第三章图元生成

一、概述



图元是各种图形的组成元素,通用图像系统中的图元有点、圆、椭圆、区域等,图元的属性有线宽、线型、填充模式等。在栅格图形系统中,图元的生成算法就是确定图元中每一个点在帧缓存中的位置,并填写其亮度(颜色)。图元的生成算法要求生成的图形是连通的、快速的.

最基本的图元:点的生成: setpixel(x,y);

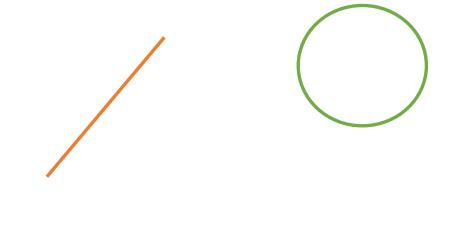
setcolor(c);

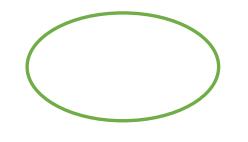
一、概述

• 连通: 8连通



• 快速: 无乘法、无浮点运算







• 1、数学描述

已知端点坐标: p_1 : (x_1,y_1) , p_2 : (x_2,y_2) , 绘制一条从 p_1 到 p_2 的直线。

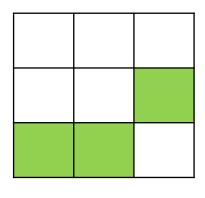
$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1}{x_2 - x_1}$$
$$= mx + b$$

要求:八连通,无乘法运算,无浮点运算

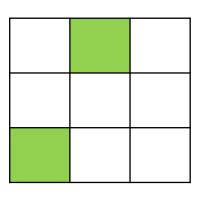
• 1、数学描述

```
for(x=x1,x<x2.,x++)
{
    y=round(mx+b);
    setpixel(x,y);
}
```

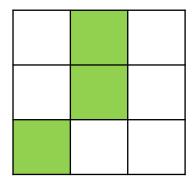
存在问题: 有乘法运算, 有浮点运算, 不能保证8连通



|m| < 1, x++



|m| > 1, x++



|m| > 1, y++

- 2、DDA算法(Digital Differential Analyzer)
 - 思路: 消除乘法

$$y_k = mx_k + b$$

$$y_{k+1} = m(x_{k+1}) + b$$

$$y_{k+1} - y_k = m$$

$$y_{k+1} = y_k + m$$

• 2、DDA算法(Digital Dirrerential Analyzer)

- 算法
- 特点:
 - 无乘法运算
 - 有浮点运算,
 - 误差累积。

```
step1: 判别x_1, x_2大小,令x_1 < x_2;
 step2: 判别|m|的大小,设置k=0;
 step3: 如果|m|<1,以x为步长, x_{k+1} = x_k + 1, 计算y_{k+1};
                    y_{k+1} = round(y_k + m);
                    setpixel (x_{k+1}, y_{k+1});
              如果|m| > 1,以y为步长, y_{k+1} = y_k + 1; 计算
x_{k+1}:
                    x_{k+1} = round(x_k + \frac{1}{m});
                    setpixel (x_{k+1}, y_{k+1});
```

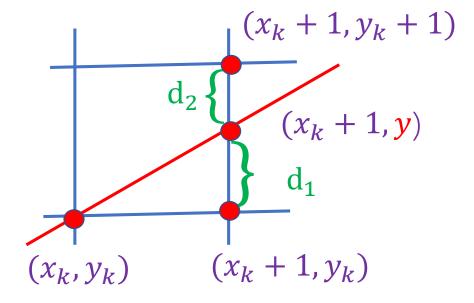
Step4: k = k + 1; 回到step3; 直到 $y_{k+1} = y_2$ 或者 $x_{k+1} = x_2$ 。

3、Bresenham算法(以 $x_1 < x_2$, |m| < 1为例)

• 思路: y_{k+1} 只有两种可能,增1或者不变,即:

$$y_{k+1} = \begin{cases} y_k \\ y_k + 1 \end{cases}$$

• 定义:
$$d_1 = y - y_k$$
$$d_2 = y_k + 1 - y$$
$$y = m(x_k + 1) + b$$



• 判別参数: $p_k = \Delta x(d_1 - d_2)$

$$y_{k+1} = \begin{cases} y_k & p_k < 0 \\ y_k + 1 & p_k > 0 \end{cases}$$
 如果 p_k 的计算只有整数和加法运算,则该直线算法可以避免乘法和浮点计算。

二、直线的牛成算法

3、Bresenham算法(以 $x_1 < x_2$, |m| < 1为例)

$$p_{k} = \Delta x(d_{1} - d_{2})$$

$$d_{1} - d_{2} = 2y - 2y_{k} - 1 = 2m(x_{k} + 1) - 2y_{k} + 2b - 1$$
其中: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
则: $p_{k} = 2\Delta y \cdot x_{k} - 2\Delta x \cdot y_{k} + c$ 其中 $c = 2\Delta y + \Delta x(2b - 1)$

$$p_{k+1} = 2\Delta y \cdot (x_{k} + 1) - 2\Delta x \cdot y_{k+1} + c$$

$$p_{k+1} - p_{k} = 2\Delta y - 2\Delta x(y_{k+1} - y_{k})$$
当 $p_{k} < 0$, $f_{k} = y_{k} + 1$, $f_{k+1} = y_{k} + 2\Delta y - 2\Delta x$
其中: $f_{k} = f_{k} + 2\Delta y - 2\Delta x$

• 3、Bresenham算法(以 $x_1 < x_2$, |m| < 1为例)

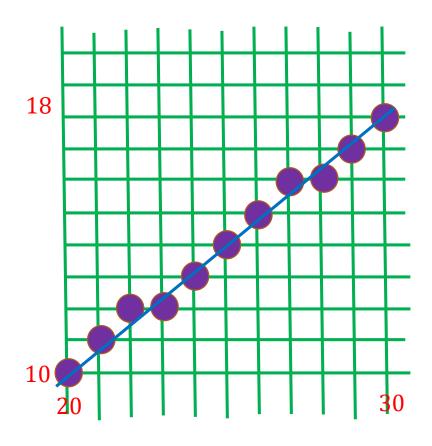
• 算法

```
step1: 计算\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1, 2\Delta y step2: 设置k = 0; p_0 = 2\Delta y - \Delta x step3: 对于任意的k, if p_k < 0, p_{k+1} = p_k + 2\Delta y; y_{k+1} = y_k; else p_{k+1} = p_k + 2\Delta y - 2\Delta x; y_{k+1} = y_k + 1; setpixel (x_k + 1, y_{k+1}); step4: k = k + 1; x_k = x_k + 1; 回到step3, 直到 x_k = x_2.
```

• 特点: 无乘法、无浮点运算

- 3、Bresenham算法(以 $x_1 < x_2$, |m| < 1为例)
 - 例子:已知: $p_1(20,10)$, $p_2(30,18)$,绘制一条从 p_1 到 p_2 的直线。

k	p_k	x_{k+1}	y_{k+1}
0	6	21	11
1	2	22	12
2	-2	23	12
3	14	24	13
4	10	25	14
5	6	26	15
6	2	27	16
7	-2	28	16
8	14	29	17
9	10	30	18

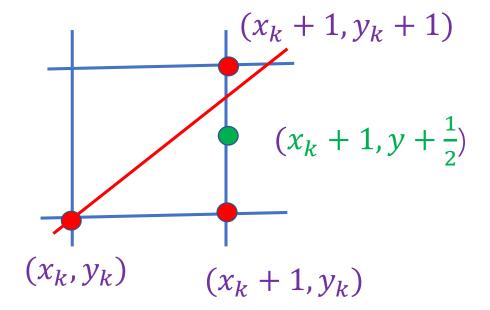


• 4、中点算法(Mid Point Line Algrithm)

• 思路: 如果中点 $(x_k + 1, y_k + \frac{1}{2})$ 在线下,

则: $y_{k+1} = y_k + 1$

否则: $y_{k+1} = y_k$



• 如果一个判别参数 p_k 可以不用浮点和乘法运算就可以判断中点 ($x_k + 1, y_k + \frac{1}{2}$) 在线上或线下,则该直线算法可以避免乘法和浮点计算。

• 4、中点算法(Mid Point Line Algrithm)

• 判别参数 p_k 的定义:

$$a = y_2 - y_1$$

 $b = x_1 - x_2$
 $c = y_1 x_2 - x_1 y_2$

• 4、中点算法(Mid Point Line Algrithm)

$$p_0 = f_{line} (x_1 + 1, y_1 + \frac{1}{2}) = a + 0.5b$$

- 算法(略,参见Bresenham算法)
- 特点: 同Bresenham算法

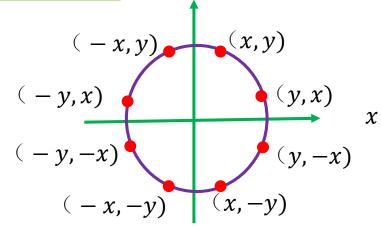
- 1、数学描述
 - 已知圆心 (0, 0) 和半径R, 绘制一个圆: $x^2 + y^2 = R^2$

存在问题: 有根号运算,

不能保证8连通

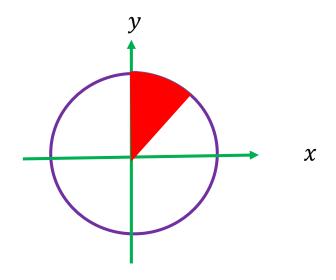
 $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$

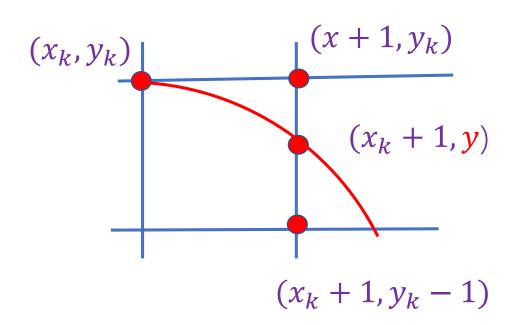
• 八分之一对称



- 2、Bresenham算法
 - 思路: 在八分之一圆上有 $|\mathbf{m}| < 1$, $x_{k+1} = x_k + 1$, y_{k+1} 只有两种可能,

减1或者不变,即:
$$y_{k+1} = \begin{cases} y_k \\ y_k - 1 \end{cases}$$

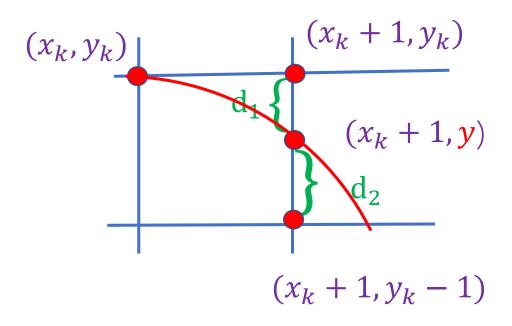




• 2、Bresenham算法

• 原理:
$$y_{k+1} = \begin{cases} y_k & d_1 < d_2 \\ y_k - 1 & else \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = y_k - y \\ d_2 = y - y_k + 1 \\ y = \sqrt{R^2 - (x_k + 1)^2} \end{cases}$$



• 2、Bresenham算法

• 判别参数 p_k 的计算

$$p_k = d_1' - d_2' = y_k^2 - 2y^2 + (y_k - 1)^2$$

$$= 2y_k^2 - 2y_k + 2(x_k + 1)^2 - 2R^2 + 1$$

$$p_{k+1} = 2y_{k+1}^2 - 2y_{k+1} + 2(x_k + 2)^2 - 2R^2 + 1$$

$$p_{k+1} - p_k = \begin{cases} 4x_k + 6 & p_k < 0 & y_{k+1} = y_k \\ 4(x_k - y_k) + 10 & else & y_{k+1} = y_k - 1 \end{cases}$$

初始点
$$(0, R)$$
 $p_0 = R^2 - 2(R^2 - 1) + (R - 1)^2$
$$p_0 = 3 - 2R$$

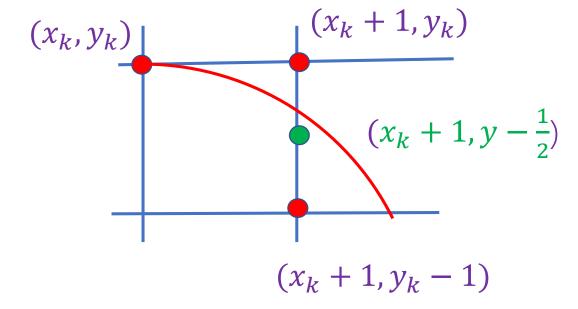
- 算法(略,参见中点算法)
- 特点: 无浮点运算

• 3、中点算法

• 思路: 如果中点 $(x_k + 1, y_k - \frac{1}{2})$ 在圆内,

则: $y_{k+1} = y_k$

否则: $y_{k+1} = y_k - 1$



• 3、中点算法

• 判别参数 p_k 的定义

定义: 圆函数: $f_{circle}(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$

$$f_{circle}(x,y) = \begin{cases} <0 & (x,y)$$
在圆内
$$=0 & (x,y)$$
在圆上
$$>0 & (x,y)$$
在圆外

定义判别参数为中点的圆函数值: $p_k = f_{circle} \left(\mathbf{x}_k + 1, y_k - \frac{1}{2} \right)$

$$\begin{cases} 如果p_k < 0, 中点在圆内, y_{k+1} = y_k \\ 否则, 中点在圆外, y_{k+1} = y_k - 1 \end{cases}$$

• 3、中点算法

$$p_k = f_{circle}\left(\mathbf{x}_k + 1, y_k - \frac{1}{2}\right) = (x_k + 1)^2 + (y_k - \frac{1}{2})^2 - R^2$$

$$p_{k+1} = f_{circle}\left(\mathbf{x}_{k+1} + 1, y_{k+1} - \frac{1}{2}\right) = (x_k + 2)^2 + (y_{k+1} - \frac{1}{2})^2 - R^2$$

• 判别参数 p_k 的计算:

$$p_{k+1} - p_k = \begin{cases} 2x_k + 3 & p_k < 0, \text{ 中点圆内, } y_{k+1} = y_k \\ 2x_k - 2y_k + 5 & else, \text{ 中点在圆外, } y_{k+1} = y_k - 1 \end{cases}$$

$$p_0 = f_{circle} (1, R - \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} - R \approx 1 - R$$

• 3、中点算法

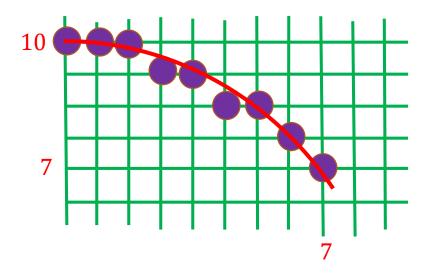
- 算法
- 特点: 无浮点运算

```
step1: 设置 (x_0, y_0) = (0, R)
step2: 设置k = 0; p_0 = 1 - R
step3:对于任意的k,
       if p_k < 0, setpixel(x_k+1, y_k)及其7个对称点,并且计算:
                                 p_{k+1} = p_k + 2x_k + 3;
              x_{k+1} = x_k + 1, \quad y_{k+1} = y_k;
           setpixel(x_k+1, y_k-1)及其7个对称点 ,并且计算:
else
                                 p_{k+1} = p_k + 2x_k - 2y_k + 5;
               x_{k+1} = x_k + 1, \quad y_{k+1} = y_k - 1;
step4: k = k + 1, 回到step3, 直到 x_k = y_k.
```

• 3、中点算法

• 例子: 生成半径为10的圆

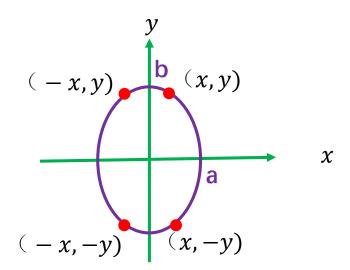
k	p_k	x_{k+1}	y_{k+1}
0	-9	1	10
1	-6	2	10
2	-1	3	10
3	6	4	9
4	-3	5	9
5	8	6	8
6	5	7	7



- •1、数学描述
 - 已知中心(0,0),长半轴a,短半轴为b,绘制一个椭圆:

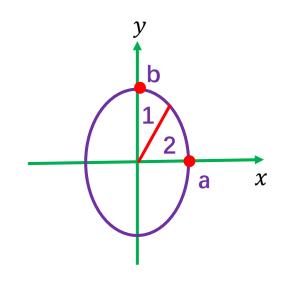
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

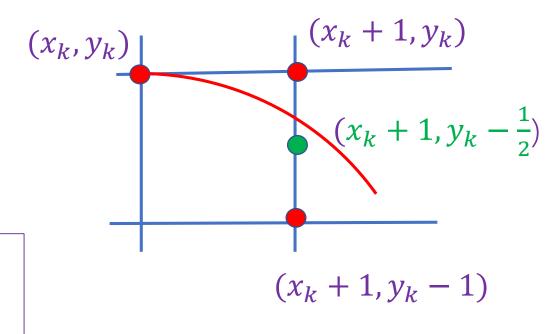
• 四分之一对称



- 2、中点算法
 - 思路: 将第一象限的四分之一椭圆分成两个区域
 - 在区域1内有 $|\mathbf{m}|$ <1, $x_{k+1} = x_k + 1$, y_{k+1} 只有两种可能,减1或者不变,即:

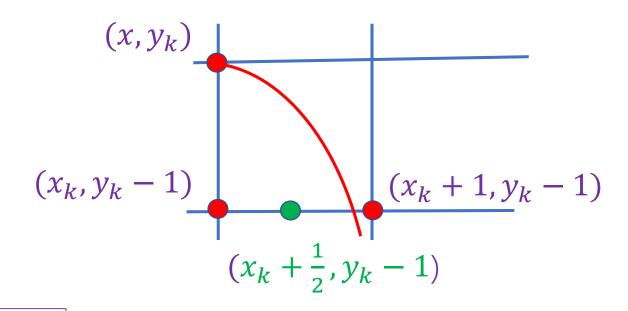
$$y_{k+1} = \begin{cases} y_k & \text{中点}(x_k + 1, y_k - \frac{1}{2}) \text{ 在椭圆内} \\ y_k - 1 & else \end{cases}$$





• 2、中点算法

• 在区域2内有 $|\mathbf{m}| > 1$, $y_{k+1} = y_k - 1$, x_{k+1} 只有两种可能,曾1或者不变,即



$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k & \text{中点} (x_k + \frac{1}{2}, y_k - 1) \text{ 在椭圆外} \\ x_k + 1 & else \end{cases}$$

$$m = \frac{dy}{dx} = -\frac{2b^2x}{2a^2y}$$

|m| = 1时,有: $b^2 x = a^2 y$

• 2、中点算法

• 区域1判别参数 p_k 的定义 \rightarrow

定义: 椭圆函数: $f_{ellipse}(x,y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$

$$f_{ellipse}(x,y) = \begin{cases} < 0 & (x,y)$$
在椭圆内 $= 0 & (x,y)$ 在椭圆上 $= 0 & (x,y)$ 在椭圆外

定义判别参数为中点的椭圆函数值: $p_k = f_{ellipse} \left(x_k + 1, y_k - \frac{1}{2} \right)$

$$\begin{cases} \text{如果}p_k < 0, \text{ 中点在椭圆内, } y_{k+1} = y_k \\ \text{否则, 中点在椭圆外, } y_{k+1} = y_k - 1 \end{cases}$$

四、椭圆的牛成算法

• 3、中点算法

 $p_{k} = f_{ellipse}\left(x_{k} + 1, y_{k} - \frac{1}{2}\right) = b^{2}(x_{k} + 1)^{2} + a^{2}(y_{k} - \frac{1}{2})^{2} - a^{2}b^{2}$ $p_{k+1} = f_{ellipse}\left(x_{k} + 2, y_{k+1} - \frac{1}{2}\right) = b^{2}(x_{k} + 2)^{2} + a^{2}(y_{k+1} - \frac{1}{2})^{2} - a^{2}b^{2}$

初始点 (0, b):
$$p_0 = f_{ellipse} (1, b - \frac{1}{2}) = b^2 - a^2 b + \frac{1}{4} a^2$$

• 2、中点算法

• 区域2判别参数 q_k 的定义 \dashv

定义: 椭圆函数: $f_{ellipse}(x,y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$

$$f_{ellipse}(x,y) = \begin{cases} < 0 & (x,y)$$
在椭圆内 $= 0 & (x,y)$ 在椭圆上 $= 0 & (x,y)$ 在椭圆下

定义判别参数为中点的椭圆函数值: $q_k = f_{ellipse} (x_k + \frac{1}{2}, y_k - 1)$

$$\begin{cases} \text{如果}q_k < 0, \text{ 中点在椭圆内,} & x_{k+1} = x_k + 1 \\ & \text{否则, 中点在椭圆外,} & x_{k+1} = x_k \end{cases}$$

• 3、中点算法

• 区域2判别参数 p_k 的计算: •

$$q_k = f_{ellipse}\left(x_k + \frac{1}{2}, y_k - 1\right) = b^2(x_k + \frac{1}{2})^2 + a^2(y_k - 1)^2 - a^2b^2$$

$$q_{k+1} = f_{ellipse}\left(x_{k+1} + \frac{1}{2}, y_k - 2\right) = b^2(x_{k+1} + \frac{1}{2})^2 + a^2(y_k - 2)^2 - a^2b^2$$

$$q_{k+1} - q_k$$

$$= \begin{cases} 2b^2x_k - 2a^2y_k + 2b^2 + 3a^2 \\ -2a^2y_k + 3a^2 \end{cases} q_k < 0, \text{ 中点椭圆内, } x_{k+1} = x_k + 1$$

$$else, \text{ 中点在椭圆外, } x_{k+1} = x_k$$

初始点:区域1的终点,记为 (x_0,y_0)

$$q_0 = f_{ellipse} (x_0 + \frac{1}{2}, y_0 - 1)$$

• 3、中点算法

• 算法

```
step1: 设置 (x_0, y_0) = (0, b)
step2: 设置k = 0; p_0 = b^2 - a^2b - \frac{1}{4}a^2
step3: 对于任意的k,:
       if p_k < 0, setpixel (x_k+1, y_k) 及其4个对称点;
                                  p_{k+1} = p_k + 2b^2x_k + 3b^2;
                                 y_{k+1} = y_k;
       else setpixel (x_k+1, y_k-1) 及其4个对称点;
               p_{k+1} = p_k + 2b^2x_k - 2a^2y_k + 3b^2 + 2a^2;
               y_{k+1} = y_k - 1;
  step4: k = k+1; x_{k+1} = x_k + 1; 回到step3直到 b^2 x_{k+1} \ge a^2 y_{k+1}。
```

• 3、中点算法

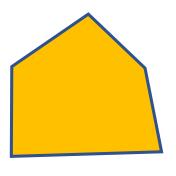
• 算法

```
step5: 设置 (x_0, y_0) = (x_{k+1}, y_{k+1})
step6: 设置k=0; q_0=b^2(x_k+\frac{1}{2})^2+a^2(y_k-1)^2-a^2b^2
step7: 对于任意的k,
        if q_k < 0, setpixel (x_k+1, y_k-1) 及其4个对称点;
                                  q_{k+1} = q_k + 2b^2x_k - 2a^2y_k +
2b^2 + 3a^2:
                                 x_{k+1} = x_k + 1;
                 setpixel(x_k, y_k - 1)及其4个对称点;
       else
                                 q_{k+1} = q_k + -2a^2y_k + 3a^2;
               \chi_{k+1} = \chi_k;
```

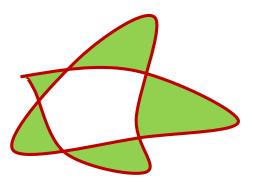
五、区域填充

•1、问题描述

- 区域: 一组相邻而又相连的的像素, 具有相同的属性。
- 区域填充: 根据边或边界点生成区域的过程;
- 方法:
 - 扫描转换法: 按扫描线顺序确定每个点是否在区域内——边定义的多边形;
 - 种子填充法: 已知种子点, 遍历区域内与种子点相连的点——边界点定义的多边形



边定义的多边形



边界点定义的多边形

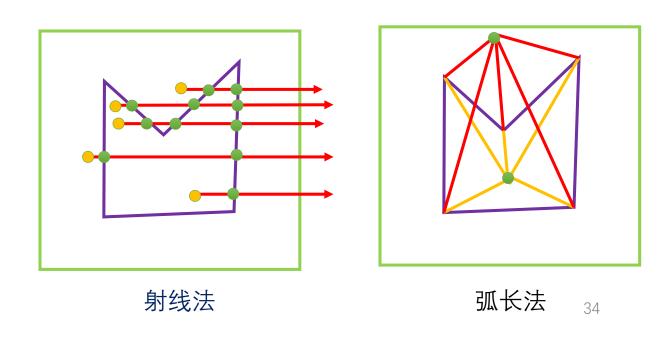
五、区域填充

• 2、扫描线转换法

• **简单测试法** 射线法:交点数为<mark>奇数</mark>,被测点在区域内;交点数为<mark>偶数</mark>,被测点在区域外;

弧长法: $\sum \theta = 2\pi$, 被测点在区域内; $\sum \theta = 0$, 被测点在区域外;

• 特点: 算法简单, 计算量大。



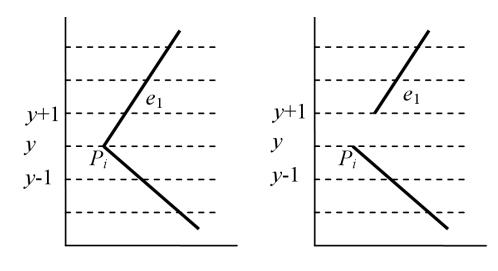
五、区域填充

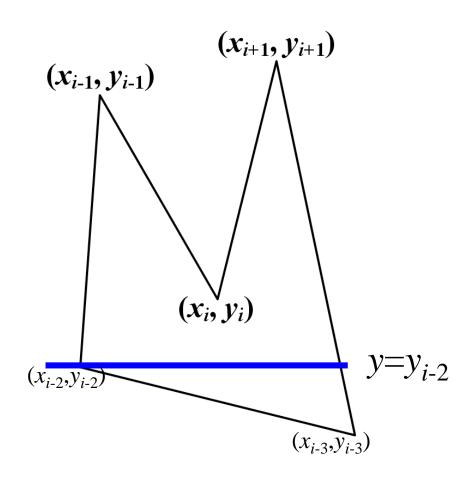
- 2、扫描线转换法
 - 扫描线算法: 求交→排序→填充
 - 思路: 空间相关性
 - 同一扫描线上的点有相关性,交点之间直接填充; 相邻扫描线上的交点有相关性,简化交点求解。
 - 奇异点:

单调变换,交点数为1(跳一格);

反转:交点数为2;

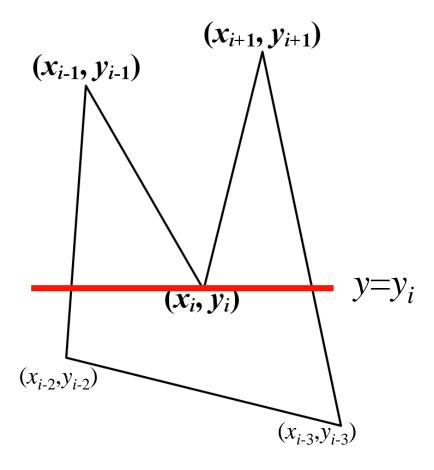
平行线:交点数为C





• 单调变换: 相邻三个顶点的y坐标满足如下条件: $(y_{i-3}-y_{i-2})(y_{i-1}-y_{i-2})<0$

即相邻三个顶点位于扫描线的两侧



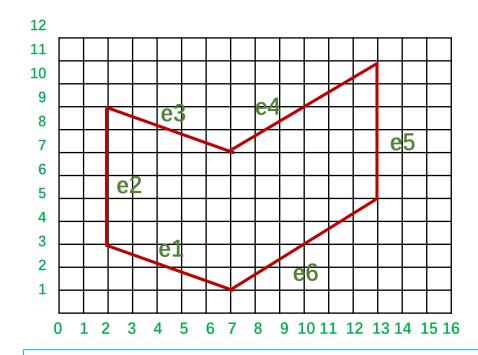
• 反转: 相邻三个顶点的y坐标满足如下条件:

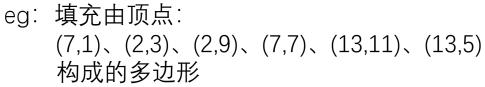
$$(y_{i-1}-y_i)(y_{i+1}-y_i) \ge 0$$

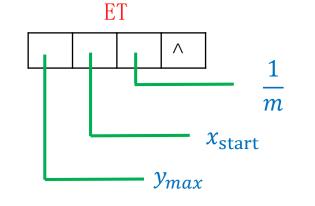
即相邻三个顶点位于扫描线的同一侧

- 2、扫描线转换法
 - 扫描线算法
 - 算法

stepl: 建立边表ET (Eage Table),记录每条 边的基本信息: y从小到大,第一次遇到一条边 的最大y值,x值,斜率的倒数以及一个指针;





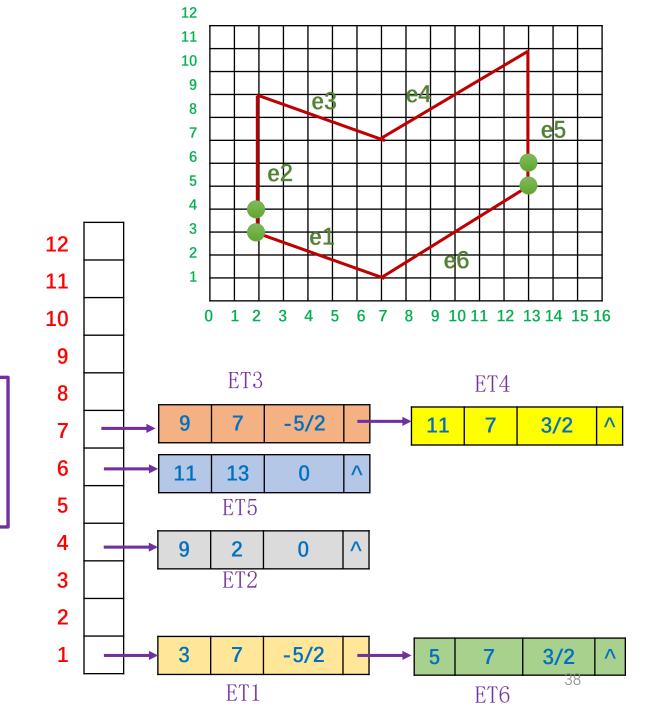




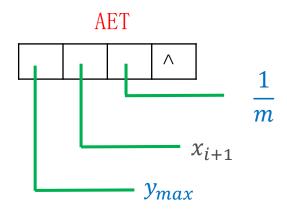


- 2、扫描线转换法
 - 扫描线算法
 - 算法

step2: 建立有序边表SET (Sorted Eage Table),以Y边从小到大建立一个链表,依次存放第一次出现的边的初始信息;



- 2、扫描线转换法
 - 扫描线算法
 - 算法

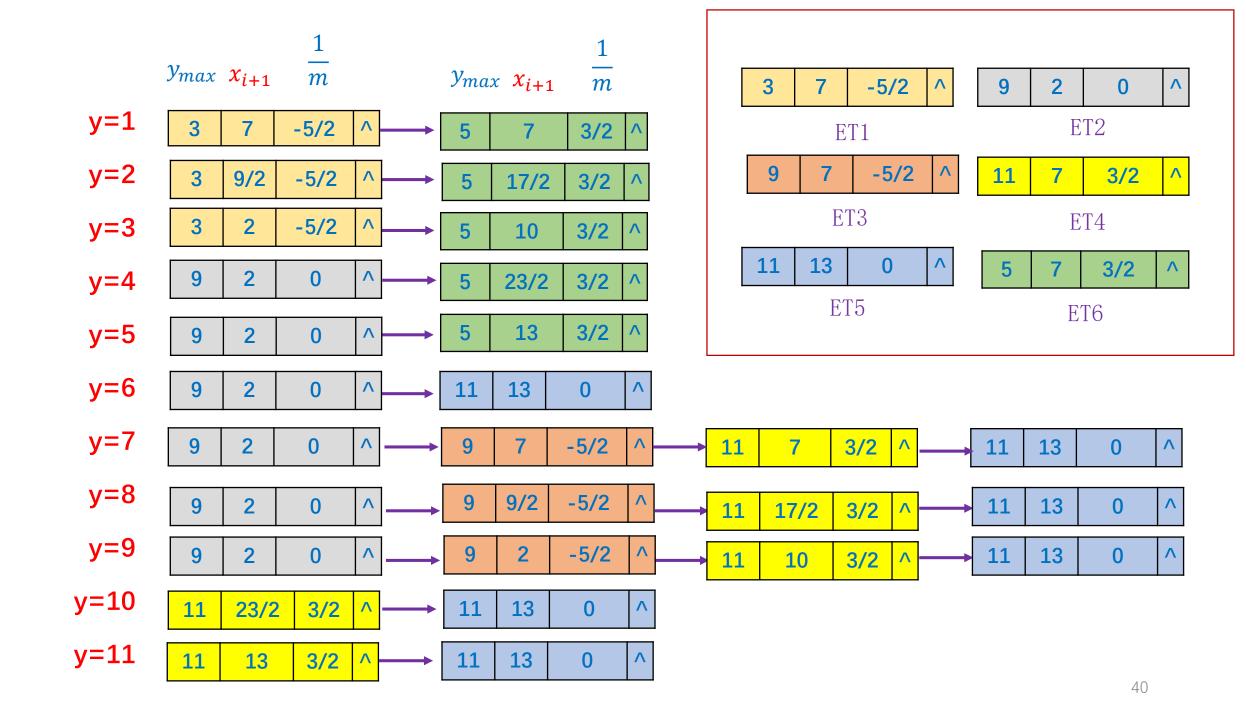


step3: 建立活性边表AET (Active Eage Table):

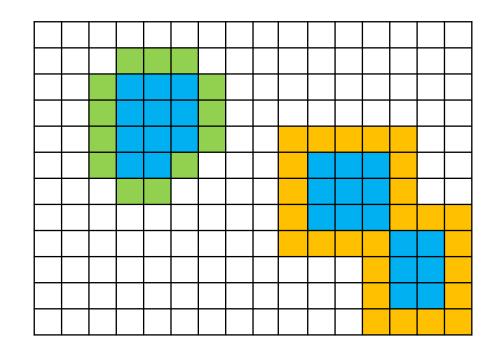
当 $y < y_{max}$ 时,保持该边,更新 x_i 值;

否则,移除该边。

Step4: 填充AET中相邻两条边的 x_{i+1} 之间的点。



- 3、种子点填充算法
 - 边界复杂的情况下,用交互方法确定种子点。如果边界是八连通的,用四方向法;如果边界是四连通的,用八方向法。



- 3、种子点填充算法
 - 边界填充算法(四连通);

stepl: 种子点如栈;

step2: 如果栈非空,

栈顶像素出栈;

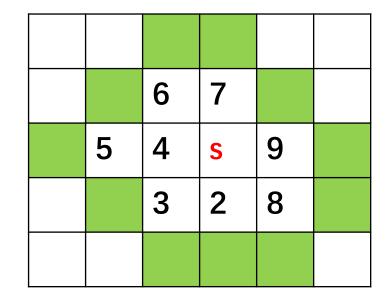
将出栈像素设置填充色;

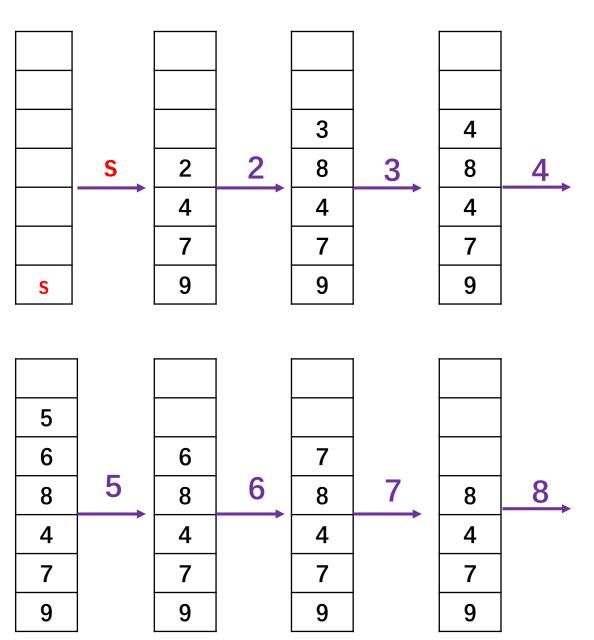
按右上左下顺序检查四邻域;

不在边界上且未填色,则入栈。

steps: 栈空结束。

- 3、种子点填充算法
 - 边界填充算法(四连通);





- 3、种子点填充算法
 - 扫描线种子点填充(漫水法);

stepl: 种子点如栈;

Step2: 如果栈非空,

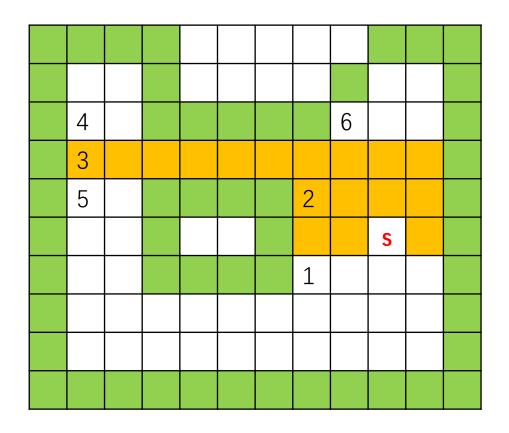
栈顶像素出栈;

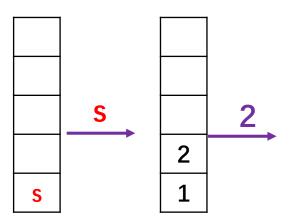
栈顶像素沿扫描线向左右填充至边界;

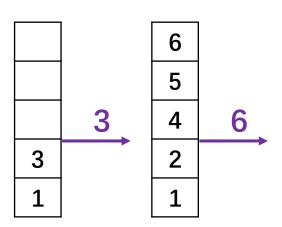
上下两行每区段最左边未填充像素入栈。

steps: 栈空结束。

- 3、种子点填充算法
 - 扫描线种子点填充 (漫水法)







扫地机器人路线

六、线型和线宽

• 1、线型



六、线型和线宽

• 2、线宽 |m| >1 水平刷 |m| <1 垂直刷 方型刷

七、字符生成

前5行:

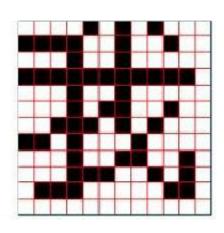
 1: 00001010 1000
 \rightarrow 0x0a 0x80

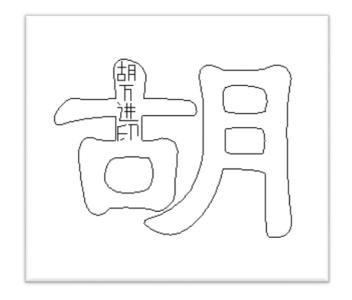
 2: 11110010 0100
 \rightarrow 0xf2 0x40

 3: 00010010 0000
 \rightarrow 0xf1 0xe0

 4: 1111111 1110
 \rightarrow 0xf1 0xe0

 5: 00010010 0000
 \rightarrow 0x12 0x00

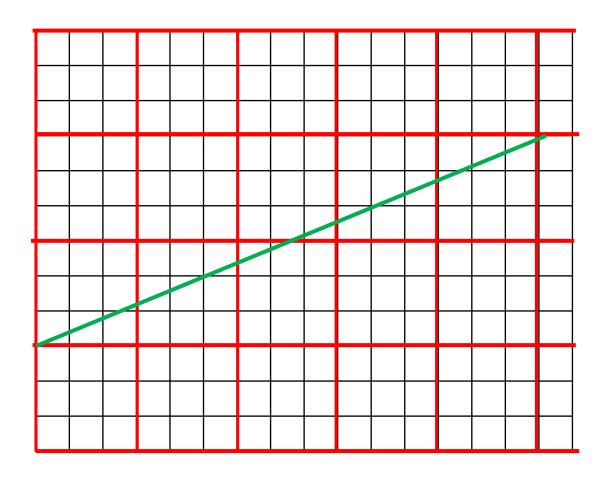




八、反走样

• 1、过取样:

把每一个像素分成若干子像素,在 子像素层绘制图形,再统计每个像 素中图形经过的子像素数目确定该 像素的亮度

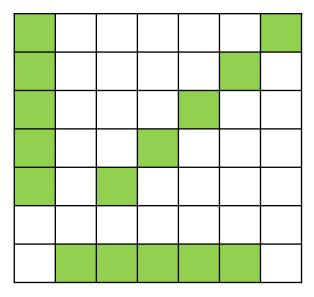


八、反走样

• 2、子像素加权

1	2	1
2	4	2
1	2	1

- 3、滤波
- 4、线亮校正



The End