

Parametrische Modellreduktion mit dünnen Gittern

Parametric model reduction using sparse grids

Ulrike Baur, Peter Benner, Technische Universität Chemnitz

Der Beitrag stellt einen neuen Ansatz zur Parameter-erhaltenden Modellreduktion parametrisierter, linearer Systeme vor. Das Verfahren ist eine Kopplung des balancierten Abschneidens mit Interpolation, so dass Fehlerabschätzungen für die Qualität des reduzierten Systems ableitbar sind. Durch die Verwendung dünner Gitter zur Diskretisierung des Parameterraumes kann das Verfahren auch auf Systeme mit mehreren Parametern angewendet werden.

This paper presents a parameter-preserving approach for model order reduction of parameterized, linear systems. The proposed method is a coupling of balanced truncation with interpolation. Thus, error estimates for the quality of the reduced-order system can be derived. The method can be applied to systems containing several parameters by using sparse grids for the discretization of the parameter space.

Schlagwörter: Parametrische Modellreduktion, balanciertes Abschneiden, Interpolation, dünne Gitter.

Keywords: Parametric model order reduction, balanced truncation, interpolation, sparse grids.

1 Einleitung

Heutzutage hat die numerische Simulation in vielen Anwendungsgebieten das Experiment abgelöst. Dabei wird das zugrundeliegende dynamische System durch mathematische Modellierung in ein System aus gewöhnlichen (ODEs) oder partiellen (PDEs) Differentialgleichungen überführt. Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ermöglicht das Generieren genauer Modelle, z. B. zur Beschreibung des Wärmeflusses in einem Bauteil. Die typischerweise große Anzahl auftretender Gleichungen wird als Ordnung oder Dimension des Systems bezeichnet. Sie verhindert den Einsatz der FEM in Simulationen auf Systemebene. Daher gilt es, die Ordnung durch geeignete Verfahren signifikant zu reduzieren, um eine anschließende numerische Simulation effizient durchführen zu können. Allerdings haben die reduzierten Systeme, wie sie mit den gängigen Modellreduktionsverfahren berechnet werden, den großen Nachteil, kaum Variationen am ursprünglichen physikalischen Modell zuzulassen. In vielen Anwendungen, wie z. B. im Designprozess von Mikrosystemen, werden Modifi-

kationen aber benötigt, um Änderungen an den Randbedingungen oder an der Geometrie schnell in den Simulationsprozess übernehmen zu können. Daher besteht der Bedarf nach neuen parametrischen Modellreduktionsverfahren, die die Ordnung von parametrisierten Systemen zuverlässig reduzieren und zusätzlich die Parameter im reduzierten System erhalten. Die Entwicklung von Verfahren dieser Art steht noch ganz am Anfang. Die meisten der bislang entwickelten Ansätze basieren auf multivariater Padé-Approximation [6, 8, 9, 10, 11, 12, 25, 30]. Sie unterscheiden sich in der Berechnungsart der Momente (implizit/explicit) und in der Auswahl der (gemischten) Momente, die für die Berechnung des reduzierten Systems verwendet werden. Die explizite Berechnung der Momente führt hier, wie in vergleichbaren Verfahren für nicht-parametrisierte Systeme, zu numerischen Instabilitäten. Daher werden in der Praxis meist implizite Ansätze verwendet. Für Systeme, die nur wenige (ein bis drei) Parameter enthalten, liefern diese Verfahren gute Ergebnisse. Allerdings existiert noch keine solide mathematische Basis, d. h. es existieren keine Fehlerabschätzer (nicht einmal lokal) und es ist unklar, welche

und wieviele Momente in die Berechnung eingehen sollen.

In dieser Arbeit wird ein anderer Ansatz zur parametrischen Modellreduktion vorgestellt. Er basiert auf einer Kopplung der Methode des balancierten Abschneidens (Balanced Truncation – BT), welche sehr erfolgreich zur Modellreduktion linearer, nicht-parametrisierter Systeme (im folgenden mit deterministisch bezeichnet) eingesetzt wird, mit (stückweise) polynomialer Interpolation. Durch den systemtheoretischen Hintergrund des balancierten Abschneidens können wir erste Fehlerschranken für die Methode herleiten. Desweiteren erlaubt der Gebrauch der Dünngittertechnik die Anwendung des Verfahrens auf Systeme mit einer größeren Anzahl von Parametern.

2 Grundlagen

Parametrisierte, lineare Systeme können in der folgenden allgemeinen Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(p)x(t) + B(p)u(t), \\ y(t) &= C(p)^T x(t),\end{aligned}\quad (1)$$

mit $(A(p), B(p), C(p)) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times q}$, wobei die Abhängigkeit der Systemmatrizen vom Parametervektor $p \in \mathbb{R}^d$ auch nichtlinear sein kann. Mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$ wird der Zustandsvektor bezeichnet, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ist der Eingangs-, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ der Ausgangsvektor. Um die Darstellung zu vereinfachen, ignorieren wir die Parameterabhängigkeit des Zustands und des Ausgangs beim Gebrauch der Notation

$$x(t) := x(t, p), \quad y(t) := y(t, p).$$

In vielen Anwendungen ist die Zustandsraumdimension n und damit die Anzahl der ODEs in (1) sehr groß und $m, q \ll n$. Es wird vorausgesetzt, dass $A(p)$ für alle betrachteten Parameterwerte stabil ist, d. h. alle Eigenwerte von $A(p)$ (bezeichnet mit $\Lambda(A(p))$) sind in der offenen linken Halbebene \mathbb{C}^- .

Durch den Einsatz von Modellreduktionsverfahren soll die Anzahl der ODEs reduziert werden, bei möglichst guter Abbildung des Eingangs-, Ausgangsverhaltens, welches durch die Übertragungsfunktion

$$G(s, p) = C(p)^T (sI_n - A(p))^{-1} B(p)$$

beschrieben wird. Zusätzlich sollen alle Parameter im reduzierten System erhalten bleiben. In nachfolgenden numerischen Simulationen wird dann das System (1) durch das reduzierte System

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}(p)\hat{x}(t) + \hat{B}(p)u(t), \\ \hat{y}(t) &= \hat{C}(p)^T \hat{x}(t),\end{aligned}\quad (2)$$

mit $(\hat{A}(p), \hat{B}(p), \hat{C}(p)) \in \mathbb{R}^{r \times r} \times \mathbb{R}^{r \times m} \times \mathbb{R}^{r \times q}$ ersetzt, wobei $r \ll n$ und $\|y - \hat{y}\| < \text{tol} \cdot \|u\|$ gelten soll.

Ein weit verbreitetes Verfahren zur Modellreduktion linearer, deterministischer Systeme ist das balancierte Abschneiden [24]. Im folgenden wird ein Hybrid-Verfahren aus balanciertem Abschneiden und Interpolation für die Ordnungsreduktion parameterabhängiger Systeme vorgestellt.

Zur besseren Veranschaulichung betrachten wir zunächst den eindimensionalen Parameterraum und eine einfache Parameterabhängigkeit bestehend aus einer Linearkombination konstanter Matrizen, die mit dem zu erhaltenden Parameter multipliziert werden. Die Erweiterung des Ansatzes auf höherdimensionale Parameterräume und allgemeinere Parameterabhängigkeiten wird im darauffolgenden Abschnitt beschrieben.

3 Hybrid-Verfahren zur Modellreduktion parameterabhängiger Systeme

3.1 Der eindimensionale Parameterraum

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf Systeme der Form (1) mit Abhängigkeit von nur einem Parameter $p \in [a, b]$ und $\Lambda(A(p)) \in \mathbb{C}^-$ für alle $p \in [a, b]$.

Die vorgeschlagene Methode besteht aus den folgenden Rechenschritten:

1. Wähle Interpolationsstützstellen $p_0, \dots, p_k \in [a, b]$.
2. Auf die $k + 1$ deterministischen Systeme mit Übertragungsfunktionen

$$G_j(s) := G(s, p_j) = C(p_j)^T (sI_n - A(p_j))^{-1} B(p_j),$$

$j = 0, \dots, k$, wende die Methode des balancierten Abschneidens an. Die resultierenden Systeme r_j -ter Ordnung mit den dazugehörigen Übertragungsfunktionen

$$\hat{G}_j(s) = \hat{C}_j^T (sI_{r_j} - \hat{A}_j)^{-1} \hat{B}_j$$

sind stabil und erfüllen für vorgegebene Toleranz ϵ die BT \mathcal{H}_∞ -Fehlerschranke [13]:

$$\|G_j - \hat{G}_j\|_\infty \leq 2 \left(\sum_{i=r_j+1}^n \sigma_i \right) < \epsilon, \quad (3)$$

wobei r_j minimal gewählt ist, so dass (3) erfüllt ist.

3. Durch Interpolation, z. B. nach dem Ansatz von Lagrange, erhält man eine Interpolationsfunktion

$$\hat{G}(s, p) = \sum_{j=0}^k l_j(p) \hat{G}_j(s) \quad (4)$$

mit Lagrange-Polynomen

$$l_j(p) = \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{p - p_i}{p_j - p_i}$$

für $j = 0, \dots, k$, die aus den reduzierten Systemmatrizen zusammengesetzt ist.

Dabei kann die Übertragungsfunktion des parameterabhängigen, reduzierten Systems in (4) wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\hat{G}(s, p) &= \sum_{j=0}^k l_j(p) \hat{C}_j^T (sI_{r_j} - \hat{A}_j)^{-1} \hat{B}_j \\ &= \sum_{j=0}^k \hat{C}_j(p)^T (sI_{r_j} - \hat{A}_j)^{-1} \hat{B}_j \\ &= \hat{C}(p)^T (sI_r - \hat{A})^{-1} \hat{B}, \quad \text{mit } r = \sum_{j=0}^k r_j\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\hat{C}(p)^T &= \begin{bmatrix} \hat{C}_1(p)^T \\ \vdots \\ \hat{C}_k(p)^T \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_j(p)^T = \left(\prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{p - p_i}{p_j - p_i} \right) \hat{C}_j^T, \\ \hat{A} &= \begin{bmatrix} (sI_{r_0} - \hat{A}_0)^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & (sI_{r_k} - \hat{A}_k)^{-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \vdots \\ \hat{B}_k \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Alternativ kann die Parameterabhängigkeit auch in die Diagonalblöcke $(sI_{r_j} - \hat{A}_j)^{-1}$ von \hat{A} oder in den Vektor \hat{B} verschoben werden.

Man hat somit ein reduziertes System zur Verfügung, mit welchem die parameterabhängige Übertragungsfunktion des Originalmodells (1) für jeden Parameter im Interpolationsintervall $[a, b]$ approximiert werden kann. Zusätzlich erfüllt $\hat{G}(s, p)$ die Interpolationsbedingungen

$$\hat{G}(s, p_j) = \hat{G}_j(s)$$

für $j = 0, \dots, k$. Aufgrund der Blockdiagonalgestalt von $\hat{G}(s, p)$ reduziert sich der Aufwand zur Auswertung in der numerischen Simulation von $\mathcal{O}(n^3)$ für $G(s, p)$ auf $\mathcal{O}((k+1) \max(r_j)^3)$ beim Gebrauch von $\hat{G}(s, p)$.

Zur Ordnungsreduktion der deterministischen Systeme im Schritt 2 des Verfahrens können für kleinere Systemdimensionen (bis etwa $n = 2000$) klassische Varianten des BT Verfahrens [29] eingesetzt werden. Diese finden sich z. B. in der Subroutine Library in Systems and Control Theory SLICOT¹.

Für größere Dimensionen, wie sie z. B. bei der Simulation mit Finite-Elemente Modellen in der Mikrosystemtechnik auftreten, bieten sich neuere Entwicklungen an. Diese Implementierungen des BT Verfahrens unterscheiden sich vor allem in der Lösung der auftretenden Lyapunovgleichungen, dem aufwändigsten Rechenschritt beim balancierten Abschneiden. Für große Systeme, deren Systemmatrix $A(p)$ schwachbesetzt (oder daten-sparse) ist, bieten sich iterative Verfahren zur Lösung der Lyapunovgleichungen an, welche die Lösung

in Form von Niedrigrangfaktoren approximieren [1, 2, 4, 5, 16, 17, 19, 23, 26, 27, 28].

Durch die Kombination der bekannten Fehlerschranken für das balancierte Abschneiden mit den Interpolationsfehlerabschätzungen ist es möglich, eine berechenbare Abschätzung für den Simulationsfehler im Parameterintervall $[a, b]$ anzugeben.

Unter der Annahme

$$G(s, \cdot) \in C^{k+1}([a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{q \times m}) \quad \forall s \in \mathbb{C}^+$$

erhalten wir folgende Abschätzung für den Fehler zwischen Original- und reduzierter Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned}& \sup_{\substack{s \in \mathbb{C}^+ \\ p \in [a, b]}} \|G(s, p) - \hat{G}(s, p)\| \\ &= \sup_{\substack{s \in \mathbb{C}^+ \\ p \in [a, b]}} \|G(s, p) - \sum_{j=0}^k l_j(p) \hat{G}_j(s)\| \\ &\leq \sup_{\substack{s \in \mathbb{C}^+ \\ p \in [a, b]}} \|G(s, p) - \sum_{j=0}^k l_j(p) G_j(s)\| + \\ &\quad \sup_{\substack{s \in \mathbb{C}^+ \\ p \in [a, b]}} \left\| \sum_{j=0}^k l_j(p) (G_j(s) - \hat{G}_j(s)) \right\| \\ &\stackrel{(3)}{\leq} \sup_{\substack{s \in \mathbb{C}^+ \\ p \in [a, b]}} \|R_k(G, s, p)\| + \epsilon \sup_{p \in [a, b]} \left| \sum_{j=0}^k l_j(p) \right|. \quad (5)\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $R_k(G, s, p) = G(s, p) - \hat{G}(s, p)$ das Restglied mit der Darstellung

$$R_k(G, s, p) = \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{\partial^{k+1}}{\partial p^{k+1}} G(s, \xi(p)) \right) \prod_{i=0}^k (p - p_i)$$

an einer Zwischenstelle $\xi(p) \in [\min_j p_j, \max_j p_j]$. Durch die spezielle Wahl der Stützstellen als Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms kann der Interpolationsfehleranteil in (5) bzgl. p minimiert werden [18].

Alternativ zur polynomialen Interpolation wäre auch der Gebrauch rationaler Interpolation denkbar. So ist $G(s, p)$ bei polynomialer Abhängigkeit der Matrizen vom Parameter auch rational in p , was rationale Interpolation sinnvoll erscheinen lässt. Dies wird in der Zukunft näher untersucht.

3.2 Mehrdimensionaler Parameterraum

Die Komplexität des für den eindimensionalen Parameterraum geschilderten Hybrid-Verfahrens zur Modellreduktion hängt neben der Systemgröße stark von der Anzahl der durchgeführten Modellreduktionen für deterministische Systeme, also von der Anzahl der Interpolationsstützstellen, ab.

Daher schlagen wir zur mehrdimensionalen Interpolation den Gebrauch von dünnen Gittern [7, 14, 32] für die

¹ <http://www.SLICOT.org>

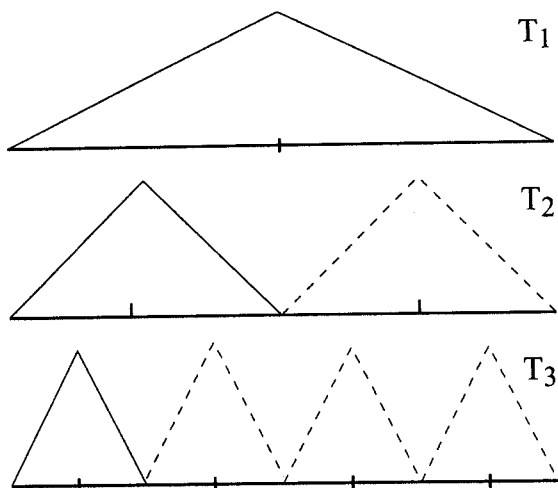


Bild 1: Basisfunktionen von T_1, T_2, T_3 .

Diskretisierung des Parameterraums vor, die im folgenden kurz eingeführt werden.

Wir betrachten zur besseren Veranschaulichung zunächst den eindimensionalen Raum $[0, 1]$, welchen wir mit einem äquidistanten (vollen) Gitter der Maschenweite $h_\ell = 2^{-\ell}$ unterteilen. Dazu assoziiert ist der $(2^\ell - 1)$ -dimensionale Raum der stückweise stetigen, linearen Funktionen S_ℓ , die auf dem Rand verschwinden. Dieser Raum kann nun unter Zuhilfenahme der Teilräume T_1, \dots, T_ℓ , siehe Abbildung 1, hierarchisch zerlegt werden [31]:

$$S_\ell = T_1 \oplus \dots \oplus T_\ell.$$

Dabei ist ein Teilraum T_j derart definiert, dass er alle stückweise stetigen, linearen Funktionen auf dem Gitter der Maschenweite 2^{-j} enthält, die an den Gitterpunkten aller größeren Gitter verschwinden. Es gilt:

$$\dim T_j = 2^{j-1}.$$

Für eine Funktion $G(s, \cdot) \in C^2([0, 1])$, die auf dem Rand verschwindet, wird der Interpolant G_I im Raum S_ℓ gesucht:

$$G_I = \sum_{j=1}^{\ell} g_j, \quad \text{mit } g_j \in T_j.$$

Mit der Halbnorm

$$|G(s, \cdot)|_\infty := \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 G(s, \cdot)}{\partial p^2} \right| \mid 0 \leq p \leq 1 \right\},$$

erhalten wir die Schranke für den Interpolationsfehler

$$|G(s, \cdot) - G_I|_\infty \leq \mathcal{O}(h_\ell^2), \quad (6)$$

wobei der Anteil eines Teilraums T_j am Interpolanten abgeschätzt werden kann:

$$\|g_j\|_\infty \leq \frac{1}{2} 4^{-j} |G(s, \cdot)|_\infty.$$

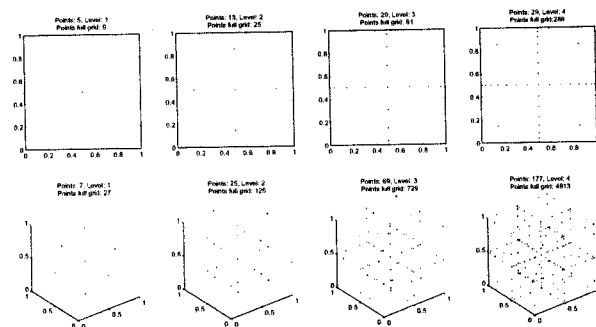


Bild 2: MATLAB Sparse Grid Interpolation Toolbox: Tschebyscheff-Gauss-Lobatto Gitter.

Zur Interpolation ausreichend glatter Funktionen im mehrdimensionalen Parameterraum $[0, 1]^d$,

$$G(s, \cdot) : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^{2d} G(s, \cdot)}{\partial p_1^2 \dots \partial p_d^2} \in C^0([0, 1]^d),$$

werden im folgenden Teilräume T_j mit geringem Anteil am Interpolationsfehler (6) weggelassen. Dies bedeutet, dass der Interpolant G_I nicht mehr im $(2^\ell - 1)^d$ -dimensionalen Raum der stückweise d -linearen Funktionen

$$S_\ell = \bigoplus_{j_1=1}^{\ell} \dots \bigoplus_{j_d=1}^{\ell} T_{\underline{j}}, \quad \underline{j} := (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{N}^d,$$

gesucht wird, sondern in

$$\tilde{S}_\ell = \bigoplus_{|\underline{j}|_1 \leq \ell+d-1} T_{\underline{j}}.$$

Damit einhergehend reduziert sich die Anzahl der Gitterpunkte des ursprünglich rechtwinkligen Gitters $\mathcal{O}(h_\ell^{-d})$ und wir erhalten ein sogenanntes dünnes Gitter der Dimension $\mathcal{O}(h_\ell^{-1}(\log(h_\ell^{-1}))^{d-1})$. Der Interpolationsfehler ist nahezu unverändert beschränkt bei

$$|G(s, \cdot) - G_I|_\infty \leq \mathcal{O}(h_\ell^2(\log(h_\ell^{-1}))^{d-1}).$$

Alternativ zu stückweise linearen Funktionen können auch stückweise polynomiale Funktionen zur Interpolation verwendet werden [3]. Wie bei eindimensionaler Interpolation mit Polynomen bietet sich hier die Wahl von Tschebyscheff-Stützstellen an Stelle von äquidistanten Abständen an. Das daraus resultierende dünne Tschebyscheff-Gauss-Lobatto Gitter ist für $d = 2, 3$ und verschiedene Gittertiefen $\ell = 1, \dots, 4$ in Bild 2 dargestellt.

4 Numerische Beispiele

4.1 Eindimensionaler Parameterraum

Die Konvektions-Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t, \xi) = \Delta \mathbf{x}(t, \xi) + \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{x}(t, \xi) + b(\xi)u(t), \quad \xi \in (0, 1)^2$$

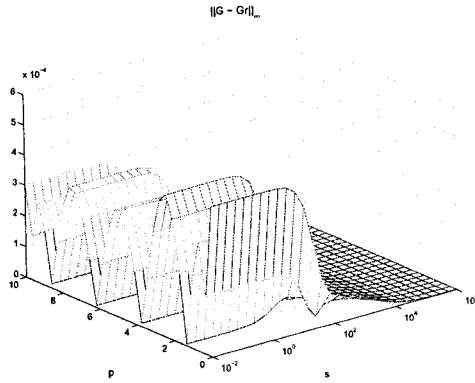


Bild 3: \mathcal{H}_∞ -Fehler.

wird mit der Finiten-Differenzen-Methode und $n = 400$ Gitterpunkten im Ortsgebiet $(0,1)^2$ approximiert. Der Parameter $p \in [0, 1]$ bestimmt den konvektiven Transport in eine Koordinatenrichtung. Das resultierende ODE System

$$\dot{x}(t) = (A + pA_1)x(t) + bu(t)$$

und eine Ausgangsgleichung

$$y(t) = c^T x(t)$$

beinhalten Vektoren $b, c \in \mathbb{R}^n$ aus gleichverteilten Zufallszahlen.

Mit einer Wahl von 6 Tschebyscheff-Stützstellen im Parameterintervall $[0, 1]$ und einer Fehlertoleranz-Vorgabe von $\epsilon = 10^{-4}$ fürs balancierte Abschneiden werden reduzierte Systeme der Ordnungen $r_j \in \{4, 5, 6\}$ für $j = 1, \dots, 6$ berechnet. Der Fehler zwischen $G(s, p)$ und $\hat{G}(s, p)$ nach Interpolation mit Lagrange-Polynomen ist in Bild 3 dargestellt. Es zeigt sich eine gute Approximation durch das reduzierte System; der maximale Fehler auf dem gewählten 30×30 Gitter ist 4.9×10^{-4} .

4.2 Mehrdimensionaler Parameterraum

4.2.1 Konvektions-Diffusionsgleichung

Wir betrachten die Konvektions-Diffusionsgleichung aus Beispiel 4.1, wobei das Ortsgebiet $(0,1)^2$ mit $n = 900$ Gitterpunkten diskretisiert wird. Zusätzlich wird der konvektive Transport in beide Koordinatenrichtungen variiert, beim Gebrauch der Parameter $p_1, p_2 \in [0, 1]$ im ODE System

$$\dot{x}(t) = (A + p_1A_1 + p_2A_2)x(t) + bu(t).$$

Für die Diskretisierung des Parameterraums und einer bilinearen Interpolation auf dem resultierenden dünnen Gitter haben wir die MATLAB Sparse Grid Interpolation Toolbox [20, 21] verwendet. Bei Vorgabe einer absoluten Toleranz für die Gitterverfeinerung von 10^{-4} , die zu einer Tiefe von $\ell = 2$ und 13 Dünngitterpunkten führt, erhalten wir eine gute Approximation der ursprünglichen Übertragungsfunktion im gesamten Parameterraum mit geschätztem Interpolationsfehler von

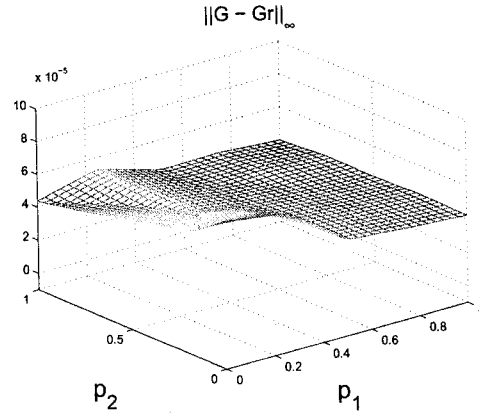


Bild 4: \mathcal{H}_∞ -Fehler.

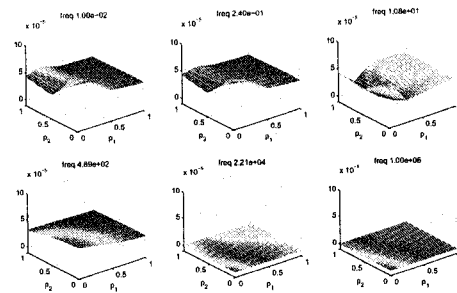


Bild 5: Fehler für verschiedene Frequenzen.

4.8×10^{-5} . Dabei wurde die BT Modellreduktion an den Dünngitterpunkten mit Vorgabe einer Fehlertoleranz von $\epsilon = 10^{-4}$ durchgeführt, was zu Systemen reduzierter Ordnungen $r_j \in \{5, 6\}$ für $j = 1, \dots, 13$ führte. Der Fehler zwischen $G(s, p)$ und $\hat{G}(s, p)$ in der \mathcal{H}_∞ -Norm wird als Maximum der absoluten Fehler zu 30 verschiedenen Frequenzwerten approximiert, siehe Bild 4. Für ausgewählte Frequenzen zeigt Bild 5 den absoluten Fehler.

Nach Hinzunahme eines weiteren (künstlichen) Parameters $p_3 \in [0.1, 1]$ erhalten wir ein System mit dreidimensionalen Parameterraum

$$\dot{x}(t) = (p_3A + p_1A_1 + p_2A_2)x(t) + bu(t).$$

Die Interpolation im Dünngitterraum wird für dieses Beispiel mit vorgegebener maximaler Tiefe von $\ell = 1$ und mit Wahl von Tschebyscheff-Stützstellen und stückweise polynomialen Interpolationspolynomen [3] durchgeführt. Die vorgegebene Genauigkeit bei der Modellreduktion $\epsilon = 10^{-4}$ an den 7 Interpolationspunkten ergibt reduzierte Systeme der Größe 7 (und 10 an einem Punkt). Der geschätzte Interpolationsfehler ist 2.6×10^{-5} . Die \mathcal{H}_∞ -Fehler sind für feste Parameterwerte $p_3 = 0.1$ und $p_3 = 1$ in den Bildern 6 und 7 dargestellt.

4.2.2 Thermodynamisches Modell einer Mikroschubdüse

Bei der Entwicklung von integrierten Schaltungen (ICs) und Mikrosystemen ist die Kontrolle des thermischen

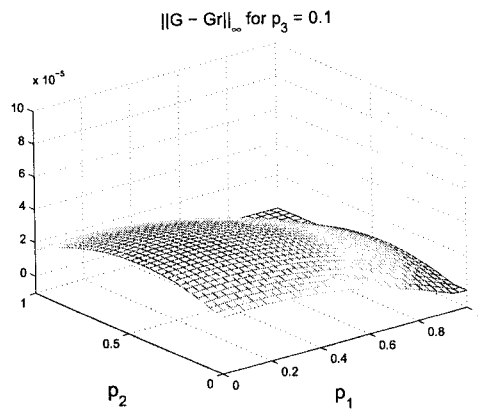


Bild 6: \mathcal{H}_∞ -Fehler.

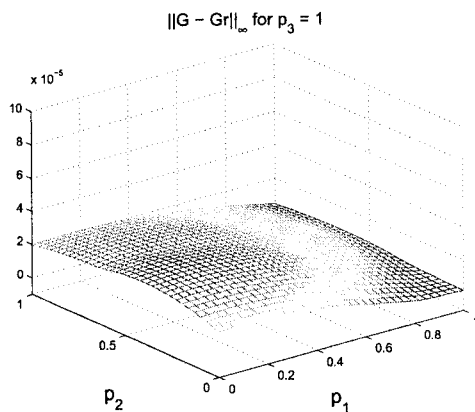


Bild 7: \mathcal{H}_∞ -Fehler.

Verhaltens besonders wichtig. So treten in diesen Systemen verschiedene elektro-thermische und thermoelektrische Effekte auf, wie z. B. der Joule-Effekt, der Temperaturerhöhung durch Widerstände an elektrischen Strömen beschreibt. In einem integrierten Schaltkreis muss diese Wärme abgeführt werden, um die Temperatur in der Baugruppe innerhalb der Betriebsparameter zu halten. Eine weitere wichtige Anforderung an ein thermisches Kompaktmodell ist die Unabhängigkeit von den Randbedingungen, weil ein Chip-Hersteller nicht vorhersagen kann, unter welchen Bedingungen der Chip eingesetzt werden wird.

Wir betrachten ein Ersatzmodell aus der Oberwolfach Benchmark Kollektion², da das ursprüngliche Modell [22] in keinem Computer lesbaren Format zur Verfügung steht. Es beschreibt den Wärmeverlauf in einer Mikroschubdüse, wobei der Wärmeverlauf über die Ränder über Konvektionsrandbedingungen modelliert wird. Als einzelne Wärmequelle dient ein Block aus Poly-Silicium (PolySi) im oberen Bereich der Düse, den Ausgang bildet die Temperatur in der Mitte des Heizers, siehe Bild 8. Die Filmkoeffizienten $\{p_i\}_{i=1}^3$ der Konvektionsrandbedingungen, sollen variabel bleiben, um den Einfluss verschiedener Umgebungstemperaturen simulieren zu können. Sie gehen als Faktoren vor Diagonal-

² www.imtek.de/simulation/benchmark

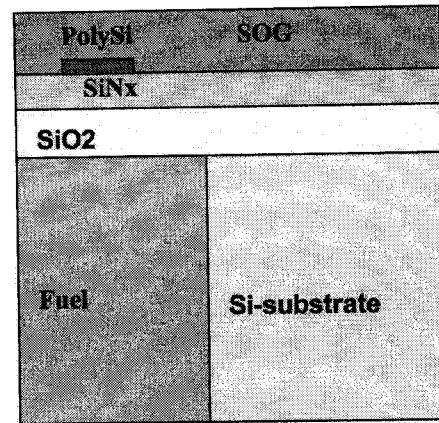


Bild 8: Querschnitt der Mikroschubdüse.

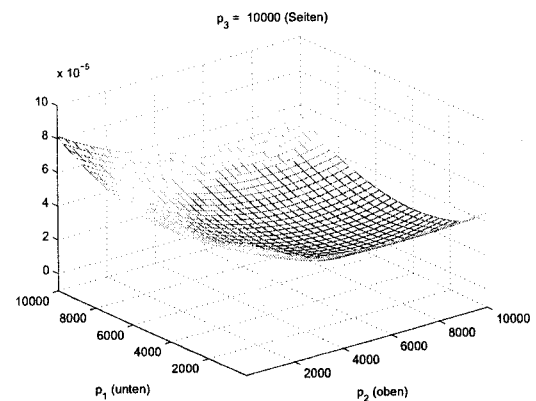


Bild 9: \mathcal{H}_∞ -Fehler.

matrizen A_i , die aus der Diskretisierung der Randbedingungen resultieren, in das System ein:

$$E\dot{x}(t) = (A_0 + \sum_{i=1}^3 p_i A_i)x(t) + bu(t),$$

$$y(t) = c^T x(t),$$

und sollen im reduzierten System erhalten bleiben. Die Systemgröße lautet $n = 4725$, die Werte der Filmkoeffizienten $\{p_i\}_{i=1}^3$ liegen zwischen 1 und 10^4 .

Die Interpolation im dreidimensionalen Parameterraum $[1, 10^4]^3$ wird wie im dreidimensionalen Fall in Beispiel 4.2.1 mit polynomialen Basisfunktionen und vorgegebener Gittertiefe von $\ell = 1$ berechnet. An den 7 Gitterpunkten des Tschebyscheff-Gauss-Lobatto Gitters wird die Systemgröße mit BT und Fehlertoleranz von $\epsilon = 10^{-4}$ reduziert. Die resultierenden Systeme haben die Ordnungen $r_j \in \{44, 45, 48\}$. Der absolute Interpolationsfehler zwischen den Stützstellen wird auf 3.3×10^{-5} geschätzt. Für $p_3 = 10^4$ und $p_2 = 10^4$ sind die \mathcal{H}_∞ -Fehler in den Bildern 9 und 10 dargestellt.

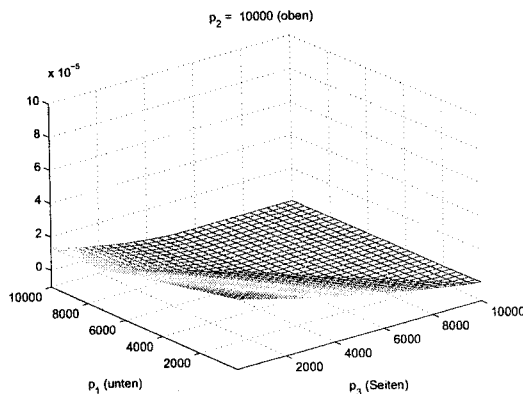


Bild 10: \mathcal{H}_∞ -Fehler.

5 Ausblick

Neben der polynomialen Interpolation soll als weitere Möglichkeit im eindimensionalen Parameterraum die rationale Interpolation untersucht werden.

Für die mehrdimensionale Interpolation muss im folgenden untersucht werden, wie eine explizite Darstellung der Übertragungsfunktion bzw. eine Transformation des „Modells“ $\hat{G}(s, p)$ in ein Zustandsraummodell erhalten werden kann.

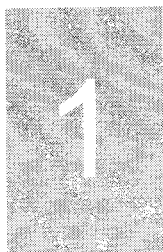
An Stelle des balancierten Abscheidens soll weiterhin der Einsatz anderer Modellreduktionsverfahren im Frequenzraum, wie z. B. der \mathcal{H}_2 -optimalen Modellreduktion [15], an den Interpolationsstützstellen getestet werden.

Literatur

- [1] J. Badía, P. Benner, R. Mayo, and E. Quintana-Ortí. Solving large sparse Lyapunov equations on parallel computers. In B. Monien and R. Feldmann, editors, *Euro-Par 2002 – Parallel Processing*, number 2400 in Lecture Notes in Computer Science, pages 687–690. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.
- [2] R. Badía, P. Benner, R. Mayo, and E. Quintana-Ortí. Parallel algorithms for balanced truncation model reduction of sparse systems. In J. Dongarra, K. Madsen, and J. Wasniewski, editors, *Applied Parallel Computing: 7th International Conference, PARA 2004, Lyngby, Denmark, June 20-23, 2004*, number 3732 in Lecture Notes in Computer Science, pages 267–275. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2006.
- [3] V. Barthelmann, E. Novak, and K. Ritter. High dimensional polynomial interpolation on sparse grids. *Adv. Comput. Math.*, 12(4):273–288, 2000.
- [4] U. Baur and P. Benner. Gramian-based model reduction for data-sparse systems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(1):776–798, 2008.
- [5] P. Benner. Solving large-scale control problems. *IEEE Control Systems Magazine*, 14(1):44–59, 2004.
- [6] B. Bond and L. Daniel. Parameterized model order reduction of nonlinear dynamical systems. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer-Aided Design*, November 2005.
- [7] H. Bungartz. *Dünne Gitter und deren Anwendung bei der adaptiven Lösung der dreidimensionalen Poisson-Gleichung*. Dissertation, Inst. f. Informatik, TU München, June 1992.
- [8] L. Daniel, O. Siong, L. Chay, K. Lee, and J. White. A multiparameter moment-matching model-reduction approach for generating geometrically parameterized interconnect performance models. *IEEE Trans. Comput.-Aided Design Integr. Circuits Syst.*, 23(5):678–693, May 2004.
- [9] R. Eid, B. Salimbahrami, B. Lohmann, E. B. Rudnyi, and J. G. Korvink. Parametric order reduction of proportionally damped second-order systems. *Sensors and Materials, Tokyo*, 19(3):149–164, 2007.
- [10] O. Farle, V. Hill, P. Ingelström, and R. Dyczij-Edlinger. Ordnungsreduktion linearer zeitinvarianter Finite-Elemente-Modelle mit multivariater polynomieller Parametrierung (Model Order Reduction of Linear Finite Element Models Parameterized by Polynomials in Several Variables). *at-Automatisierungstechnik*, 54(4):161–169, 2006.
- [11] L. Feng. Parameter independent model order reduction. *Math. Comput. Simulation*, 68(3):221–234, 2005.
- [12] L. Feng and P. Benner. A robust algorithm for parametric model order reduction based on implicit moment matching. *PAMM Proc. Appl. Math. Mech.*, 7:1021501–1021502, 2008.
- [13] K. Glover. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞ norms. *Internat. J. Control*, 39:1115–1193, 1984.
- [14] M. Griebel. A parallelizable and vectorizable multi-level algorithm on sparse grids. In *Parallel algorithms for partial differential equations (Kiel, 1990)*, volume 31 of *Notes Numer. Fluid Mech.*, pages 94–100. Vieweg, Braunschweig, 1991.
- [15] S. Gugercin, A. C. Antoulas, and C. Beattie. \mathcal{H}_2 Model Reduction for large-scale dynamical systems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 30(2):609–638, 2008.
- [16] S. Gugercin and J.-R. Li. Smith-type methods for balanced truncation of large systems. In P. Benner, V. Mehrmann, and D. Sorensen, editors, *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*, volume 45 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 49–82. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, Germany, 2005.
- [17] S. Gugercin, D. C. Sorensen, and A. C. Antoulas. A modified low-rank Smith method for large-scale Lyapunov equations. *Numer. Algorithms*, 32(1):27–55, 2003.
- [18] M. Hanke-Bourgeois. *Grundlagen der numerischen Mathematik und des wissenschaftlichen Rechnens*. Teubner BG GmbH, 2006.
- [19] I. Jaimoukha and E. Kasenally. Krylov subspace methods for solving large Lyapunov equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31:227–251, 1994.
- [20] A. Klimke. Sparse Grid Interpolation Toolbox – user’s guide. Technical Report IANS report 2007/017, University of Stuttgart, 2007.
- [21] A. Klimke and B. Wohlmuth. Algorithm 847: spinterp: Piecewise multilinear hierarchical sparse grid interpolation in MATLAB. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 31(4), 2005.
- [22] C. Lasance. Two benchmarks to facilitate the study of compact thermal modeling phenomena. *IEEE Trans. Components and Packaging Technologies*, 24(4):559–565, 2001.
- [23] J.-R. Li and J. White. Low rank solution of Lyapunov equations. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 24(1):260–280, 2002.
- [24] B. C. Moore. Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction. *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-26(1):17–32, 1981.
- [25] C. Moosmann and J. Korvink. Automatic parametric MOR for MEMS design. In *Tagungsband GMA-Fachausschuss 1.30, Modellbildung, Identifizierung und Simulation in der Automatisierungstechnik*, Workshop

- am Bostalsee, pages 89–99, 2006.
- [26] T. Penzl. A cyclic low-rank Smith method for large sparse Lyapunov equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21(4):1401–1418, 1999/00.
 - [27] Y. Saad. Numerical solution of large Lyapunov equations. In M. A. Kaashoek, J. H. van Schuppen, and A. C. M. Ran, editors, *Signal Processing, Scattering, Operator Theory and Numerical Methods*, pages 503–511. Birkhäuser, 1990.
 - [28] V. Simoncini. A new iterative method for solving large-scale Lyapunov matrix equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 29(3):1268–1288, 2007.
 - [29] M. S. Tombs and I. Postlethwaite. Truncated balanced realization of a stable nonminimal state-space system. *Internat. J. Control*, 46(4):1319–1330, 1987.
 - [30] D. S. Weile, E. Michielssen, E. Grimme, and K. Gallivan. A method for generating rational interpolant reduced order models of two-parameter linear systems. *Appl. Math. Lett.*, 12(5):93–102, 1999.
 - [31] H. Yserentant. On the multilevel splitting of finite element spaces. *Numer. Math.*, 49(4):379–412, 1986.
 - [32] C. Zenger. Sparse grids. In *Parallel algorithms for partial differential equations (Kiel, 1990)*, volume 31 of *Notes Numer. Fluid Mech.*, pages 241–251. Vieweg, Braunschweig, 1991.

Manuskripteingang: 09. Januar 2009.



Dr. Ulrike Baur ist wissenschaftliche Mitarbeiterin in der Professur für Mathematik in Industrie und Technik in der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz. Hauptarbeitsgebiete: Numerische Methoden für Modellreduktion, hierarchische Matrizen.

Adresse: Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik, 09107 Chemnitz,
Fax: + 49-(0)371-531-22509,
E-Mail: baur@mathematik.tu-chemnitz.de



Prof. Dr.rer.nat. Peter Benner Inhaber der Professur Mathematik in Industrie und Technik in der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz. Hauptarbeitsgebiete: Numerische Methoden für Modellreduktion, Regelung und optimale Steuerung dynamischer Systeme sowie Numerische Lineare Algebra und Parallele Algorithmen.

Adresse: siehe oben,
E-Mail: benner@mathematik.tu-chemnitz.de