Matematik 4

Övningsprov derivata och integraler

Namn

____

Klass

____

Provinfo

Passande tidsram till detta övningsprov är 120 minuter.

Del A: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

1) Derivera

a) $f\left(x\right)=e^{2x}-\sin x.$ *Endast svar krävs.*

b) $g\left(x\right)=x\cdot e^{x}.$ *Endast svar krävs.*

c) $h\left(x\right)=\dfrac{1}{2x+1}.$ *Endast svar krävs.*

3/0/0

2) Skissa grafen till funktionen $f\left(x\right)=\dfrac{x^{2}+3x+5}{0{,}5x}$ med hjälp av asymptoter.
Du behöver inte ange eventuella extrempunkter exakt.

1/1/0

3) En vattentank som innehåller 18 500 liter töms med hastigheten $v\left(t\right)$ liter/minut, där $v\left(t\right)=890-12t$ och t är tiden i minuter från tömningens början. Hur många liter rinner ut ur tanken under de första 15 minuterna?

2/0/0

4) Rebecka blåser upp en sfärisk såpbubbla. När bubblans radie är 5,0 cm ökar radien med hastigheten 0,30 cm/s. Hur snabbt ökar då volymen per sekund?

0/2/0

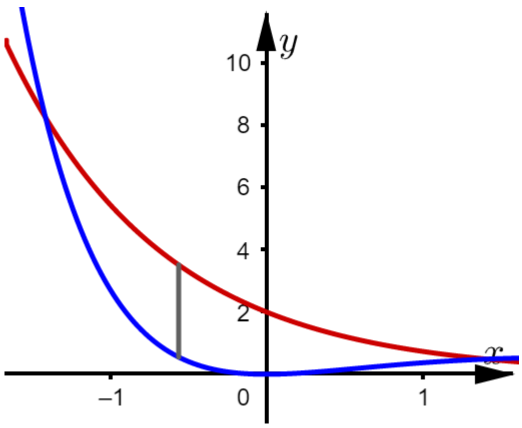
5) Företaget Konservburken tillverkar konserver med krossade tomater. På en viss sorts burkar anges att innehållet väger 400 gram. Som ett led i företagets kvalitetskontrollvägs innehållet i ett antal burkar. Det visar sig att vikten är normalfördelad med medelvikten 404 gram och standardavvikelsen 5,0 gram. För att uppfylla företagets viktkrav ska burkarna innehålla minst 395 gram krossade tomater.

Bestäm sannolikheten att en slumpvis vald konservburk innehåller minst 395 gram krossade tomater. 0/2/0

6) Ett område begränsas av *x*-axeln, kurvan $y = \sqrt{x}$ och linjen $x = a$, där *a* är ett positivt tal. Området får rotera kring *x*-axeln. Bestäm *a* så att rotationskroppens volym blir 86 volymenheter. 0/3/0

7) Ange en funktion *f* som har derivatan $f'(x) = x^2 \cdot e^{x^3+5}$. *Endast svar krävs.* 0/0/1

8) I det begränsade området mellan kurvorna $y = 2e^{-x}$ och $y = x^2 e^{-x}$ placeras en sträcka som är parallell med *y*-axeln enligt figuren. Bestäm den största möjliga längden av denna sträcka. Ange svaret både som exakt värde och som närmevärde med två decimaler.



0/2/1

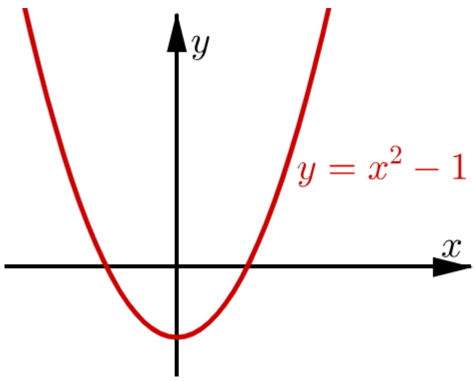
9) En funktion *f* har andraderivatan $f''(x) = \cos(2x)$. Funktionen har en extrempunkt med koordinaterna $\left(\frac{\pi}{2},\ -1\right)$

a) Avgör om den givna extrempunkten är en maximi- eller minimipunkt.

b) Bestäm funktionen *f*.

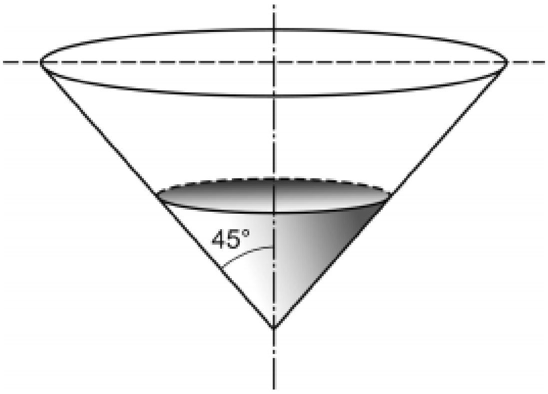
1/1/2

10) Undersök integralen $\int_a^b \left(x^2 - 1\right) \mathrm{d}x$ då $a < b$.
Bestäm vilka värden integralen kan anta.



0/2/3

11) Lasse och Marcus ska lösa följande uppgift:

> En behållare har formen av en kon som figuren visar. Behållaren är tom från början. Vatten tillförs med hastigheten $(25 + 0,2t)$ liter/min, där t är tiden i minuter från påfyllningens start.
>
> Med vilken hastighet stiger behållarens vattennivå då den är 7,0 dm?
>
> 
>

Lasse räknar först ut att det tar 13,6 minuter för vattennivån att bli 7,0 dm.

Marcus ska använda Lasses resultat för att lösa resten av uppgiften. Marcus börjar med att beteckna vattennivån med h och bestämmer volymen i behållaren uttryckt i h. Sedan beräknar han den efterfrågade hastigheten.

a) Utgå från Lasses resultat och genomför Marcus del av lösningen.

b) Visa att Lasse har räknat rätt, det vill säga att vattennivån efter 13,6 minuter är 7,0 dm.

0/2/3

Bedömningsanvisningar

1) a) $f'(x) = 2e^{2x} - \cos x$

Korrekt svar $+ E_P$

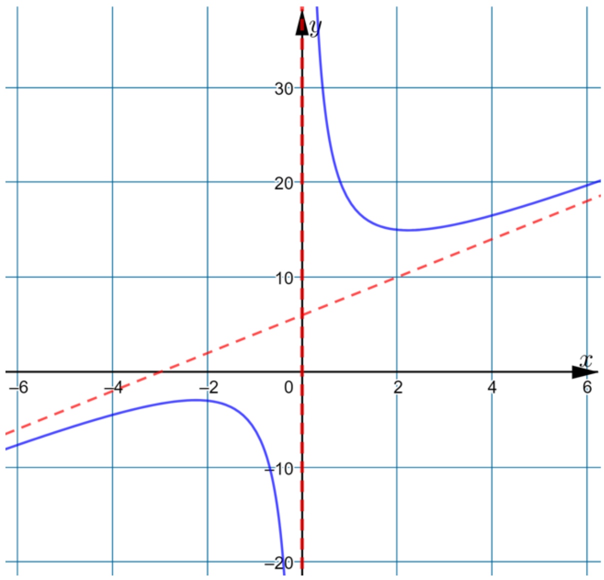
b) $g'(x) = e^{x}(x+1)$

Korrekt svar $+ E_P$

c) $h'(x) = -2 / (2x+1)^2$

Korrekt svar. $+ E_P$

2)



Godtagbar ansats, till exempel ritar ut en kurva som har en lodrät asymptot vid $x = 0$ $+ E_B$

Ritar en kurva som har asymptoterna $x = 0$ och $y = 2x + 6$. Funktionsvärdena är positiva för positiva x-värden och negativa för negativa x-värden. $+ C_B$

3) 12 000 liter

Godtagbar ansats, till exempel ställer upp ett korrekt integraluttryck för den mängd som rinner ut på 15 min $+ E_M$

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar. $+ E_P$

4) $94\ \text{cm}^3/\text{s}$

Redovisad godtagbar metod med korrekt derivata $\left(\dfrac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \dfrac{dr}{dt}\right)$ + C_{PL}
eller godtagbar differenskvot.

med godtagbart svar. + C_{PL}

5) 96 %

Godtagbar ansats, använder en inbyggd funktion på räknaren eller ställer upp ett godtagbart uttryck för den sökta sannolikheten, till exempel

$$\frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \int_{395}^{500} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-404}{5}\right)^2} \mathrm{d}x$$ + C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar. + C_M

6) $a = 7{,}4$

Godtagbar ansats, till exempel tecknar ett uttryck för volymen

$$\pi \int_0^a x \, \mathrm{d}x$$ + C_{PL}

med godtagbar fortsättning, till exempel kommer fram till att $\dfrac{\pi a^2}{2} = 86$ + C_{PL}

med korrekt lösning och svar. + C_{PL}

7) Till exempel $\dfrac{e^{x^3+5}}{3}$

Korrekt svar. + A_B

8) $2(\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3}-1} \approx 3{,}04 \;$ (vid $x = 1-\sqrt{3}$)

Godtagbar ansats, till exempel ställer upp ett uttryck för sträckans längd och undersöker dess maximala längd + C_{PL}

med korrekt avrundat svar och verifiering av maximum + C_P

med i övrigt godtagbar lösning och korrekt exakt svar. + A_P

9) a) Maximipunkt

Godtagbart visat extrempunktens karaktär. + E_B

b) $f(x) = -\dfrac{\cos(2x)}{4} - \dfrac{5}{4}$

Eleven har funnit en funktion som har $f''(x) = cos(2x)$, t ex + C_{PL}

$f(x) = -\frac{\cos(2x)}{4}$

Eleven inför konstant och bestämmer den till $-\frac{5}{4}$ med hjälp av den givna punkten. + A_{PL}

Eleven redovisar lösningen korrekt och använder ett i huvudsak korrekt och lämpligt matematiskt språk. + A_K

10) Integralens minsta värde är $-\frac{4}{3}$

Integralen kan bli godtyckligt stor.

Godtagbar ansats, till exempel inser att integralen har ett minsta värde då man integrerar mellan nollställena eller inser att integralen kan anta godtyckligt stora värden. + C_R

Godtagbar beräkning av det minsta värdet. + C_R

Kan med ett godtagbart resonemang dra slutsatsen att integralen kan anta godtyckligt stora värden. + A_R

Kan med ett resonemang visa att det finns ett minsta värde. + A_R

Lösningen är lätt att följa och förstå, i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt innehåller endast relevanta delar. Matematiska symboler och representationer är använda med god anpassning till syfte och situation. + A_K

11) a) 0,18 dm/min

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ett korrekt uttryck för volymen uttryckt i h och ställer upp kedjeregeln, $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ + C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar. + A_{PL}

b)

Godtagbar ansats, tecknar ett integraluttryck för den volym som tillförs eller bestämmer volymen, $360\ \mathrm{dm}^3$, då höjden är 7,0 dm + C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning som visar att vattennivån efter 13,6 minuter är 7,0 dm. + A_{PL}

Lösningen (deluppgift a och b) är lätt att följa och förstå, i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt innehåller endast relevanta delar. Matematiska symboler och representationer är använda med god anpassning till syfte och situation. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer vara likhetstecken, integraltecken, + A_K

derivatabeteckningar, integraluttryck, termer såsom integral, integrationsgränser, hänvisning till kedjeregeln etc.