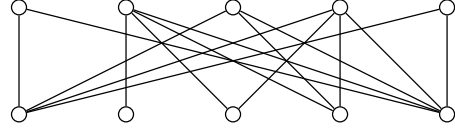
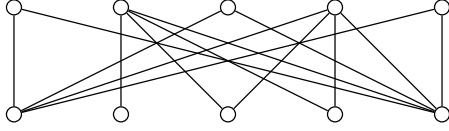


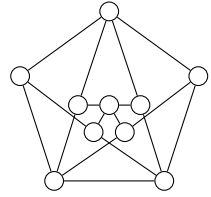
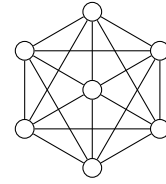
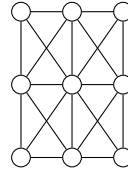
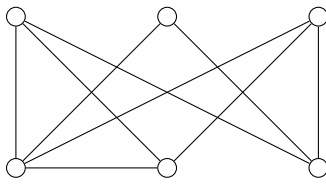
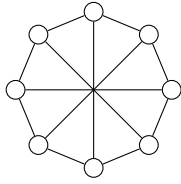
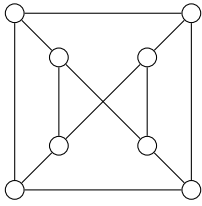
# A számítástudomány alapjai 2020. I. félév

## 10. gyakorlat

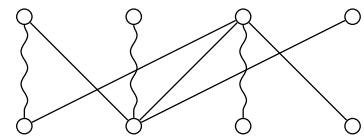
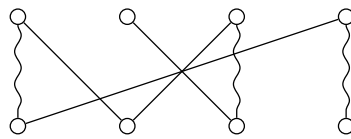
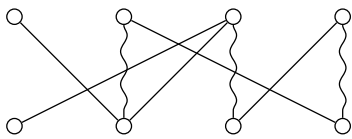
1. Keressünk az alábbi páros gráfokban maximális párosítást az alternáló utas algoritmus segítségével.



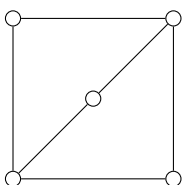
2. Síkbarajzolhatóak-e az alábbi gráfok?



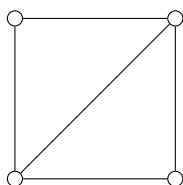
3. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan 3 lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
4. Egy kiránduláson  $n$  házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani  $2n$  különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább  $n$  fajtát szeret a  $2n$ -féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.
- 
5. Az alábbi (páros) gráfokban valaki a hullámos vonalak mentén hozott létre lehetséges párosításokat. Próbáljunk meg ezeken javítani az alternáló utas algoritmus segítségével, ha lehet. Vizsgáljuk meg, hogy mely gráfban teljesül a Hall-feltétel a felső csúcsok osztályára, azaz a felső csúcsok összes  $X$  részhalmazára nézzük meg azoknak az  $N(X)$  szomszédainak a méretét. Ha nem teljesül, keressünk olyan  $X$ -et, amire  $N(X)$  mérete kisebb  $X$  méreténél.



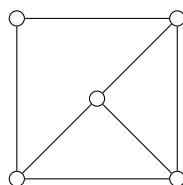
6. Az alábbi gráfok közül melyek topologikusan izomorfak?



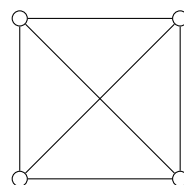
(a)



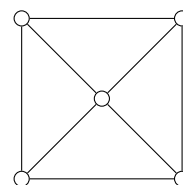
(b)



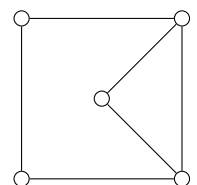
(c)



(d)



(e)

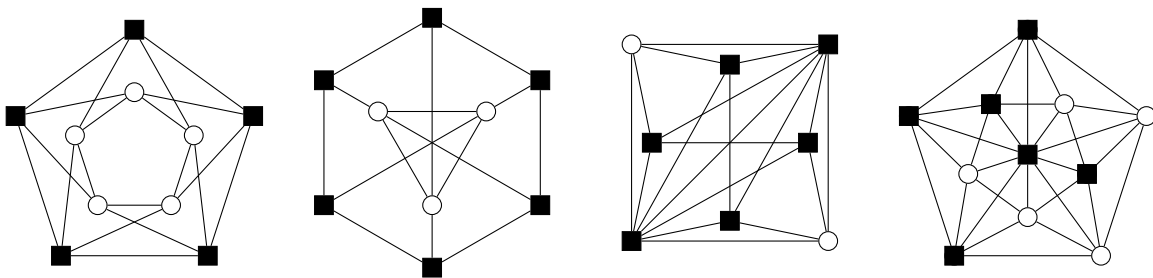


(f)

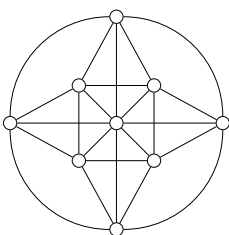
7. Ujjgyakorlatok (*Études*):

- Egy összefüggő, egyszerű gráf síkbarajzoltja 20 csúcsból és 19 élből áll. Hány tartománya van?

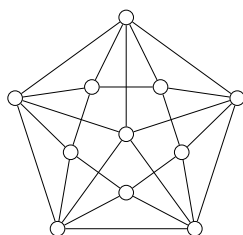
- Egy egyszerű gráfnak 8 csúcsa van, melyek közül 3 izolált pont. A maradék 5 csúcs 4 tartományra osztja a síkot, hány éle lehet?
  - Egy 8 csúcsú összefüggő egyszerű gráf 5 tartományra osztja a síkot. Hány éle van?
  - Egy 6 csúcsú összefüggő egyszerű gráfnak 13 éle van. Hány tartományra osztja a síkot a gráf síkbarajzoltja?
  - Egy 6 csúcsú összefüggő egyszerű gráfnak 15 éle van. Hány tartományra osztja a síkot a gráf síkbarajzoltja?
  - Egy egyszerű gráfnak 8 csúcsa van, melyek közül 3 izolált pont. A maradék 5 csúcsnak 10 éle van. Hány tartományra oszthatja a síkot a gráfnak egy lerajzolása?
8. Töröljünk ki az alábbi gráfokból csúcsokat vagy éleket úgy, hogy a megmaradt gráf topologikusan izomorf legyen egy  $K_5$ -tel vagy egy  $K_{3,3}$ -mal, ahol a  $K_5$  vagy  $K_{3,3}$  csúcsait a fekete négyzetek jelölik!



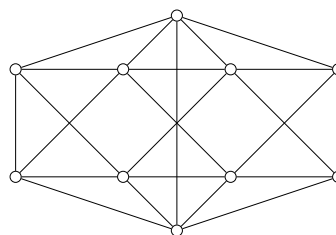
9. Tfh  $G$  egyszerű,  $|V(G)| = 2000$  és  $\tau(G) = 678$ . Igazoljuk, hogy  $G$ -ben nincs teljes párosítás!
10. [PZH-2014] Tegyük fel, hogy a 88 pontú  $G$  páros gráfban  $\alpha(G) = 44$ . Igazoljuk, hogy  $G$ -re teljesül a Hall feltétel, azaz  $|X| \leq |N(X)|$  az  $A$  színosztály minden  $X$  részhalmaza esetén.
11. [ZH-2014] Tegyük fel, hogy a  $G$  egyszerű páros gráf  $A$  színosztálya 28, a  $B$  színosztálya 33 pontú. Tegyük fel, hogy a  $B$  színosztálynak valamely  $Y$  részhalmazára  $|Y| = 18$  és  $|N(Y)| = 12$ . Mutassuk meg, hogy az  $A$  színosztályra nem teljesül a Hall feltétel, azaz létezik olyan  $X \subseteq A$  halmaz, melyre  $|N(X)| < |X|$ .
12. [ZH-2015] Tegyük fel, hogy a  $G$  egyszerű, páros gráf mindkét színosztálya egyenként 99 pontot tartalmaz, az  $A$  színosztályban minden pont foka legalább 66,  $B$ -ben pedig legalább 33. Mutassuk meg, hogy  $G$ -nek van teljes párosítása.
13. [PZH-2015] Tegyük fel, hogy  $G = (A, B; E)$  egyszerű, páros gráf  $A$  színosztályában 99 csúcs van, ezek bármelyikének a fokszáma legalább 33, de  $A$ -ban van 66 olyan csúcs, amelyek bármelyikének foka legalább 66. Sőt,  $A$  tartalmaz 33 olyan csúcsot is, amelyek mindegyikéből legalább 99 él indul. Mutassuk meg, hogy  $G$ -nek van  $A$ -t fedő párosítása.
14. [ZH] Síkbarajzolhatóak-e az alábbi gráfok?



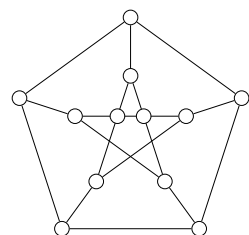
(a) ZH - 2010



(b) ZH - 2015



(c) PZH - 2011



(d) ZH - 2012

15. Igazoljuk, hogy ha a egy egyszerű  $G$  gráfnak legalább 11 csúcsa van, akkor  $G$  és  $\bar{G}$  közül legalább az egyik nem síkbarajzolható.
16. Hány csúcsa van egy olyan összefüggő síkbarajzolható gráfnak, aminek három háromszöglapja, három négyszöglapja és egy ötszöglapja van?