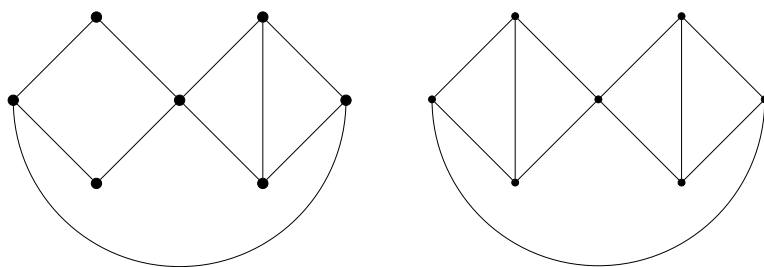


# A számítástudomány alapjai 2020. I. félév

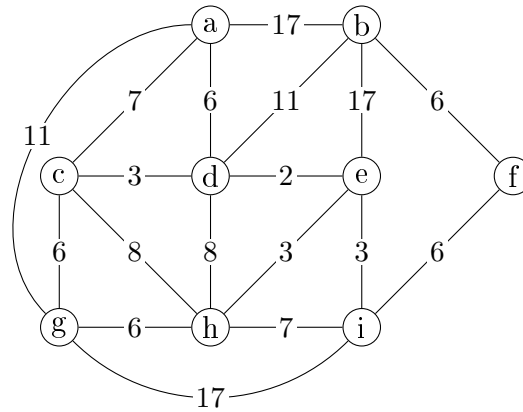
## 7. gyakorlat

1. Állapítsuk meg, hogy van-e az alábbi gráfokban Hamilton-kör! Ha van, mutassuk meg, ha nincs, bizonyítsuk be.



2. [ZH-2001] Legyen  $G$  a  $\{p_1, p_2, \dots, p_{2001}\}$  pontthalmazon az az egyszerű gráf, amire  $(p_i p_j \in E(G) \Leftrightarrow |i - j| \leq 2)$ . Van-e a  $G$ -ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör ill. Hamilton-út?
3. [ZH-2009] Legyenek  $G_1(V, E_1)$  és  $G_2(V, E_2)$  olyan egyszerű, összefüggő gráfok a  $V$  pontthalmazon, amelyekben van Euler-kör. Konstruáljuk meg a  $G_3(V, E_3)$  gráfot úgy, hogy  $E_3 = (E_1 \setminus E_2 \cup E_2 \setminus E_1)$ , vagyis  $G_3$ -ban akkor szomszédos két pont, ha  $G_1$ -ben, vagy  $G_2$ -ben szomszédosak, de mindkettőben nem. Igaz-e, hogy ha  $G_3$  összefüggő, akkor van benne Euler-kör?
4. [ZH-2015] 222 politikus mindegyike legalább 133 másikat ismer, akik közül legfeljebb 22-t utál. Az ismeretség és az utálat is kölcsönös. Bizonyítsuk be, hogy a 222 politikus úgy tudja élő láncsal körülvenni a Tüskecsarnokot, hogy a szomszédos láncszemek ismerjék, de ne utálják egymást.
5. [PZH-2010] Egy 12 egység hosszú drótból szeretnénk elkészíteni egy egységkocka élvázát, úgy, hogy a kocka csúcsainál forrasztunk. Legkevesebb hány darabra kell felvágni ehhez az eredeti drótunkat? Mi a válasz akkor, ha a testátlóknak is benne kell lenniük az élvázban, és persze a kiindulási drótunk is 4 testátlónnyival hosszabb?
6. [ZH-2011] Tegyük fel, hogy a 16 pontú  $K_{16}$  teljes gráf éleit 4-féle színnel színeztük ki úgy, hogy minden egyes színre az adott színnel színezett élek reguláris gráfot alkotnak  $K_{16}$  csúcsain. Igazoljuk, hogy kiválasztható két szín a 4 közül úgy, hogy az e két színnel színezett élekből található  $K_{16}$ -nak Hamilton-köre.
7. [PZH-2011] Tudjuk, hogy a 99 csúcsú, egyszerű  $G$  gráf maximális fokszáma  $\Delta(G) = 30$ , másrészt  $G$ -nek van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy a  $\bar{G}$  komplementergráfnak is van Euler-köre.
8. [PPZH-2011] Legyen  $G$  olyan véges gráf, aminek  $C$  egy Hamilton köre. Tegyük fel, hogy a  $G - C$  gráfnak van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy ekkor a  $G$  gráfnak is van Euler-köre.
9. [ZH-2012] Tegyük fel, hogy az egyszerű  $G$  gráfnak 100 csúcsa van, ezek közül  $u$  és  $v$  foka 45, a többi csúcsé pedig legalább 55. Igazoljuk, hogy  $G$ -ben van Hamilton út.
10. [ZH-2008] Tegyük fel, hogy az  $n$  csúcsú, irányítatlan  $G$  gráf bármelyik csúcsából  $G$ -nek legfeljebb  $\frac{n-2}{2}$  másik csúcsba lehet úton eljutni. Igazoljuk, hogy a  $\bar{G}$  komplementergráfnak van Hamilton köre.
11. [PZH-2017] A  $G$  egyszerű gráfnak 33 piros, 777 fehér, 333 zöld, 77 sárga csúcsa van. Két csúcs között pontosan akkor fut él, ha azok különböző színűek. Behúzható-e  $G$ -be néhány további él, úgy, hogy olyan egyszerű gráfot kapjunk, aminek van Euler-sétája?

12. **[ZH-2016]** Kritikus a helyzet: Abszurdisztán fővárosát, Mutyipusztát savköpő menyétek inváziója fenyegeti. A jobb oldali ábrán látható a főváros térképe: az egyes utak mellett álló számok az adott útvonal hosszát jelölik. A veszélyt – mint mindig – most is az ügyeletes szuperhős, Órarugógerincű Felpattanó hárítja el. Mesteri tervének végrehajtása mellett (miszerint helikopterről lúgot permetezve semlegesíti a betolakodókat) még ebben a válságos pillanatban is a közvagyon megóvása a legfőbb célja. Ezért amellet, hogy minden utcát végigpermetez és visszatér a szabadon választott kiindulási pontra, szeretné egyúttal minimalizálni a lerepült össztávot is. Segítsünk Órarugógerincűnek abban, hogyan válasszon útvonalat!



13. **[Codeforces #288]** Amíg apukája dolgozott, Tanya úgy döntött, hogy játszik egyet az apja jelszával. A jelszó egy  $n + 2$  karakterből álló sorozat. Tanya felírta a karaktersorozat mind az  $n$  darab 3 karakterből álló részsorozatát külön papírcetlikre, majd az eredeti jelszót kidobta. A kislány később rájött, hogy ezt nem kellett volna megtennie, ezért megpróbálja visszaállítani az eredeti jelszót a 3 betűs részletekből. Hozzunk létre olyan eljárást, ami segít Tanyának előállítani egy jelszót a megfelelő karakterhármasoknak, vagy megállapítani azt, ha ez nem lehetséges. Állítsunk elő egy lehetséges jelszót a következő karakterhármasokból:  $\{010, 101, 110, 001, 101, 010, 010, 101, 011, 010, 111, 101, 000\}$ .