ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2006-2007
Tracce delle lezioni del 14,15 e 16 febbraio 2007

February 14, 2007

1 Esempi

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{1}$$

dove le funzioni a, b sono continue a tratti in un intervallo $I = (\overline{x}, +\infty)$ dell'asse reale (non è escluso il caso in cui I coincida con $\mathbb{R}$, ossia che $\overline{x} = -\infty$).

Se le funzioni a e b sono costanti, allora (*1*) diviene un'equazione "a coefficienti costanti" la cui risolubilità è stata trattata nei corsi di Analisi e può essere affrontata anche utilizzando la trasformata di Laplace. Esistono tuttavia nelle applicazioni vari casi in cui il modello matematico è rappresentato da un'equazione tipo (*1*) con a e/o b non a coefficienti costanti. Un primo esempio è l'equazione di Scrödinger monodimensionale

$$w'' + \frac{2m}{H^2}(E - V(x))w = 0 \tag{2}$$

dove :

m rappresenta la massa dell'elettrone;

H è la costante di Planck normalizzata (i.e. $H = h/(2\pi)$, h = costante di Planck);

E è l'energia dell'elettrone;

V è il potenziale applicato;

w è una funzione legata alla funzione d'onda ($|w(x)|^2$ rappresenta la probabilita' che l'elettrone occupi effettivamente la posizione x).

L'equazione (2) è di tipo (*1*) con

$$a(x) = 0, \qquad b(x) = \frac{2m}{H^2}(E - V(x)).$$

Nel corso della lezione è stata analizzata l'equazione (2) nei casi seguenti:

1. **Gradino di potenziale :**

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{con } V_0 > E > 0) \tag{3}$$

2. **Barriera di potenziale :**

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } 0 < x < X \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{con } V_0 > E > 0). \tag{4}$$

3. **Buca di potenziale :**

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } 0 < x < X \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{con } V_0 < E < 0). \tag{5}$$

Un altro esempio è l'**equazione di Bessel,** ossia l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{6}$$

dove n è un parametro reale, equazione che sarà esaminata in seguito.

2 Studio qualitativo.

Si consideri di nuovo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea (1). Come si è detto, nel caso in cui i coefficienti a e/o b non siano costanti (o costanti a tratti), determinare tutte le soluzioni di (1) può non essere semplice. Poiché lo spazio delle soluzioni di (1) ha dimensione 2, per la risolubilità di (1) è sufficiente determinare due soluzioni di (1) linearmenti indipendenti. In realtà è sufficiente conoscerne una, come ora mostreremo.

Moltiplicando l'equazione (1) per $e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$ si ottiene

$$e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} y'' + a(x) e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} y' + b(x) e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} y = 0$$

ossia

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0, \tag{7}$$

dove

$$p(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$$
$$q(x) = b(x) e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$$

L'equazione (7) prende nome di *equazione lineare in forma autoaggiunta ed è* è **equivalente** a (1), nel senso che

le soluzioni di (1) sono tutte e sole quelle di (7).

Si osservi in particolare che la funzione p in (7) è positiva. Vale il seguente:

Teorema - *Sia u una soluzione di (7) e sia $u(x) \neq 0$ per $x \in [x_0, x_1] \subset I$. Allora la funzione*

$$v(x) = u(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{p(r)u^2(r)} dr \tag{8}$$

è anch'essa soluzione di (7) ed è linearmente indipendente da u.

Per verificare che v è soluzione di (7), è sufficiente derivare e sostituire in (7). Per verificare che u e v siano linearmente indipendenti, come dovrebbe essere ben noto, è sufficiente provare che il determinante della matrice wronskiana

$$\begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix}$$

è positivo.

In virtù di quanto detto, ogni soluzione y di (7) [o equivalentemente di (1)] è rappresentata dalla formula

$$y(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x)$$

dove u, v sono soluzioni di (7), v è data da (8) e c_1, c_2 sono due opportune costanti reali.

3 L'oscillazione

Definizione - Sia y una soluzione di (1), diversa dalla soluzione nulla; y si dice *oscillante* se esiste una successione $\{x_n\}$, con $x_n \to +\infty$, tale che $y(x_n) = 0$, ossia se y ha infiniti zeri che si "accumulano all'infinito". In caso contrario y si dice *nonoscillante.*

Poiché per (1) vale la proprietà dell'unicità della soluzione rispetto ai dati iniziali, il grafico di una soluzione oscillante di (1) "taglia" l'asse x infinite volte (per $x \to +\infty$).

Vale il seguente:

Teorema di Sturm - *Tutte le soluzioni nonbanali di (1) hanno lo stesso carattere rispetto all'oscillazione, ossia o tutte oscillano o tutte nonoscillano.*

In virtù di tale risultato allora non possono coesistere per una stessa equazione di tipo (1) soluzioni oscillanti e nonoscillanti; pertanto (1) si dice *oscillante* o *nonoscillante* a seconda che tutte le sue soluzioni (diverse dalla soluzione nulla) siano oscillanti o nonoscillanti.

E' evidente che (1) è oscillante se e solo se lo è (7). Cio' premesso, si ha il seguente:

Teorema di confronto di Sturm - *Si considerino le due equazioni*

$$(p_1(x)y')' + q_1(x)y = 0, \tag{9}$$

$$(p_2(x)y')' + q_2(x)y = 0, \tag{10}$$

dove per ogni x sufficientemente grande

$$p_1(x) \geq p_2(x) \qquad \text{e} \qquad q_1(x) \leq q_2(x).$$

Se (9) è oscillante, allora (10) è oscillante
Se (10) è nonoscillante, allora (9) è nonoscillante.

L'equazione (9) è chiamata *minorante* e (10) *maggiorante.* Il motivo di tale denominazione è dovuto al caso in cui $p_1(x) = p_2(x) = 1$. In questo caso tali equazioni si riducono, rispettivamente, a

$$y'' + q_1(x)y = 0,$$
$$y'' + q_2(x)y = 0,$$

e tale denominazione è evidente, in quanto per ogni x grande si ha $q_1(x) \leq q_2(x)$.

Il Teorema di confronto di Sturm non sempre consente di stabilire se una assegnata equazione lineare del secondo ordine sia oscillante oppure no. Ad esempio, tale teorema non è applicabile all'equazione

$$y'' + \frac{1}{x}y = 0. \tag{11}$$

Un altro criterio di oscillazione è il seguente

Teorema di Leigthon -
(i) L'equazione (7) è oscillante se

$$\int^{\infty} \frac{1}{p(x)}dx = \int^{\infty} q(x)dx = \infty.$$

(ii) L'equazione (7) è nonoscillante se

$$\int^{\infty} \frac{1}{p(x)}dx < +\infty, 0 \leq \int^{\infty} q(x)dx < +\infty$$

oppure se

$$q(x) \leq 0 \qquad \textit{per ogni } x \textit{ sufficientemente grande.}$$

- ESEMPI

Applicando il Teorema di Leigthon si ottiene facilmente:
1) L'equazione (11) è oscillante. Così pure è oscillante l'equazione

$$y'' + \frac{2x^2+1}{4x^2+4}y = 0.$$

2) L'equazione

$$y'' + \frac{1-2x^2}{4x^2+4}y = 0$$

è nonoscillante.

3) L'equazione di Bessel (6) è oscillante. Infatti, in forma autoaggiunta essa diviene

$$(xy')' + \frac{x^2-n^2}{x}y = 0,$$

e quindi dal criterio di Leigthon (parte i) si ha l'asserto, in quanto

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad q(x) = \frac{x^2-n^2}{x}.$$

4 L'equazione di Bessel (caso n intero positivo)

Come detto, si chiama **equazione di Bessel** l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{B}$$

dove n è un parametro reale.

Nel caso particolare in cui n sia un intero nonnegativo, si può dimostrare che tra le soluzioni di (B) vi sono le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \tag{12}$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie* e godono delle seguenti proprietà:

1. se n è pari, allora J_n è una serie di polinomi pari;
2. se n è dispari, allora J_n è una serie di polinomi dispari;
3. $J_0(0+) = 1$; $J_n(0+) = 0$ per n intero positivo.
4. Le funzioni J_n sono funzioni oscillanti e smorzate, ossia $\lim_{x\to+\infty} J_n(x) = 0$.

5 La funzione Gamma Euleriana

Si chiama *Gamma Euleriana* la funzione

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Tale integrale converge per ogni valore positivo del parametro reale x e quindi la funzione Gamma Euleriana è definita in $(0, \infty)$. Essa gode delle seguenti proprietà (di immediata verifica):

1. $\Gamma(1) = 1$;

2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (e quindi $\Gamma(2) = 1$);

3. $\Gamma(x+2) = x(x+1)\Gamma(x)$;

4. $\Gamma(x+3) = x(x+1)(x+2)\Gamma(x)$;

   ....

5. $\Gamma(x+n) = x(x+1).....(x+n-1)\Gamma(x)$;

Ponendo in (5) $x = 1$ si ha poi l'importante proprietà

$$\Gamma(n+1) = n!$$

ossia **la funzione Gamma Euleriana è l'estensione al caso continuo del concetto di fattoriale.**

Come conseguenza delle relazioni 1) ,...5) si ha che la funzione Γ è nota, quando siano noti i valori che Γ assume in $(0,1]$. Infatti se Γ è nota in $(0,1]$, usando 2) si ottiene che Γ è nota anche in $(1,2]$. Usando poi 3) si ottiene che Γ è nota anche in $(2,3]$, e cosi̇̀ via. Tale risultato puo' essere migliorato. Infatti è possibile provare che per $x \in (0,1/2]$ vale la relazione

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

e da tale relazione ne segue che se Γ è nota in $(0,1/2]$, allora Γ è nota anche in $[1/2,1)$.

In conclusione:

I valori della funzione Γ sono noti, non appena siano noti i valori che Γ assume in $(0,1/2]$.

Per tale motivo i valori di Γ vengono usualmente tabulati per $x \in (0,1/2]$.

Usando le relazioni 2), ...5) è possibile poi estendere la definizione della funzione Γ anche sul semiasse negativo, ad eccezione dei punti $0,-1,-2,-3,...$ Infatti da 2) si ha per $x \neq 0$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1);$$

poichè il secondo membro ha senso anche per $x \in (-1, 0)$ si puo' usare tale relazione per estendere la definizione di Γ anche all'intervallo $(-1, 0)$. In altre parole si pone

$$\Gamma(x) =_{\text{def}} \frac{1}{x}\Gamma(x+1) \qquad \text{se } x \in (-1, 0).$$

Usando poi le relazioni 3)..5) si puo' procedere nell'estensione della definizione di Γ sul semiasse negativo. Precisamente si ha

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &=_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)}\Gamma(x+2) \qquad \text{se } x \in (-2, -1) \\
\Gamma(x) &=_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\Gamma(x+3) \qquad \text{se } x \in (-3, -4) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si osservi infine che per quanto riguarda il comportamento della funzione Γ nei punti $x = 0, x = -1, x = -2,$ ..... si ha

$$\lim_{x \to -n} |\Gamma(x)| = +\infty \tag{13}$$

con $n = 0, 1, 2, ...$

6 Funzioni di Bessel (caso n reale)

Indicata con Γ la funzione Gamma Euleriana, per ogni $n \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{14}$$

sono soluzioni dell'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{B}$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie.* Se n è intero positivo, poiché $\Gamma(k + n + 1) = (n + k)!$, l'espressione (14) si riduce a quella vista in precedenza.

Nel caso particolare in cui n sia un intero negativo, i primi n termini della serie (14) sono nulli, in quanto $|\Gamma(k+n+1)| = +\infty$. Ad esempio, per $J_{-7}(x)$ si ha

$$J_{-7}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-6)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-7}. \tag{15}$$

Poiché $|\Gamma(k-6)| = +\infty$ se $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, i primi 7 termini di (15) sono nulli e quindi la somma in tale serie inizia effettivamente da $k = 7$, ossia

$$J_{-7}(x) = \sum_{k=7}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-6)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-7}.$$

Vale il seguente:

Teorema
(i) Fissato $n \in \mathbb{R}$, le funzioni J_n e J_{-n} sono entrambe soluzioni di (B).
(ii) Se n è intero, i.e. $n \in \mathbb{Z}$, allora

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x),$$

e quindi J_n e J_{-n} sono linearmente dipendenti.
(iii) Se n è reale, ma non intero, i.e. $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, allora J_n e J_{-n} sono linearmente indipendenti.

Pertanto se $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ricordando che lo spazio delle soluzioni di (B) ha dimensione 2, dal Teorema precedente (punto (iii)) si ha che tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x), \tag{16}$$

dove c_1,c_2 sono due arbitrarie costanti reali. Scegliendo poi in (16)

$$c_1 = \frac{\cos\ \pi n}{\sin\ \pi n}, \qquad c_2 = \frac{-1}{\sin\ \pi n}$$

si ottiene la soluzione di (B) data da

$$Y_n(x) = \frac{\cos\ \pi n}{\sin\ \pi n} J_n(x) - \frac{1}{\sin\ \pi n} J_{-n}(x) \qquad (n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Le funzioni Y_n si chiamano *funzioni di Bessel di seconda specie* e, per quanto appena detto, sono anch'esse soluzioni di (B).

Nel caso infine in cui n sia intero, si definiscono le funzioni di Bessel di seconda specie nel modo seguente:

$$Y_n(x) = \lim_{p \to n} \left(\frac{\cos\ \pi p}{\sin\ \pi p} J_p(x) - \frac{1}{\sin\ \pi p} J_{-p}(x) \right) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

e si può provare che anche in tal caso le funzioni Y_n sono soluzioni di (B).

Inoltre le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n sono linearmente indipendenti da J_n, sia nel caso n intero che nel caso $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$; pertanto per ogni n reale tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$d_1 J_n(x) + d_2 Y_n(x),$$

dove d_1 e d_2 sono due arbitrarie costanti reali.

Infine si chiamano *funzioni di Hankel* le funzioni

$$H_n^{\pm}(x) = J_n(x) \pm j Y_n(x)$$

dove j rappresenta l'unità immaginaria.

7 Relazioni di ricorrenza

Per le funzioni di Bessel valgono le seguenti formule:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) &= x^n J_{n-1}(x) \\ \frac{d}{dx}\left(x^{-n} J_n(x)\right) &= -x^{-n} J_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Da tali formule si ottengono poi le cosidette *formule di ricorrenza*

$$\begin{aligned} x J_n'(x) &= x J_{n-1}(x) - n J_n(x) \\ x J_n'(x) &= n J_n(x) - x J_{n+1}(x) \\ 2 J_n'(x) &= J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \\ 2n J_n(x) &= x J_{n-1}(x) + x J_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Le precedenti formule continuano a valere anche per le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n.