1. Calcolare il flusso entrante attraverso la superficie $S = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0; 1 \le z \le 2\}$ (normale $\overrightarrow{n}$ interna).

$$\iint_S < \overrightarrow{F}, \overrightarrow{n} > ds$$

essendo

$$\overrightarrow{F} : R^3 \to R^3 \quad \text{definito} \quad \text{da} : F(x, y, z) = (3x, -2y, -z)$$

Svolgimento: Primo metodo: utilizzando la definizione. Parametrizzo la superficie in modo tale da deteminare l'orientamento della normale verso l'interno della superficie stessa. $S = \left\{ : x = x, y = y, z = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$ dove (x, y) variano nel dominio $D\left((x, y) \in R^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right)$

La normale alla superficie è: $\overrightarrow{n} = (-z_x, -z_y, 1) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$.

$\iint_S < \overrightarrow{F}, \overrightarrow{n} > ds = \iint_D \left[-\frac{3x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2}\right] dxdy$ dove $D = \{(x, y) \in R^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

passando in coordinate polari si ottiene:

$\int_0^{2\pi} \int_1^2 \left(-3\rho \cos^2\theta + 2\rho \sin^2\theta - \rho\right) \rho d\rho d\theta = -7\pi.$

Secondo metodo: applicando Stokes. Essendo la divergenza di $\overrightarrow{F} : div\overrightarrow{F} = 0$, esiste $\overrightarrow{G}$ tale che rotore di $\overrightarrow{G}$ eguaglia $\overrightarrow{F}$:

Cerco $\overrightarrow{G} = (0, M, N)$ risolvendo il sistema: $-N_x = -2y; M_x = -z; N_y - M_z = 3x$

integrando le prime due uguaglianze si ottiene: $N = 2xy + \psi(y, z); M = -xz$; che sostituite nella terza equazione ci danno l'uguaglianza:

$2x + \psi_y(y, z) + x = 3x$; da cui deduciamo che $\psi_y(y, z) = 0$ e quindi $\psi(y, z)$ è una costante che assumiamo uguale a zero.

Quindi abbiamo trovato che $\overrightarrow{G} = (0, -xz, 2xy)$. Per il teorema di Stokes $\iint_S < \overrightarrow{F}, \overrightarrow{n} > ds = \int_{\delta S} \overrightarrow{G} ds = \int_{\delta S} 0dx - xzdy + 2xydz$

Il bordo $\delta S = C_1 \cup C_2$ così definite tenuto conto dell'orintamento dovuto:

$C_1 = \{x = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta, z = 2\}$ (orientamento antiorario) $C_2 = \{x = \sin\theta, y = \cos\theta, z = 1\}$ (orientamento orario)

Ne segue che $\int_{\delta S} 0dx - xzdy + 2xydz = \int_{C_1} -xzdy + 2xydz + \int_{C_2} -xzdy + 2xydz = -8\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta + \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = -7\pi.$

Terzo metodo: applicando il teorema della divergenza.

$\iint_S < \overrightarrow{F}, \overrightarrow{n} > ds = -\iint_{S_1 \cup S_2} < \overrightarrow{F}, \overrightarrow{n} > ds$ dove $S_1 = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 \le 4; z = 2\}$ $S_2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 \le 1; z = 1\}$

La normale esterna alla superficie S_1 è $\overrightarrow{n_1} = (0,0,-1)$. per cui $\iint_{S_1} < \overrightarrow{F}, \overrightarrow{n} > ds = \iint_{S_1} z ds = 2 \iint_{S_1} ds = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho d\rho d\theta = 8\pi$

La normale esterna alla superficie S_2 è $\overrightarrow{n_2} = (0,0,1)$. per cui $\iint_{S_2} < \overrightarrow{F}, \overrightarrow{n} > ds = \iint_{S_2} -z ds = - \iint_{S_2} ds = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho d\rho d\theta = -\pi$

Ne segue $\iint_S < \overrightarrow{F}, \overrightarrow{n} > ds = -8\pi + \pi = -7\pi$

2. Calcolare il volume del solido:
   $V = \left\{(x,y,z) \in R^3 : 2z^2 \leq 10 - y^2 - x; 1 \leq x \leq 6\right\}$
   Il solido è un tronco di paraboloide a sezione ellittica limitato da due piani .
   Primo Metodo. Si integra per sezioni:
   $volume = \int\int\int_V dxdydz = \int_1^6 \left[\int\int_D dydz\right] dx$
   dove $D = \left\{(y,z) \in R^2 : \frac{y^2}{10-x} + \frac{z^2}{\frac{10-x}{2}} \leq 1\right\}$
   Calcoliamo $\int\int_D dydz$ introducendo coordinate polari:
   $\left(y = \sqrt{10-x}\rho\cos\theta, z = \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{2}}\rho\sin\theta\right)$
   e tenendo conto che lo Jacobiano della trasformazione è: $|J| = \frac{(10-x)}{\sqrt{2}}\rho$
   $\int\int_D dydz = \frac{(10-x)}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho d\rho d\theta = \frac{(10-x)}{\sqrt{2}\pi}$
   quindi $\int\int\int_V dxdydz = \int_1^6 \left[\int\int_D dydz\right] dx = \int_1^6 \frac{(10-x)}{\sqrt{2}\pi} dx = \frac{65\pi}{2\sqrt{2}}$
   Secondo Medodo. Si integra per fili:
   $volume = \int\int\int_V dxdydz = \int\int_{D_1} \left[\int_1^{10-\left(y^2+2z^2\right)} dx\right] dydz - \int\int_{D_2} \left[\int_1^{10-\left(y^2+2z^2\right)} dx\right] dydz$
   dove $D_1 = \left\{(y,z) \in R^2 : \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{\frac{9}{2}} \leq 1\right\}$ e $D_2 = \left\{(y,z) \in R^2 : \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} \leq 1\right\}$
   Calcolo: $\int\int_{D_1} \left[\int_1^{10-\left(y^2+2z^2\right)} dx\right] dydz = \int\int_{D_1} \left[9 - \left(y^2 + 2z^2\right)\right] dydz$
   Introducendo coordinate polari: $\left(y = 3\rho\cos\theta, z = \frac{3}{\sqrt{2}}\rho\sin\theta\right)$
   e tenendo conto che lo Jacobiano della trasformazione è: $|J| = \frac{9}{\sqrt{2}}\rho$
   si ha: $\int\int_{D_1} \left[9 - \left(y^2 + 2z^2\right)\right] dydz = \frac{9}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(9 - 9\rho^2\right) \rho d\rho d\theta = \frac{81}{2\sqrt{2}}\pi$
   essendo $D_2 = \left\{(y,z) \in R^2 : \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} \leq 1\right\}$
   $\int\int_{D_2} \left[\int_6^{10-\left(y^2+2z^2\right)} dx\right] dydz = \int\int_{D_1} \left[4 - \left(y^2 + 2z^2\right)\right] dydz$
   Introducendo coordinate polari: $\left(y = 2\rho\cos\theta, z = \sqrt{2}\rho\sin\theta\right)$
   e tenendo conto che lo Jacobiano della trasformazione è: $|J| = 2\sqrt{2}\rho$

si ha: $\int\int_{D_1}\left[9-\left(y^2+2z^2\right)\right]dydz = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(4-4\rho^2\right)\rho d\rho d\theta = 4\sqrt{2}\pi$

In conclusione:

$volume = \int\int\int_V dxdydz = \int\int_{D_1}\left[\int_1^{10-\left(y^2+2z^2\right)}dx\right]dydz - \int\int_{D_2}\left[\int_1^{10-\left(y^2+2z^2\right)}dx\right]dydz =$
$\frac{81}{2\sqrt{2}}\pi - 4\sqrt{2}\pi = \frac{65\pi}{2\sqrt{2}}$

3. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$

essendo
$\omega = \left(y+\frac{x}{\sqrt{1+x^2+z^2}}\right)dx + xdy + \frac{z}{\sqrt{1+x^2+z^2}}dz$
e la curva $\gamma = \left(x=\sin t, y=\frac{2}{\pi}t, z=\cos t; 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$
soluzione:
Primo metodo:

La forma differenziale ω è definita su tutto R^3, che è un insieme semplicemente connesso, verifichiamo che la forma è anche chiusa:

indicando con
$A(x,y,z) = \left(y+\frac{x}{\sqrt{1+x^2+z^2}}\right); B(x,y,z) = x; C(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{1+x^2+z^2}}$
si verifica facimente che: $A_y = B_x = 1; A_z = C_x = -\frac{xz}{\left(\sqrt{(1+x^2+z^2)}\right)^3}; B_z = C_y = 0$.

La forma differenziale è quindi esatta e possiamo affermare che esiste una funzione potenziale $U(x,y,z)$ tale che:
$U_x = y+\frac{x}{\sqrt{1+x^2+z^2}}; U_y = x; U_z = \frac{z}{\sqrt{1+x^2+z^2}}$
Integro la prima uguaglianza rispetto alla variabile x ottenendo:
$U(x,y,z) = yx+\sqrt{1+x^2+z^2}+\varphi(y,z)$
sostituendo tale espressione nella seconda uguaglianza abbiamo:
$x+\varphi_y(y,z) = x$;da cui $\varphi_y(y,z) = 0$; e quindi $\varphi(y,z) = h(z)$;per cui la funzione $U(x,y,z) = yx+\sqrt{1+x^2+z^2}+h(z)$.

Sostituendo nella terza uguaglianza abbiamo:
$U_z = \frac{z}{\sqrt{1+x^2+z^2}}+h'(z) = \frac{z}{\sqrt{1+x^2+z^2}}$; e quindi $h'(z) = 0$;ovvero $h(z)$ =costante che possiamo assumere uguale a zero.

Per cui la funzione potenziale si scrive:
$U(x,y,z) = yx+\sqrt{1+x^2+z^2}$
Indicando con $P(0,0,1)$ e $Q(1,1,0)$ gli estremi della curva , $\int_\gamma\omega = U(Q) - U(P) = \sqrt{2}+1-\sqrt{2} = 1$

Secondo metodo:
Applicando la definizione:
$\int_a^b\left(A(x(t),y(t),z(t))x'(t)+B(x(t),y(t),z(t))y'(t)+C(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right)dt$
si ha:
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{2}{\pi}t+\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)\cos t+\frac{2}{\pi}\sin t-\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{2}}\right]dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[t\cos t+\sin t\right]dt = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} =$
1