ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2006-2007
Traccia della lezione del 21 febbraio 2007

February 22, 2007

1 Spazi euclidei

Sia V uno spazio vettoriale complesso. Si chiama *prodotto scalare* in V (e si indica con il simbolo $< \cdot, \cdot >$) ogni applicazione $V \times V \to \mathbb{C}$ tale che

$$\begin{array}{ll} <x,y>=\overline{<y,x>} & \forall x,y \in V \\ <\lambda x,y>=\lambda <x,y> & \forall x,y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C} \\ <x_1+x_2,y>=<x_1,y>+<x_2,y> & \forall x_1,x_2,y \in V \\ <x,x> \text{ è } \geq 0, \text{ e } =0 \text{ se e solo se } x=\underline{0} & \forall x \in V \end{array} \tag{1}$$

dove $\overline{<y,x>}$ indica il coniugato del numero complesso $<y,x>$.

Uno spazio vettoriale V dotato di prodotto scalare, chiama *spazio euclideo.*

Esempio 1 - Come è ben noto dal corso di Geometria, indicati con

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

due vettori in $\mathbb{R}^n$, l'applicazione

$$<x,y>=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

verifica le condizioni (1) ed è quindi un prodotto scalare.

Esempio 2 - Indicato con I un intervallo dell'asse reale (eventualmente illimitato) si consideri lo spazio vettoriale

$$L^2(I) = \left\{ f : I \to \mathbb{C} \text{ tali che } \int_I |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}.$$

In tale spazio l'applicazione definita da

$$< f, g >= \int_I f(t)\overline{g(t)}\ dt, \qquad \forall f, g \in L^2(I)$$

è un prodotto scalare (si ricordi che due funzioni $f_1, f_2 \in L^2(I)$ sono uguali se coincidono in tutto I, eccetto, al più, un insieme di misura nulla).

Ogni spazio euclideo è uno spazio normato (e quindi metrico) con norma definita da

$$||\ x|| = \sqrt{< x, x >}. \tag{2}$$

NON vale, in generale, il viceversa, ossia possono esistere spazi normati che non sono euclidei. Un esempio in tal senso è lo spazio $L^1(I)$ formato dalle funzioni assolutamente integrabili in I.

Poiché ogni spazio euclideo V è metrico, ossia è possibile definire in esso una distanza, possiamo definire in V anche una nozione di convergenza. Si ha allora la seguente

Definizione 1 - Uno spazio euclideo v si dice *completo* se ogni successione fondamentale (o di Cauchy) in V converge in V.

Ad esempio gli spazi $\mathbb{R}^n, L^2(I)$ sono spazi euclidei completi. Lo spazio $\mathbf{Q}^2$ delle coppie di numeri razionali, è uno spazio euclideo, ma non è completo. Per provarlo è sufficiente considerare la successione (p_n, q_n) con

$$p_n = q_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

che è fondamentale e converge a $(e, e) \notin \mathbf{Q}^2$.

- Sia V uno spazio euclideo. Allora $\forall x, y \in V$ si ha

$$\begin{array}{ll} | < x, y > | \leq ||x||\ ||y|| & \text{(disug. Schwarz)} \\ ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) & \text{(identità parallelogrammo)} \end{array}.$$

Definizione 2 Sia V uno spazio euclideo. Due elementi $u, v \in V$ si dicono *ortogonali*, e si scrive $u \perp v$, se $< u, v >= 0$.

Pertanto per $f, g \in L^2(I)$ si ha

$$f \perp g \Longleftrightarrow \int_I f(t)\overline{g(t)}\ dt = 0.$$

Definizione 3 Sia $S \subset V$ un sottoinsieme composto da elementi a due a due ortogonali. Allora S si chiama *sistema ortogonale*. Tale sistema si chiama poi *massimale* se non esiste un altro sottoinsieme S_1 che sia ortogonale e che contenga propriamente S.

Il concetto di "sistema ortogonale massimale" è quindi la estensione del ben noto concetto di "base", introdotto in $\mathbb{R}^n$.

Ad esempio in $\mathbb{R}^3$ i tre elementi

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

formano un sistema ortogonale massimale (anche ortonormale in questo caso, in quanto tutti gli elementi hanno norma 1). Invece i due vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

formano in $\mathbb{R}^3$ un sistema ortogonale non massimale.

Vale il seguente

Teorema (di rappresentazione)

Sia V uno spazio euclideo completo e sia S un suo sistema ortogonale massimale. Sia inoltre S numerabile, ossia

$$S = \{u_1, u_2, u_3, ...\}.$$

Allora per ogni $x \in V$ si ha

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n u_n \tag{3}$$

dove i coefficienti c_n, detti coefficienti di Fourier, sono dati da

$$c_n = \frac{< x, u_n >}{||u_n||^2}. \qquad (4)$$

Tale risultato estende il ben noto Teorema della base, visto nel corso di Geometria per lo spazio $\mathbb{R}^n$.

Ad esempio, se $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{u_1, u_2, u_3\}$, dove

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

allora un generico elemento $x \in \mathbb{R}^3$,

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

puo' essere scritto nella forma

$$x = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Poiché in questo caso $||u_i|| = 1$, si ha anche

$$\begin{aligned} a &=< x, u_2 > (= \frac{< x, u_1 >}{||u_1||^2}) \\ b &=< x, u_2 > (= \frac{< x, u_2 >}{||u_2||^2}) \\ c &=< x, u_3 > (= \frac{< x, u_3 >}{||u_3||^2}), \end{aligned}$$

ossia le relazioni (4).

Il significato di (3) è quindi il seguente. Se uno spazio euclideo V è **completo** ed ha un sistema ortogonale che sia **massimale** e **numerabile,** allora ogni elemento di V si può esprimere come "combinazione lineare infinita degli elementi di S" mediante i coefficienti (4).

2 Un esempio: i polinomi di Legendre

Si consideri lo spazio $L^2[-1,1]$. Tale spazio è completo e euclideo, con prodotto scalare dato da

$$< f,g >= \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Ciò posto, si considerino i polinomi P_n definiti dalla relazione

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Ad esempio si ha:

$$P_0(x) = 1; \qquad P_1(x) = x; \qquad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2};$$
$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x; \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tali polinomi sono chiamati polinomi di Legendre e sono utilizzati in varie situazioni, ad esempio nello studio dell'equazione di Schrodinger. Si puo' provare che i polinomi di Legendre sono tra loro ortogonali, ossia

$$< P_k(x), P_n(x) >= \int_{-1}^{1} P_k(x)P_n(x)dx = 0 \text{ se } k \neq n$$

e

$$< P_k(x), P_k(x) >= \int_{-1}^{1} [P_k(x)]^2 dx = \frac{2k+1}{2}. \tag{5}$$

Inoltre costituiscono un sistema ortogonale massimale in $L^2[-1,1]$. Pertanto, applicando il Teorema di rappresentazione si ha il seguente risultato:

Teorema - *Ogni funzione $f \in L^2[-1,1]$ è sviluppabile in serie di polinomi di Legendre, ossia*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x),$$

dove

$$c_k = \frac{< f(x), P_k(x) >}{||P_k(x)||^2} = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx}{||P_k(x)||^2}$$

Ricordando la definizione di norma, da (5) si ha poi

$$||P_k(x)||^2 =< P_k(x), P_k(x) >= \int_{-1}^{1} [P_k(x)]^2 dx = \frac{2k+1}{2}.$$

3 Sviluppo in serie di funzioni di Bessel

Come si è visto, l'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty), \tag{B}$$

è oscillante, ossia ogni sua soluzione ha infiniti zeri reali positivi che si accumulano all'infinito.

Fissato allora il numero reale n, indichiamo per semplicità di notazioni con J la funzione di Bessel di indice n. Essendo J soluzione di (B), per quanto appena detto, tale funzione ha infiniti zeri reali positivi. Indicati con λ_k tali zeri, si ha quindi

$$J(\lambda_k) = 0.$$

Ciò posto, si chiamano *funzioni di Bessel modificate* le funzioni

$$\begin{gathered} u_0(x) =_{\text{def}} J(\lambda_0 x) \\ u_1(x) =_{\text{def}} J(\lambda_1 x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_k(x) =_{\text{def}} J(\lambda_k x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Consideriamo ora lo spazio vettoriale

$$X = \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tali che } \int_0^1 x|f(x)|^2 dx \right\}.$$

Tale spazio può intendersi come uno spazio "$L^2(I)$ con peso x". Esso è completo e euclideo, con prodotto scalare dato da

$$< f, g >= \int_0^1 x f(x) \overline{g(x)} dx$$

Si puo' provare che in X un sistema ortogonale massimale è dato dalle funzioni di Bessel modificate u_k sopra definite. Pertanto, dal Teorema di rappresentazione si ottiene il seguente risultato.

Teorema - *Sia $f \in X$. Allora f è sviluppabile in serie di funzioni di Bessel modificate, ossia*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k(x),$$

dove

$$c_k = \frac{< f(x), u_k(x) >}{||u_k(x)||^2} = \frac{\int_0^1 x u_k(x) f(x) dx}{||u_k(x)||^2}. \tag{6}$$

Poiché poi

$$||u_k(x)||^2 =< u_k(x), u_k(x) >= \int_0^1 x(u_k(x))^2 dx = \frac{[J'(\lambda_k)]^2}{2},$$

da (6) si ottiene

$$c_k = \frac{2}{[J'(\lambda_k)]^2} \int_0^1 x u_k(x) f(x) dx.$$