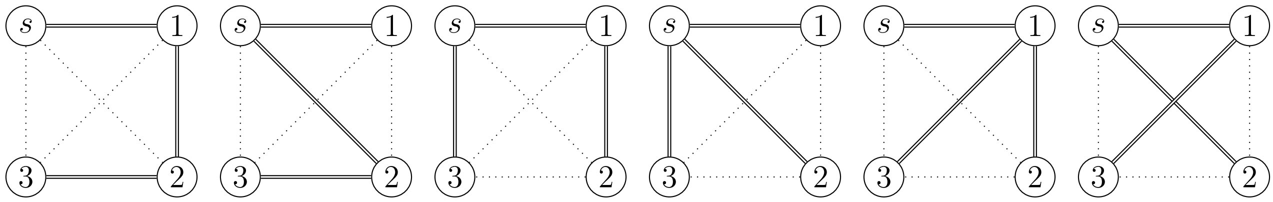
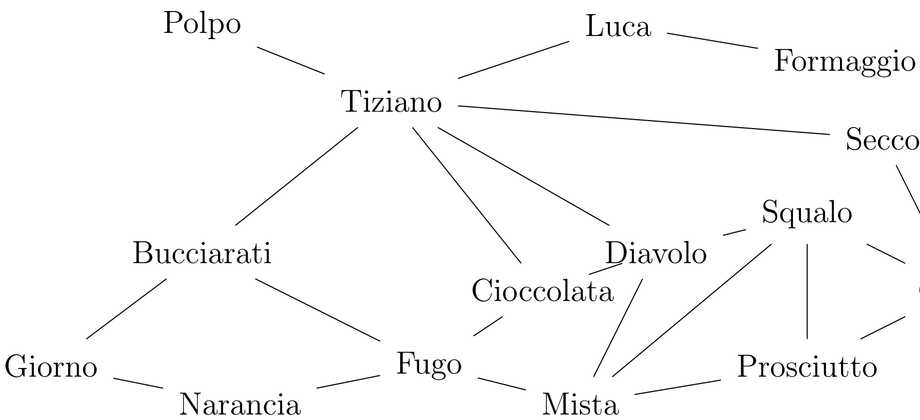
Erdők és fák

1. Az alábbi gráfok közül melyek izomorfak?



2. Az alábbi gráf az olasz maffia ismerettségi körét ábrázolja. A maffiózók nevei felelnek meg a gráf csúcsainak, a köztük futó élek pedig kölcsönös ismerettséget jelentenek. Jelölje a maffiózó ismerettségét a gráfban lévő fokszáma (pl. Giorno-nak 2). Ekkor ki a legismertebb maffiózó? Jelölje a maffiózó befolyását az ismerőseinek az ismerettségének (fokszámainak) az összege (például Giorno-nak 5). Ekkor ki a legbefolyásosabb maffiózó?

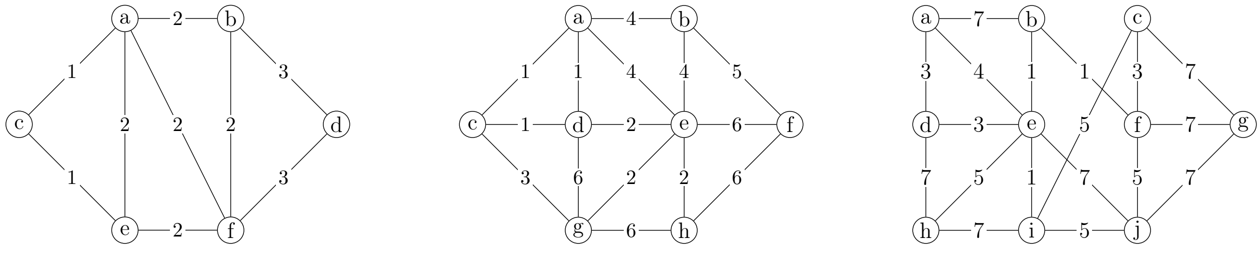


3. **[ZH-2000]** Ketten a következő játékot játsszák. Adott n pont, kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúz egy élt. Az veszít, aki kört hoz létre. A kezdő vagy a másodiknak lépő játékos nyer, ha mindketten a lehető legjobban játszanak?

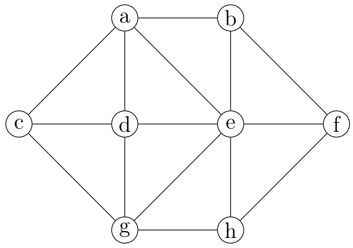
4. **[ZH-2014]** Legyenek a G egyszerű gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 10$ számok, és két különböző csúcs között akkor fusson él, ha a két szám különbsége páratlan. Hány 4 hosszú köre van a G gráfnak?

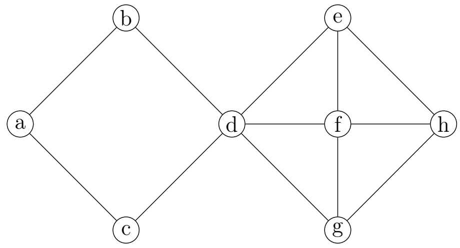
5. Bizonyítsuk be, hogy bármely 13 ember között van olyan, aki legalább 6 másikat ismer vagy van köztük 3 olyan, akik páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretség kölcsönös.)

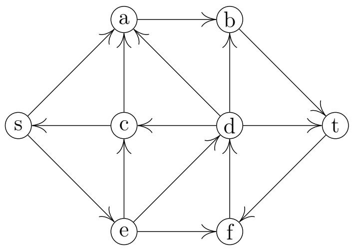
6. Keressünk minimális feszítőfát! Hány különböző minimális költségű feszítő fa van az alábbi gráfokban?

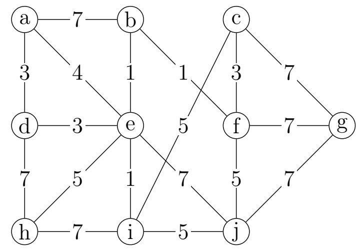


7. Válasszunk egy tetszőleges gyökérpontot az alábbi gráfokban és készítsünk feszítőfákat szélességi bejárással. Határozzuk meg az egyes pontok gyökértől való távolságát!





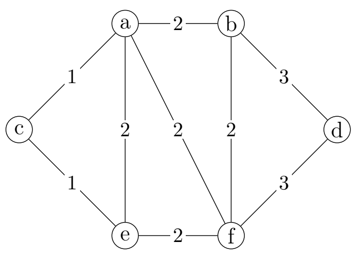


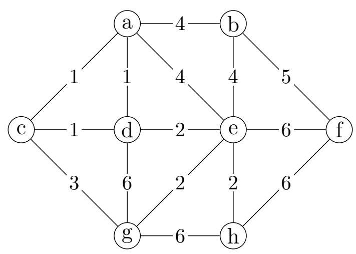


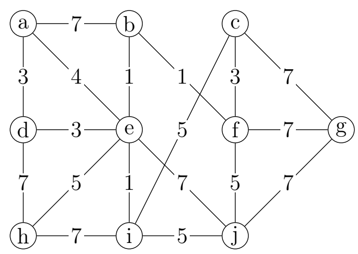
8. Indítsunk el egy BFS-t (szélességi bejárást) a lenti bal oldali irányított gráf s csúcsából!

9. **[ZH-2000]** Ketten a következő játékot játsszák. Adott n pont, kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúz egy élt. Az veszít, aki kört hoz létre. A kezdő vagy a másodiknak lépő játékos nyer, ha mindketten a lehető legjobban játszanak?

10. Keressünk minimális feszítőfát! Hány különböző minimális költségű feszítő fa van az alábbi gráfokban?







11. **[ZH-2005]** Hány minimális feszítőfája van a fenti jobb oldali ábrán látható gráf irányítatlan változatának, és mennyi a súlyuk?

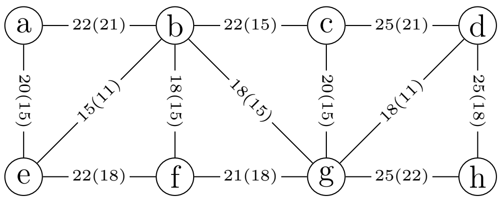
12. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfnak 11 csúcsa és 45 éle van, akkor G-nek van olyan csúcsa, ami legalább 9-edfokú.

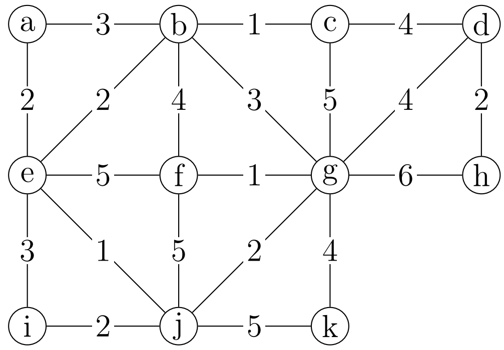
13. **[ZH-2015]** Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 100 csúcsa van, melyek bármelyikének a fokszáma legalább 33, továbbá G-nek van olyan csúcsa, melyből legalább 66 él indul. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő.

14. **[ZH-2016]** A G gráfnak $n+3$ csúcsa van: ebből 3 piros (a,b,c) és n zöld $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Két csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a színük különbözik. Hány 6 pontú kör van a G gráfban?

15. **[ZH-2012]** Tegyük fel, hogy a háromszöget nem tartalmazó, irányítatlan, 100 csúcsú G egyszerű gráf 4-reguláris, azaz minden fokszáma 4. Hány 3-élű útja van G-nek?

16. **[ZH-2015]** A lenti, bal oldali ábrán látható $G = (V, E)$ gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élén két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amelyen G minden pontja elérhető. Határozzuk meg egy lehető legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt.



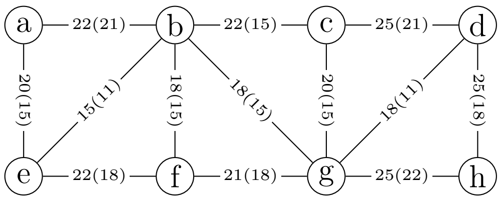


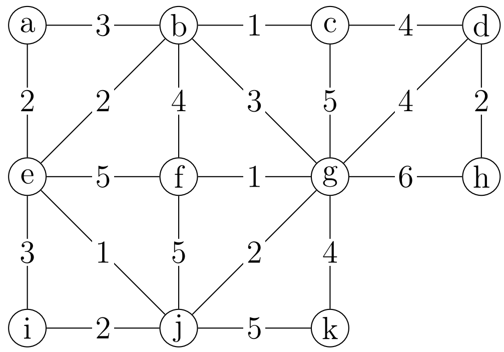
17. A fenti, jobb oldali gráf egy galaxis bolygóinak az úthálózatának egy tervét ábrázolja. Két bolygó akkor van összekötve egy éllel, ha azok közt hiperűr sztrádát tudunk felépíteni, az élek súlya az egyes sztrádák költsége. Mely sztrádákat építsük meg, ha a legkevesebbet szeretnénk költeni, és azt akarjuk, hogy az univerzum bármely bolygójából (közvetlenül vagy közvetve) el lehessen jutni bármely másik bolygóba? Mi a helyzet akkor, ha lehetőségünk van minden bolygón kiépíteni egy csillagkaput, melynek költsége 3? Ha egy bolygó rendelkezik csillagkapuval, akkor onnan bármely másik szintén csillagkapuval rendelkező bolygóba el tudunk jutni közvetlenül.

18. A G egyszerű gráfnak e olyan éle, aminek elhagyásával fát kapunk. Mutassuk meg, hogy G-nek még legalább két másik éle is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

19. **[PZH-2014]** Igazoljuk, hogy ha egy 6 csúcsú G gráf fokszáma 2, 2, 2, 4, 5, 5, akkor G nem egyszerű.

20. **[ZH-2015]** A lenti, bal oldali ábrán látható $G = (V, E)$ gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élén két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amelyen G minden pontja elérhető. Határozzuk meg egy lehető legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt.





21. A fenti, jobb oldali gráf egy galaxis bolygóinak az úthálózatának egy tervét ábrázolja. Két bolygó akkor van összekötve egy éllel, ha azok közt hiperűr sztrádát tudunk felépíteni, az élek súlya az egyes sztrádák költsége. Mely sztrádákat építsük meg, ha a legkevesebbet szeretnénk költeni, és azt akarjuk, hogy az univerzum bármely bolygójából (közvetlenül vagy közvetve) el lehessen jutni bármely másik bolygóba? Mi a helyzet akkor, ha lehetőségünk van minden bolygón kiépíteni egy csillagkaput, melynek költsége 3? Ha egy bolygó rendelkezik csillagkapuval, akkor onnan bármely másik szintén csillagkapuval rendelkező bolygóba el tudunk jutni közvetlenül.

22. **[PZH-2015]** Igazoljuk, hogy ha v egy véges G gráf páratlan fokú csúcsa, akkor G-ben van olyan út, amely v-t a G egy másik páratlan fokú csúcsával köti össze.

23. **[ZH-1999]** Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?

24. A $V = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ (számozott) pontokon hány olyan egyszerű G gráf adható meg, melynek $2n - 2$ éle van és két egyforma méretű összefüggő komponensből áll?

25. **[PZH-2015]** Tegyük fel, hogy a K_{2015} teljes gráf minden egyes élét kiszíneztük 1008 lehetséges szín valamelyikére. Bizonyítsuk be, hogy található a gráfnak egy u és v pontja valamint egy c szín úgy, hogy ne vezessen u-ból v-be olyan út, amelynek minden éle c színű.

26. **[ZH-1999]** Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?

27. **[PZH-2015]** Tegyük fel, hogy a K_{2015} teljes gráf minden egyes élét kiszíneztük 1008 lehetséges szín valamelyikére. Bizonyítsuk be, hogy található a gráfnak egy u és v pontja valamint egy c szín úgy, hogy ne vezessen u-ból v-be olyan út, amelynek minden éle c színű.