A számítástudomány alapjai 2019. I. félév
12. gyakorlat

1. Bizonyítsuk be az alábbi példákban, hogy $\Pi_a \preceq \Pi_b$:

   (a) Π_a: Adott n szám páros-e?
   Π_b: Adott n szám páratlan-e?

   (b) Π_a: Adott n szám páratlan-e?
   Π_b: Adott n szám páros-e?

   (c) Π_a: Adott n szám páros-e?
   Π_b: Adott G gráf kiszínezhető-e 2 színnel?

   (d) Π_a: Adott $G = (A, B, E)$ páros gráfban van-e n méretű párosítás?
   Π_b: Adott (G, s, t, c) hálózatban van-e k méretű folyam?

2. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi problémák P-beliek:

   (a) Adott G irányítatlan gráfról döntsük el, van-e benne kör.

   (b) Adott G irányítatlan gráfról döntsük el, van-e olyan részgráfja, amiben minden fok $\geq k$.

   (c) Adott G irányítatlan gráfról döntsük el, van-e K_{10} részgráfja.

   (d) Adott G öf gráfról és $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ élsúlyokról döntsük el, igaz-e, hogy G bármely feszítőfájának a költsége legalább k.

   (e) 2-SAT.

3. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi problémák NP-beliek:

   (a) Adott G irányítatlan gráfról döntsük el, van-e k-reguláris részgráfja.

   (b) Adott G öf gráfról és $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ élsúlyokról döntsük el, igaz-e, hogy G-nek van pontosan k költségű feszítőfája.

   (c) Adott G gráfról és $l : E(G) \to \mathbb{R}$ (esetleg negatív) élhosszokról döntsük el, igaz-e, hogy G bármely két csúcsának a távolsága legfeljebb k.

4. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi problémák coNP-beliek:

   (a) Adott G gráfról döntsük el, hogy síkbarajzolható-e.

   (b) Adott $2n$ csúcsú G gráfról döntsük el, igaz-e, hogy bármely n csúcsa páros gráfot feszít.

   (c) Adott G gráfról döntsük el, igaz-e, hogy $\omega(G) \leq k$.

   (d) Adott számról döntsük el, hogy prímhatvány-e.

5. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák NP $\cap$ coNP-beliek:

   (a) Adott G gráfról döntsük el, hogy páros-e.

   (b) Adott G gráfról döntsük el, hogy összefüggő-e.

   (c) Adott G páros gráfról döntsük el, hogy van-e teljes párosítása.

   (d) Adott hálózatról döntsük el, van-e benne k nagyságú folyam.

   (e) Adott n és k egészekről döntsük el, relatív prímek-e.

6. **[ZH-2009]** Mi az alábbi probléma bonyolultsága? (Vagy bizonyítsa be, hogy polinom időben megoldható, vagy bizonyítsa be, hogy NP-teljes!)

   Input: G egyszerű gráf és $v \in V(G)$
   Kérdés: Van-e G-nek olyan feszítőfája, amelyben v az egyetlen olyan pont, aminek a foka legalább 3?

7. **[ZH-2008]** Bizonyítsuk be, hogy NP-teljes az a π döntési probléma, aminek a bemenete egy $100n$ pontú irányítatlan gráf, a kimenete pedig akkor "igen", ha G-nek van legalább n pontú köre.

8. **[ZH-2010]** Igazoljuk, hogy a P és NP problémaosztályba egyaránt beletartozik annak eldöntése, hogy egy inputként megadott G irányítatlan gráfban létezik-e két különböző kör.

9. **[PZH-2010]** Legyen a Π döntési probléma inputja egy összefüggő G gráf, az output pedig pontosan akkor "igen", ha van G-ben Euler-körséta. Mutassuk meg, hogy $\Pi \in$ coNP.

10. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák NP-teljesek:

    (a) HAMÚT inputja egy G gráf, outputja IGEN, ha G-nek van Hamilton-útja.

    (b) k-SZÍN inputja egy G gráf és egy k szám, outputja IGEN, ha G k-színezhető, azaz $\chi(G) \leq k$.

    (c) RÉSZGR inputja egy G és H gráf, outputja IGEN, ha G-nek van H-val izomorf részgráfja.

    (d) MAXFGTLN inputja egy G gráf és egy k szám, outputja IGEN, ha van a gráfban k egymástól független csúcs.

    (e) FÉLHAM inputja egy G gráf, outputja IGEN, ha G-nek van olyan köre, ami G csúcsainak legalább felét tartalmazza.

    (f) FELE-3-SZÍN inputja egy G gráf, outputja IGEN, ha G-nek van olyan 3-színezhető feszített részgráfja, amely G csúcsainak legalább felét tartalmazza.

    (g) MAXTÁV inputja egy $G = (V, E)$ gráf, egy $l : E \to \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény valamint egy $k \in \mathbb{R}_+$ szám. Az output akkor IGEN, ha G-ben van legalább k összhosszú út.

    (h) TÉLAPÓ inputja a jó gyerekek házainak a koordinátái, az output pedig IGEN, ha a télapó meg tudja mindegyiket látogatni pontosan egyszer, legfeljebb k hosszú úton.

    (i) KARÁCSONYFA inputja egy karácsonyfa és rajta n darab gömb alakú dísz. Outputja IGEN, ha körbe lehet tekerni a fát egy k hosszú boa dísszel úgy, hogy minden gömbdíszt pontosan egyszer érintsen[1].

[1] Forrás: http://abstrusegoose.com/330