ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2006-2007
Traccia della lezione del 1 marzo 2007

February 22, 2007

1 Derivata di una distribuzione

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Allora $f' \in L^1_{loc}$ e quindi f' può essere pensata come distribuzione e sia ha

$$\langle f'(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\ \varphi(t)\ dt$$

Utilizzando poi la regola di integrazione per parti si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} f'(t)\ \varphi(t)\ dt = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi'(t)\ dt = -\langle f(t), \varphi'(t) \rangle\,;$$

pertanto

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \langle f'(t), \varphi(t) \rangle = -\langle f(t), \varphi'(t) \rangle\,.$$

Tale relazione suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione; si chiama *derivata di* T (nel senso delle distribuzioni) e si indica con DT, la distribuzione definita da

$$\langle DT, \varphi(t) \rangle =_{\mathrm{def}} -\langle T, \varphi'(t) \rangle\,,\ \forall \varphi \in D.$$

Proprietà:

- Ogni distribuzione è derivabile infinite volte.

-
$$\text{Se } f \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f' \equiv Df$$

- Indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino (di Heaveside)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

  si ha

$$D[u(t)] = \delta(t).$$

-
$$D[u(t) - u(t-a)] = \delta(t) - \delta(t-a).$$

- **Teorema -** *Se* $f \in C^1(\mathbb{R}/\{t_0\})$ *e* $f' \in L^1_{loc}$, *allora*

$$f(t_0+) = \lim_{t \to t_0+} f(t), \qquad f(t_0-) = \lim_{t \to t_0-} f(t),$$

  esistono finiti e si ha

$$Df = f'(t) + [f(t_0+) - f(t_0-)]\delta(t - t_0).$$

  Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 5e^{2t} & \text{se } t > 0 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

  si ha

$$Df = f'(t) + 5\delta(t).$$

  Il teorema precedente si estende poi immediatamente al caso in cui f sia derivabile con derivata continua in tutto $\mathbb{R}$, eccetto un numero finito o un'infinità numerabile di punti.

- La distribuzione $\delta(t)$ è derivabile e si ha

$$\langle \delta'(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} -\varphi'(0),\ \forall \varphi \in D$$
$$\langle \delta''(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} \varphi''(0),\ \forall \varphi \in D$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\left\langle \delta^{(n)}(t), \varphi(t) \right\rangle =_{\text{def}} (-1)^n \varphi^{(n)}(0),\ \forall \varphi \in D.$$

  In modo analogo si definiscono le derivate di $\delta(t-a)$.

2 Prodotto di distribuzioni

Ricordiamo che nello spazio L^1_{loc} il prodotto non sempre è definito. Ad esempio la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0,1) \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a L^1_{loc}, ma $f^2 \notin L^1_{loc}$. Tuttavia se $f \in L^1_{loc}$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora il prodotto $f\ g$ è, ovviamente, definito e si ha

$$\langle f\ g, \varphi \rangle = \langle f, g\ \varphi \rangle\,, \qquad \forall \varphi \in D.$$

Tale relazione suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione e sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si chiama *distribuzione prodotto* $T\ g$ la distribuzione definita da

$$\langle T\ g, \varphi \rangle = \langle T, g\ \varphi \rangle\,, \qquad \forall \varphi \in D$$

Nello spazio delle distribuzioni si definisce il prodotto soltanto nel caso precedente, i.e. quando almeno uno dei due fattori è una funzione ("tradizionale") di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Pertanto, ad esempio, non si definiscono i simboli $\delta^2(t)$, $e^{-|t|}\delta(t)$, $(\log t)\delta(t)$, $t^{-7}\delta(t)$.

Provare che

$$\begin{aligned} e^{2t}\delta(t) &= \delta(t); \\ (t^2+4)\delta(t) &= 4\delta(t) \\ \sin t\delta(t-\frac{\pi}{2}) &= \delta(t-\frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

ESERCIZI

Verificare che

$$\begin{aligned} D[(3+5t)\delta'(t-1)] &= -5\delta'(t-1) + 8\delta''(t-1) \\ (t-1)\delta'(t) &= D[(\sin t)\delta'(t) - u(t)] \\ tDf &= f(t) - 4\delta(t) \end{aligned}$$

dove $f(t) = t[u(t) - u(t-2)]$.