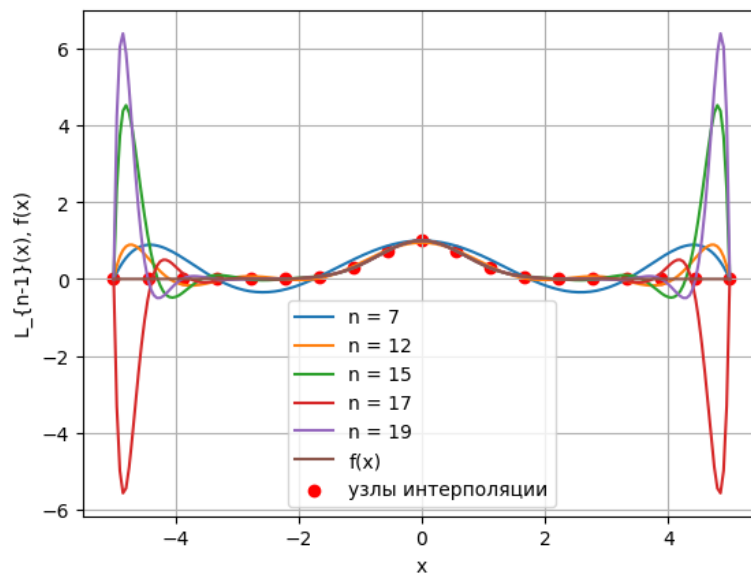


Рис. 3: Интерполяционный полином Лагранжа при разных  $n$  при равномерном распределении узлов

На графиках на рисунке 3 видно, что увеличение числа узлов  $n$  приводит к осцилляциям на концах отрезка (явление Рунге).

Согласно пункту 4.6 задания базовой части, для равномерно расположенных узлов на отрезке  $[-5; 5]$  для каждого  $n \in [4, 5..20]$  было рассчитано расстояние между  $f(x)$  и  $L_{n-1}(x)$  в лебеговом пространстве  $L_\infty$ .

Для вычисления расстояния была написана функция на языке Python. Для визуализации результатов работы функции был построен график (рисунок 4) зависимости расстояния между  $f(x)$  и  $L_{n-1}(x)$  в лебеговом пространстве  $L_\infty$  от  $n$ .

Согласно пункту 4.в задания базовой части, используя формулу для остаточного члена интерполяции, необходимо аналитически оценить верхнюю границу погрешности интерполяции полиномами Лагранжа  $L_{n-1}(x)$  в зависимости от  $n$ .

Формула остаточного члена интерполяции Лагранжа:

$$R_n(x) = f(x) - L_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{i=1}^n (x - x_i), \quad (5)$$



Рис. 4: Зависимость расстояния между  $f(x)$  и  $L_{n-1}(x)$  в лебеговом пространстве  $L_\infty$  от  $n$  для равномерного распределения узлов

где  $f(x)$  - интерполируемая функция,  $L_{n-1}(x)$  - интерполяционный полином Лагранжа,  $x \in [a; b]$ ,  $x_1, \dots, x_n \in [a; b]$  - интерполяционные узлы,  $f^{(n)}(\xi) \in C^n[a; b]$ ,  $\xi \in (a; b)$

В качестве оценки погрешности используется равномерная норма (в пространстве  $L_\infty$ ). В соответствии с формулой 7 верхняя граница погрешности:

$$R_n(x) \leq \frac{\|f^{(n)}(\xi)\|_\infty}{n!} \left\| \prod_{i=1}^n (x - x_i) \right\|_\infty, \quad (6)$$

где  $\|f^{(n)}(\xi)\|_\infty$  - максимальное значение  $n$ -ой производной функции на отрезке  $[a; b]$ ,  $\|\prod_{i=1}^n (x - x_i)\|_\infty$  - максимальное значение полинома узлов на отрезке  $[a; b]$ .

Для вычисления аналитической оценки погрешности была написана соответствующая функция на Python, а также использовалась библиотека NumPy.

Для нахождения максимального значения  $n$ -ой производной была написана соответствующая программная функция на языке Python, вычисляющая значения производной в 2000 точек на отрезке  $[-5; 5]$ , затем выбирающая максимильное значение из вычисленных.

Для вычисления производных использовалось автоматическое дифференцирование с помощью метода diff библиотеки SymPy. Такой метод дифференцирования был выбран, так как он достаточно точно и быстро позволяет вычислять производные высших порядков.

В основе автоматического дифференцирования лежит цепное правило дифференцирования сложной функции. Метод работает с функциями, представленными в виде вычислительных графов, где каждая операция является узлом графа, входные переменные или константы являются листьями, в узлах находятся операции, а корень графа — это выход функции.

В прямом режиме автоматическое дифференцирование вычисляет производные по мере прохождения графа от входных переменных к выходу. Для каждой промежуточной переменной вычисляется как её значение, так и её производная. Обратный режим автоматического дифференцирования используется, когда нужно вычислить градиент функции многих переменных. Сначала (прямой проход) вычисляются значения всех промежуточных переменных, потом (обратный проход) вычисляются производные, начиная с выхода и двигаясь к входу.



Для поиска максимального значения полинома узлов была написана соответствующая программная функция на языке Python, вычисляющая значения полинома в 5000 точек на отрезке  $[-5;5]$ , затем выбирающая максимальное значение из вычисленных.

В соответствии с заданием 4.в базовой части, необходимо привести сравнение аналитической и численной оценок погрешностей аппроксимации на графике.

Для вычисления численной оценки погрешности была использована функция для вычисления расстояния между  $f(x)$  и  $L_{n-1}(x)$  в лебеговом пространстве  $L_\infty$ .

Для сравнения были построены графики полученной аналитической и численной оценок погрешностей аппроксимации (рисунок 5).

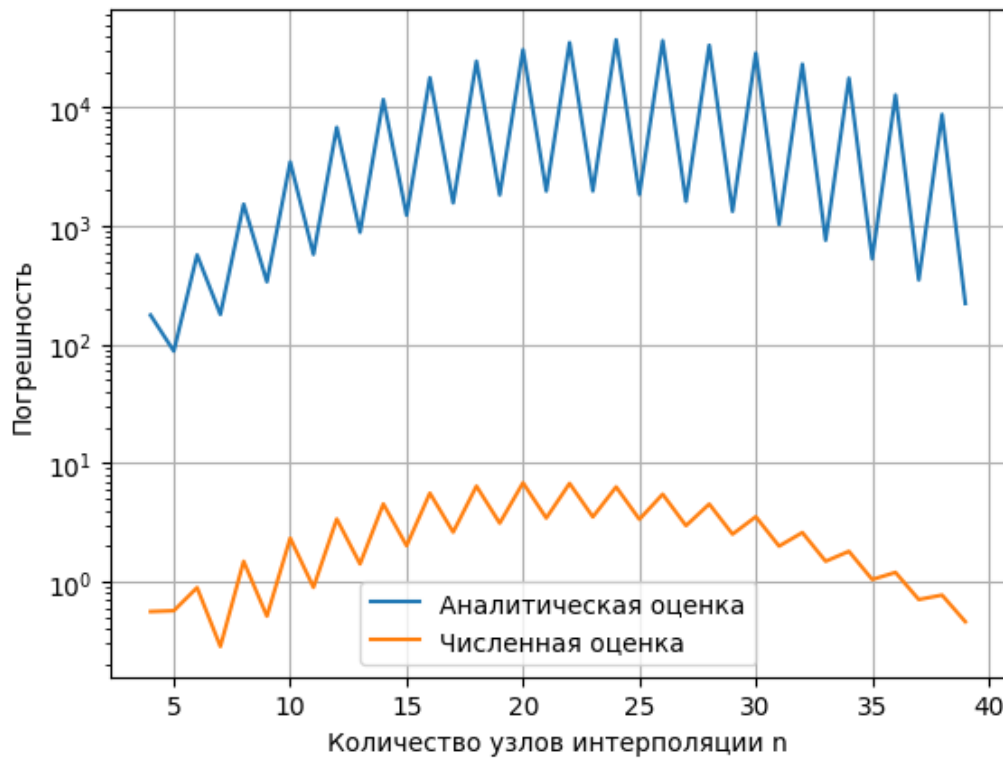


Рис. 5: Сравнение аналитической и численной оценок погрешности аппроксимации для равномерного распределения узлов

На графиках видно, что аналитическая оценка погрешности сильно завышена относительно численной оценки. Численная оценка более точно отражает поведение погрешности при увеличении  $n$ . Однако на графиках видно, что поведение графика аналитической оценки погрешности примерно отражает поведение численной.

#### 2.4.2 Случай 2 - оптимально расположенные узлы

Согласно пункту 5 задания базовой части, необходимо повторить анализ, описанный в пункте 4 задания базовой части, для случая оптимально расположенных узлов.

В качестве оптимально расположенных узлов были взяты узлы Чёбышева, которые в общем случае определяются формулой:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right), i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (7)$$

где  $[a; b]$  - концы отрезка интерполяции,  $n$  - количество узлов интерполяции,  $x_i$  - абсцисса  $i$ -ого узла.

Для генерации узлов Чебышева была написана соответствующая программная функция на Python.

Далее на рисунках 6-8 приведены результаты анализа из пункта 4 задания базовой части для случая оптимально расположенных узлов.

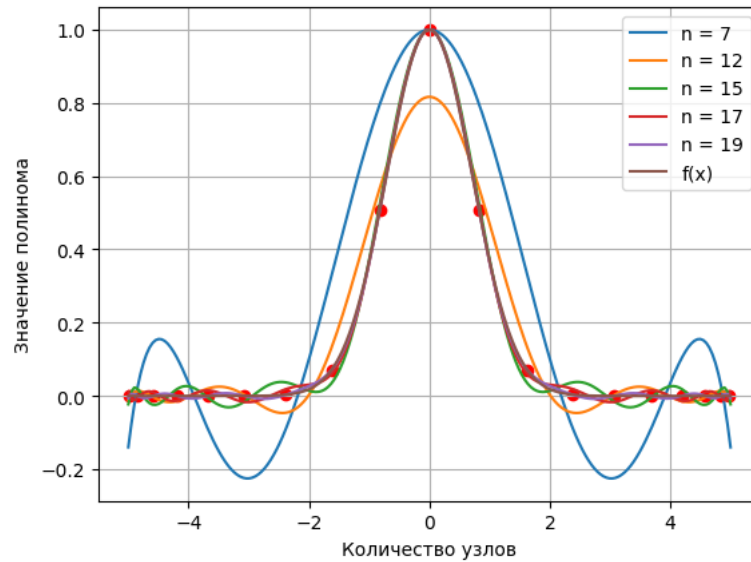


Рис. 6: Интерполяционный полином Лагранжа при разных  $n$  при оптимальном распределении узлов

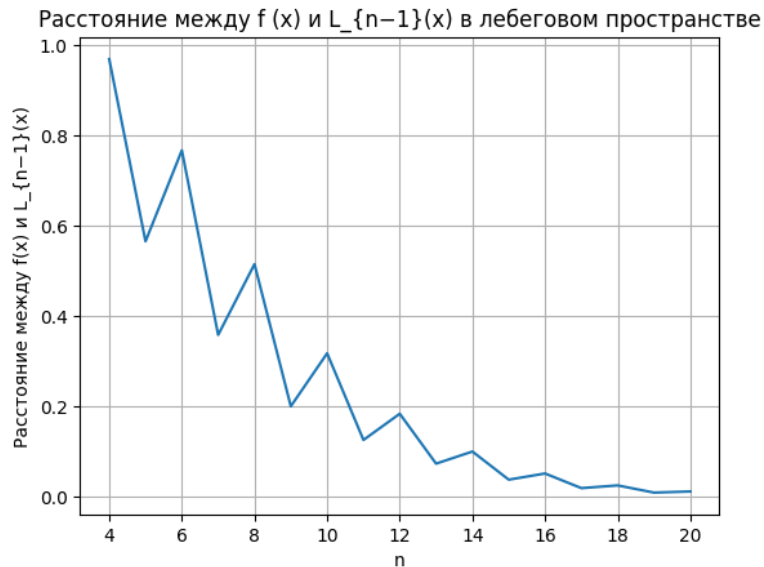


Рис. 7: Зависимость расстояния между  $f(x)$  и  $L_{n-1}(x)$  в лебеговом пространстве  $L_{\infty}$  от  $n$  для оптимального распределения узлов

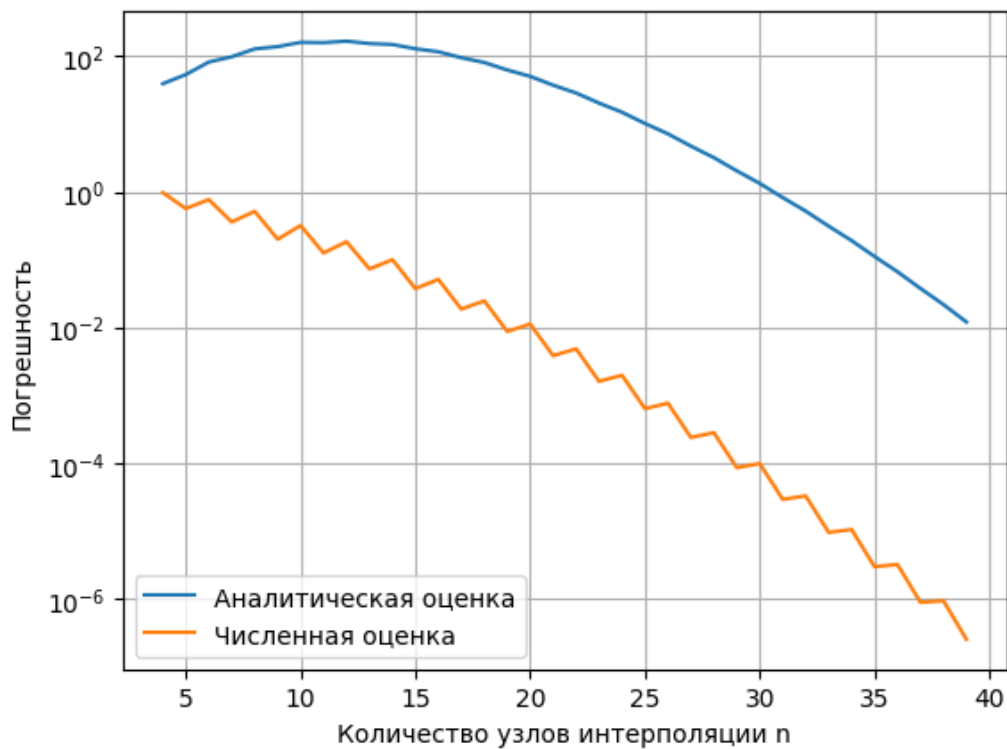


Рис. 8: Сравнение аналитической и численной оценок погрешности аппроксимации для оптимального распределения узлов

Из графиков видно, что, аналогично равномерному распределению узлов, аналитическая оценка сильно завышена, однако по модулю и аналитическая, и численная оценки погрешности уменьшились на несколько порядков.

### 2.4.3 Случай 3 - кусочно-линейная интерполяция

Согласно пункту 5 задания базовой части, необходимо повторить анализ (кроме пункта в), описанный в пункте 4 задания базовой части, для случая кусочно-линейной интерполяции.

Была написана соответствующая программная функция на Python.

Далее на рисунках 9-12 приведены результаты анализа из пункта 4 задания базовой части для случая кусочно-линейной интерполяции.

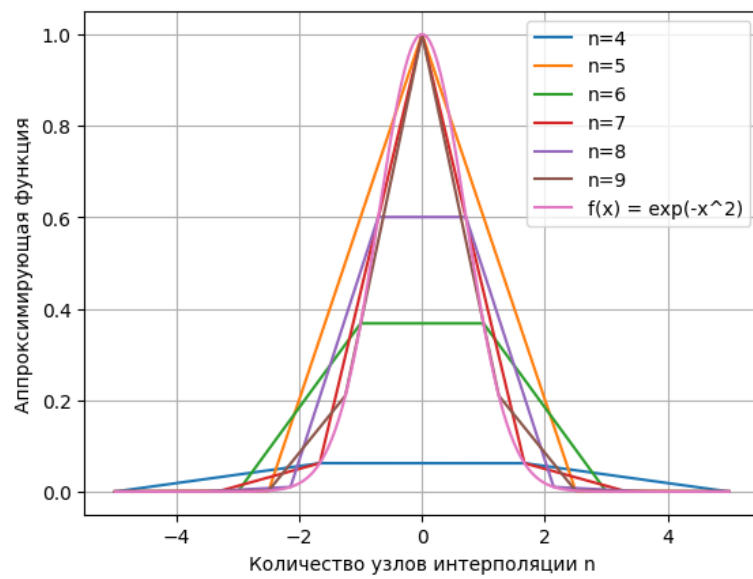


Рис. 9: Кусочно-линейная интерполяция для  $n$  от 4 до 9

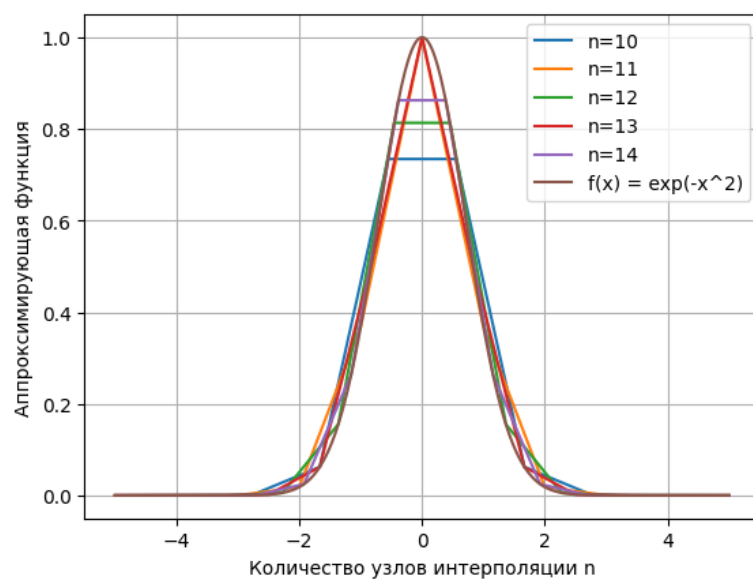


Рис. 10: Кусочно-линейная интерполяция для  $n$  от 10 до 14

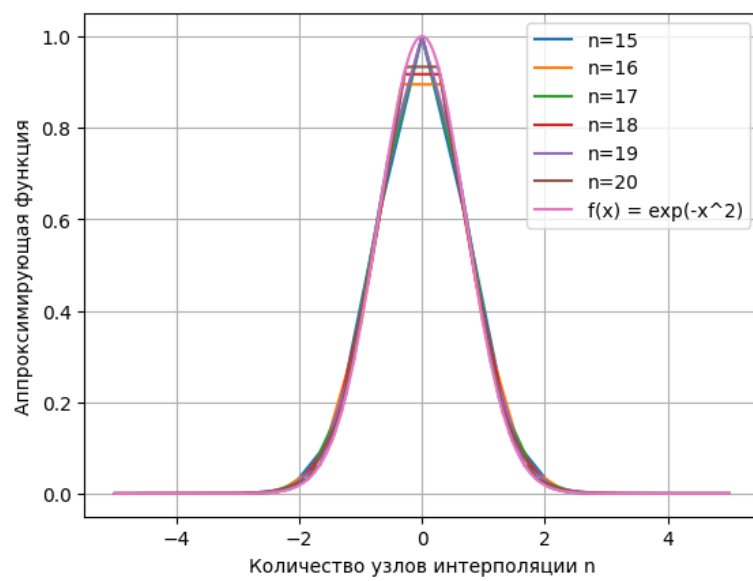


Рис. 11: Кусочно-линейная интерполяция для  $n$  от 15 до 20

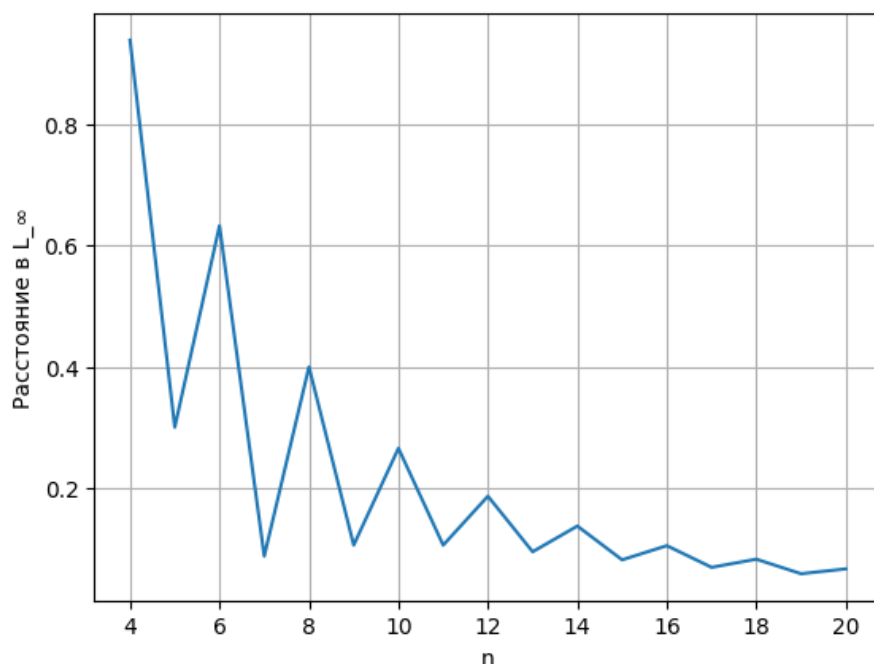


Рис. 12: Зависимость расстояния между  $f(x)$  и  $L_{n-1}(x)$  в лебеговом пространстве  $L_\infty$  от  $n$  для кусочно-линейной интерполяции

Из графиков видно, что увеличении числа узлов интерполяции приводит к значительному повышению точности аппроксимации.

#### 2.4.4 Сравнение трёх рассмотренных случаев

Из графиков на рисунке 13 видно, что при оптимальное расположение узлов уменьшает погрешность аппроксимации на несколько порядков. Оптимальное расположение узлов в общем случае дает более точную интерполяцию, однако в случае небольших  $n$  (примерно до 7) погрешности в случае оптимально расположенных узлов и в случае равномерно расположенных узлов дает примерно одинаковую погрешность. При увеличении  $n$  в случае равномерного расположения узлов возникает эффект Рунге и погрешность стремительно растет. Локальная интерполяция обеспечивает более стабильную точность, особенно для большого числа узлов. На каждом подотрезке можно использовать полиномы низкой степени, что уменьшает осцилляции и улучшает точность.

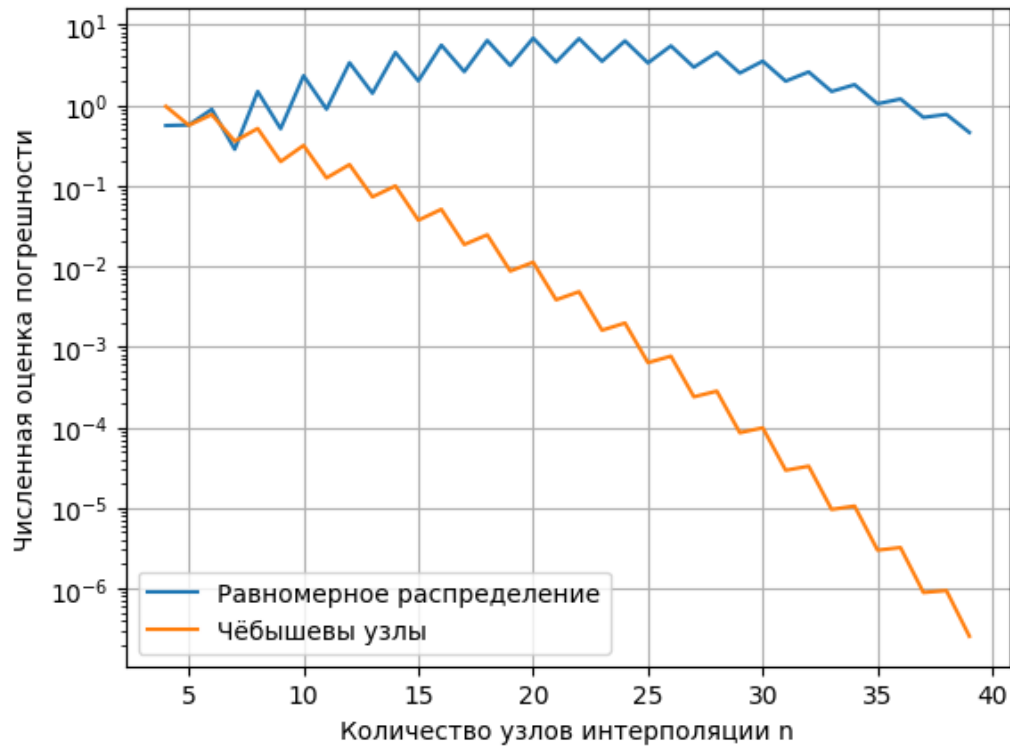


Рис. 13: Сравнение численных оценок аппроксимации для равномерного и оптимального расположения узлов

### 3 Продвинутая часть

#### 3.1 Использование кусочно-линейной интерполяции для приближения значения функций

Согласно пункту 7 задания продвинутой части, необходимо найти приближённое значение функции ошибок  $erf x$  в точке  $x = 2$ , используя кусочно-линейную интерполяцию для  $f(t)$  при  $n = 3, 5, 7, 9$  при  $t \in [0; 5]$ , и сравнить полученные значения между собой.

Для вычисления значения была написана функция на Python, которая приближенно вычисляет значение функции  $erf x$  в заданной точке  $x$  при заданном количестве узлов интерполяции. Результаты сравнения полученных значений  $erf x$  в точке  $x = 2$  приведены на рисунке 14:

Из графиков на рисунке 14 видно, что при увеличении числа узлов точность интерполяции значительно возрастает.

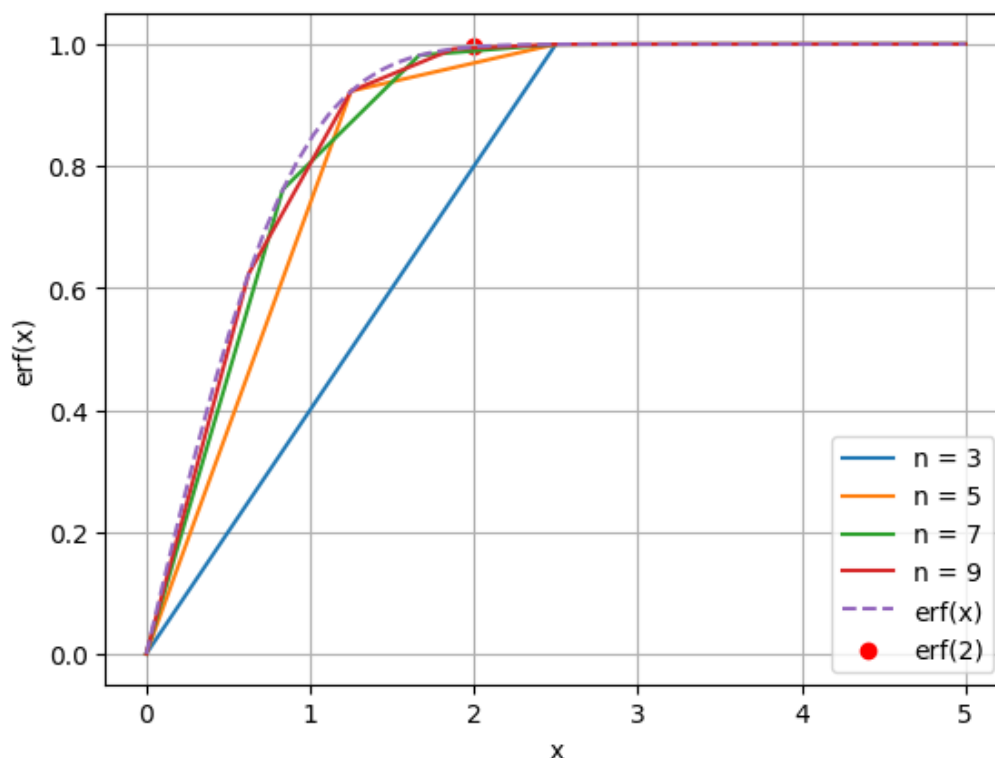


Рис. 14: Сравнение значения  $\text{erf}(2)$  для случая кусочно-линейной интерполяции при разных  $n$

## Заключение

1. Качество интерполяции Лагранжа зависит как от количества, так и от распределения интерполяционных узлов.
2. При равномерном распределении узлов наблюдаются осцилляции на концах отрезка интерполяции (явления Рунге). Для минимизации осцилляций целесообразно использовать методы оптимального распределения узлов интерполяции, например использовать Чёбышевские узлы.
3. Использование Чёбышевских узлов значительно увеличивает точность аппроксимации интерполяции Лагранжа.
4. При увеличении количества узлов точность аппроксимации кусочно-линейной интерполяции значительно повышается.

## Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 140. URL: <https://archrk6.bmstu.ru/index.php/f/810046>.
2. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2021. С. 9. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).



3. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению заданий к семинарским занятиям (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2022. С. 7. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).
4. Першин А.Ю. Сборник задач семинарских занятий по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. / Под редакцией Соколова А.П. [Электронный ресурс]. Москва, 2018-2021. С. 20. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).
5. Першин А.Ю., Соколов А.П. Сборник постановок задач на лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. [Электронный ресурс]. Москва, 2021. С. 54. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).