

A számítástudomány alapjai 2020. I. félév

11. gyakorlat

1. Mely p prím(ek)re lesz (a) $p + 10$ és $p + 14$ prím? (b) $p^2 + 2$ prím? (c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ prím?
2. Számítsuk ki a $(372, 504)$ illetve $(612, 834)$ legnagyobb közös osztókat.
3. Oldogassunk lineáris kongruenciákat:

(a) $47x \equiv 44 \pmod{54}$	(d) $5x \equiv 13 \pmod{137}$	(g) $14x - 4 \equiv 80 \pmod{21}$
(b) $202x \equiv 157 \pmod{203}$	(e) $113x \equiv 77 \pmod{120}$	(h) [ZH-2015] $31x \equiv 13 \pmod{131}$
(c) $309x \equiv 451 \pmod{617}$	(f) $11x \equiv 12 \pmod{18}$	(i) [ZH-2016] $42x \equiv 33 \pmod{51}$

4. [ZH-2016] 100 villamosmérnök-hallgató jár SzA előadásra. Közülük azok a hallgatók, akiknek pzh-t kell írniuk, az előadás végén bedobnak fejenként 42 db egyforintost egy kalapba. Az így összegyűjtött pénzt a tankörvezető 128 forintként rollnikba csomagolja, amiket majd kisorsolnak a diplomaosztón. Végül éppen 100 forint maradt rollnizatlan. Hány hallgatónak kell pzt-h írnia? (A feladatbeli szereplők kitalált személyek: bárminemű hasonlóság a valósággal pusztán véletlen.)
5. [ZH-2015] Ura születésnapjára Tűzvirág egy 77 gyönggyel díszített, mangalicabőr tokot varrt Vérbulcsú ivótülkéhez. Annyira elégedett volt az eredménnyel, hogy Vérbulcsú hagyományőrző dorombegyűjtésének minden tagját is ugyanilyen tokkal lepte meg, hogy jól mutasson a csapat a tarsolylemezek mellett csüngő tülkökkel amikor fellépnek Dobogókőn a táltosünnep 50 személyes központi jurtájában. Mivel a kínai boltban százasaival árulják a gyöngyöket, 7 gyöngy kimarad, melyekkel Tűzvirág a hétköznapi pártáját ékesítette. Hányan dorombolnak Vérbulcsú zenekarában?
6. Számítsuk ki a $\varphi(533)$, $\varphi(2016)$, $\varphi(2017)$ és $\varphi(540)$ értékeket.
7. Oldogassunk lineáris kongruenciákat:

(a) $49^{49} \equiv 3 \pmod{15}$	(b) $3^{80}x \equiv 23 \pmod{100}$	(c) $4^{444}x \equiv 214 \pmod{363}$
----------------------------------	------------------------------------	--------------------------------------

8. Igazoljuk, hogy bármely hat egymást követő egész szám szorzata osztható 720-szal.
9. Hány olyan pozitív egész szám van, ami az $n = 2^3 \cdot 7^5 \cdot 11^2$ és $m = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$ számok közül legalább egynek osztója?
10. Bővítsük ki az egész számok halmazát a $\sqrt{5}$ -tel (és annak többszöröseivel). Bizonyítsuk be, hogy az így kapott algebrai struktúrában (gyűrűben) a 2 felbonthatatlan, de nem prím!
11. Legyen $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, és $n \geq 2$ esetén az n -edik Fibonacci szám $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Igazoljuk, hogy F_n és F_{n+1} relatív prímek.
12. Igazoljuk, hogy tetszőleges n szám 9-es osztási maradéka megegyezik a 10-es számrendszerben felírt alakjában szereplő számjegyei összegének 9-es maradékával.
13. Mi a 8-as oszthatósági szabály 9-es számrendszerben?
14. [ZH-1999] Relatív prímek-e a $2^{100} - 1$ és a $3^{100} - 1$ számok?
15. [ZH-2015] Határozzuk meg az $n = \binom{12}{6}$ pozitív osztóinak számát!
16. [ZH-2014] Hány pozitív osztója van $10!$ -nak?
17. [PZH-2015] Melyik az a legnagyobb m modulus, amelyre a $42x \equiv 2015 \pmod{m}$ lineáris kongruenciának megoldása az $x = 3$?

18. Egy n egész szám 45-szöröse 21 maradékot ad 78-cal osztva. Milyen maradékokat adhat n 130-cal osztva?
19. Öröm és boldogság: ma van Dzszenifer születésnapja. Ezért matek és földrajz helyett Britnival, a barátnőjével plázába mentek okostelefont nézni. Kipróbálták a legújabb, facebookon agyonlájkkolt, minden eddiginél okosabb születésnap appot és megállapították, hogy Dzszenifernek feltétlenül vennie kell egy rózsaszín szelfibotot a jóképű eladótól, ugyanis ma (2015-ben) az életkora osztója az aktuális évszámnak. Márpedig az app szerint ilyenkor különösen sok szerencse éri a horoszkópokban kellőképpen jártas beavatottakat. Meg tudjuk-e mondani a fizetős appra történő regisztráció nélkül, hogy legutóbb mikor történt ez meg és hogy legközelebb mikor fog ismét bekövetkezni Dzszenifer életében ez a csodálatos, születésnap konstelláció?
20. Dzsúlió már régóta gyűjt nagy álmára, hogy volt barátnője, Vanessza mobiltelefonon őrzött arcképét a bicepszére tetováltassa. Legjobb barátja, Rodzser tanácsára, míg össze nem jön az ehhez szükséges 35000 forint, átváltja az ezer forintosokban tartott megtakarítását euróra, amit a Rodzser által ajánlott Rikárdótól (az ismeretségre tekintettel) superkedvezményes 330 Ft-os árfolyamon vesz meg. Miután Rikárdó centekkel nem foglalkozik, Dzsúliónak éppen 140 Ft marad a megtakarításából, amiből Rodzserrel közösen lottószelvényt vesznek azzal, hogy a nyereményt majd felezik. Hány euró boldog birtokosának mondhatja magát Dzsúlió a sikeres tranzakció után?