ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2006-2007
Tracce delle lezioni del 1 e 2 febbraio 2007

January 31, 2007

1 Calcolo della trasf. (antitrasf.) di Fourier nel caso razionale

Sia f una funzione razionale, ossia

$$f(t) = \frac{N(t)}{D(t)}$$

con N, D polinomi **primi tra loro**. Allora è immediato verificare che f è trasformabile secondo Fourier in L^2 se e solo se f è propria e priva di poli reali, ossia se e solo se

$$\begin{aligned} &i)\ \text{gr } N < \text{gr } D \\ &ii)\ N(t) \neq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1}$$

e vale il seguente:

Teorema (trasformata) - *Sia f razionale, $f(t) = N(t)/D(t)$. Siano i polinomi N, D primi tra loro e siano verificate le condizioni (1). Allora f è trasformabile secondo Fourier in L^2 e, indicati con $s_1, ...s_N$ i poli di f, si ha:*

$$\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega) = \begin{cases} 2\pi j \sum_{\text{Im } s_i > 0} \text{Res}\ [f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega < 0 \\ \\ -2\pi j \sum_{\text{Im } s_i < 0} \text{Res}\ [f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega > 0 \end{cases} .$$

Tale Teorema si estende immediatamente al caso dell'antitrasformata (con alcune minori modifiche). Vale infatti il seguente:

Teorema (antitrasformata) - *Sia F razionale, $F(\omega) = P(\omega)/Q(\omega)$. Siano i polinomi P, Q* primi tra loro e siano verificate le condizioni

$$\begin{array}{ll} i) \text{ gr } P < \text{gr } Q & \\ ii) \ Q(\omega) \neq 0 & \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Allora $F \in L^2$ e, indicati con $s_1, ...s_N$ i poli di F, l'antitrasformata f di F è data da:

$$f(t) = \begin{cases} -j \sum_{\text{Im } s_i < 0} \text{Res}\ [F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t < 0 \\ \\ j \sum_{\text{Im } s_i > 0} \text{Res}\ [F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

Entrambi i teoremi precedenti si provano utilizzando la teoria dei Residui e il Lemma di Jordan nella versione sotto riportata, come è stato dettagliatamente illustrato a lezione. In Appendice sono riportati i principali risultati relativi all'integrazione in campo complesso, risultati visti nell'ambito del corso di "Applicazioni di Matematica" [o "Complementi di Matematica" per gli studenti di IDT_TLS]

Lemma di Jordan - *Sia $g(s)$ una funzione complessa, analitica per $|s|$ grande e tale che $\lim_{s\to\infty} g(s) = 0$. Allora:*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} g(s)e^{jms} ds = 0$$

se:

i) C_R è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio R, contenuta nel semipiano Im $s > 0$ *e m è un numero reale positivo (vedi figura 1 dopo Appendice);*

oppure se:

ii) C_R è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio R, contenuta nel semipiano $\mathrm{Im}\, s < 0$ *e m è un numero reale negativo (vedi figura 2 dopo Appendice).*

2 Appendice

2.1 Curva regolare in $\mathbb{C}$

Sia $[a, b]$ un intervallo **limitato e chiuso** della retta reale. Una *curva regolare* è una funzione $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = x(t) + jy(t)$$

dove le funzioni reali $x = x(t), y = y(t)$ sono funzioni derivabili con derivata continua nell'intervallo aperto (a, b) [i.e. $x, y \in C^1(a, b)$] e le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ non si annullano contemporaneamente in (a, b).

Tale concetto è del tutto analogo a quello visto nell'ambito dei corsi di Analisi Matematica, con la sola differenza che ora esso è formulato usando le notazioni complesse.

Se le due funzioni x, y sono di classe C^1 in tutto (a, b) eccetto un numero finito di punti e/o le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ si annullano contemporaneamente in un numero finito di punti, allora γ si dice *generalmente regolare*.

Geometricamente una curva regolare è rappresentata da una "linea" (detta *sostegno della curva*) avente tangente in ogni punto, salvo, al piu', gli estremi; una curva generalmente regolare è invece rappresentata da una "linea" che ammette tangente in ogni punto eccetto un numero finito di punti.

Esempio. La curva

$$\gamma(t) = \rho e^{jt} + s_0, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro s_0, raggio ρ e percorsa in senso antiorario. Infatti ponendo $\gamma(t) = x(t) + jy(t)$, $s_0 = x_0 + jy_0$ e utilizzando le formule di Eulero si ottiene

$$x(t) + jy(t) = \rho[\cos t + j \sin t] + x_0 + jy_0$$

da cui, uguagliando parte reale e parte immaginaria di ambo i membri, si ha

$$x(t) = \rho \cos t + x_0$$
$$y(t) = \rho \sin t + y_0$$

che, come è noto, è l'equazione in forma parametrica di una circonferenza di centro (x_0, y_0), raggio ρ e percorsa in senso antiorario (per $t \in [0, 2\pi]$).

Una curva γ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva γ si dice *semplice* se presi $t_1, t_2 \in (a, b)$ con $t_1 \neq t_2$ risulta $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare; si chiama *lunghezza di* γ il numero reale

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |x'(t) + jy'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

2.2 Definizione di Integrale in $\mathbb{C}$

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare e sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione continua sulla curva. Si chiama *integrale di f esteso a γ* il numero complesso

$$\int_\gamma f(s) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) y'(t) dt.$$

Proprietà dell'integrale in C

1. **Linearità** (c_1, c_2 costanti complesse):
$$\int_\gamma [c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)] ds = c_1 \int_\gamma f_1(s) ds + c_2 \int_\gamma f_2(s) ds$$

2. **Ordine:**
$$\int_\gamma f(s) ds = - \int_{-\gamma} f(s) ds.$$

3. **Additività:**
$$\int_{\gamma 1 + \gamma 2} f(s) ds = \int_{\gamma 1} f(s) ds + \int_{\gamma 2} f(s) ds$$

4. **Modulo dell'integrale:** vale la maggiorazione :
$$\left| \int_\gamma f(s) ds \right| \leq L_\gamma \max_{s \in \gamma} |f(s)|$$
dove L_γ indica la lunghezza della curva γ.

2.3 Teoremi di Cauchy per l'integrale

Teorema 1 (di Cauchy) *Sia γ una curva regolare (o generalmente regolare) semplice e chiusa e sia f una funzione analitica all'interno di γ e continua su γ. Allora:*

$$\int_\gamma f(s)ds = 0.$$

Tale Teorema esprime il fatto che in una regione in cui f è analitica, l'integrale è indipendente dal cammino.

Teorema 2 (1$^{\text{o}}$ Teorema dei Residui) *Sia Γ una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo. Sia H analitica all'interno di Γ eccetto un numero FINITO di punti $s_1, s_2, ..s_n$. Sia infine H continua su Γ. Allora*

$$\frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma H(s)ds = Res[H, s_1] + Res[H, s_2] + ... + Res[H, s_n]$$

dove la scrittura $Res[H, s_i]$ indica il Residuo di H in s_i.

Il $Res[H, s_i]$ è stato definito nell'ambito del corso di Applicazioni di Matematica (o Complementi di Matematica) ai quali si rimanda. Qui ricordiamo soltanto le formule per il calcolo di tale Residuo nel caso in cui H sia una funzione del tipo

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}e^{jms}$$

con N, D polinomi primi tra loro e m parametro reale.

- **Se s_0 è una radice semplice di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s\to s_0}(s - s_0)\frac{N(s)}{D(s)}e^{jms}.$$

- **Se s_0 è una radice doppia di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s\to s_0}\frac{d}{ds}\left[(s - s_0)^2\frac{N(s)}{D(s)}e^{jms}\right].$$

- **In generale, se s_0 è una radice di ordine $n > 1$ di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s\to s_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left[(s - s_0)^n\frac{N(s)}{D(s)}e^{jms}\right].$$

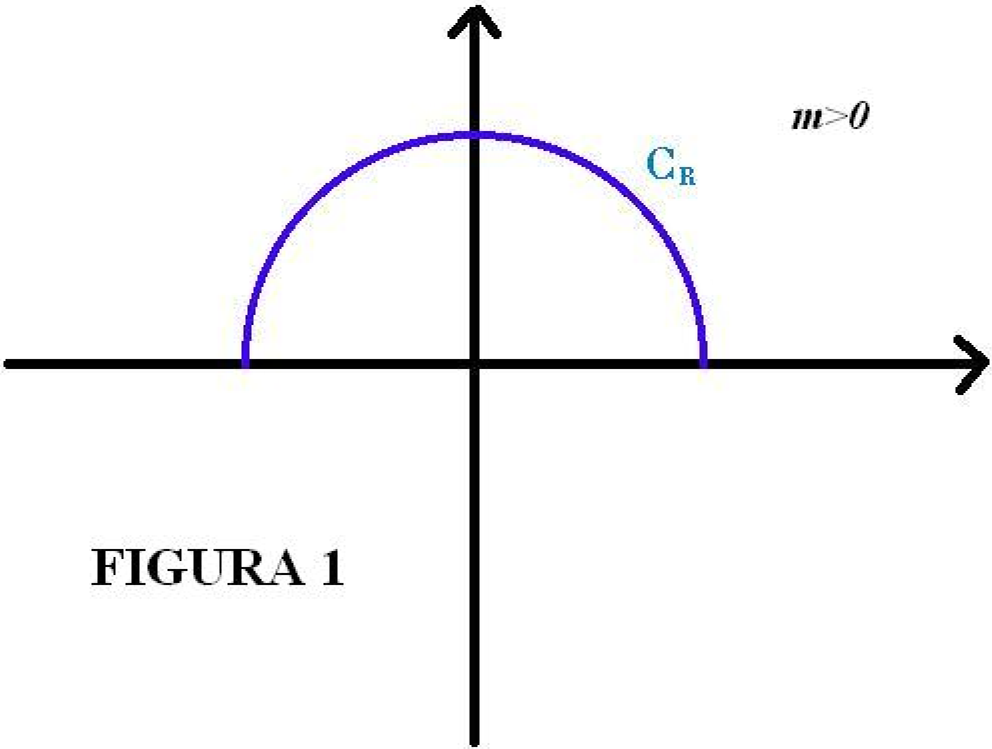

FIGURA 1

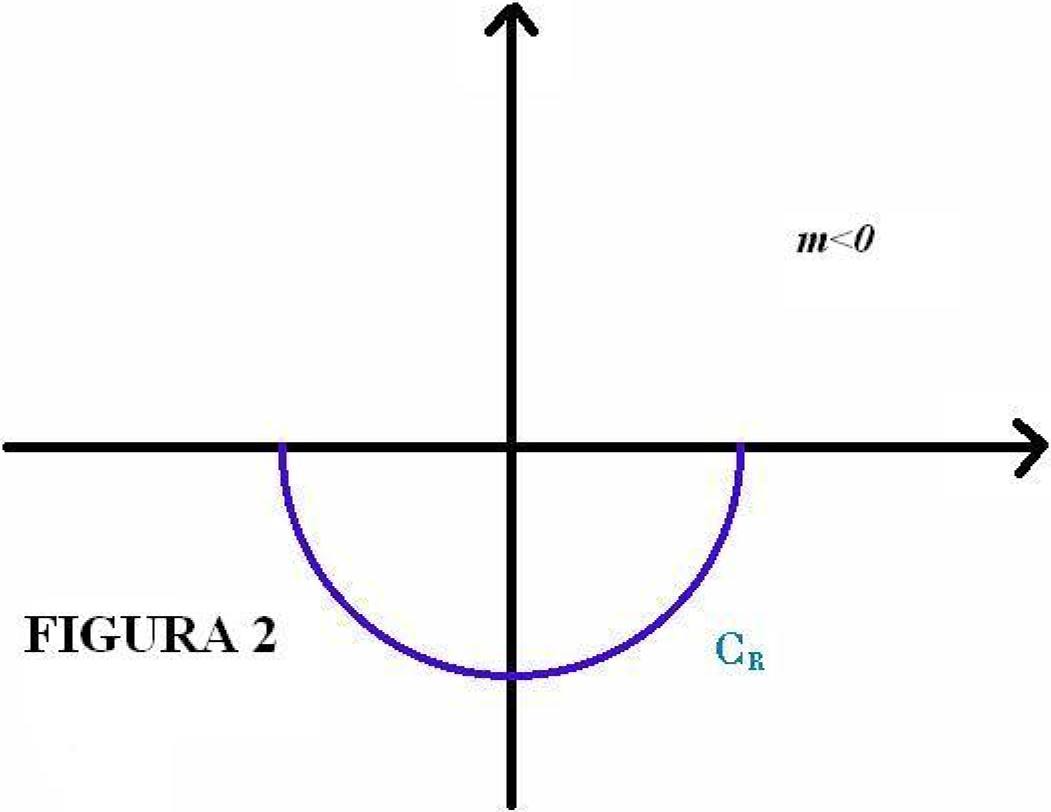

FIGURA 2