

Kombinatorika

1. Morty rettenetesen fél a koronavírustól. Ezért úgy döntött, hogy a lehetséges vakcinák közül (Pfizer, Moderna, AstraZeneca, Jansen, Sputnik, Sinopharm) az összessel beoltatja magát kétszer. Hányféleképpen kérheti ekkor az oltásokat, ha a vakcinák sorrendje számít, de két ugyanolyan típusú vakcinát természetesen nem különböztetünk meg? Summer annyira nem félős, ő nem kér mindegyikből, de legalább egyből igen, és ha valamilyen típusból kér, akkor mindenképp beoltatja magát azzal kétszer. Hány féle sorrendben kérheti Summer a vakcinákat?
2. A Marvel Cinematic University-n véletlenül rosszul írták ki a Gyógy- és strandfürdők nevű 2 kredites tárgyat a Neptunban, ezért idén a 9689 hallgató közül csak egy veheti azt fel. A tárgy során a hallgatónak az univerzum 17 gyógyfürdjéből és 17 strandjából kell választania egyet-egyet és meglátogatni azokat. Az év végén a jegyét (1 és 5 között) a hallgató a fürdőkről megírt esszéjére kapja. A kurzus előadója, Doktor Strange nem szereti a meglepetéseket, ezért az Agamotto szemével betekintett a jövőbe, hogy lássa, melyik hallgató, mely fürdőkről fog írni és milyen jegyet fog kapni az esszéjére.

- (a) Hány lehetséges kimenetelt látott a Doktor?
- (b) Ezek közül hány végződött bukással?

Közben sikerült kijavítani a tárgy kiírását, így 1 helyett ismét 30 hallgató veheti fel a tárgyat.

- (c) Hány lehetséges kimenetelt látott a Doktor ebben az esetben?
 - (d) Ezek közül hány esetben nem bukott meg senki?
 - (e) Hány esetben nem bukott meg mindenki?
3. A rivális Mercedes istálló legyőzésének érdekében egy új stratégiával rukkoltak elő a Ferrari fejesei. Az olasz nagydíjon bevetik a 32 kiállásos taktikát, melynek alapja, hogy minden kiállásnál az előzőtől különböző gumiszettet tesznek fel az autóra. Hányféle gumistratégiája lehet a Ferrari-nak, ha (egy kikaput átjátszva) mind a 9 fajta gumikeverékből végtelen sok áll a rendelkezésükre?
 4. A 2019-es félévben a 42-es tankörbeli 35 hallgató összesen 100 pontot ért el a második számtud ZH-ján (egy hallgató akár 100 pontot is elérhet). Hányféleképpen történhetett ez meg, ha az egyes ZH pontszámok akármekkora nemnegatív egészek lehetnek?
 5. Járvány ütött ki a villanykaron! Az 1000 hallgató mindegyikén végre kellett hajtani egy polimerlánc alapú és egy ellenanyag alapú tesztet (összesen 2000 tesztet). Egy hallgatót akkor nyilvánítottak fertőzöttnek, ha legalább az egyik teszteredménye (a 2 közül) pozitív lett. Hányféleképpen alakulhattak az egyes tesztek eredményei, ha csak annyit tudunk, hogy 500 hallgatót nyilvánítottak fertőzöttnek?
-
6. Gombóc Artúr úgy döntött, hogy fogyókúra gyanánt a következő hétre lecsökkenti a napi csoki adagját 58-ra. Artúr raktárában a csokiknak 3-féle alakja lehet (kerek, szögletes, lyukas), és 3-féle íze lehet (ét, fehér, tej). Bizonyítsuk be, hogy van olyan csoki fajta, amiből legalább 46-ot meg fog enni Artúr a következő héten!
 7. Az idei Tour de Ferencváros igazán nagy népszerűségnek örvendhetett, hiszen 200 profi kerékpáros indult el rajta.
 - Legfeljebb hány szakaszból állhatott a verseny, ha tudjuk, hogy semelyik két szakasz végén nem állt ugyanaz a 3 ember a dobogón? (Mindegy milyen sorrendben.)
 - Legfeljebb hány szakaszból állhatott a verseny, ha tudjuk, hogy semelyik két szakasznak végén nem lett ugyanaz az első 10 befutó? (Most számít a sorrend.)

8. A Kőbánya Open tenisztorna döntőjében Novak Djokovic és Daniil Medvedev csaptak össze. A szettek végeredménye $5-7, 3-6, 7-5, 6-4, 4-6$ lett (Medvedev javára). Hányféle sorrendben történhetett meg a pontszerzés, ha a tenisz szabályainak értelmében egy szett minimum 6 pontig és legalább 2 pontos különbségig megy?
9. A rendszámreform előtt a magyar rendszámok alakja BB-SS-SS volt (B=betű, S=számjegy). Hányféle rendszámot lehetett kiadni? Mennyit nyertünk az új (ú.n. svéd típusú) BBB-SSS rendszámok bevezetésével? A holland rendszámok hajdan $XX-YY-ZZ$ alakúak voltak, ahol $\{X, Y, Z\} = \{B, S\}$. Hány rendszámot lehetett ott kiadni?
10. Hány részhalmaza van egy n -elemű halmaznak? Hányféle n hosszúságú 0/1 sorozat létezik? Mennyi az olyan 0/1 sorozatok száma, amelyek pontosan k db 1-et tartalmaznak?
11. Ha n focicsapat körmérkőzéses bajnokságot játszik, akkor hány mérkőzésre van szükség? Ki-eséses rendszerben mennyi a szükséges mérkőzések száma?
12. Hány különböző módon lehet kitölteni egy ötöslottószevényt? Hány 5-, 4-, 3- ill. 2-találatos lesz ezek között a sorsolás után?
13. Hány olyan 10 hosszú dobássorozat van a dobókockával, melyben a dobott számok összege 3-mal osztható?
14. Az 5-ös Bummjátékban hány Bumm hangzik el 1-től 1000-ig? Hány számra mondunk Bummo(ka)t? (Az 5-ös Bummjátékban egymás után mondják a játékosok a számokat 1-től indulva, azzal a megkötéssel, hogy ha a szám tízes számrendszerbeli alakjában van 5-ös, vagy a kimondandó szám 5-tel osztható, akkor nem szabad kimondani az adott számot, hanem helyette "Bumm"(ok)at kell mondani, mégpedig minden 5-ös számjegyért egyet, és az 5 prímfaktor kitevője számszor is Bummolni kell.)
15. Tudományosan igazolt tény, hogy az atlantiszi országok zászlaja 3 vízszintes sávból áll, minden sáv a piros, fehér, zöld, kék, sárga, fekete színek valamelyikére van színezve, úgy, hogy a szomszédos sávok különböző színűek legyenek. Természetesen különböző országok lobogói egymástól különbözőek. Legfeljebb hány ország létezhetett Atlantisban? Legfeljebb hány olyan ország lehet, melynek zászlajában van piros sáv?
16. Nyolc ember szeretne teniszezni három tenispályán úgy, hogy az egyik pályán párost, a két másikon egyénit játszanak. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a pályákat különbözőeknek tekintjük, de ugyanazon pálya két tőrfelét nem különböztetjük meg? (Természetesen az embereket is különbözőeknek tekintjük, és az is számít, hogy a négy páros meccset játszó játékos között ki kinek a partnere.)
17. Hányféleképp osztható egy 30 fős osztály hat, ötfős csapatra?
18. A villamosmérnök szak mind az 556 hallgatója két-két ZH-t írt: egyet számítástudományból, egyet pedig analízisből. Számítástudományból senki sem ért el 36 pontnál többet. Bizonyítsuk be, hogy van négy olyan hallgató, akik amellet, hogy ugyanannyi pontot kaptak a számítástudomány ZH-jukra, analízisből is egyforma osztályzatot szereztek.
19. **[ZH-2016]** Hány különböző módon lehet a METAMATEMATIKA szó betűit egy kör mentén úgy elrendezni, hogy mind a 14 betűt pontosan egyszer használjuk fel? Két felírást akkor tekintünk azonosnak, ha egyik a másiból egy forgatással megkapható. (Nem kell kiszámítani a pontos eredményt: elég egy zárt formula, ami mutatja, hogy egy alapl műveleteket ismerő számológéppel hogyan kapható ez meg.)
20. **[PZH-2016]** Hányféle útvonalon tudunk eljutni a síkon a $(0, 0)$ koordinátájú pontból a $(9, 10)$ koordinátájú pontba úgy, hogy az útvonal minden pontjának valamelyik koordinátája egész legyen, továbbá az út során sosem távolodhatunk a célponttól?

21. **[ZH-2015]** Hányféleképp lehet 5 házaspárt leültetni egy 10 székből álló széksorba, ha a házastársaknak közvetlenül egymás mellé kell ülniük? Mi a válasz 13 székre?
22. **[PZH-2015]** Az ébredő erő bemutatóját 7 mikulás nézi meg a krampuszával. Úgy szeretnének leülni egy 14 székből álló sorba, hogy ne üljön minden mikulás a saját krampusza mellett. Hányféleképp tehetik ezt meg? (A 7 mikulás és a 7 krampusz is egymástól jól megkülönböztethető.)
23. **[ZH-2017]** Az osztályba járó 15 fiú és 15 lány közül hányféleképp választható olyan 10 fős küldöttség, amelyikben legalább két lány és legalább két fiú van?
24. **[PZH-2017]** Hányféleképp tölthető ki egy ötöslottószelvény úgy, hogy a lehetséges 90 számból legalább egy 10-zel oszthatóra is tippeljünk?