ANALISI MATEMATICA 3
A.A. 2006-2007
ESERCIZI - parte SECONDA

February 8, 2007

1 Trasformata Laplace

Esercizio 1.1 Utilizzando la formula di Bromwich-Mellin e la teoria dei residui, calcolare le antitrasformate di Laplace delle seguenti funzioni razionali:

$$F_1(s) = \frac{1}{s^2+4s+5};\ F_2(s) = \frac{1}{s^2+4s+3};$$
$$F_3(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+s};\ F_4(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-2)(s^2+4)};$$
$$F_5(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s+2)};\qquad F_6(s) = \frac{s^2+2s-1}{s^3-2s^2+2s-1}.$$

Esercizio 1.2 Quale o quali delle seguenti funzioni è la trasformata di Laplace di una funzione di classe Λ?

$$G_1(s) = \frac{s^2+4}{s^2-4};\ G_2(s) = \frac{s^2+4}{s^2-4s};\ G_3(s) = \frac{s+4}{s^2-4};$$
$$G_4(s) = \frac{s^2+4}{s^3-4};\ G_5(s) = \frac{s^3+4s}{s^2-4};G_6(s) = \frac{s^4+4}{s^2-4s};$$
$$G_7(s) = \frac{s}{s^4-4};\ G_8(s) = \frac{4}{s^2-4};\ G_9(s) = \frac{s^4+4s^2}{s^3-4}.$$

Esercizio 1.3 - Si considerino le seguenti funzioni. Quale o quali è di classe Λ? (Si assuma che tali funzioni sono nulle per $t < 0$)

$$\begin{array}{ll} f_1(t) = e^{-t^2}; & f_2(t) = t^7 + 14t^6; \\ f_3(t) = t\cos t; & f_4(t) = e^t \cos t^2; \\ f_5(t) = e^{t^2}\cos t; & f_6(t) = t^{-4}. \end{array}$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 21 & \text{se } t > 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$
$$g_2(t) = \begin{cases} e^t \sin t & \text{se } t > 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$
$$g_3(t) = \begin{cases} t^{-4} & \text{se } t > 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Esercizio 1.4 - Si calcoli l'ascissa di convergenza per ciascuna delle funzioni di cui all'Esercizio 1.1.

Soluzioni Esercizio 1.1 Per $t > 0$ si ha:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{-2t}\sin t \\ f_2(t) &= \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) \\ f_3(t) &= 1 - e^{-t} - te^{-t} \\ f_4(t) &= \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t \\ f_5(t) &= \frac{1}{9}(e^{-2t} - e^t + 3te^t) \\ f_6(t) &= 2e^t + e^{t/2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right). \end{aligned}$$

(Tali funzioni sono inoltre nulle per $t < 0$).

2 Funzioni di Bessel

Esercizio 2.1 Siano J_3 e J_8 due funzioni di Bessel. Calcolare l'espressione

$$J_3(5) + J_{-3}(5) + J_8(1) - J_{-8}(1).$$

Esercizio 2.2 Siano J_n le funzioni di Bessel. Stabilire quale delle seguenti uguaglianze è corretta

$$2J_3'(2) - 3J_{-3}(2) = 3J_2(2)$$
$$2J_3'(2) - 3J_{-3}(2) = 2J_2(2)$$
$$2J_3'(2) - 3J_{-3}(2) = 2J_3(2)$$

Esercizio 2.3 Calcolare

$$3\Gamma(4/3) - \Gamma(1/3) + \Gamma(1),$$

dove Γ è la funzione gamma euleriana.

Esercizio 2.4 Si consideri la funzione Γ euleriana. Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + 1 = 2\Gamma(1)$$
$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + 2\Gamma(2) = 1$$
$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \Gamma(3) = 2\Gamma(1)$$

Esercizio 2.5 Siano J_n e Y_n le funzioni di Bessel di prima e seconda specie. Si stabilisca se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta o errata.

i) - la funzione Y_n è oscillante;

ii) - Per ogni n intero positivo $\exists M_n > 0$ tale che $Y_n(x) > M_n$ se x è sufficientemente grande;

iii) - Sia n non intero. le tre funzioni J_n, J_{-n}, Y_n sono linearmente indipendenti.

3 Oscillazione

Esercizio 3.1 Stabilire quale delle seguenti equazioni è oscillante e quale nonoscillante

$$y'' - 7y' + (x^2 - 1)e^{7x}y = 0$$
$$y'' + 7xy' + (1 - x^2)y = 0$$
$$y'' + \frac{1}{x}y' + 4y = 0$$
$$y'' + 5xy' - 4xy = 0$$
$$y'' + \frac{3-x}{x+3}y = 0$$
$$y'' + \frac{x^3 - 3x - 1}{x(x^2+9)}y = 0$$