ANALISI MATEMATICA 3
A.A. 2006-2007
ESERCIZI - parte prima

January 30, 2007

1 Trasformata di Fourier

Notazione : indichiamo con $u(t)$ la funzione scalino, ossia

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 1.1 - Stabilire quali delle seguenti funzioni è trasfomabile secondo Fourier in L^1 e/o in L^2.

$$f_1(t) = e^{-t};\ f_2(t) = e^{-t}u(t);\ f_3(t) = e^{t};\ f_4(t) = e^{t}u(t);$$
$$f_5(t) = e^{-|t|};\ f_6(t) = e^{t}[u(t) - u(t-7)];\ f_7(t) = \frac{1}{t}u(t);$$
$$f_8(t) = \frac{1}{t}u(t-5);\ f_9(t) = \frac{1}{t^2}u(t);\ f_{10}(t) = \frac{1}{t^2}u(t-6);$$
$$f_{11}(t) = \frac{1}{t-4}u(t-4);\ f_{12}(t) = \frac{1}{t-4}u(t-7);$$
$$f_{13}(t) = \frac{1}{(t-4)^3}u(t-7);\ f_{14}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}[u(t) - u(t-4)];$$
$$f_{15}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}u(t-4).$$

ESERCIZIO 1.2 - A quale delle funzioni di cui all'Esercizio 1.1 è applicabile il Teorema di Plancherel?

ESERCIZIO 1.3 - Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned} g_1(t) &= 5t^2[u(t) - u(t-9)] \\ g_2(t) &= (\sin t)e^{-t^2} \\ h_1(t) &= g_1(t-4)e^{jt} \\ h_2(t) &= g_2(t+\pi)e^{-3jt}. \end{aligned}$$

Tali funzioni ammettono trasformata di Fourier in L^1? E in L^2 ? In caso affermativo la trasformata di Fourier è continua ? E' derivabile? Se sì, quante volte?

ESERCIZIO 1.4 - Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{t^2+5t+8}; \; f_2(t) = \frac{t-2}{t^2+5t+8}; \\ f_3(t) &= \frac{2}{3+2t^2}; \; f_4(t) = \frac{t+1}{2t^2+3}; \\ f_5(s) &= \frac{t+5}{t^2+2t+j}; \; f_6(t) = \frac{5}{t^2+2jt+j}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.5 - Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$\begin{aligned} g_i(t) &= f_i(t)e^{5jt} \\ h_i(t) &= f_i(t-9) \end{aligned}$$

dove le funzioni f_i sono definite nell'Esercizio 1.4.

ESERCIZIO 1.5 - Calcolare l'antitrasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \frac{2\omega}{\omega^2+j}; \; F_2(\omega) = \frac{2\omega}{\omega^2-j}; \\ F_3(\omega) &= \frac{2j}{\omega^2+4}; \; F_4(\omega) = \frac{2\omega}{\omega^2+\omega+6}; \\ F_5(\omega) &= \frac{1}{j\omega+1}; \; F_6(\omega) = \frac{\omega-4}{(\omega-4)^2+6}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.6 - Calcolare l'antitrasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$G_i(\omega) = F_i(\omega)e^{3j\omega},$$

dove le funzioni F_i sono definite nell'Esercizio 1.5.

ESERCIZIO 1.7 - Quali delle seguenti funzioni sono trasformate di Fourier in L^2 ?

$$F_1(\omega) = \frac{\omega + j}{\omega + 1};\ F_2(\omega) = \frac{\omega + j}{\omega^2 + 1};$$
$$F_3(\omega) = \frac{\omega + j}{\omega^2 - 1};\ F_4(\omega) = \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^2 + 9};$$
$$F_5(\omega) = \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^3 + 9};\ F_4(\omega) = \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^4 + 9}.$$

ESERCIZIO 1.8 - A quale delle seguenti funzioni è applicabile il Lemma di Jordan?

$$F_1(s) = \frac{5s^2 + 4}{s^2 + 16}; F_2(s) = \frac{5s^2 + 4}{s^2 + 16}e^{-s}; F_3(s) = \frac{5s + 4}{s^2 + 16}.$$

ESERCIZIO 1.9 - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, reale dispari e a supporto compatto. Sia F la sua trasformata di Fourier. Quanto vale $F(0)$?

ESERCIZIO 1.10 - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, e sia F la sua trasformata di Fourier. E' vera l'affermazione

$$\lim_{\omega \to +\infty} F(\omega) = \lim_{\omega \to 0} \omega F(\omega) \ ?$$

RISPOSTE:

Esercizio 1.1 : sono trasformabili in L^1 e in L^2 le funzioni f_2, f_5, f_6, f_{10}, f_{13}. Sono trasformabili in L^2 e non in L^1 le funzioni f_8, f_{12}. E' trasformabile in L^1 e non in L^2 la funzione f_{14}. Le altre funzioni non sono trasformabili né in L^1 né in L^2.

Esercizio 1.2 : E' applicabile alle funzioni trasformabili in L^2, ossia a f_2, f_5, f_6, f_8, f_{10}, f_{12}, f_{13}.

Esercizio 1.3 : tutte le funzioni considerate ammettono trasformata sia in L^1 che in L^2. Poiché sono trasformabili in L^1, le trasformate sono funzioni continue. Applicando la proprietà della "moltiplicazione per t" e i suoi corollari, si ha che tutte le trasformate sono di classe C^∞.

Esercizio 1.7 : sono trasformate in L^2 le funzioni F_2 e F_4. Non lo sono le altre.