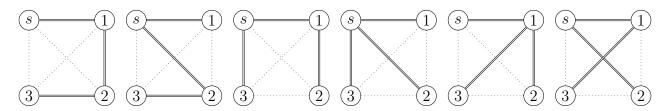
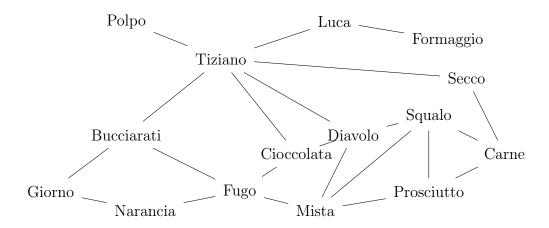
Gráf alapok

1. Az alábbi gráfok közül melyek izomorfak?



2. Az alábbi gráf az olasz maffia ismerettségi körét ábrázolja. A maffiózók nevei felelnek meg a gráf csúcsainak, a köztük futó élek pedig kölcsönös ismerettséget jelentenek. Jelölje a maffiózó ismerettségét a gráfban lévő fokszáma (pl. Giorno-nak 2). Ekkor ki a legismertebb maffiózó? Jelölje a maffiózó befolyását az ismerőseinek az ismerettségének (fokszámainak) az összege (például Giorno-nak 5). Ekkor ki a legbefolyásosabb maffiózó?



- 3. **[ZH-2014]** Legyenek a G egyszerű gráf csúcsai az 1, 2, ..., 10 számok, és két különböző csúcs között akkor fusson él, ha a két szám különbsége páratlan. Hány 4 hosszú köre van a G gráfnak?
- 4. Bizonyítsuk be, hogy bármely 13 ember között van olyan, aki legalább 6 másikat ismer vagy van köztük 3 olyan, akik páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretség kölcsönös.)
- 5. Van-e olyan egyszerű gráf, aminek a fokszámai
 - (a) 1, 2, 2, 3, 3, 3;
 - (b) 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4?
- 6. Találjuk meg (izomorfia erejéig) mindazon egyszerű gráfokat, amelyekre
 - (a) n = 5, e = 2;
- (c) n = 5, e = 7;
- (e) n = 5, e = 8.

- (b) n = 5, e = 3;
- (d) n = 4, e = 5;
- 7. Határozzuk meg az összes olyan véges, egyszerű G gráfot, aminek nincs két azonos fokú csúcsa.
- 8. Mutassuk meg, hogy ha ${\cal G}$ véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros. Ha ${\cal G}$ nem véges, akkor ez nem igaz.
- 9. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfnak 11 csúcsa és 45 éle van, akkor G-nek van olyan csúcsa, ami legalább 9-edfokú.

1

- 10. **[ZH-2015]** Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 100 csúcsa van, melyek bármelyikének a fokszáma legalább 33, továbbá G-nek van olyan csúcsa, melyből legalább 66 él indul. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő.
- 11. **[ZH-2016]** A G gráfnak n+3 csúcsa van: ebből 3 piros (a,b,c) és n zöld (v_1,v_2,\ldots,v_n) . Két csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a színük különbözik. Hány 6 pontú kör van a G gráfban?
- 12. **[ZH-2012]** Tegyük fel, hogy a háromszöget nem tartalmazó, irányítatlan, 100 csúcsú G egyszerű gráf 4-reguláris, azaz minden fokszáma 4. Hány 3-élű útja van G-nek?
- 13. Legyenek e, f és g a G egyszerű, összefüggő gráf különböző élei. Tegyük fel, hogy a G gráf összefüggő marad, bármely élét is hagyjuk el, ám a G-e-f és a G-e-g gráfok egyike sem összefüggő. Igazoljuk, hogy ekkor a G-f-g gráf sem összefüggő.
- 14. **[ZH-2000]** Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?
- 15. **[ZH-2000]** Rajzoljuk le azt a gráfot, melynek pontjai a 4 hosszú nullákból és egyesekből álló sorozatok és két csúcs akkor van éllel összekötve, ha egyik a másikból egy "forgatással" megkapható, azaz ha az egyik a (b_1, b_2, b_3, b_4) akkor a másik a (b_2, b_3, b_4, b_1) sorozathoz tartozó pont.
- 16. **[PZH-2014]** Igazoljuk, hogy ha egy 6 csúcsú G gráf fokszáma 2, 2, 2, 4, 5, 5, akkor G nem egyszerű.
- 17. [PZH-2015] Igazoljuk, hogy ha v egy véges G gráf páratlan fokú csúcsa, akkor G-ben van olyan út, amely v-t a G egy másik páratlan fokú csúcsával köti össze.
- 18. Bizonyítsuk be, hogy ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatók úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör.
- 19. **[ZH-1999]** Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?
- 20. A $V=\{1,2,\ldots,2n\}$ (számozott) pontokon hány olyan egyszerű G gráf adható meg, melynek 2n-2 éle van és két egyforma méretű összefüggő komponensből áll?
- 21. Egy $n \times n$ méretű T táblázatnak nincs két egyforma sora. Bizonyítsuk be, hogy T-nek van olyan oszlopa, amit törölve a maradék táblázatban sem lesz két egyforma sor.