ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2006-2007
Tracce delle lezioni del 22 e 28 febbraio 2007

February 22, 2007

1 Le distribuzioni

1.1 Definizione

Indichiamo con L^1_{loc} lo spazio vettoriale

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ assolutamente integrabili in ogni compatto di } \mathbb{R}\}\,;$$

vogliamo costruire un'estensione di tale spazio.

Ricordiamo che una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *a supporto compatto* se esiste un intervallo compatto (i.e. limitato e chiuso) $[a, b]$ dell'asse reale tale che $\varphi(t) = 0$ se $t \notin [a, b]$. L'intervallo $[a, b]$, all'esterno del quale φ è nulla, si chiama *supporto di* φ. E' evidente che la funzione φ è univocamente individuata non appena siano noti i valori assunti da φ sul supporto.

Si consideri poi lo spazio vettoriale D formato da tutte le funzioni reali (di variabile reale) infinitamente derivabili e a supporto compatto, ossia

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\}\,.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni test* ed è possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza (vedi Appendice).

Si osservi poi che il supporto dipende dalla funzione φ considerata. Ad esempio la funzione α data da

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)} & \text{se } |t| < 1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

appartiene a D ed il suo supporto è $[-1, 1]$. Analogamente la funzione β data da

$$\beta(t) = \begin{cases} e^{-1/(4-t^2)} & \text{se } |t| < 2 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a D ed il suo supporto è $[-2, 2]$.

Ciò premesso si chiama *spazio delle distribuzioni* l'insieme formato da tutti i funzionali (vedi Appendice) lineari e continui definiti su D. Tale spazio si indica con il simbolo $\mathfrak{D}$ ossia

$$\mathfrak{D} = \{T : D \to \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Pertanto $T \in \mathfrak{D}$ se :

1) T è un funzionale, i.e. $T : D \to \mathbb{R}$

2) T è lineare, ossia

$$T(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1T(\varphi_1) + c_2T(\varphi_2), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D.$$

3) T è continuo, ossia se $\{\varphi_n\} \xrightarrow{D} \varphi$, allora $\{T(\varphi_n)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi)$.

1.2 Esempi

Sono elementi di $\mathfrak{D}$ (e quindi distribuzioni) i seguenti funzionali (dove φ indica una generica funzione di D):

1. $T_{\sin t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sin t \; dt$

2. $T_{t^3}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \; t^3 \; dt$

3. $T_{e^t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \; e^t \; dt$.

   In generale, **fissata** una funzione $f \in L^1_{loc}$, sono elementi di $\mathfrak{D}$ i funzionali del tipo

4. $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi(t)\ dt$,

   dove φ indica, come prima, una generica funzione di D.

   Altre distribuzioni (i.e. elementi di $\mathfrak{D}$) sono poi i funzionali

5. $\Delta_0(\varphi) = \varphi(0)$

6. $\Delta_a(\varphi) = \varphi(a)$

   dove a è un generico numero reale e φ è una generica funzione di D.

Usualmente i funzionali Δ_0, Δ_a vengono indicati con i simboli $\delta(t)$, $\delta(t-a)$.

In riferimento all'Esempio 1., il valore $T_{\sin t}(\varphi)$, assunto dal funzionale T, viene indicato con

$$T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle .$$

Il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si chiama *crochet;* e la scrittura $\langle \sin t, \varphi(t) \rangle$ si legge *crochet tra* $\sin t$ *e* φ.

Pertanto le distribuzioni sopra definite negli Esempi 1., 2., 3., 4. si indicano anche con i simboli

1. $T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sin t\ dt$

2. $T_{t^3}(\varphi) = \langle t^3, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\ t^3\ dt$

3. $T_{e^t}(\varphi) = \langle e^t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\ e^t\ dt.$

4. Per ogni $f \in L^1_{loc}$ fissata

$$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt. \tag{1}$$

   Analogamente per le distribuzioni $\delta(t)$ e $\delta(t-a)$ si ha

5. $$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0)$$

6. $$\langle \delta(t-a), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(a).$$

1.3 Le distribuzioni come estensione dello spazio L^1_{loc}

Mostriamo che lo spazio $\mathfrak{D}$ è una estensione dello spazio

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ assolutamente integrabili in ogni compatto di } \mathbb{R}\}\,.$$

Ricordiamo che in tale spazio due funzioni f, g, coincidono se

$$f(t) = g(t), \qquad \text{eccetto un insieme di misura nulla.}$$

Ciò premesso si ha il seguente:

Teorema - *Siano $f, g \in L^1_{loc}$. Se*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)\ \varphi(t)\ dt \qquad \forall \varphi \in D \tag{2}$$

(ossia, usando le notazione con il crochet, se

$$\langle f(t), \varphi(t)\rangle = \langle g(t), \varphi(t)\rangle \qquad \forall \varphi \in D\ ) \tag{3}$$

allora f e g coincidono in L^1_{loc}. Vale poi, ovviamente, il viceversa, ossia se f e g coincidono in L^1_{loc}, allora (2) [i.e.(3)] è soddisfatta.

Da questo risultato ne segue che le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$, definite tramite funzioni di L^1_{loc}, ossia le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$ il cui crochet è dato da (1) sono *"tante quanti gli elementi di L^1_{loc}".*

In altre parole se indichiamo con $\mathfrak{D}^*$ il sottoinsieme di $\mathfrak{D}$ formato da tutte le distribuzioni il cui crochet è dato da (1), ossia

$$\mathfrak{D}^* = \left\{ T \in \mathfrak{D}\ : \exists f \in L^1_{loc} : T(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt \qquad \forall \varphi \in D \right\},$$

per il Teorema precedente il sottospazio $\mathfrak{D}^*$ è in corrispondenza biunivoca con L^1_{loc}, ossia

$$\mathfrak{D}^* \sim L^1_{loc}$$

Quindi lo spazio delle distribuzioni $\mathfrak{D}$ può essere interpretato come una estensione di L^1_{loc}.

In altre parole, ogni $f \in L^1_{loc}$ può essere pensata come distribuzione (precisamente quella il cui crochet è definito da (1). Non è difficile poi provare che si tratta di una **effettiva** estensione, in quanto esistono anche distribuzioni, ad esempio $\delta(t), \delta(t-a)$, che **non** possono essere definite tramite funzioni di L^1_{loc}, e quindi che non appartengono a $\mathfrak{D}^*$.

Pertanto si ha

$$L^1_{loc} \sim \mathfrak{D}^* \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{D}$$

i.e. $\mathfrak{D}^*$ è strettamente contenuto in $\mathfrak{D}$, in quanto, come si è appena affermato, le distribuzioni $\delta(t), \delta(t-a)$, prima considerate, non sono elementi di $\mathfrak{D}^*$.

1.4 Convergenza nello spazio delle distribuzioni

Per analizzare le proprietà delle distribuzioni è utile introdurre in $\mathfrak{D}$ una nozione di convergenza. Precisamente diremo che *una successione di distribuzioni $\{T_n\}$ converge in $\mathfrak{D}$ ad una distribuzione T se la successione numerica $\{T_n(\varphi)\}$ converge a $T(\varphi)$ per ogni $\varphi \in D$*; ossia

$$\{T_n\} \xrightarrow{\mathfrak{D}} T \qquad \text{se} \qquad \{T_n(\varphi)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi) \qquad \forall \varphi \in D$$

o, equivalentemente,

$$\lim_n T_n \overset{\mathfrak{D}}{=} T \qquad \text{se} \qquad \lim_n T_n(\varphi) \overset{\mathbb{R}}{=} T(\varphi) \qquad \forall \varphi \in D.$$

Utilizzando tale nozione, si può provare il seguente Teorema (di rappresentazione):

Teorema - *Ogni distribuzione è limite (in $\mathfrak{D}$) di una successione di elementi di L^1_{loc}, ossia*

$$\overline{L^1_{loc}} = \mathfrak{D}.$$

In altre parole il Teorema precedente afferma che per ogni $T \in \mathfrak{D}$ esiste una successione $\{f_n(t)\}$, contenuta in L^1_{loc}, che converge in $\mathfrak{D}$ (nel senso sopra specificato) alla distribuzione T.

Ad esempio è facile provare che la distribuzione $\delta(t)$ sopra definita è il limite (in $\mathfrak{D}$) della successione $\{k_n(t)\}$, dove

$$k_n(t) = \begin{cases} n & \text{se } t \in [0, 1/n] \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In altre parole la distribuzione $\delta(t)$ gode della **importante** proprietà:

$$\delta(t) \overset{\mathfrak{D}}{=} \lim_n k_n(t)$$

2 Appendice

2.1 Convergenza nello spazio delle funzioni test

La nozione di convergenza nello spazio D delle funzioni test si definisce nel seguente modo: diremo che una successione $\{\varphi_n\}$ converge a φ se:

1) $\varphi_n, \varphi \in D$;
2) esiste un intervallo compatto I tale che $\varphi_n(t) = \varphi(t) = 0$ se $t \notin I$;
3) la successione $\left\{\varphi_n^{(i)}\right\}$ converge uniformemte a $\varphi^{(i)}$ in $\mathbb{R}$ per $i = 0, 1, 2, 3...$
ossia $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon)$: per ogni $n > n(\varepsilon)$ si ha $|\varphi_n^{(i)}(t) - \varphi_n^{(i)}(t)| < \varepsilon\ \forall t \in I$
- la successione $\{\varphi_n\}$ converge uniformemte a φ in $\mathbb{R}$, i.e.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon)$: per ogni $n > n(\varepsilon)$ si ha $|\varphi_n(t) - \varphi_n(t)| < \varepsilon\ \forall t \in I$
- la successione $\{\varphi'_n\}$ converge uniformemte a φ' in $\mathbb{R}$,
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu(\varepsilon)$: per ogni $n > \nu(\varepsilon)$ si ha $|\varphi'_n(t) - \varphi'_n(t)| < \varepsilon\ \forall t \in I$
- la successione $\{\varphi''_n\}$ converge uniformemte a φ'' in $\mathbb{R}$,
- ....

2.2 Funzionale

Sia V uno spazio vettoriale; si chiama *funzionale in* V ogni funzione F definita in V e a valori in $\mathbb{R}$, i.e.

$$F : V \to \mathbb{R}.$$

Ad esempio se V è lo spazio delle funzioni continue in $[0, 1]$, sono funzionali in V i seguenti (dove $x = x(t)$ indica una generica funzione continua in $[0, 1]$):

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_0^1 x(s)ds \\ F_2(x) &= \max_{t \in [0,1]} |x(t)| \\ F_3(x) &= 437x(0) + 567x(1) \end{aligned}$$