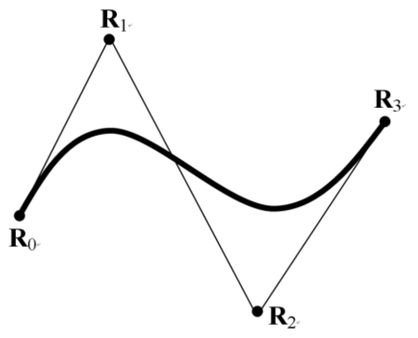
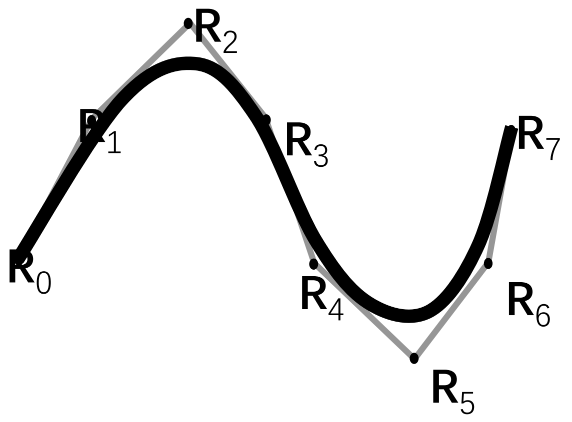
第四章 样条曲线和曲面的生成

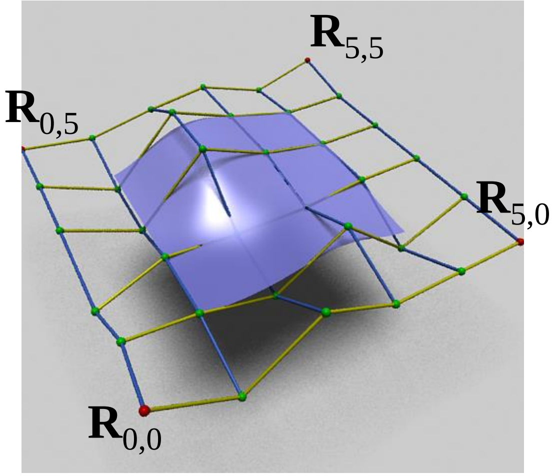
一、概述

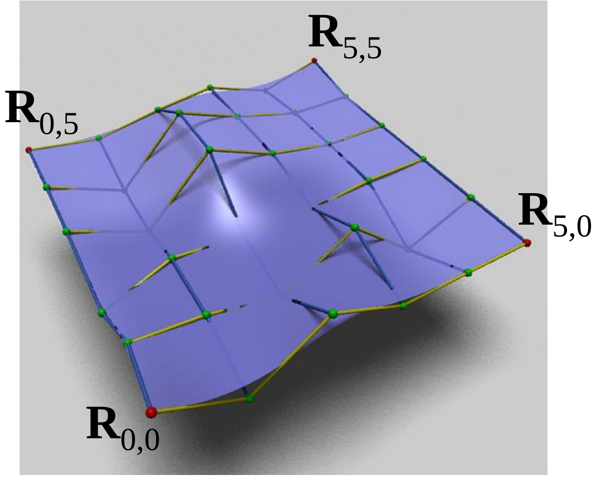
一、概述

在制造业中，样条（spline）是一种绘制曲线的工具，它通过指定点给出曲线的大致形状，可以确定平滑的曲线。数学上用分段多项式函数来描述这种曲线。样条曲面则用两组正交样条曲面来描述。









一、概述

- 1963年，波音公司的Ferguson定义了三次Hermit曲线和曲面
- 1964年，麻省理工学院的Coons定义了Coons曲面
- 1971年，雷诺公司的Pierre Bezier定义了Bezier曲线和曲面，雪铁龙（Citroen）公司的de Castejau提出了快速算法
- 1974年，通用汽车公司Gordon和Riesenfeld定义了B样条曲线和曲面
- 80年代后期，美国人Piegl和Tiller定义了非均匀有理B样条（NURBS），可统一表示初等解析曲线（面）、Bezier曲线（面）和B样条曲线（面）

一、概述

- 1、条件
  - 由一组控制点确定曲线（曲面）的形状
  - 曲线（曲面）是光滑的
- 2、生成方式
  - 插值方式：曲线（曲面）通过所有的控制点，用于数字化绘图，动画设计
  - 逼近方式：曲线（曲面）不一定通过所有的控制点，用于设计物体表面
- 3、参数表示
  - 点：$P_k = (x_k,\ y_k,\ z_k)$
  - 曲线：$p(t) = [x(t),\ y(t),\ z(t)]$
  - 曲面：$p(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$

一、概述

- 3、参数表示

	参数表示	非参数表示	
		隐式	显示
一般式	$x = x(t)$ $y = y(t)$	$f(x, y) = 0$	$y = f(x)$
例：直线	$x(t) = a_{1x}t + a_{0x}$ $y(t) = a_{1y}t + a_{0y}$ $p(t) = a_1 t + a_0$	$ax + by + c = 0$	$y = mx + b$

一、概述

- 4、曲线的数学表示方式（以三次曲线为例）

三者之间可以转换

参数多项式方式： $p(t)=a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0$, $t\in[0,1]$

$$p(t)=[x(t),y(t),z(t)]\quad\begin{cases}x(t)=a_{3x}t^3+a_{2x}t^2+a_{1x}t+a_{0x}\\ y(t)=a_{3y}t^3+a_{2y}t^2+a_{1y}t+a_{0y}\\ z(t)=a_{3z}t^3+a_{2z}t^2+a_{1z}t+a_{0z}\end{cases}$$

矩阵方式： $p(t)=[t^3\ \ t^2\ \ t\ \ 1]\begin{bmatrix}a_3\\a_2\\a_1\\a_0\end{bmatrix}=[t^3\ \ t^2\ \ t\ \ 1]\begin{bmatrix}s_{00}&s_{01}&s_{02}&s_{03}\\s_{10}&s_{11}&s_{12}&s_{13}\\s_{20}&s_{21}&s_{22}&s_{23}\\s_{30}&s_{31}&s_{32}&s_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_0\\P_1\\P_2\\P_3\end{bmatrix}=T\cdot M_{spline}\cdot M_{geom}$

$t\in[0,1]$

基函数多项式方式: $p(t)=\sum_{k=0}^{m}P_k\boxed{B_{F_k}(t)}$, $t\in[0,1]$

混合函数（Blending Function）,也称为基函数（Basis Function）

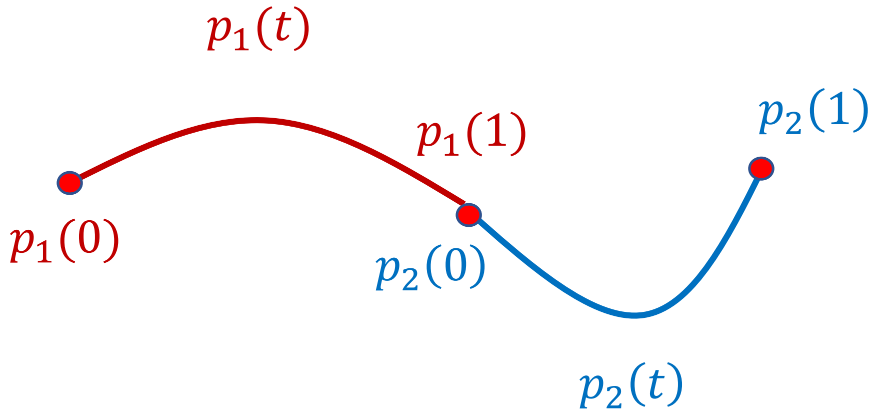
一、概述

- 5、曲线的连续性
  - 为保证分段曲线从一段到另一段平滑过渡，可以在连接处要求各种连续性条件，通过在曲线的公共部分匹配参数导数来建立连续性

如果有两段曲线：$p_1(t)$,$p_2(t)$，$t \in [0,1]$

参数连续
- C^0连续：0阶参数连续，有 $p_1(1) = p_2(0)$;
- C^1连续：1阶参数连续，有$p_1'(1) = p_2'(0)$;
- C^2连续：2阶参数连续，有$p_1''(1) = p_2''(0)$;

几何连续
- G^0连续：0阶几何连续，有 $p_1(1) = p_2(0)$;
- G^1连续：1阶几何连续，有$p_1'(1) \cdot p_2'(0) > 0$;
- G^2连续：2阶几何连续，有$p_1''(1) \cdot p_2''(0) > 0$;



二、Hermit曲线

- 1、定义： 两点之间的三次插值，已知:几何参数：P_0, P_1, P_0', P_1'
- 2、参数多项式表示

$$\boxed{p(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \qquad (3\text{-}1)}$$

将几何参数代入式3-1

$$\begin{cases} P_0 = a_0 \\ P_1 = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \\ P_0' = a_1 \\ P_1' = 3a_3 + 2a_2 + a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = P_0 \\ a_1 = P_0' \\ a_2 = -3P_0 + 3P_1 - P_0' - P_1' \\ a_3 = 2P_0 - 2P_1 + P_0' + P_1' \end{cases}$$

$$\boxed{\therefore p(t) = (2P_0 - 2P_1 + P_0' + P_1')\, t^3 + (-3P_0 + 3P_1 - 2P_0' - P_1')\, t^2 + P_0'\, t + P_0 \qquad (3\text{-}2)}$$

二、Hermit曲线

- 3、基函数多项式表示

$$p(t) = (2P_0 - 2P_1 + P_0' + P_1')\ t^3 + (-3P_0 + 3P_1 - 2P_0' - P_1')\ t^2 + P_0'\ t + P_0 \qquad (3\text{-}2)$$

⇩

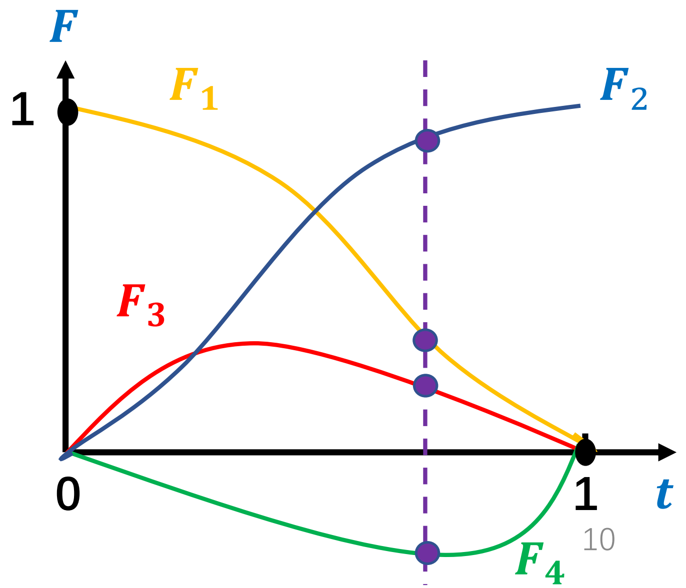
$$p(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)P_0 + (-2t^3 + 3t^2)P_1 + (t^3 - 2t^2 + t)P_0' + (t^3 - t^2)P_1' \qquad (3\text{-}3)$$

⇩

$$p(t) = F_1 P_0 + F_2 P_1 + F_3 P_0' + F_4 P_1' \qquad (3\text{-}4)$$

几何参数

基函数



二、Hermit曲线

- 4、矩阵表示

$$\boxed{p(t) = F_1 P_0 + F_2 P_1 + F_3 P_0{}' + F_4 P_1{}' \quad (3\text{-}4)}$$

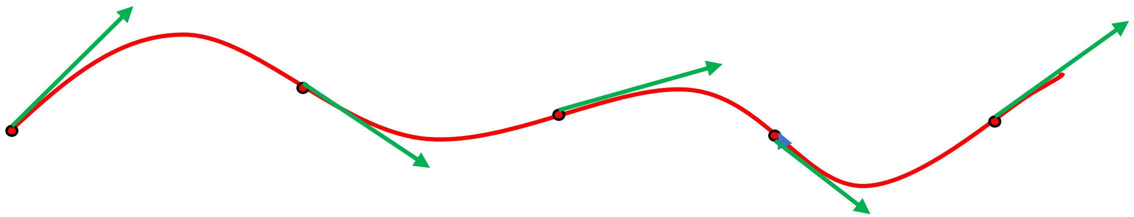
$$p(t) = [F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4] \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_0{}' \\ P_1{}' \end{bmatrix}$$

$$\boxed{p(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)P_0 + (-2t^3 + 3t^2)P_1 + (t^3 - 2t^2 + t)P_0{}' + (t^3 - t^2)P_1{}' \qquad (3\text{-}3)}$$

$$p(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_0{}' \\ P_1{}' \end{bmatrix} = T \cdot M_{spline} \cdot M_{geom}$$

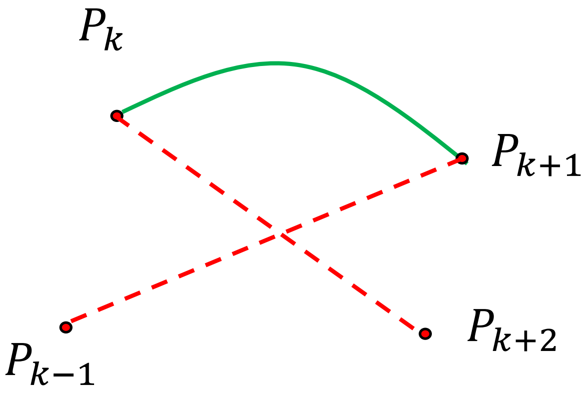
二、Hermit曲线

- 5、特点
  - 在两点之间插值，需要已知端点的坐标和切向量
  - 每段之间C^0、C^1连续
  - 可以局部调整



- 6、改进（Cardinal 样条）

$$p(0) = P_k$$
$$p(1) = P_{k+1}$$
$$p'(0) = \frac{1}{2}(1-u)(P_{k+1} - P_{k-1})$$
$$p'(1) = \frac{1}{2}(1-u)(P_{k+2} - P_k)$$



二、Hermit曲线

- 6、改进（Cardinal 样条）

$$p(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s & 2-s & s-2 & s \\ 2s & s-3 & 3-2s & -s \\ -s & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k-1} \\ P_{k-1} \\ P_k \\ P_{k+1} \end{bmatrix}$$

其中$s = \frac{1}{2}(1-u)$，s越大，曲线越紧

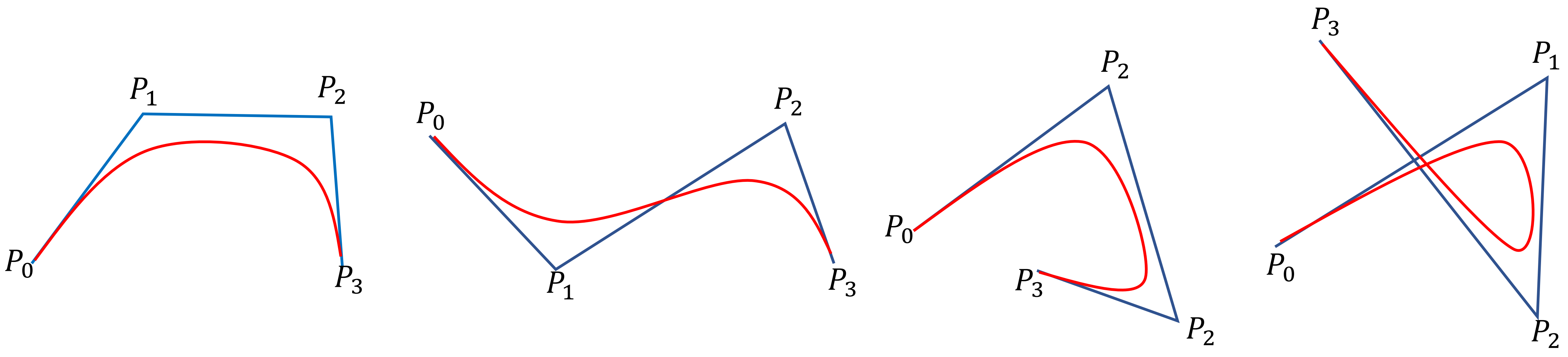
三、Bezier曲线

1962年法国Renault公司的Pierre Bezeir提出，广泛应用于各种CAD系统，通用软件包，OpenGL。

Pierre Bézier (1910.9.1-1999.11.25)

三、Bezier曲线

- 1、描述
  - 只有第一个和最后一个控制点必须通过曲线
  - 由控制点确定的多边形控制曲线的形状
  - 特征多边形的第一条边和最后一条边分别是两个端点的切线



三、Bezier曲线

- 2、定义

如果已知n+1个控制点， $P_k=(x_k, y_k, z_k)$， $k=0,1,2\cdots n$， 则Bezier曲线为：

$$\boxed{p(t)=\sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,n}(t)\ ,\ t\in[0,1]}$$

其中$B_{k,n}(t)$为Bernstain多项式，是Bezier曲线的混合函数，为n次多项式：

$$\boxed{B_{k,n}(t)=C_n^k t^k(1-t)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}t^k(1-t)^{n-k}}$$

$B_{k,n}(t)$为n次多项式，即：

n=1，两个控制点确定一次Bezier曲线（直线）

n=2，三个控制点确定二次Bezier曲线（抛物线）

n=3，四个控制点确定三次Bezier曲线（样条曲线）

…

三、Bezier曲线

- 2、定义

eg1：两个控制点, n = 1：P_0 、P_1

$$B_{0,1}(t)=C_1^0 t^0(1-t)^{1-0}=1-t$$

$$B_{1,1}(t)=C_1^1 t^1(1-t)^{1-1}=t$$

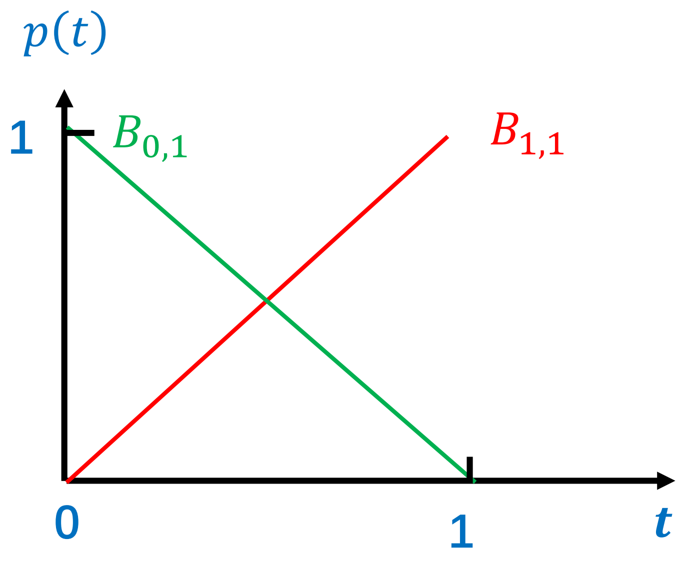
$$\boxed{p(t)=\sum_{k=0}^{1} P_k B_{k,n}(t)\ ,\ t\in[0,1]}$$ 基函数多项式

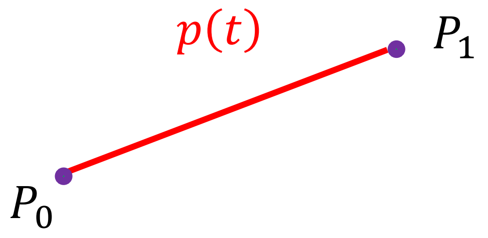
$$p(t)=(1-t)P_0+tP_1$$

$$\boxed{=(P_1-P_0)t+P_0}$$ 参数多项式

$$\boxed{=[t\quad 1]\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_0\\ P_1\end{bmatrix}}$$ 矩阵

$$=T\cdot M_{spline}\cdot M_{geom}$$





三、Bezier曲线

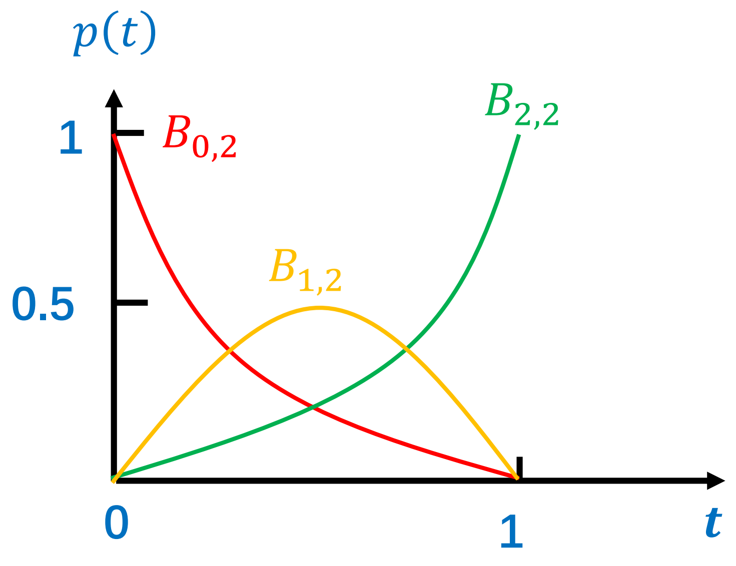
- 2、定义

eg2：三个控制点，n = 2：P_0、P_1、 P_2

$$B_{0,2}(t)=C_2^0 t^0(1-t)^{2-0}=(1-t)^2$$

$$B_{1,2}(t)=C_2^1 t^1(1-t)^{2-1}=2t(1-t)$$

$$B_{2,2}(t)=C_2^2 t^2(1-t)^{2-2}=t^2$$

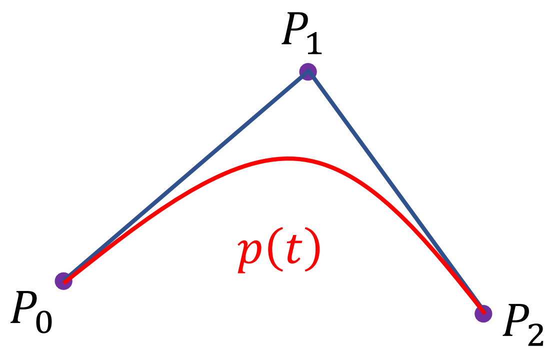


$$\boxed{p(t)=\sum_{k=0}^{2} P_k B_{k,n}(t)\ ,\ t\in[0,1]}$$

$$p(t)=(1-t)^2P_0+2t(1-t)P_1+t^2\ P_2$$

$$\boxed{=(t^2-2t+1)P_0+(-2t^2+2t)P_1+t^2\ P_2}$$

$$\boxed{=\begin{bmatrix} t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_0\\ P_1\\ P_2\end{bmatrix}}$$



三、Bezier曲线

- 2、定义

eg3：四个控制点，n = 3： P_0、P_1、 P_2、 P_3

$$B_{0,3}(t)=C_3^0t^0(1-t)^{3-0}=(1-t)^3$$

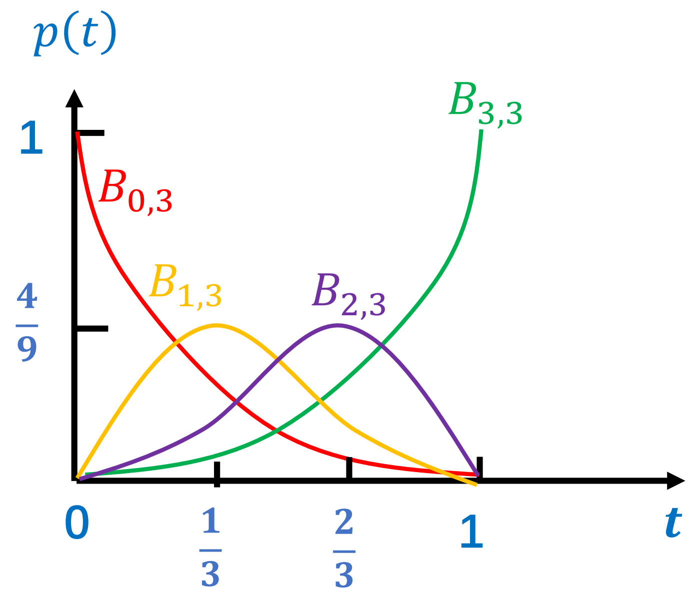
$$B_{1,3}(t)=C_3^1t^1(1-t)^{3-1}=3t(1-t)^2$$

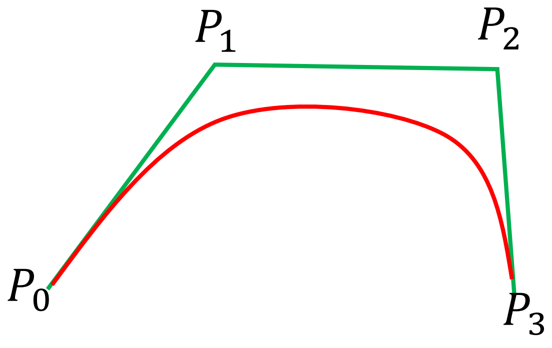
$$B_{2,3}(t)=C_3^2t^2(1-t)^{3-2}=3t^2(1-t)^1$$

$$B_{3,3}(t)=C_3^3t^3(1-t)^{3-3}=t^3$$

$$\boxed{p(t)=\sum_{k=0}^{3}P_kB_{k,n}(t)\ ,\ t\in[0,1]}$$

$$=[t^3\quad t^2\quad t\quad 1]\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & 6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_0\\ P_1\\ P_2\\ P_3\end{bmatrix}$$





三、Bezier曲线

- 3、混合函数的性质

（1）正性： $B_{k,n}(t) \geq 0$，t=0、1时等号成立，除了：

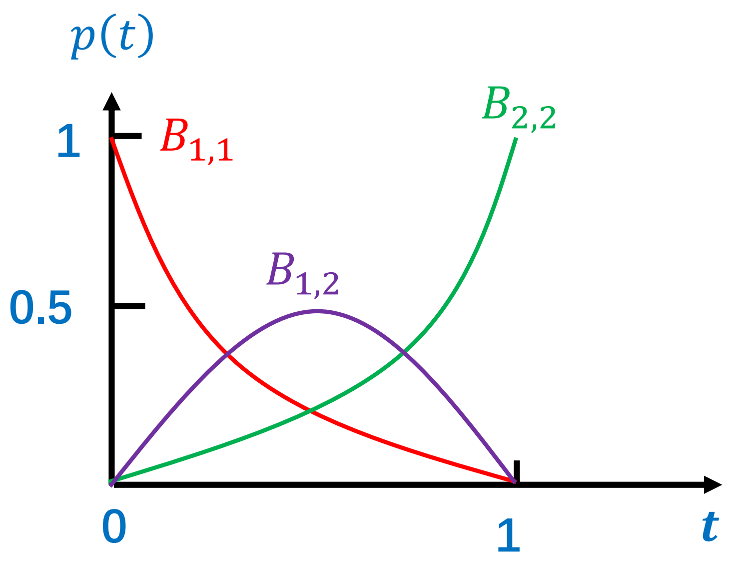
$$B_{0,n}(0) = B_{n,n}(1) = 1$$

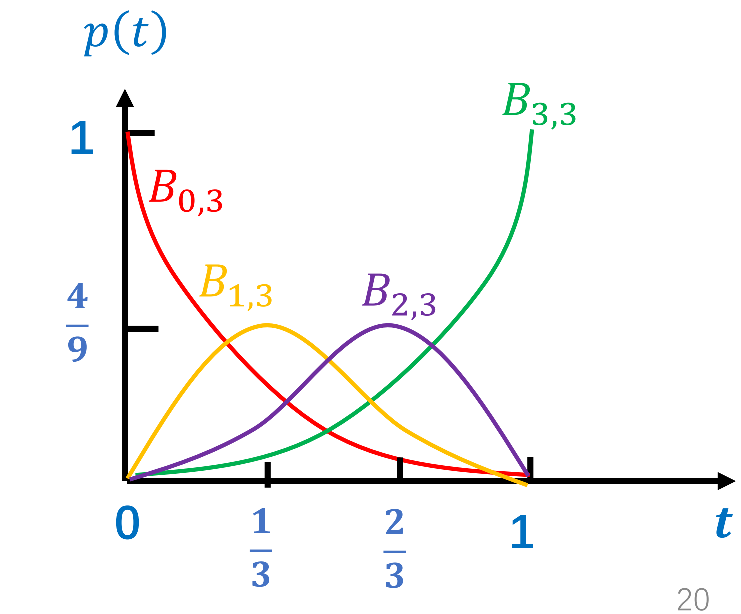
（2）权性：$\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(t) \equiv 1$，$t \in [0,1]$；

（3）对称性： $B_{k,n}(t) = B_{n-k,n}(1-t)$， $k = 0,1,2\cdots n$；

$$B_{0,3}(0) = B_{3,3}(1) = 1$$

$$B_{1,3}(\tfrac{1}{3}) = B_{2,3}(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{4}{9}$$





三、Bezier曲线

- 3、混合函数的性质

（4）递推性： $B_{k,n}(t) = (1-t)B_{k,n-1}(t) + tB_{k-1,n-1}(t)$， $k = 0,1,2 \cdots n$；

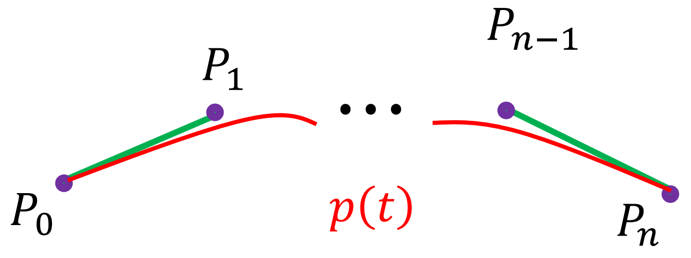
且有： $B_{n,n} = t^k$， $B_{0,n} = (1-t)^n$

（5）导数性： $B'_{k,n}(t) = n[B_{k-1,n-1}(t) - B_{k,n-1}(t)]$， $k = 0,1,2 \cdots n-1$；

三、Bezier曲线

- 4、Bezier曲线的性质

（1）端点：经过第一和最后一个控制点，
与第一和最后一条边相切。



$$\left.\begin{array}{l} B_{0,n}(0) = B_{n,n}(1) = 1 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(t) \equiv 1 \\ \boxed{p(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,n}(t)} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} p(0) = P_0 \\ p(1) = P_n \end{array}$$

三、Bezier曲线

- 4、Bezier曲线的性质

（1）端点：

n

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\boxed{p'(t) = P_0 B'_{0,n}(t) + P_n B'_{n,n}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} P_k B'_{k,n}(t)} \\
\boxed{B'_{0,n}(t) = [(1-t)^n]' = -n(1-t)^{n-1}} \\
\boxed{B'_{n,n}(t) = [t^n]' = n(t)^{n-1}} \\
\boxed{B'_{k,n}(t) = n[B_{k-1,n-1}(t) - B_{k,n-1}(t)]}
\end{array}
\right.
$$

$$\Downarrow$$

$$p'(0)=n(P_1 - P_0)$$

$$p'(1)=n(P_n - P_{n-1})$$

三、Bezier曲线

- 4、Bezier曲线的性质

（2）对称性：令$p_k = p_{n-k}$曲线形状不变。

$$\boxed{B_{k,n}(t) = B_{n-k,n}(1-t), \quad k = 0,1,2\cdots n\ ;}$$

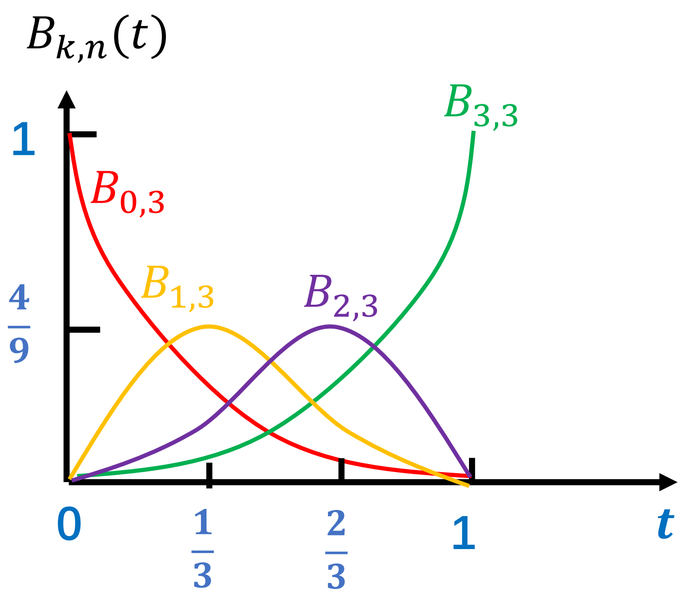
（3）凸包性：$p(t) = [x(t),\ y(t),\ z(t)]$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(t) \equiv 1 \qquad k = 0,1,2\cdots n\ ;}$$

$$min\{x_k\} \le x(t) \le \max\{x_k\}$$

$$min\{y_k\} \le y(t) \le \max\{y_k\}$$

$$min\{z_k\} \le z(t) \le \max\{z_k\}$$



三、Bezier曲线

- 4、Bezier曲线的性质

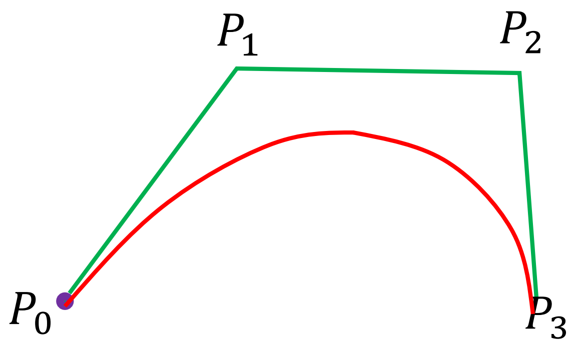
（4）可分割性：对于控制点 P_k（$k=0,1,2\cdots n$）形成的特征多边形在每条边上取点：

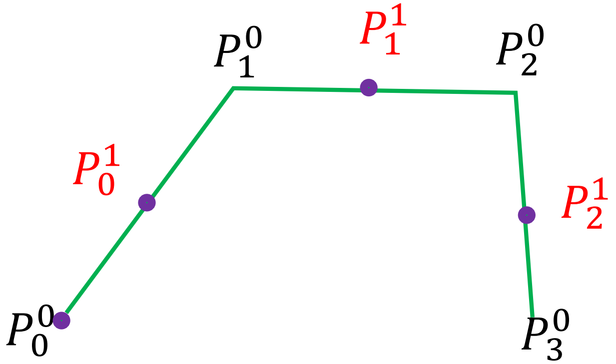
$$P_k^0=P_k$$
$$P_k^1=P_k^0+\lambda(P_{k+1}^0-P_k^0)$$
$$P_k^2=P_k^1+\lambda(P_{k+1}^1-P_k^1)$$
$$\vdots$$
$$P_k^j=P_k^{j-1}+\lambda(P_{k+1}^{j-1}-P_k^{j-1})$$

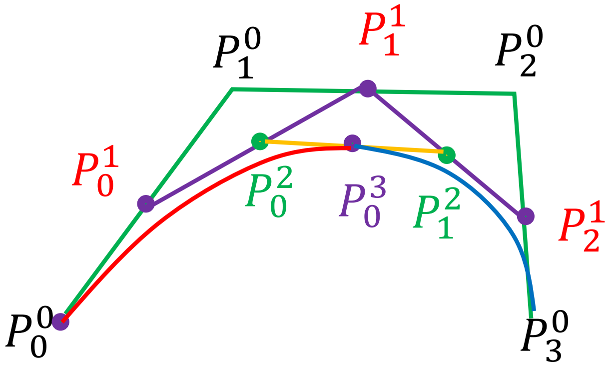
当$\lambda=\dfrac{1}{2}$ ⟹

$$P_k^0=P_k$$
$$P_k^1=\frac{P_{k+1}^0+P_k^0}{2}$$
$$P_k^2=\frac{P_{k+1}^1+P_k^1}{2}$$
$$\vdots$$
$$P_k^j=\frac{P_{k+1}^{j-1}+P_k^{j-1}}{2}$$

则以P_0^j作为控制点所得的Bezier曲线是以P_k为控制点所得的Bezier曲线的前半部，
以P_k^{n-k}作为控制点所得的Bezier曲线是以P_k为控制点所得的Bezier曲线的后半部。







三、Bezier曲线

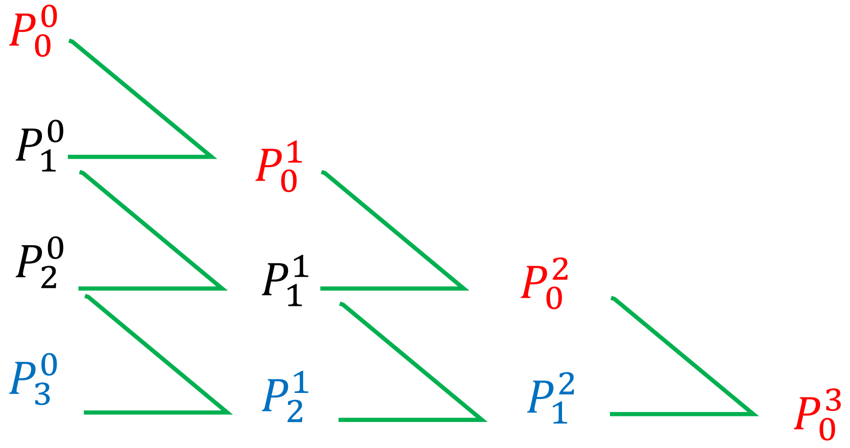
- 4、Bezier曲线的性质

（4）可分割性：可分割递推算法（Casteljau Algrithm）

P_0、P_1、P_2、P_3
$= P_0^0$、P_1^0、P_2^0、P_3^0

P_0^0、P_0^1、P_0^2、P_0^3 …

P_0^3、P_1^2、P_2^1、P_3^0 …



算法： Casteljau(p_0, p_1, p_2, p_3)

Step1：确定4个控制点；

Step2：如果4个控制点8连通，

则绘制4个控制点；

否则计算$P_0^0, P_0^1, P_0^2, P_0^3$，

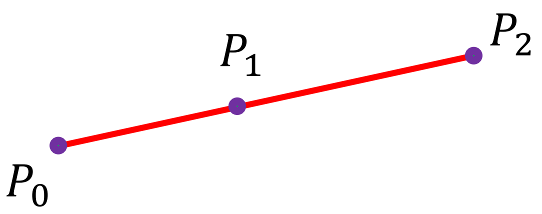
$P_0^3, P_1^2, P_2^1, P_3^0$；

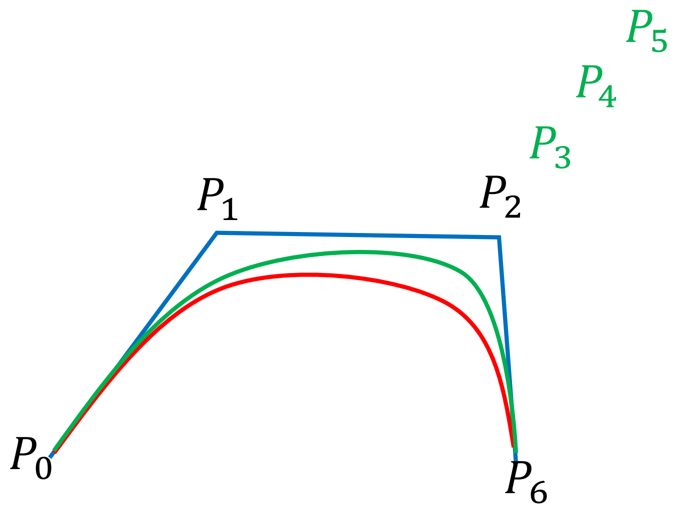
Step3：Casteljau(P_0^0, P_0^1, P_0^2, P_0^3)；

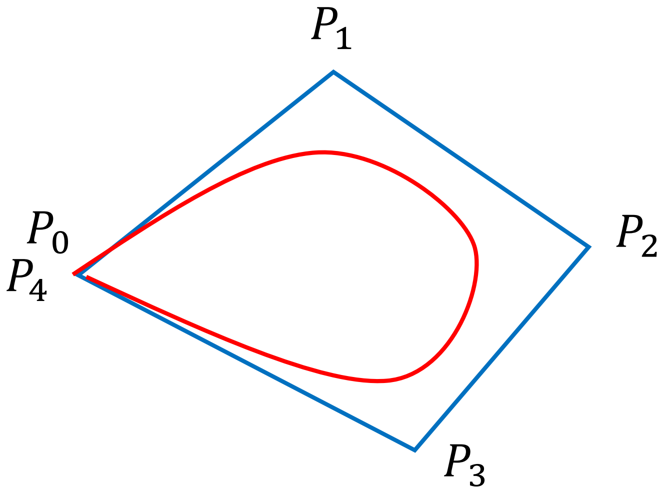
Casteljau(P_0^3, P_1^2, P_2^1, P_3^0) 。

三、Bezier曲线

- 5、特例
  - 三点共线：一次Bezier曲线
  - 重（chóng）点
  - 闭包

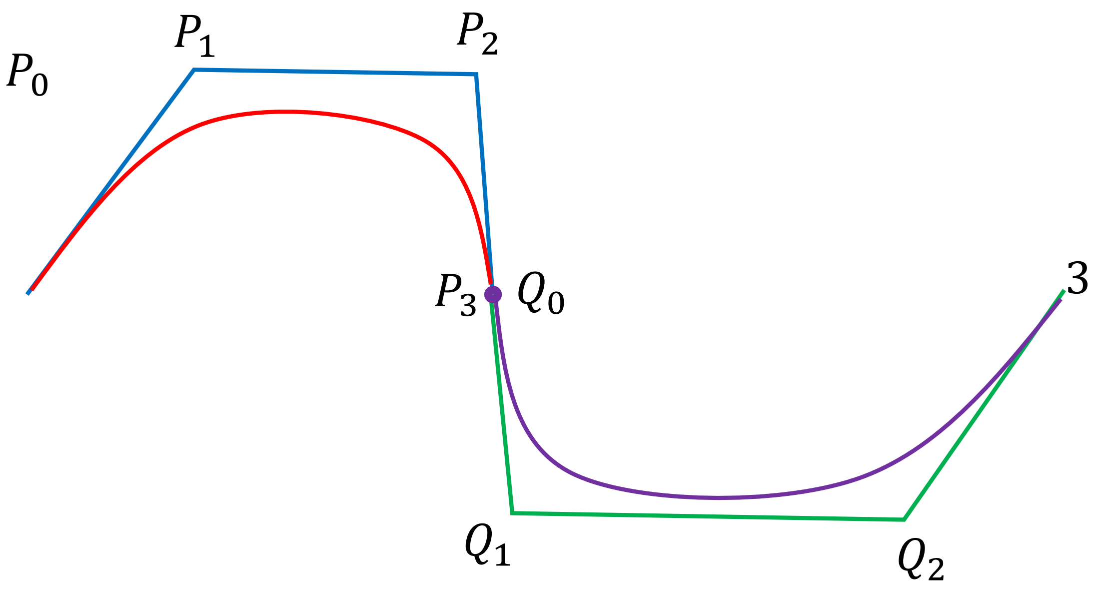






三、Bezier曲线

- 6、Bezier曲线的拼接集连续性
  - C^0连续： $P_n = Q_0$
  - C^1连续： P_n、 $P_n = Q_0$、 Q_1三点共线



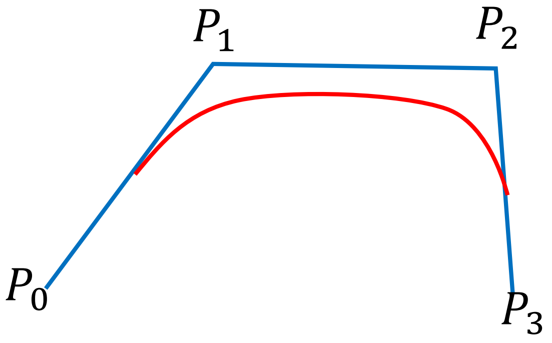
- 7、特点：
  - 方便、简洁、有快速算法
  - 不能局部调整
  - 控制点的个数决定曲线多项式的次数

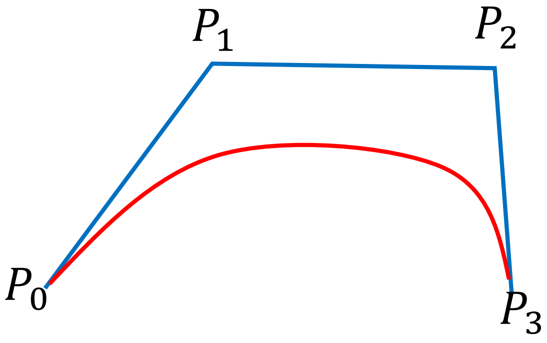
四、B-样条曲线

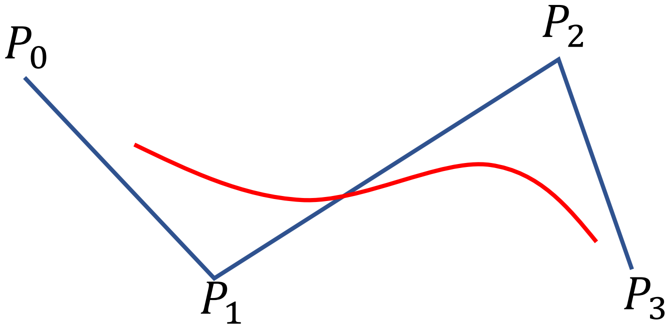
1、描述

另一类广泛使用的逼近样条曲线是B-样条曲线，它是Bezier曲线的推广和改进，与Bezier曲线不同的是：

- B-样条曲线的参数多项式次数与控制点的个数无关；
- B-样条曲线不一定通过第一和最后控制点；
- 允许局部调整，代价是B-样条曲线的构造复杂；







四、B-样条曲线

Bezier曲线： $p(t)=\sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,n}(t)$ ，$t\in[0,1]$

- 2、定义

如果已知n+1个控制点， $P_k=(x_k,\ y_k,\ z_k)$， $k=0,1,2\cdots n$， 则可以构造一条d-1次的B-样条曲线：

$$p(t)=\sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,d}(t)\ ,\ t\in[t_{d-1},t_{n+1}]$$

t_k： 节点矢量的元素：

（1）节点矢量：对于n+1个控制点，d-1次的B-样条曲线， 可以构造一个节点矢量T，

T是一个n+d+1维的矢量， 即：

$$T=[t_0,t_1,\ldots,t_{n+d}]$$

如果 $t_{i+1}-t_i=C$， $i=0,1,2\cdots n+d-1$,

则由此构造出的混合函数是周期的，其B-样条曲线的均匀的。
否则，由此构造出的混合函数是非周期的，其B-样条曲线的非均匀的

四、B-样条曲线

- 2、定义

eg1:均匀的: $t_i = i$，$0 \le i \le n+d$，　n=4，d=3，　节点矢量为：$T = [0,1,2,3,4,5,6,7]$

eg2: 开放均匀的：$0 \le i \le n+d$，

$$t_i = \begin{cases} 0 & 0 \le i < d \\ i-d+1 & d \le i \le n \\ n-d+2 & i > n \end{cases}$$

n=5，d=3，　节点矢量为：$T = [0,0,0,1,2,3,4,4,4]$

eg3: 非均匀的：$0 \le i \le n+d$　n=4，d=4，　节点矢量为：$T = [0,1,3,4,7,9,10,13,15]$

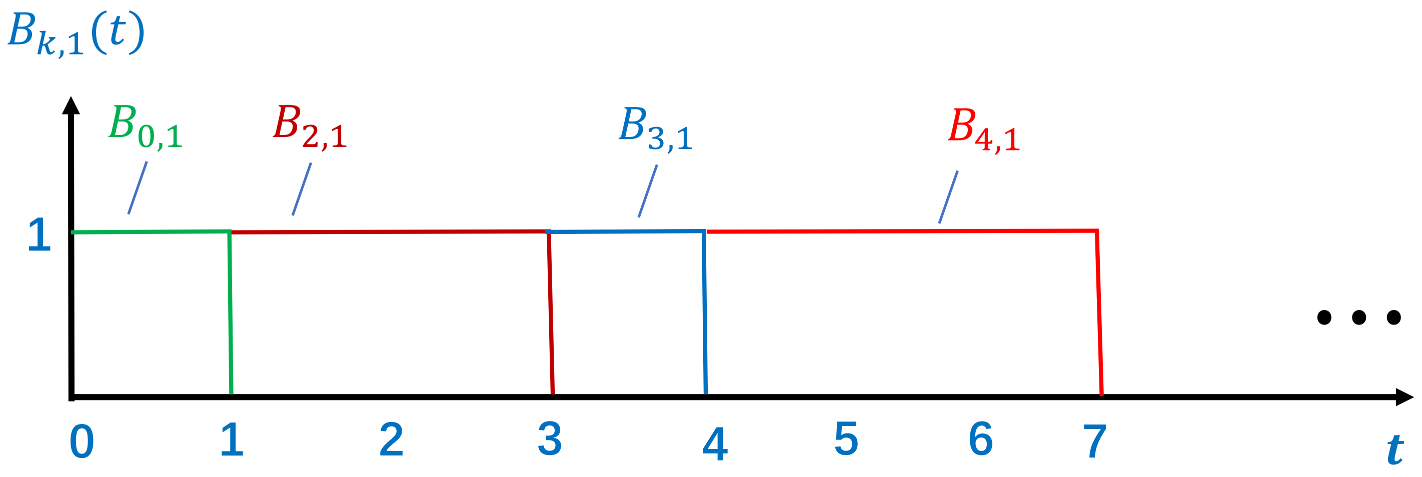
四、B-样条曲线

- 2、定义

（2）混合函数：

$$B_{k,1}(t)=\begin{cases}1 & t_k \le t \le t_{k+1} \\ 0 & else\end{cases}$$

$$B_{k,d}(t)=\frac{t-t_k}{t_{k+d-1}-t_k}B_{k,d-1}(t)+\frac{t_{n+d}-t}{t_{k+d}-t_{k+1}}B_{k+1,d-1}(t)$$



四、B-样条曲线

- 3、均匀B-样条

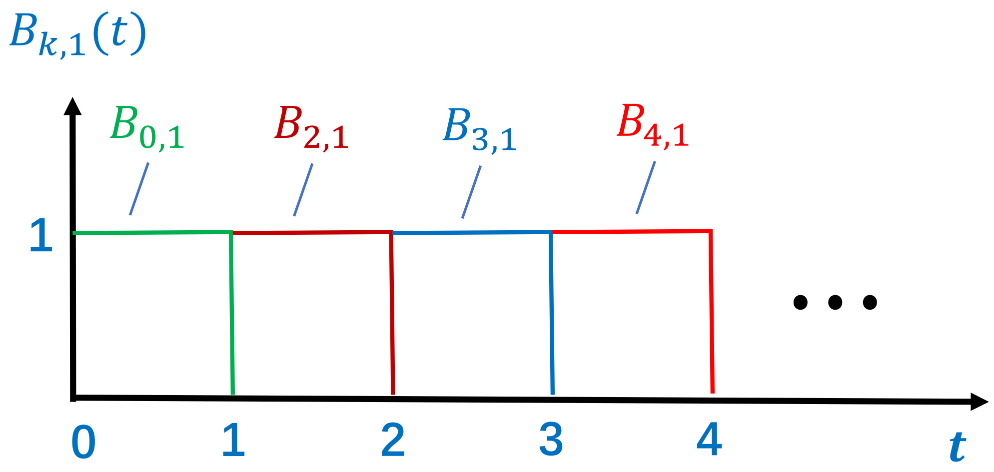
如果已知n+1个控制点， $P_k = (x_k, y_k, z_k)$， $k = 0,1,2\cdots n$， 构造d-1次B-样条曲线， 则:

节点矢量为： $T = [t_0, t_1, \dots, t_{n+d}]$， $0 \le i \le n + d$，

令 $t_i = i$， 则$T = [0,1, \dots n + d]$

d=1时的混合函数

$$B_{k,1}(t) = \begin{cases} 1 & t_k \le t \le t_{k+1} \\ 0 & else \end{cases}$$



四、B-样条曲线

- 3、均匀B-样条

$$B_{k,d}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+d-1} - t_k} B_{k,d-1}(t) + \frac{t_{n+d} - t}{t_{k+d} - t_{k+1}} B_{k+1,d-1}(t) \qquad t \in [t_{d-1}, t_{n+1}]$$

$$\boxed{B_{k,d}(t) = B_{k+1,d}(t - \Delta t) = B_{k+2,d}(t - 2\Delta t) = B_{k+3,d}(t - 3\Delta t) \cdots, \quad \text{其中} \Delta t = t_{i+1} - t_i}$$

即：均匀B-样条曲线的混合函数是周期的，所有n+1个混合函数具有相同的形状，每一个混合函数都是前一个混合函数的单位平移。

$$\boxed{p(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,d}(t) \ , \ t \in [t_{d-1}, t_{n+1}]}$$

四、B-样条曲线

- 3、均匀B-样条

d=2时的混合函数：

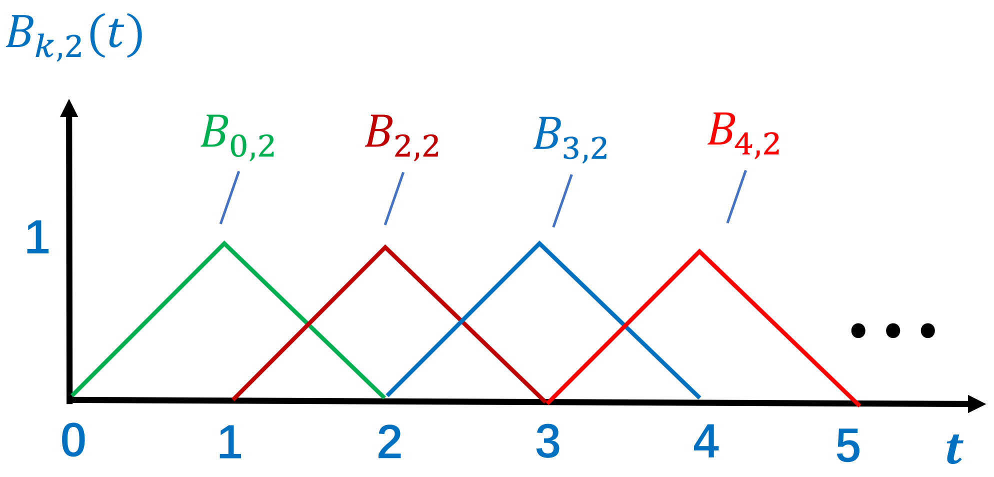
$$B_{0,2}(t)=\begin{cases} t & t\in[0,1] \\ 2-t & t\in[1,2] \end{cases}$$

$$B_{1,2}(t)=\begin{cases} t-1 & t\in[1,2] \\ 3-t & t\in[2,3] \end{cases}$$

$$B_{2,2}(t)=\begin{cases} t-2 & t\in[2,3] \\ 4-t & t\in[3,4] \end{cases}$$

$$B_{3,2}(t)=\begin{cases} t-3 & t\in[3,4] \\ 5-t & t\in[4,5] \end{cases}$$

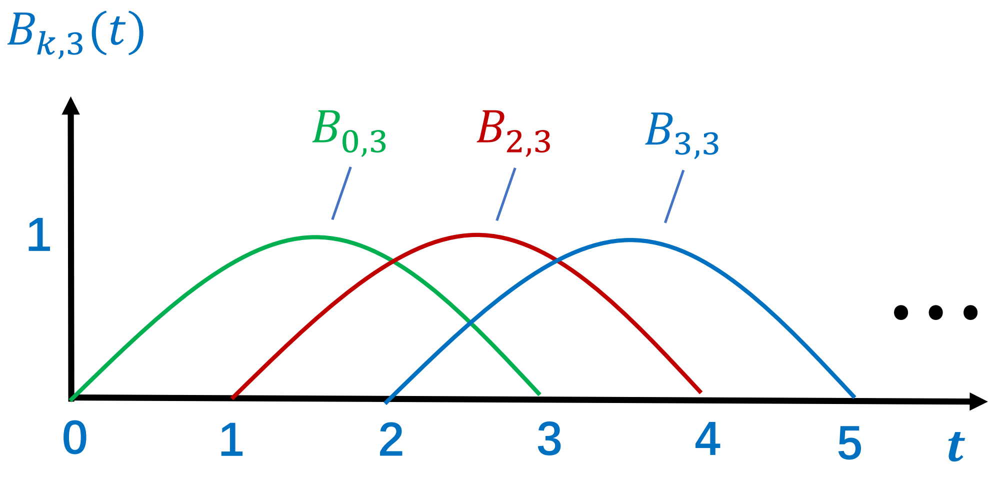
$$\vdots$$



四、B-样条曲线

- 3、均匀B-样条

d=3时的混合函数



$$B_{0,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2 & t\in[0,1]\\ \frac{1}{2}t(2-t)+\frac{1}{2}(t-1)(3-t) & t\in[1,2]\\ \frac{1}{2}(3-t)^2 & t\in[2,3]\end{cases}$$

$$B_{1,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-1)^2 & t\in[1,2]\\ \frac{1}{2}(t-1)(3-t)+\frac{1}{2}(t-2)(4-t) & t\in[2,3]\\ \frac{1}{2}(4-t)^2 & t\in[3,4]\end{cases}$$

$$B_{2,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-2)^2 & t\in[2,3]\\ \frac{1}{2}(t-2)(4-t)+\frac{1}{2}(t-3)(5-t) & t\in[3,4]\\ \frac{1}{2}(5-t)^2 & t\in[4,5]\end{cases}$$

四、B-样条曲线

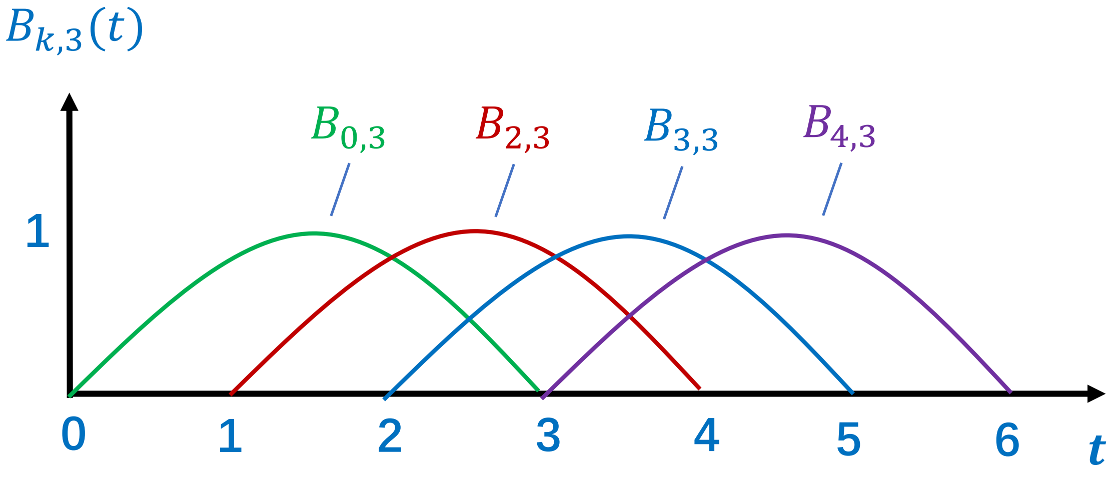
- 3、均匀B-样条

eg1. 构造二次B-样条，d=n=3。

构造节点矢量：$T=[0,1,2,3,4,5,6]$

求$B_{0,3}(t)$、$B_{1,3}(t)$、$B_{2,3}(t)$、$B_{3,3}(t)$

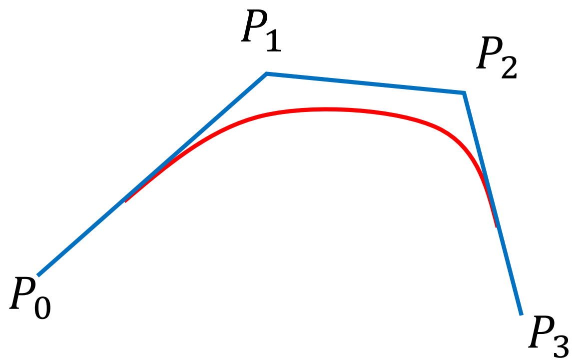
$$\boxed{p(t)=\sum_{k=0}^{3}P_kB_{k,3}(t)\ ,\ t\in[t_2,t_4]}$$



归一化处理后：$p(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_k\\ P_{k+1}\\ P_{k+2}\end{bmatrix}\quad t\in[0,1]$

端点特性：

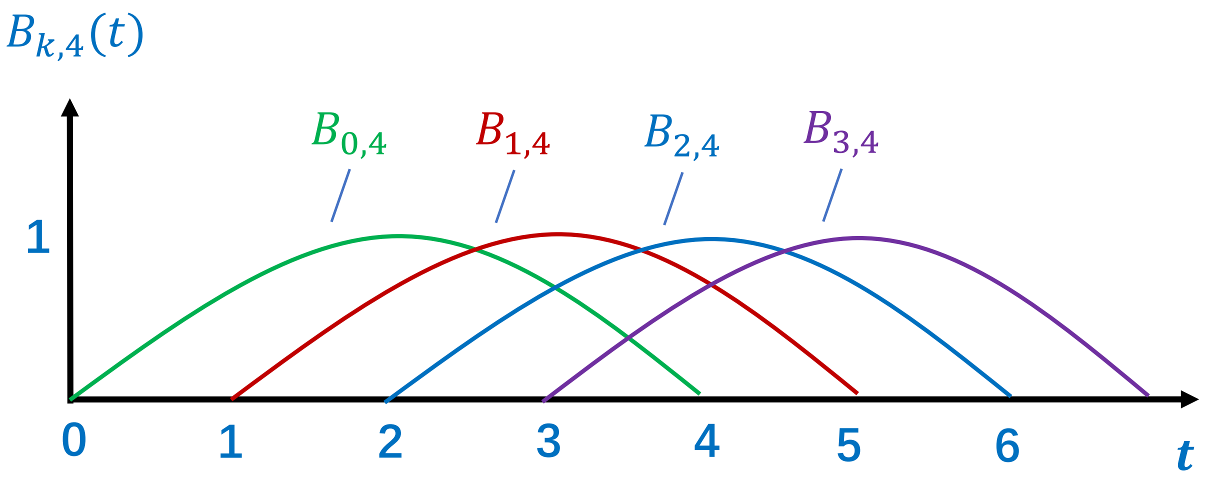
$$\begin{cases} p_{start}=p(2)=\frac{1}{2}(P_0+P_1)\\ p_{end}=p(4)=\frac{1}{2}(P_2+P_3)\\ p'_{start}=p'(2)=P_1-P_0\\ p'_{end}=p'(4)=P_3-P_2 \end{cases}$$



四、B-样条曲线

- 3、均匀B-样条

eg2. 构造三次B-样条，d=4, n=3。



构造节点矢量：$T=[0,1,2,3,4,5,6,7]$、　求$B_{0,4}(t)$、$B_{1,4}(t)$、$B_{2,4}(t)$、$B_{3,4}(t)$

$$\boxed{p(t)=\sum_{k=0}^{3}P_kB_{k,4}(t)\ ,\ t\in[3,4]}$$

归一化处理后：

$B_{0,4}(t)=\frac{1}{6}(1-t)^3$

$B_{1,4}(t)=\frac{1}{6}(3t^3-6t^2+4)^3$

$B_{1,4}(t)=\frac{1}{6}(-3t^3+3t^2+3t+1)^3$

$B_{3,4}(t)=\frac{1}{6}t^3$

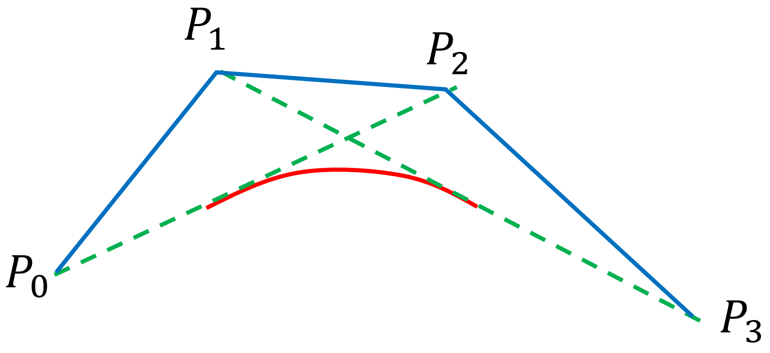
$$\Longrightarrow\quad p(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}t^3 & t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_0\\ P_1\\ P_2\\ P_3\end{bmatrix}\quad t\in[0,1]$$

四、B-样条曲线

- 3、均匀B-样条

端点特性：

$$\begin{cases} p(0) = \frac{1}{6}(P_0 + 4P_1 + P_2) \\ p(1) = \frac{1}{6}(P_1 + 4P_2 + P_3) \\ p'(0) = \frac{1}{2}(P_2 - P_0) \\ p'(1) = \frac{1}{2}(P_3 - P_1) \end{cases}$$



n+1个控制点时，每4个控制点确定一段三次样条曲线：

$$p_i(t) = \frac{1}{2}[t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ P_{k+2} \\ P_{k+3} \end{bmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

四、B-样条曲线

- 4、开放均匀B-样条（open-uniform B-spline ）

它是均匀B-样条的特例，节点矢量在两端重复d次，具有与Bezier曲线的相似特性，可以通过第一点和最后一点，并且与第一条边和最后一条边相切，当d=n+1时，退化成Bezier曲线。例如：

$$t_i=\begin{cases}0 & 0\le i<d\\ i-d+1 & d\le i\le n\\ n-d+2 & i>n\end{cases}\quad\Rightarrow$$

d=2，n=3，$T=[0,0,1,2,3,3]$ $\quad t\in[0,3]$

d=4，n=4，$T=[0,0,0,0,1,2,2,2,2]$ $\quad t\in[0,2]$

d=3，n=5，$T=[0,0,0,1,2,3,4,4,4]$ $\quad t\in[0,4]$

$$t\in[t_{d-1},t_{n+1}]$$

四、B-样条曲线

- 4、开放均匀B-样条（open-uniform B-spline ）

eg3. 构造二次开放均匀B-样条，d=3, n=4。

$$T=[0,0,\underbrace{0,1,2,3},3,3]$$

$$t\in[t_{d-1},t_{n+1}]$$

$$B_{0,3}(t)=(1-t)^2 \qquad t\in[0,1]$$

$$B_{1,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t(4-3t) & t\in[0,1]\\ \frac{1}{2}(2-t)^2 & t\in[1,2]\end{cases}$$

$$B_{2,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2 & t\in[0,1]\\ \frac{1}{2}t(2-t)+\frac{1}{2}(t-1)(3-t) & t\in[1,2]\\ \frac{1}{2}(3-t)^2 & t\in[2,3]\end{cases}$$

$$B_{3,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-1)^2 & t\in[1,2]\\ \frac{1}{2}(3-t)(3t-5) & t\in[2,3]\end{cases}$$

$$B_{4,3}(t)=(t-2)^2 \qquad t\in[2,3]$$

四、B-样条曲线

- 4、开放均匀B-样条（open-uniform B-spline ）

$$p(t) = \sum_{k=0}^{4} P_k B_{k,3}(t)\ ,\ t \in [0,3]$$

$p(0) = P_0$　　　$p(3) = P_4$

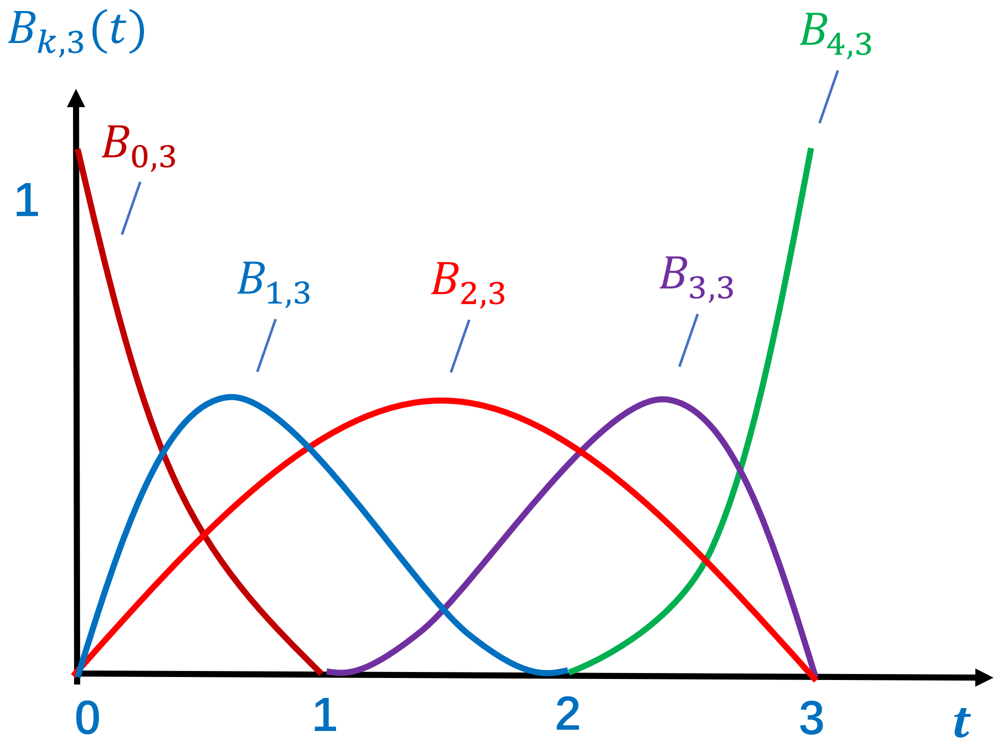
$B_{0,3}(t)$只在[0,1]区间有效，
$B_{4,3}(t)$只在[2,3]区间有效，

中间可以局部调整

$B_{0,3}(0) = 1$，　$B_{1,3}(0) = B_{2,3}(0) = B_{3,3}(0) = B_{4,3}(0) = 0$

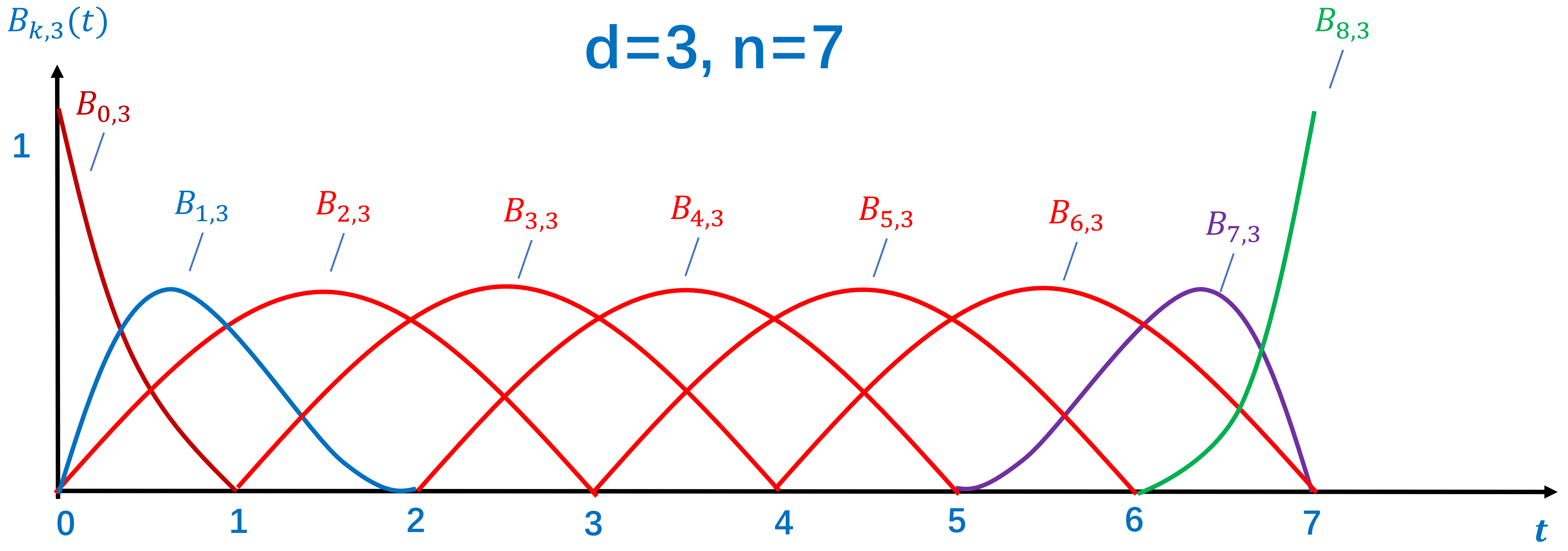
$B_{4,3}(1) = 1$，　$B_{1,3}(1) = B_{2,3}(1) = B_{3,3}(1) = B_{0,3}(1) = 0$

曲线通过端点



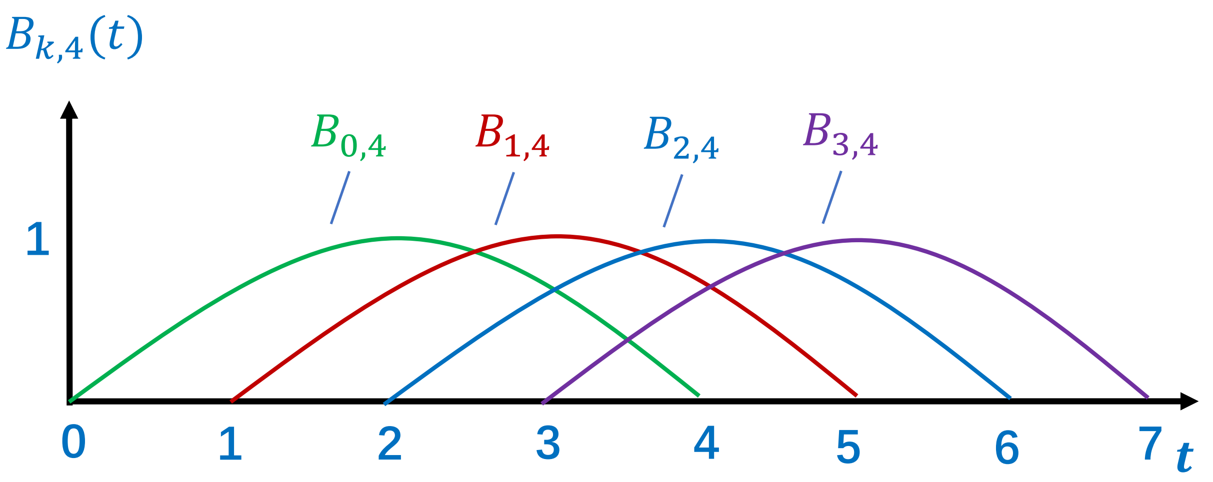
四、B-样条曲线

- 4、开放均匀B-样条（open-uniform B-spline ）



四、B-样条曲线

- 5、混合函数的特点



$\boxed{B_{k,d}(t),\quad k=0,1,2\cdots n}$

d=4, n=3

  - 共有n+d+1个节点构成节点矢量，分成n+d个小区间；
  - 每一个混合函数$B_{k,d}(t)$跨越d个小区间，从t_k开始；
  - 曲线在$[t_{d-1},t_{n+1}]$ 区间定义，共有n+1个混合函数；
  - 每一段曲线只与d个控制点有关；
  - $B_{k,d}(t)$是d-1次多项式
  - 权性：

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} B_{k,d}(t) \equiv 1 \qquad k=0,1,2\cdots n\;;}$$

$t \in [t_{d-1},t_{n+1}]$

四、B-样条曲线

- 6、B-样条曲线的性质
  - 连续性：如果由n+1个控制点，则曲线由n+1个混合函数描述，每一个混合函数的作用区间为$[t_k, t_{k+d}]$,曲线是d-1次的，且C^{d-2}连续;
  - 局部性：t的定义域根据节点矢量中的n+d+1个值划分成n+d个子区间，每个子区间上的曲线受d个控制点影响;
  - 定义域：$t \in [t_{d-1}, t_{n+1}]$;
  - 几何不变性：$p(t)$的形状与坐标系的选择无关，混合函数是节点矢量的函数。

四、B-样条曲线

- 6、B-样条曲线的性质

一个类比：小波与B-样条都是基函数的值在局部不为零

$$H_8=\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\1&-1&-1&1&-1&1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$H_8=\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\\sqrt{2}&\sqrt{2}&-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2}&\sqrt{2}&-\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\2&-2&0&0&0&0&0&0\\0&0&2&-2&0&0&0&0\\0&0&0&0&2&-2&0&0\\0&0&0&0&0&0&2&-2\end{bmatrix}$$

五、曲面的参数表示

- 1、定义：一组正交的曲线可以构成一个曲面，曲面是表示物体表面的直接方法

非参数：

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

参数：

$$x(u,v) = a_x u + b_x v + c_x$$

$$y(u,v) = a_y u + b_y v + c_y$$

$$z(u,v) = a_z u + b_z v + c_z$$

$$x(u,v) = Rcosucosv$$

$$y(u,v) = Rcosusinv$$

$$z(u,v) = Rsinu$$

$$\boxed{p(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]}$$

$$\boxed{p(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij} u^i v^j \qquad u,v \in [0,1]}$$

五、曲面的参数表示

- 2、术语

角点：u,v=0和1的点。有$p(0,0)$、$p(0,1)$、$p(1,0)$、$p(1,1)$，记为：p_{00}、p_{01}、p_{10}、p_{11}

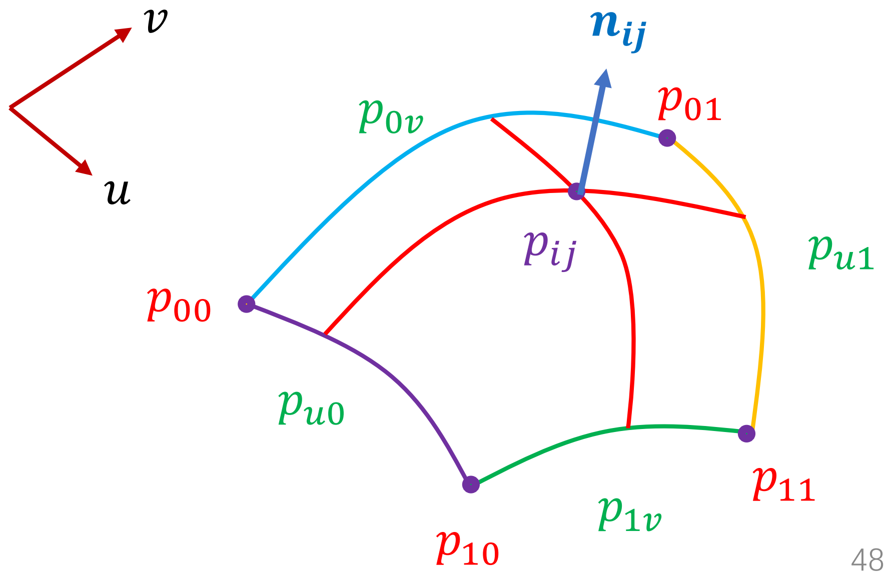
边角线：u,v=0或1的线。有$p(u,0)$、$p(u,1)$、$p(0,v)$、$p(1,v)$，记为：p_{u0}、p_{u1}、p_{0v}、p_{1v}

任一点：$p(u_i,v_j)$，记为：p_{ij}。

切矢：$\frac{\partial p_{ij}}{\partial u}$、$\frac{\partial p_{ij}}{\partial v}$，记为：$p_{ij}^u$、$p_{ij}^v$。

扭矢：$\frac{\partial^2 p_{ij}}{\partial u \partial v}$、$\frac{\partial^2 p_{ij}}{\partial v \partial u}$，记为：$p_{ij}^{uv}$、$p_{ij}^{vu}$。

法矢：$n_{ij} = \frac{p_{ij}^u \times p_{ij}^v}{\left|p_{ij}^u \times p_{ij}^v\right|}$。



五、曲面的参数表示

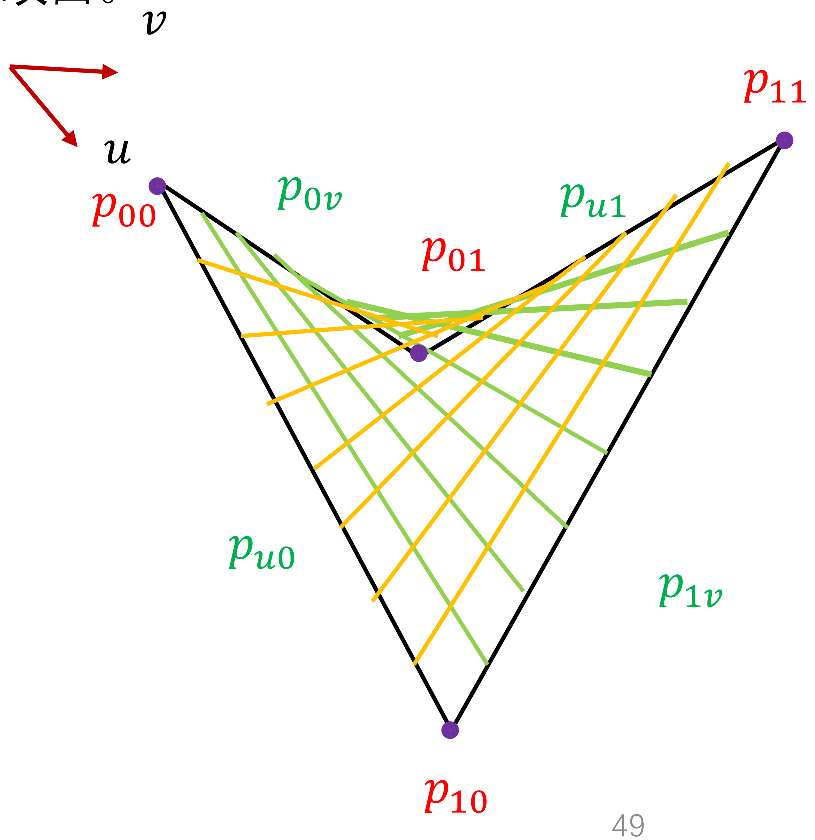
- 3、双线性曲面

$p(u,v)$对u、v两个参数都是线性的，曲面由两族直线交织而成，是一直纹面。

$$\boxed{p(u,v)=(1-u)(1-v)p_{00}+(1-u)vp_{01}+(1-v)up_{10}+uvp_{11}}$$

$$=\begin{bmatrix}1-u & v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{00} & p_{01}\\ p_{10} & p_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix} \qquad u,v\in[0,1]$$

一个类比：双线性曲面与双线性插值



五、曲面的参数表示

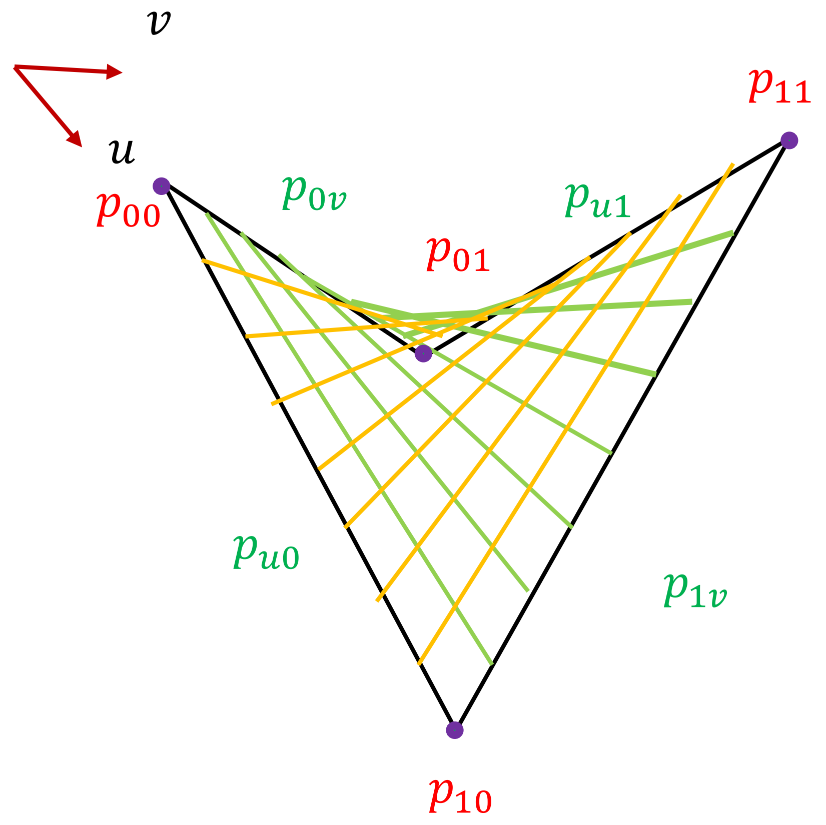
- 3、双线性曲面

边角线：

$$\begin{cases} u=0: \ p_{ov}=(1-v)p_{00}+vp_{01} \\ u=1: \ p_{1v}=(1-v)p_{10}+vp_{11} \\ v=0: \ p_{u0}=(1-u)p_{00}+up_{10} \\ v=1: \ p_{1v}=(1-v)p_{01}+vp_{11} \end{cases}$$

任一线：

$$\begin{cases} u=u_i: \ p_{u_i,v}=(1-v)p_{u_i,0}+vp_{u_i,1} \\ v=v_j: \ p_{u,v_j}=(1-u)p_{0,v_j}+up_{1,v_j} \end{cases}$$



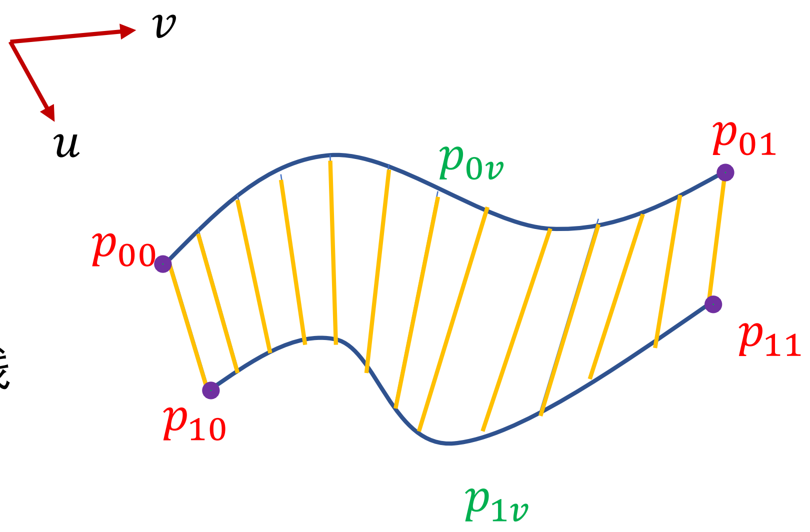
五、曲面的参数表示

- 4、单线性曲面

$p(u,v)$关于u或v一个参数是线性的，曲面由两条边界和一族直线构造的曲面，也是一直纹面。

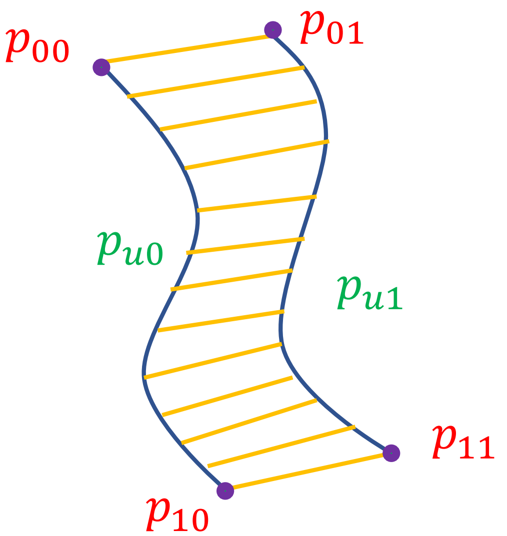
u是线性的：$\boxed{p(u,v)=(1-u)p_{0v}+up_{1v}}$

当$v=v_j$时：$p_{u,v_j}=(1-u)p_{0,v_j}+up_{1,v_j}$是一直线



v是线性的：$\boxed{p(u,v)=(1-v)p_{u0}+vp_{u1}}$

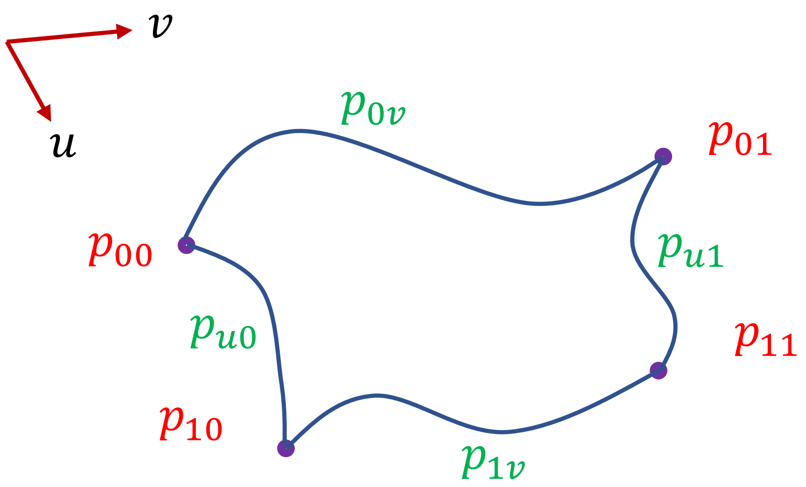
当$u=u_i$时：$p_{u_i,v}=(1-v)p_{u_i,0}+vp_{u_i,1}$是一直线



五、曲面的参数表示

- 5、Coons曲面

由两个单线性曲面和一个双线性曲面组合而成。



如果:

$$p_1(u,v)=(1-u)p_{0v}+up_{1v}$$

$$p_2(u,v)=(1-v)p_{u0}+vp_{u1}$$

$$p_3(u,v)=(1-u)(1-v)p_{00}+(1-u)vp_{01}+(1-v)up_{10}+uvp_{11}$$

则:

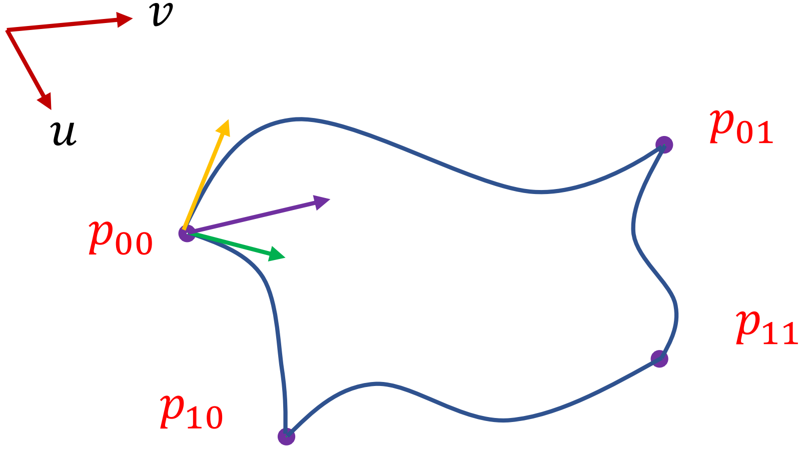
$$\boxed{p(u,v)=p_1(u,v)+p_2(u,v)-p_3(u,v)}$$

五、曲面的参数表示

- 6、Hermit曲面

已知4个端点及其8个切矢和4个扭矢：

$$\begin{cases} p_{00}、p_{01}、p_{10}、p_{11} \\ p_{00}^{u}、p_{01}^{u}、p_{10}^{u}、p_{11}^{u} \\ p_{00}^{v}、p_{01}^{v}、p_{10}^{v}、p_{11}^{v} \\ p_{00}^{uv}、p_{01}^{uv}、p_{10}^{uv}、p_{11}^{uv} \end{cases}$$



构造一个三次曲面：

$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}a_{ij}u^{i}v^{j} \qquad u,v\in[0,\quad 1]$$

$$=\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{00} & a_{01} & a_{20} & a_{03}\\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^3\\ v^2\\ v\\ 1\end{bmatrix}=UAV^{T}$$

求解A

五、曲面的参数表示

- 6、Hermit曲面

求解A $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} p(u,v) &= F(u)BF^T(v) \\ &= UMBM^TV^T \end{aligned}$$

$$p(u,v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{00}^v & p_{01}^v \\ p_{10} & p_{11} & p_{10}^v & p_{11}^v \\ p_{00}^v & p_{01}^v & p_{00}^{uv} & p_{01}^{uv} \\ p_{10}^v & p_{11}^v & p_{10}^{uv} & p_{11}^{uv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

五、曲面的参数表示

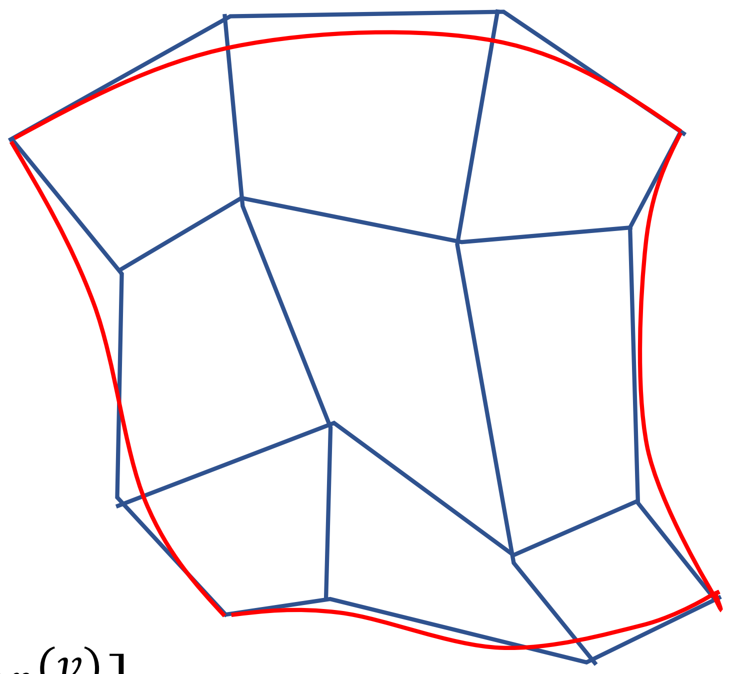
- 7、Bezier曲面

两族Bezier曲线的交织：

$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}p_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v) \qquad u,v\in[0,1]$$

$$=[B_{0,m}(u)\quad B_{1,m}(u)\quad \cdots \quad B_{m,m}(u)]\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m0} & p_{m1} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{0,n}(v) \\ B_{1,n}(v) \\ \vdots \\ B_{m,n}(v) \end{bmatrix}$$

$$=UMBM^{T}V^{T}$$



五、曲面的参数表示

- 7、Bezier曲面

当m=n=1时：

$$\boxed{p(u,v)=(1-u)(1-v)p_{00}+(1-u)vp_{01}+(1-v)up_{10}+uvp_{11}}$$ —— 双线性曲面

当m=n=3时：

$$p(u,v)=\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03}\\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^3\\ v^2\\ v\\ 1\end{bmatrix}$$

五、曲面的参数表示

- 8、B-样条曲面

两族Bezier曲线的交织:

$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}p_{ij}B_{i,k}(u)B_{j,l}(v) \qquad u,v\in[t_{min},t_{max}]$$

均匀三次B-样条曲面:

$$p(u,v)=\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03}\\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1 & 1\\ 3 & -6 & 0 & 4\\ -3 & 3 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^3\\ v^2\\ v\\ 1\end{bmatrix}$$

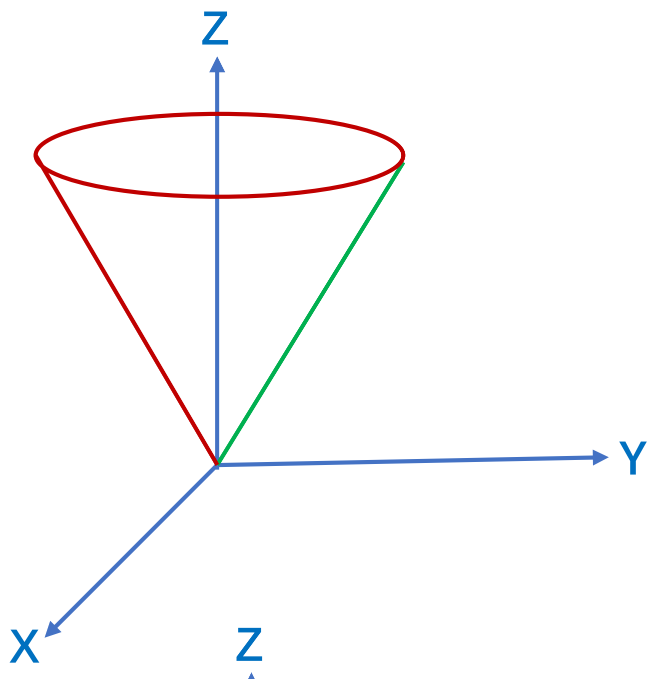
五、曲面的参数表示

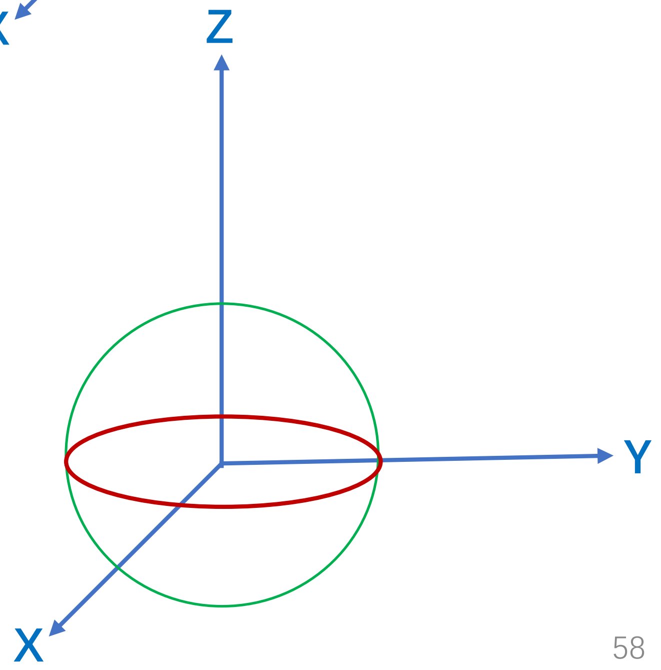
- 9、旋转曲面

如果Y-Z平面上的曲线为: $\begin{cases} y = y(u) \\ z = z(u) \end{cases}$

该曲线绕Z轴旋转，得到的旋转面为 $\begin{cases} x = y(u)cosv \\ y = y(u)sinv \\ z = z(u) \end{cases}$

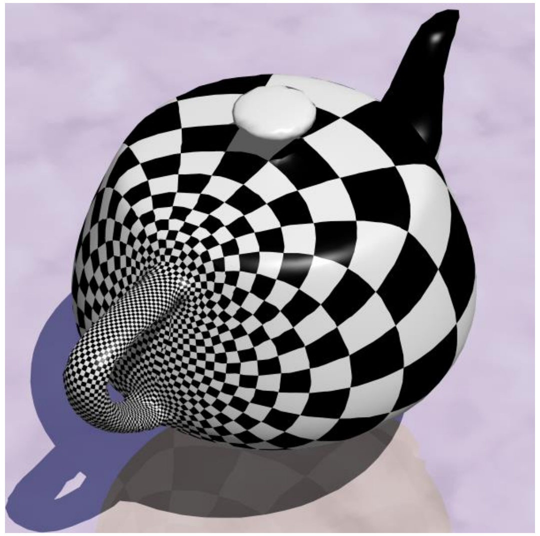
eg1: 球面: $\begin{cases} y = Rcosu \\ z = Rsinu \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = Rcosu\ cosv \\ y = Rcosu\ sinv \\ z = Rsinu \end{cases}$





五、曲面的参数表示

- 9、旋转曲面



eg2: 球面: Newell茶壶。10个控制点构成三段Bezier曲线，
其中3、4、5点共线，6、7、8点共线。

y	1.4	1.3375	1.4375	1.5	1.75	2	2	2	1.5	1.5
z	2.25	2.38125	2.38125	2.25	1.725	1.2	0.75	0.3	0.075	0

$$y = y(u)$$

$$z = z(u)$$

$$x = y(u)cosv$$

$$y = y(u)sinv$$

$$z = z(u)$$

The End