



中山大學  
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

物理与天文学院

SCHOOL OF PHYSIC AND ASTRONOMY

## Finite-amplitude method for charge-changing transitions in axially deformed nuclei

M. T. Mustonen, T. Shafer, Z. Zenginerler, and J. Engel  
PHYSICAL REVIEW C 90, 024308 (2014)

10th. April 2023



Part I

引言

## 摘要

- 本文将电荷交换的有限振幅方法用于准粒子无规相位近似中，用于计算轴对称形变开壳原子核的  $\beta$  衰变允许跃迁和一级禁戒跃迁的强度函数和  $\beta$  衰变率，并在一系列球形和形变开壳原子核上测试了 Skyrme 相互作用张量项对计算结果的影响。正如同位旋标量配对相互作用一样，张量项会增加允许跃迁的  $\beta$  衰变率。

## $\beta$ 衰变的研究意义

- 在核物理、天体物理和粒子物理学科的交叉中， $\beta$  衰变是个重要的过程。快中子俘获过程发生在丰中子核中，迄今为止， $r$  过程的部分路径还不能用实验测量，所以寄希望于理论计算，通过建立理论模型来研究丰中子核的  $\beta$  衰变率。

## QRPA 的应用现状

- 目前为止，QRPA 主要用在 Skyrme 能量密度泛函中，成为处理原子核激发的主要工具。电荷交货的 Skyrme 的 QRPA 矩阵已经在球形原子核的计算中取得成功。但是当平均场的转动对称性破缺之后，两准粒子基的平均场的维度会呈量级增加，此时 QRPA 矩阵的维度太大，如果不进行截断，已经无法适应当前的计算要求。因此致力于发展一套利用迭代求解 QRPA 方程的方法，来处理模型空间较大的理论计算。

Part II

## 理论框架

电荷交换的有限振幅方法 (pnQRPA)    $\beta$  衰变半衰期   能量密度泛函

○○○

○○○

○

电荷交换跃迁是由微弱的含时外场产生的，假设该外场的角频率为  $\omega$ ，那么该含时外场（具有厄密性）为：

$$F(t) = \eta(Fe^{-i\omega t} + F^\dagger e^{i\omega t})$$

$\eta$  是个很小的参数，用于描述该外场的强度。外场算符  $F$  是一个依赖  $\omega$  的单体算符。但在准粒子表象下，其形式为：

$$F = \sum_{km} \left( F_{km}^{20} \beta_k^\dagger \beta_m^\dagger + F_{km}^{02} \beta_k \beta_m \right) + \dots$$

在描述  $\beta^-$  衰变时，在单粒子基下，单体衰变跃迁算符应表示为：

$$F = \sum_{pn} f_{pn} c_p^\dagger c_n$$

与电荷守恒的有限振幅方法 (FAM) 方法不同，电荷交换的 FAM 描述的是一个中子衰变成一个质子的行为，因此  $F$  算符不再是厄密的。因此，在静态 HFB 解中，若是中子、质子不混合，进行 Bogoliubov 变换之后，

$$F_{\pi\nu}^{20} = \sum_{pn} U_{p\pi}^* f_{pn} V_{n\nu}^*, \quad F_{\pi}^{20} = 0$$

$$F_{\pi\nu}^{02} = - \sum_{pn} V_{p\pi} f_{pn} U_{n\nu}, \quad F_{\nu\pi}^{02} = 0$$

其中， $\pi$  是质子准粒子， $\nu$  是中子准粒子。

外场的扰动会引起准粒子算符存在一个微小的变换：

$$\delta\beta_{\mu}(t) = \eta \sum_{\nu} \beta_{\nu}^{\dagger} (X_{\mu\nu}(\omega)e^{-i\omega t} + Y_{\nu\mu}^{*}(\omega)e^{i\omega t})$$

这样的振荡会引起密度矩阵元  $\rho_{pn}$ 、 $\rho_{np}$  的变化，电荷交换配对强度  $\kappa_{pn}$ 、 $\kappa_{pn}^{*}$  的变化，最终影响能量泛函  $\varepsilon(\rho, \kappa, \kappa^{*})$  的变化。单粒子哈密顿量  $h$  和配对势能  $\Delta$  也与  $\rho, \kappa^{*}$  有关：

$$h_{\pi\nu} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_{\nu\pi}}, \quad \Delta_{\pi\nu} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa_{\pi\nu}^{*}}$$

此时，FAM 方程为：

$$(E_{\pi} + E_{\nu} - \omega)X_{\pi\nu}(\omega) + \delta H_{\pi\nu}^{20}(\omega) = F_{\pi\nu}^{20}(\omega) \quad (1)$$

$$(E_{\pi} + E_{\nu} + \omega)Y_{\pi\nu}(\omega) + \delta H_{\pi\nu}^{02}(\omega) = F_{\pi\nu}^{02}(\omega) \quad (2)$$

FAM 的核心在于求解方程 (1) 和 (2) 线性系统，而非构建传统的 A、B 矩阵。

获得  $X_{\pi\nu}(\omega)$  和  $Y_{\pi\nu}(\omega)$  之后, 可以计算强度函数:

$$\frac{dB(F, \omega)}{d\omega} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} S(F; \omega)$$

其中,

$$\begin{aligned} S(F; \omega) &= \sum_{\pi\nu} [F_{\pi\nu}^{20*} X_{\pi\nu}(F; \omega) + F_{\pi\nu}^{02*} Y_{\pi\nu}(F; \omega)] \\ &= -\sum_n \left( \frac{|\langle n|F|0\rangle|^2}{\Omega_n - \omega} - \frac{|\langle n|F^\dagger|0\rangle|^2}{\Omega_n + \omega} \right) \end{aligned}$$

其中, 复频率满足  $\omega = \Omega + i\gamma$ ,  $\gamma$  描述的是 Lorentz 函数的展宽, 那么,

$$\frac{dB}{d\omega} \rightarrow \frac{\gamma}{2\pi} \sum_n \left( \frac{|\langle n|F|0\rangle|^2}{(\Omega_n - \Omega)^2 + \gamma^2} - \frac{|\langle n|F^\dagger|0\rangle|^2}{(\Omega_n + \Omega)^2 + \gamma^2} \right)$$

注意到强度函数具有对称性:

$$S(F; \omega) = -S^*(F; \omega^*)$$

总衰变率是各个跃迁强度对像空间积分的加权求和,

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\kappa} \sum_i f(E_i) B_i$$

其中,  $\kappa$  是常数, 为  $(6147.0 \pm 2.4)\text{s}$ , 像空间积分  $f(E_i)$  来源于末态轻子的动能,

$$f(E_0) = \int_1^{W_0} dW p W (W_0 - W)^2 L_0 F_0(Z, W)$$

其中,  $Z$  是子核的电荷数,  $W_0 = \frac{E_0}{m_e c^2}$ ,  $W$  是电子能量 (以电子质量为单位), 电子动量  $p \equiv \sqrt{W^2 - 1}$ , Fermi 函数  $F_0(Z, W)$  用于修正库仑势场下的轻子波函数,

$$F_{k_e}(Z, W) = [k_e(2k_e - 1)!!]^2 4^{k_e} (2pR)^{2(\gamma_{k_e} - k_e)} e^{\pi y} \frac{|\Gamma(\gamma_{k_e} + iy)|^2}{|\Gamma(\gamma_{k_e} + 1)|^2}$$

其中,  $k_e$  与放出电子的轨道角动量相关,  $\gamma_{k_e} = \sqrt{k_e^2 - (\alpha Z)^2}$ ,  $y = \frac{\alpha Z W}{p}$ ,  $R$  是原子核半径, 库仑函数  $L_0$ ,

$$L_0 \approx \frac{1}{2}(1 + \gamma_1)$$



初态原子核的基态是函数  $S(F)$  在那个能量点的留数,

$$B_n(F) = |\langle n|F|0\rangle|^2 = \text{Res}[S(F), \Omega_n]$$

这与留数的关联允许我们将  $\beta$  衰变率表示为 pnFAM 响应在复频率平面的 contour 积分。

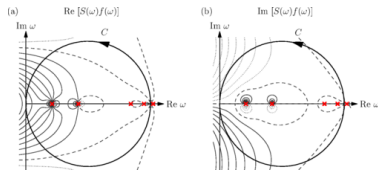


图: 用于计算  $\beta$  衰变率的 contour 积分的图像表示

由于相空间积分的复杂性, 使得这种表示较为复杂, 因此致力于寻找一种多项式来代替相空间积分, 至少是在强度函数的极点处与相空间积分相同。这种高阶多项式应具有下列形式:

$$f_{poly}(\omega) = \sum_{n=0}^N a_n \left( \frac{\omega_{max} - \omega}{m_e c^2} \right)^n$$

利用这一多项式, 捕捉到闭合环路里面的每一个激发态的贡献, 可以将  $\beta$  衰变率表示为以下形式:

$$\begin{aligned} \lambda_{1+} &= \frac{\ln 2}{\kappa} \sum_n f(\Omega_n) B_n^{(GT)} \\ &= \frac{\ln 2}{\kappa} \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\omega f_{poly}(\omega) S(\sigma\tau_-; \omega) \end{aligned}$$

实际应用中，对于环路积分的选择是个圆形，

$$\omega(t) = \frac{\omega_{max}}{2}(1 + e^{it})$$

其中  $\omega_{max}$  与 Q 值有关，

$$\omega_{max} = Q + E_{g.s.} = \lambda_n - \lambda_p + \Delta M_{n-H}$$

基态到基态  $\beta$  衰变跃迁的 Q 值计算来源于<sup>1</sup>，

$$Q_{\beta-} = \Delta M_{n-H} + B_{g.s.}(Z, N) - B_{g.s.}(Z + 1, N - 1)$$

对于某一个中子数为 (N+1) 的激发态能量计算，

$$\begin{aligned} E_{N+1}^k &= \langle k|H|k\rangle + \frac{dE}{dN_n}(N + 1 - \langle k|\hat{N}|k\rangle) = \langle k|H - \lambda_n \hat{N}|k\rangle + \lambda_n(N + 1) \\ &= E_N^{g.s.} + \lambda_n + E_k \end{aligned}$$

其中，质子费米能定义为  $\lambda_p \equiv \frac{dE}{dZ}$ ，中子费米能定义为  $\lambda_n \equiv \frac{dE}{dN}$ ，因此，

$$\begin{aligned} B_{g.s.}(Z + 1, N - 1) &\approx B_{g.s.}(Z, N) + \lambda_p - \lambda_n + E_{2qp-lowest} \\ Q_{\beta-} &= \lambda_n - \lambda_p + \Delta M_{n-H} - E_{g.s.} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>J. Engel et al. “ $\beta$  decay rates of r-process waiting-point nuclei in a self-consistent approach”. In: *Phys. Rev. C* 60 (1 June 1999), p. 014302. DOI: 10.1103/PhysRevC.60.014302. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.60.014302>.

## 能量密度泛函

$$\varepsilon = \sum_{t=0} \sum_{t_3=-t}^{+t} \int dr (\mathcal{H}_{tt_3}^{even}(r) + \mathcal{H}_{tt_3}^{odd}(r))$$

$$\mathcal{H}_{tt_3}^{even}(r) \equiv C_t^\rho [\rho_{00}] \rho_{tt_3}^2 + C_t^{\Delta\rho} \rho_{tt_3} \nabla^2 \rho_{tt_3} + C_t^\tau \rho_{tt_3} \tau_{tt_3} + C_t^J \mathbb{J}_{tt_3}^2 + C_t^{\rho\nabla J} \rho_{tt_3} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{tt_3}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{tt_3}^{odd}(r) \equiv & C_t^s [\rho_{00}] \vec{s}_{tt_3}^2 + C_t^{\Delta s} s_{tt_3} \cdot \vec{\nabla}^2 \vec{s}_{tt_3} + C_t^j \vec{j}_{tt_3}^2 + C_t^T \vec{s}_{tt_3} \cdot \vec{T}_{tt_3} + C_t^{s\nabla j} \vec{s}_{tt_3} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{j}_{tt_3} \\ & + C_t^F \vec{s}_{tt_3} \cdot \vec{F}_{tt_3} + C_t^{\nabla s} (\vec{\nabla} \cdot \vec{s}_{tt_3})^2 \end{aligned}$$

耦合常数  $C_t^\rho[\rho_{00}]$  和  $C_t^s[\rho_{00}]$  依赖密度:

$$C_t^\rho[\rho_{00}] = C_{t,0}^\rho + C_{t,\rho}^\rho \rho_{00}^{\sigma\rho}, \quad C_t^s[\rho_{00}] = C_{t,0}^s + C_{t,\rho}^s \rho_{00}^{\sigma s}$$

总密度  $\rho_{00}(r)$  为:

$$\rho_{00}(r) = \sum_{\sigma} \sum_r \hat{\rho}(r\sigma\tau, r\sigma\tau) = \rho_n(r) + \rho_p(r)$$

粒子粒子配对 i 相互作用的形式为:

$$V_{pp} = (V_0 \Pi_{T=0} + V_1 \Pi_{T=1}) \left( 1 - \alpha \frac{\rho_{00}(r)}{\rho_c} \right)$$

其中,  $\alpha$  控制密度依赖, 取值范围 (0,1),  $\rho_c$  为核物质的饱和密度

Part III

## 结果

结果



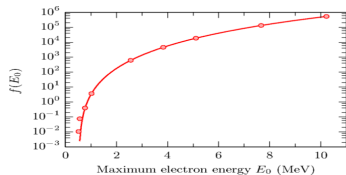


图: 14 阶多项式对相空间积分的拟合

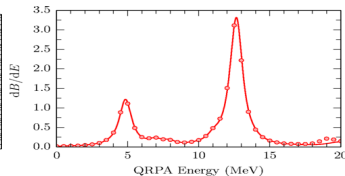


图: 形变核  $^{22}\text{Ne}$  的 pnFAM 计算结果

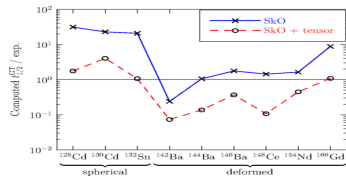


图: Gamow-Teller 半衰期的计算值与实验值之比

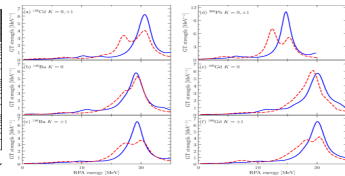


图: 形变核  $^{22}\text{Ne}$  在有张量相互作用时的 pnFAM 计算结果

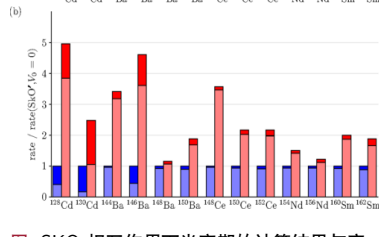
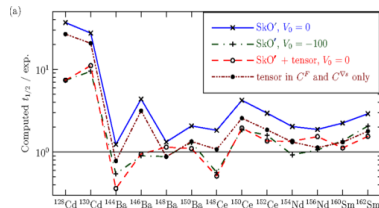


图: SKO 相互作用下半衰期的计算结果与实验值之比以及一阶禁戒跃迁与允许跃迁衰变率占比

## 结论

- FAM 方法在求解电荷交换的 QRPA 方程中是有效的，对于计算  $\beta$  衰变强度分布的结果，与 QRPA 矩阵方法所得结果具有一致性。
- 在 Skyrme 相互作用下，张量相互作用会对计算结果产生一定影响：强度分布向低能区偏移，导致相空间因子偏大，衰变率偏高，半衰期偏小。
- 在未添加张量项的 Skyrme 相互作用下，计算结果与实验结果存在一个数量级的差距，若是添加张量项，会将差距缩小。
- 对相互作用中的同位旋标量配对相互作用进行调整，以及对于相互作用中 time-odd 部分的参数进行调整，也会使得计算结果与实验结果能够更好地吻合。



中山大學  
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

Thanks!

M. T. Mustonen, T. Shafer, Z. Zenginerler, and J. Engel · Finite-amplitude method for charge-changing transitions in axially deformed nuclei