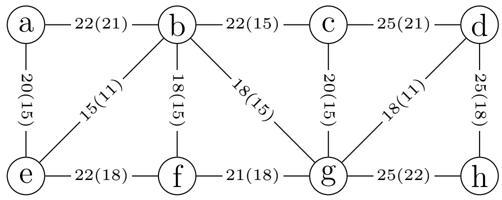
# A számítástudomány alapjai 2021. I. félév
# 7. gyakorlat

ZH gyakorlás: Leszámlálások. Gráfelméleti alapok, fák. Kruskal algoritmus, BFS.
Dijkstra, Ford és Floyd; legrövidebb és legszélesebb utak. DFS, DAG, PERT.
Euler-, Hamilton-utak és körök; Dirac és Ore tételei.
+ minden ami volt előadáson/gyakorlaton.

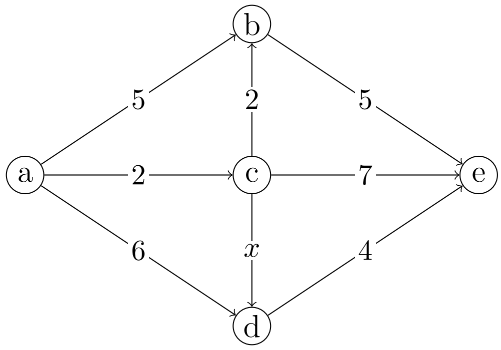
1. [**ZH-2006**] Hányféleképp osztható ki 100 hallgatónak 57 különböző könyv és 69 egyforma alma, ha egy hallgató akárhány (esetleg 0) könyvet és akárhány (esetleg 0) almát is kaphat?

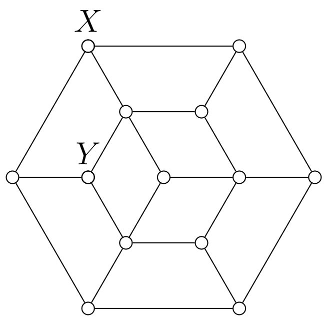
2. [**ZH-2007**] Van-e olyan 1000 pontú gráf, melynek pontosan 13 feszítőfája van? (Feltehetjük, hogy a gráf pontjai meg vannak számozva, és két feszítőfát különbözőnek tekintünk, ha az egyikben össze van kötve valamely két pont, ami a másikban nincs.)

3. [**ZH-2015**] Az ábrán látható $G = (V, E)$ gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élén két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárút-hálózat épüljön ki, amelyen $G$ minden pontja elérhető. Határozzuk meg egy lehető legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti a feltételt.




4. Határozzuk meg a mellékelt (bal oldali) PERT-diagramban az összidőt és a kritikus tevékenységeket $x > 0$ függvényében!




5. [**ZH-2020**] Tegyük fel, hogy ha az élsúlyokkal ellátott $G$ gráfban az $e$ él költségét 11-nek, ill. 77-nek választjuk, akkor a minimális költségű feszítőfa költsége 1956 ill. 1989 lesz. Mennyi a minimális költségű feszítőfa költsége akkor, ha az $e$ él költsége 42?

6. [**ZH-2007**] Bizonyítsuk be, hogy a fenti jobb oldali gráfban nincs Hamilton-kör! Ha behúzzuk az $X$ és $Y$ közötti élet is a gráfba, akkor lesz Hamilton-kör?

7. [**ZH-2007**] Egy 2007 pontú összefüggő, egyszerű gráf minden pontja 100-adfokú. Bizonyítsa be, hogy élhalmaza felbontható 2007 darab éldiszjunkt 50 élű csillag egyesítésére!

---

8. [**ZH-2015**] Hányféleképpen lehet 5 házaspárt leültetni egy 10 székből álló széksorba, ha a házastársaknak egymás mellé kell ülniük? Mi a válasz 13 székre?

9. **[ZH-2013]** Egy BME hallgató Neptun-kódja egy olyan, 6 karakterből álló sorozat, amelynek minden tagja az angol abc 26 betűjének egyike, vagy a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyek valamelyike. Hány olyan lehetséges Neptun-kód van, melyben pontosan két betű és 4 számjegy szerepel?

10. **[PZH-2013]** Egy bolha egységnyi lépéseket tesz meg a számegyenesen pozitív vagy negatív irányban. Hányféleképpen juthat el az origóból 100 lépéssel a 68 pontba?

11. **[PZH-2013]** A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorba állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképp tehetik ezt meg, ha Morgó nem lehet az utolsó és Kuka közvetlenül Vidor mögött akar állni?

12. **[ZH-2015]** Hányféleképpen ültethető le egy kör alakú asztal köré 5 házaspár, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni? *(Két ültetést akkor tekintünk azonosnak, ha mindenkinek ugyanaz a baloldali szomszédja a két esetben.)*

13. **[PZH-2015]** Az ébredő erő bemutatóját 7 mikulás nézi meg a krampuszával. Úgy szeretnének leülni egy 14 székből álló sorba, hogy ne üljön minden mikulás a saját krampusza mellett. Hányféleképpen tehetik ezt meg? (A 7 mikulás és a 7 krampusz is egymástól jól megkülönböztethető.)

14. **[ZH-2014]** Hányféleképpen lehet sorba rakni az $1, 2, \ldots, 10$ számokat úgy, hogy a sorozat valahányadik eleméig monoton növekvő, onnantól pedig monoton csökkenő legyen? (a két részsorozat határa akár a sorozat első vagy utolsó eleme is lehet.)

15. **[PZH-2014]** A *****-XXXXX focimeccs végeredménye 6 : 3 lett XXXXX csapatának javára. Hányféleképpen születhetett meg ez az eredmény, azaz hányféle lehetett az egyes gólok utáni állások sorrendje?

16. **[ZH-2011]** A Mikulás öt pendrive-ot hozott, amik egyenként $1, 3, 5, 7$ és 9 gigabájtosak. Öcsénkkel kell ezeken megosztoznunk. Hányféleképp tehetjük ezt meg, ha a mi memóriánk kapacitásainak összegének testvérünkéiéiénél mindenképpen nagyobbnak kell lennie, és tökéletesen igazságosnak érezzük azt is, ha az összes eszköz nekünk jut?

17. **[ZH-2005]** Az $\{1, 2, \ldots, 100\}$ számokat hányféleképpen lehet három 20-elemű, két 15-elemű és egy 10-elemű halmazba szétosztani?

18. **[ZH-2005]** Legyen $G = (V, E)$ az a gráf, melyre $V = \{1, 2, \ldots, 100\}$, és $ab \in E$ pontosan akkor, ha $a \neq b$ és $a - b$ osztható 4-gyel. Van-e a $G$ gráfnak Euler-köre?

19. **[ZH-2005]** 10 házaspár mindegyik tagjára igaz, hogy a maradék 9 házaspár mindegyikének legalább egyik tagját ismeri. (Az ismeretség kölcsönös.) Bizonyítsuk be, hogy az említett 20 személy leültethető egy 20 személyes, kör alakú asztalhoz úgy, hogy mindenki ismerje a két mellette ülő személy mindegyikét.

20. **[ZH-2012]** A ruletten egy pörgetés eredménye egy 0 és 36 közötti egész szám (a határokat megengedve). Hányféle olyan 10 pörgetésből álló sorozat lehetséges, ami tartalmaz két azonos eredményű pörgetést?

21. **[ZH-2015]** Tegyük fel, hogy a $G$ egyszerű gráfnak 100 csúcsa van, melyek bármelyikének a fokszáma legalább 33, továbbá $G$-nek van olyan csúcsa, melyből legalább 66 él indul. Bizonyítsuk be, hogy $G$ összefüggő.

22. **[PZH-2013]** Egy 2013 pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 671. Mutassuk meg, hogy a gráf vagy összefüggő, vagy egyetlen él hozzáadásával azzá tehető.

23. [**PZH-2015**] Igazoljuk, hogy ha $v$ egy véges $G$ gráf páratlan fokú csúcsa, akkor $G$-ben van olyan út, amely $v$-t a $G$ egy másik páratlan fokú csúcsával köti össze.

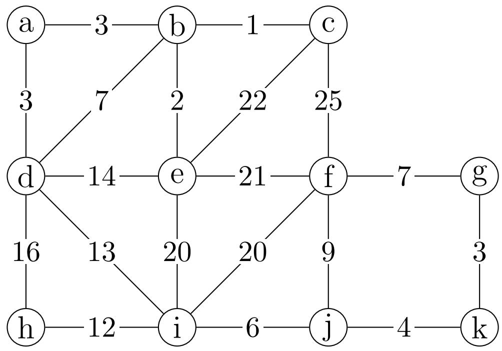
24. [**PZH-2014**] Tudjuk, hogy a 6 pontú gráf fokszámai $2, 2, 2, 4, 5, 5$. Igazoljuk, hogy $G$ nem egyszerű.

25. [**PPZH-2012**] Határozzuk meg, hogy a $K_n$ teljes gráfnak hány $C_4$ részgráfja van. (Két részgráf akkor nem különbözik, ha a csúcshalmazaik is **és** élhalmazaik is megegyeznek. A $C_4$ gráf a 4 pontú kör.)

26. [**PZH-2015**] Tegyük fel, hogy a $K_{2015}$ teljes gráf minden egyes élét kiszíneztük 1008 lehetséges szín valamelyikére. Bizonyítsuk be, hogy található a gráfnak egy $u$ és egy $v$ pontja valamint egy $c$ szín úgy, hogy ne vezessen $u$-ból $v$-be olyan út amelynek minden éle $c$ színű.

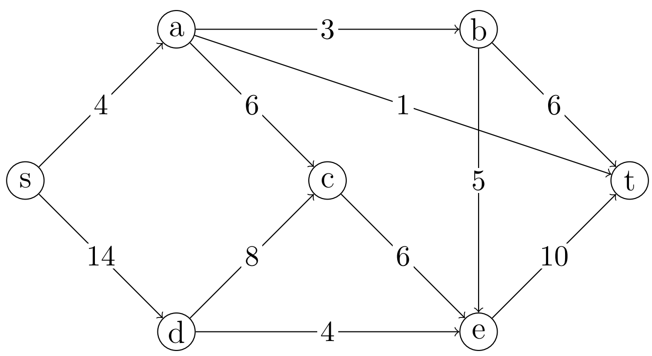
27. [**PZH-2013**] Az $n$ pontú egyszerű, összefüggő, pozitív élsúlyokkal rendelkező $G$ gráfban a minimális feszítőfa összsúlya $s$. $G$-ben minden él súlyához hozzáadunk 2-t, így kapjuk a $G'$ gráfot. Mekkora lesz a minimális feszítőfa súlya $G'$-ben?

28. [**PZH-2015**] Az alábbi ábrán látható $G$ gráf éleire írt számok az adott él szélességét jelentik. Ha van, találjuk meg $G$-nek egy olyan $F$ feszítőfáját, amelyben az $F$-beli $uv$ út a $G$ egy legszélesebb $uv$ útja a $G$ tetszőleges $u$, $v$ csúcsaira. Határozzuk meg $f$ és $h$ között a legszélesebb út szélességét.




29. [**ZH-2014**] Legyenek a 7 csúcs $G$ gráf pontjai $v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_8$ és $v_9$, valamint akkor legyen $v_i$ és $v_j$ szomszédos, ha $i$ és $j$ relatív prímek. Ekkor a $v_iv_j$ él szélessége $|i - j|$. Határozzuk meg a $v_1$ csúcsból minden más csúcsba egy-egy legszélesebb utat.

30. [**PZH-2012**] Az ábrán látható gráfon a Dijkstra algoritmus segítségével állapítsuk meg, hogy milyen sorrendben határozza meg az algoritmus a $dist(s, v)$ távolságokat (azaz milyen sorrendben kerülnek véglegesítésre a csúcsok $s$-től mért távolságai).




31. [**ZH-2015**] Van-e valamely $n \geq 2$ egész esetén olyan $2n$ pontú $G$ gráf, hogy $G$-nek is és komplementerének, $\bar{G}$-nek is van Euler sétája?

32. [**ZH-2014**] Tegyük fel, hogy a $G$ gráf bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 7 élű út. Mutassuk meg, hogy ha $G$-nek van Euler sétája, akkor $G$-nek megduplázható legfeljebb 7 éle úgy, hogy az így kapott $G'$ gráfnak Euler körsétája legyen. (Egy $e$ él megduplázásán azt értjük, hogy behúzunk egy, az $e$ éllel párhuzamos új élt.)

33. [**PZH-2014**] Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű $G$ gráfnak 20 csúcsa van és bármely fokszáma legalább 12, akkor $G$-nek van két olyan Hamilton köre, melyeknek nincs közös éle.

34. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{A, B, C, D, E, F\}$, az élek és súlyaik pedig az alábbiak: $s(A, B) = 2$, $s(A, C) = 7$, $s(A, D) = 3$, $s(A, F) = 6$, $s(C, E) = 3$, $s(D, B) = -2$, $s(D, C) = -4$, $s(D, E) = -2$, $s(E, F) = 4$. Futtassa ezen a gráfon a Bellman-Ford algoritmust az $A$ csúcsból vett legrövidebb utak hosszának meghatározására!

35. [**ZH-2008**] Tegyük fel, hogy az $n$ csúcsú irányítatlan $G$ gráf bármelyik csúcsából $G$-nek legfeljebb $\frac{n-2}{2}$ másik csúcsába lehet úton eljutni. Igazoljuk, hogy a $\bar{G}$ komplementergráfnak van Hamilton-köre!

36. [**PZH-2008**] Legfeljebb hány pontja lehet annak a 19 élű $G$ gráfnak, amiben minden pont fokszáma legalább 3?

37. [**ZH-2007**] Határozzuk meg a legrövidebb út hosszát az $s$ pontból az összes többi pontba Dijkstra-algoritmus segítségével az alábbi gráfban! Milyen sorrendben kerültek át a pontok az $S$ halmazból a $T$ halmazba?