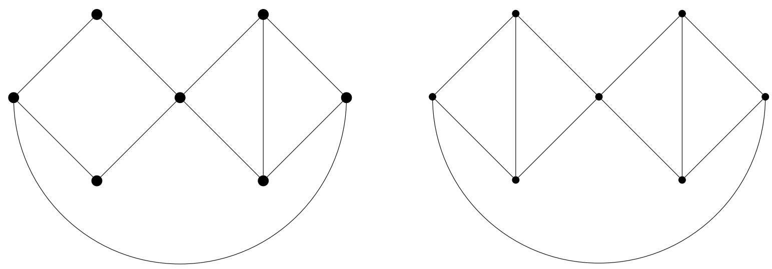
A számítástudomány alapjai 2020. I. félév
7. gyakorlat

1. Állapítsuk meg, hogy van-e az alábbi gráfokban Hamilton-kör! Ha van, mutassuk meg, ha nincs, bizonyítsuk be.



2. **[ZH-2001]** Legyen G a $\{p_1, p_2, \ldots, p_{2001}\}$ ponthalmazon az az egyszerű gráf, amire $(p_ip_j \in E(G) \Leftrightarrow |i-j| \leq 2)$. Van-e a G-ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör ill. Hamilton-út?

3. **[ZH-2009]** Legyenek $G_1(V, E_1)$ és $G_2(V, E_2)$ olyan egyszerű, összefüggő gráfok a V ponthalmazon, amelyekben van Euler-kör. Konstruáljuk meg a $G_3(V, E_3)$ gráfot úgy, hogy $E_3 = (E_1 \setminus E_2 \cup E_2 \setminus E_1)$, vagyis G_3-ban akkor szomszédos két pont, ha G_1-ben, vagy G_2-ben szomszédosak, de mindkettőben nem. Igaz-e, hogy ha G_3 összefüggő, akkor van benne Euler-kör?

4. **[ZH-2015]** 222 politikus mindegyike legalább 133 másikat ismer, akik közül legfeljebb 22-t utál. Az ismeretség és az utálat is kölcsönös. Bizonyítsuk be, hogy a 222 politikus úgy tudja élő lánccal körülvenni a Tüskecsarnokot, hogy a szomszédos láncszemek ismerjék, de ne utálják egymást.

5. **[PZH-2010]** Egy 12 egység hosszú drótból szeretnénk elkészíteni egy egységkocka élvázát, úgy, hogy a kocka csúcsainál forrasztunk. Legkevesebb hány darabra kell felvágni ehhez az eredeti drótunkat? Mi a válasz akkor, ha a testátlóknak is benne kell lenniük az élvázban, és persze a kiindulási drótunk is 4 testátlónyival hosszabb?

6. **[ZH-2011]** Tegyük fel, hogy a 16 pontú K_{16} teljes gráf éleit 4-féle színnel színeztük ki úgy, hogy minden egyes színre az adott színnel színezett élek reguláris gráfot alkotnak K_{16} csúcsain. Igazoljuk, hogy a kiválasztott két szín a 4 közül úgy, hogy az e két színnel színezett élekből található K_{16}-nak Hamilton-köre.

7. **[PZH-2011]** Tudjuk, hogy a 99 csúcsú, egyszerű G gráf maximális fokszáma $\Delta(G) = 30$, másrészt G-nek van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy a $\bar{G}$ komplementergráfnak is van Euler-köre.

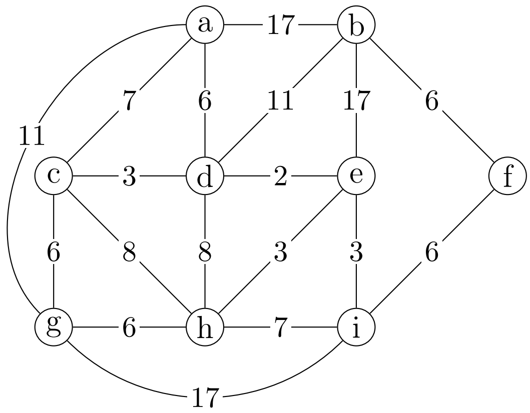
8. **[PPZH-2011]** Legyen G olyan véges gráf, aminek C egy Hamilton köre. Tegyük fel, hogy a $G - C$ gráfnak van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy ekkor a G gráfnak is van Euler-köre.

9. **[ZH-2012]** Tegyük fel, hogy az egyszerű G gráfnak 100 csúcsa van, ezek közül u és v foka 45, a többi csúcsé pedig legalább 55. Igazoljuk, hogy G-ben van Hamilton út.

10. **[ZH-2008]** Tegyük fel, hogy az n csúcsú, irányítatlan G gráf bármelyik csúcsából G-nek legfeljebb $\frac{n-2}{2}$ másik csúcsba lehet úton eljutni. Igazoljuk, hogy a $\bar{G}$ komplementergráfnak van Hamilton köre.

11. **[PZH-2017]** A G egyszerű gráfnak 33 piros, 777 fehér, 333 zöld, 77 sárga csúcsa van. Két csúcs között pontosan akkor fut él, ha azok különböző színűek. Behúzható-e G-be néhány további él, úgy, hogy olyan egyszerű gráfot kapjunk, aminek van Euler-sétája?

12. **[ZH-2016]** Kritikus a helyzet: Abszurdisztán fővárosát, Mutyipusztát savköpő menyétek inváziója fenyegeti. A jobb oldali ábrán látható a főváros térképe: az egyes utak mellett álló számok az adott útvonal hosszát jelölik. A veszélyt – mint mindig – most is az ügyeletes szuperhős, Órarugógerincű Felpattanó hárítja el. Mesteri tervének végrehajtása mellett (miszerint helikopterről lúgot permetezve semlegesíti a betolakodókat) még ebben a válságos pillanatban is a közvagyon megóvása a legfőbb célja. Ezért amellett, hogy minden utcát végigpermetez és visszatér a szabadon választott kiindulási pontra, szeretné egyúttal minimalizálni a lerepült össztávot is. Segítsünk Órarugógerincűnek abban, hogyan válasszon útvonalat!



13. **[Codeforces #288]** Amíg apukája dolgozott, Tanya úgy döntött, hogy játszik egyet az apja jelszavával. A jelszó egy $n + 2$ karakterből álló sorozat. Tanya felírta a karaktersorozat mind az n darab 3 karakterből álló részsorozatát külön papírcetlikre, majd az eredeti jelszót kidobta. A kislány később rájött, hogy ezt nem kellett volna megtennie, ezért megpróbálja visszaállítani az eredeti jelszót a 3 betűs részletekből. Hozzunk létre olyan eljárást, ami segít Tanyának előálltani egy jelszót a megfelelő karakterhármasoknak, vagy megállapítani azt, ha ez nem lehetséges. Állítsunk elő egy lehetséges jelszót a következő karakterhármasokból: $\{010, 101, 110, 001, 101, 010, 010, 101, 011, 010, 111, 101, 000\}$.