

ANALISI MATEMATICA 3

A.A. 2006-2007

ESERCIZI - parte TERZA

March 4, 2007

1 Distribuzioni

1.1 Generalità

Sia u la funzione

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

ESERCIZIO 1.1 - Calcolare la derivata, nel senso delle distribuzioni, di:

$$\begin{array}{lll} 3e^{5t}\delta(t-1); & u(t) - u(t-8); & 3e^{5t} + e^{-4t}\delta(t); \\ (t^2 + 2t - 6)\delta(t); & u(t) + 5t\delta(t); & (t^2 + 2t)\delta(t+1); \\ \sin t + \delta(t); & (\sin t)\delta(t-5); & (\sin t)\delta(t). \end{array}$$

ESERCIZIO 1.2 - Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$$\begin{array}{l} \sin(2t) \cdot \delta'(t) = 0 \\ \sin(2t) \cdot \delta'(t) = -2\delta(t) \\ \sin(2t) \cdot \delta'(t) = \delta'(t) \\ \sin(2t) \cdot \delta'(t) = u(t) + 2\delta(t). \end{array}$$

ESERCIZIO 1.3 - Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$$\begin{aligned}
5t\delta'(t) + \delta(t) &= \delta'(t) \\
5t\delta'(t) + \delta(t) &= -4\delta(t) \\
5t\delta'(t) + \delta(t) &= \delta'(t) + 5u(t).
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.4 - Date le funzioni

$$\begin{aligned}
f(t) &= \begin{cases} 1-t & \text{se } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\
g(t) &= \begin{cases} t & \text{se } t \in (1, 2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},
\end{aligned}$$

calcolare Df , Dg , $D[e^t f(t)]$, $D[e^{-t} g(t)]$, $e^t Df$, $e^{-t} Dg$ [Il simbolo D indica la derivata nel senso delle distribuzioni].

ESERCIZIO 1.5 - Quali tra le seguenti sono distribuzioni? In caso affermativo calcolarle.

$$\begin{aligned}
T_1 &= e^{5t}\delta'(t+1); & T_2 &= u(t)\delta(t); & T_3 &= t^{-4}\delta(t-4); \\
T_4 &= t^2 u(t)\delta(t); & T_5 &= t^2[\delta(t-1) - \delta'(t)]; & T_6 &= |t|(t^2+2)\delta(t+2); \\
T_7 &= (\sin t)\delta(t-4); & T_8 &= (\sin t^2)\delta(t+1); & T_9 &= (\sin t)u(t)\delta(t-3).
\end{aligned}$$

1.2 Trasf. Fourier di Distribuzioni

ESERCIZIO 1.6 - Quale delle seguenti distribuzioni è una distribuzione temperata?

$$\begin{aligned}
&2t + \sin 5t; & t\delta(t) + t\delta(t-1); & t + e^t; \\
&t + e^t\delta(t); & e^{-t}\delta(t-1); & e^{-t} + \delta(t); \\
&\cos t + \delta(t+4); & 1 + \cos 2t; & e^{-t} + \sin t; \\
&(1 + \sin 3t)\delta(t-2); & 1 + 7t^2; & (1 + 7t^2)\delta(t).
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.7 - Calcolare la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) delle distribuzioni di cui all'Esercizio 1.6 che sono temperate.

Calcolare poi la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) della derivata (nel senso delle distribuzioni).

ESERCIZIO 1.8 - Data la funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } t \in (0, 4) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si calcoli la trasformata di Fourier di Df , di tDf , di $(t-4)Df$.

ESERCIZIO 1.9 - Quale delle seguenti è una distribuzione?

$$\begin{array}{lll} (t+6)\delta(t); & e^t + e^{-t}\delta(t); & (\log t)\delta'(t); \\ \delta^2(t); & (t-4)^{-2}\delta(t+2); & (\sin 5t)\delta(t); \\ (\sin 5t)\delta'(t); & e^{-5t} - 5; & (e^{5t} + 5)\delta(t). \end{array}$$

Quale delle precedenti è una distribuzione temperata? Per quelle che lo sono si calcoli la trasformata di Fourier e la trasformata di Fourier della derivata (nel senso delle distribuzioni).

1.3 Trasf. Laplace di distribuzioni

Esercizio 1.10 Calcolare le antitrasformate di Laplace (nel senso delle distribuzioni) delle seguenti funzioni razionali:

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{s^2 - 1}{s^2 + 4s + 5}; & F_2(s) &= \frac{s^2 + 1}{s^2 + 5s + 6}; \\ F_3(s) &= \frac{s^3 - 1}{s^3 + 7s^2 + 6s}; & F_4(s) &= \frac{s(s+2)^2}{(s+1)(s-2)}. \end{aligned}$$

Esercizio 1.11 Date le distribuzioni

$$\begin{aligned} T_1 &= e^t\delta(t); & T_2 &= e^{-t}\delta'(t-1); & T_3 &= (t-e^t)\delta(t); \\ T_4 &= (t-e^t)\delta(t-1); & T_5 &= (t-e^t)\delta'(t); & T_6 &= \delta(t-1) + \delta'(t-2), \end{aligned}$$

calcolarne la derivata DT (nel senso delle distribuzioni). Calcolare poi la trasformata di Fourier e la trasformata di Laplace di DT .