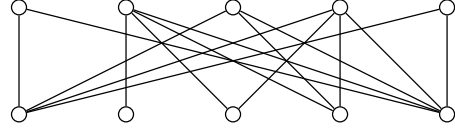
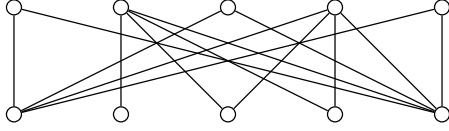


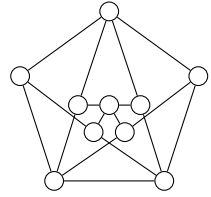
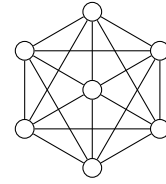
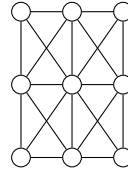
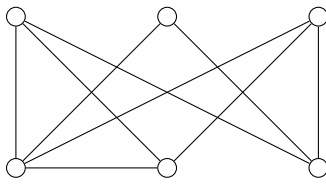
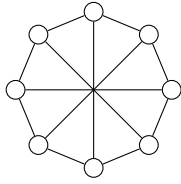
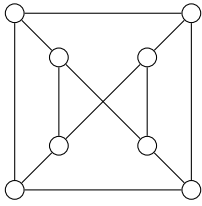
A számítástudomány alapjai 2020. I. félév

10. gyakorlat

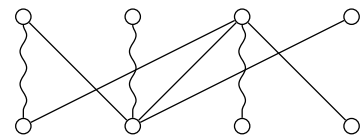
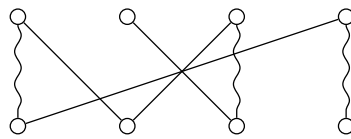
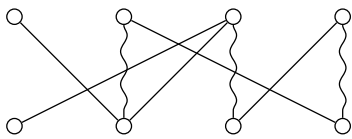
1. Keressünk az alábbi páros gráfokban maximális párosítást az alternáló utas algoritmus segítségével.



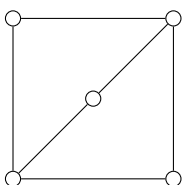
2. Síkbarajzolhatóak-e az alábbi gráfok?



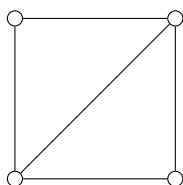
3. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan 3 lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
4. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább n fajtát szeret a $2n$ -féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.
-
5. Az alábbi (páros) gráfokban valaki a hullámos vonalak mentén hozott létre lehetséges párosításokat. Próbáljunk meg ezeken javítani az alternáló utas algoritmus segítségével, ha lehet. Vizsgáljuk meg, hogy mely gráfban teljesül a Hall-feltétel a felső csúcsok osztályára, azaz a felső csúcsok összes X részhalmazára nézzük meg azoknak az $N(X)$ szomszédainak a méretét. Ha nem teljesül, keressünk olyan X -et, amire $N(X)$ mérete kisebb X méreténél.



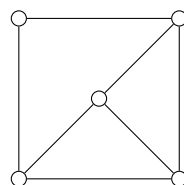
6. Az alábbi gráfok közül melyek topologikusan izomorfak?



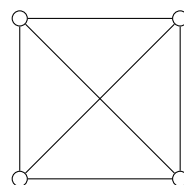
(a)



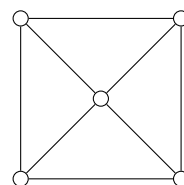
(b)



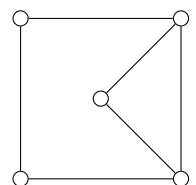
(c)



(d)



(e)

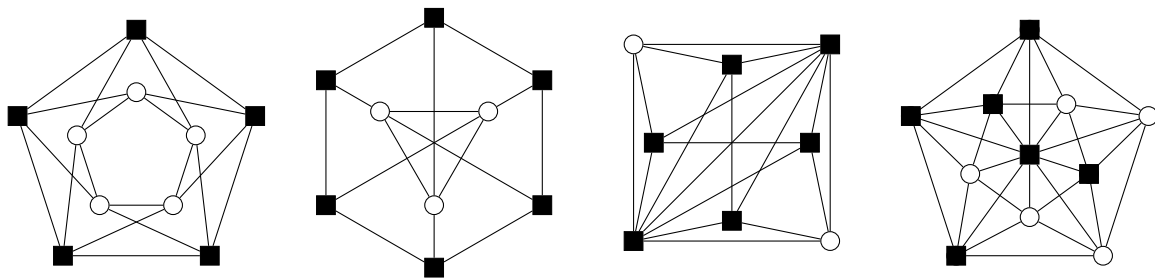


(f)

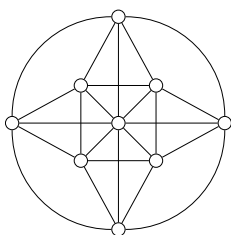
7. Ujjgyakorlatok (*Études*):

- Egy összefüggő, egyszerű gráf síkbarajzoltja 20 csúcsból és 19 élből áll. Hány tartománya van?

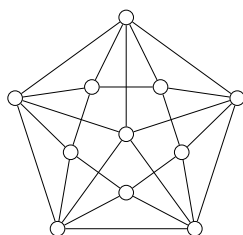
- Egy egyszerű gráfnak 8 csúcsa van, melyek közül 3 izolált pont. A maradék 5 csúcs egy komponenset alkot és 4 tartományra osztja a síkot, hány éle lehet?
 - Egy 8 csúcsú összefüggő egyszerű gráf 5 tartományra osztja a síkot. Hány éle van?
 - Egy 6 csúcsú összefüggő egyszerű gráfnak 10 éle van. Hány tartományra osztja a síkot a gráf síkbarajzoltja?
 - Egy 6 csúcsú összefüggő egyszerű gráfnak 13 éle van. Hány tartományra osztja a síkot a gráf síkbarajzoltja?
 - Egy egyszerű gráfnak 8 csúcsa van, melyek közül 3 izolált pont. A maradék 5 csúcs egy komponenset alkot és 10 éle van. Hány tartományra oszthatja a síkot a gráfnak egy lerajzolása?
8. Töröljünk ki az alábbi gráfokból csúcsokat vagy éleket úgy, hogy a megmaradt gráf topologikusan izomorf legyen egy K_5 -tel vagy egy $K_{3,3}$ -mal, ahol a K_5 vagy $K_{3,3}$ csúcsait a fekete négyzetek jelölik!



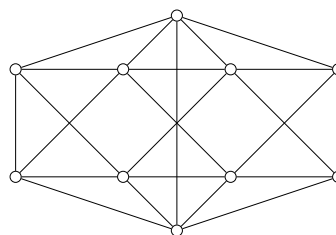
9. Tfh G egyszerű, $|V(G)| = 2000$ és $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G -ben nincs teljes párosítás!
10. [PZH-2014] Tegyük fel, hogy a 88 pontú G páros gráfban $\alpha(G) = 44$. Igazoljuk, hogy G -re teljesül a Hall feltétel, azaz $|X| \leq |N(X)|$ az A színosztály minden X részhalmaza esetén.
11. [ZH-2014] Tegyük fel, hogy a G egyszerű páros gráf A színosztálya 28, a B színosztálya 33 pontú. Tegyük fel, hogy a B színosztálynak valamely Y részhalmazára $|Y| = 18$ és $|N(Y)| = 12$. Mutassuk meg, hogy az A színosztályra nem teljesül a Hall feltétel, azaz létezik olyan $X \subseteq A$ halmaz, melyre $|N(X)| < |X|$.
12. [ZH-2015] Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf mindkét színosztálya egyenként 99 pontot tartalmaz, az A színosztályban minden pont foka legalább 66, B -ben pedig legalább 33. Mutassuk meg, hogy G -nek van teljes párosítása.
13. [PZH-2015] Tegyük fel, hogy $G = (A, B; E)$ egyszerű, páros gráf A színosztályában 99 csúcs van, ezek bármelyikének a fokszáma legalább 33, de A -ban van 66 olyan csúcs, amelyek bármelyikének foka legalább 66. Sőt, A tartalmaz 33 olyan csúcsot is, amelyek mindegyikéből legalább 99 él indul. Mutassuk meg, hogy G -nek van A -t fedő párosítása.
14. [ZH] Síkbarajzolhatóak-e az alábbi gráfok?



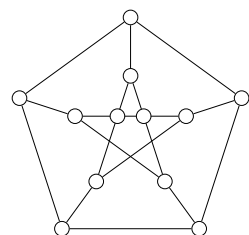
(a) ZH - 2010



(b) ZH - 2015



(c) PZH - 2011



(d) ZH - 2012

15. Igazoljuk, hogy ha a egy egyszerű G gráfnak legalább 11 csúcsa van, akkor G és \bar{G} közül legalább az egyik nem síkbarajzolható.
16. Hány csúcsa van egy olyan összefüggő síkbarajzolható gráfnak, aminek három háromszöglapja, három négyszöglapja és egy ötszöglapja van?