ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2006-2007
Traccia delle lezioni del 14 e 15 marzo 2007

March 14, 2007

1 Le distribuzioni temperate

Ricordiamo quanto visto nella lezione scorsa : si chiama *spazio delle distribuzioni temperate* lo spazio formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su S, dove

$$S = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : t^j \varphi^{(k)}(t) \to 0 \text{ per } |t| \to +\infty,\ j,k = 0,1,2,.... \right\}. \tag{1}$$

Lo spazio delle distribuzioni temperate si indica con il simbolo $\Im$, ossia

$$\Im = \{T : S \to \mathbb{R},\ \text{lineare e continuo}\}.$$

Ricordiamo poi che lo spazio (1) si chiama invece *spazio delle funzioni a decrescenza rapida.* Indicato con D lo spazio delle funzioni test, introdotto nelle scorse lezioni, chiaramente si ha

$$D \underset{\neq}{\subset} S,$$

e quindi

$$\Im \subset \mathfrak{D},$$

ossia $\Im$ è un sottospazio di D. Gli elementi di $\Im$ sono quindi particolari distribuzioni, che prendono nome di distribuzioni temperate

Vale il seguente

Teorema *Sia T una distribuzione temperata. Allora esiste $n \geq 0$ tale che la derivata di T di ordine n, ossia $D^{(n)}T$ è una funzione a crescita lenta.*

2 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Sia $\varphi \in S$. Essendo φ a decrescenza rapida si ha $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi φ ammette trasformata di Fourier. Sia pertanto Φ la sua trasformata, ossia $\Phi(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi\}$. Usando le proprietà della trasformata di Fourier in L^1, è possibile provare che "lo spazio S è chiuso rispetto all'operatore trasformata di Fourier", ossia che vale il seguente:

Lemma - *Sia $\varphi \in S$. Allora $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e, indicata con Φ la sua trasformata di Fourier, si ha $\Phi \in S$.*

Si ha poi il seguente:

Teorema - *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier, ossia $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}$. Allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\Phi(\omega)d\omega, \ \forall \varphi \in S$$

ossia

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \Phi \rangle , \ \forall \varphi \in S$$

o, equivalentemente,

$$\langle \mathcal{F}\{f\}, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle , \ \forall \varphi \in S.$$

Tale Teorema suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione temperata; si chiama *trasformata di Fourier di T* (nel senso delle distribuzioni) e si indica con $\mathcal{F}_D\{T\}$, la distribuzione temperata definita da

$$\langle \mathcal{F}_D\{T\}, \varphi \rangle =_{\text{def}} \langle T, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle , \ \forall \varphi \in S.$$

Tale definizione riconduce quindi il calcolo della trasformata $\mathcal{F}_D$ a quello della trasformata "classica" $\mathcal{F}$ (i.e. in L^1 o L^2).

Dal Teorema precedente si ha poi la seguente proprietà

- Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}_D\{f\} \equiv \mathcal{F}\{f\}$,ossia se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora la trasformata nel senso delle distribuzioni di f coincide con quella "classica".

La definizione precedente acquista quindi significato per quelle "funzioni" che non appartengono a $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. In particolare vale la seguente tabella per le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni"elementari" a crescita lenta ($A \in \mathbb{R}$)

funzione $\rightarrow$	trasformata
1	$2\pi\delta(\omega)$
t	$2\pi j\delta'(\omega)$
t^n	$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$
e^{jAt}	$2\pi\delta(\omega - A)$
$\sin(At)$	$\pi j[\delta(\omega + A) - \delta(\omega - A)]$
$\cos(At)$	$\pi[\delta(\omega + A) + \delta(\omega + A)]$

Per la distribuzione $\delta(t)$ si ha poi

$$\mathcal{F}_D\{\delta(t)\} = 1$$
$$\mathcal{F}_D\{\delta(t-a)\} = e^{-ja\omega}, \;\; a \in \mathbb{R}.$$

Vale infine la proprietà

$$T \in \Im \Longrightarrow \mathcal{F}_D\{DT\} = j\omega\mathcal{F}_D\{T\}.$$

3 Trasformata di Laplace di distribuzioni

Prima di introdurre la trasformata di Laplace nel senso delle distribuzioni, poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 1 - Sia T una distribuzione, ossia $T \in \mathfrak{D}$. Allora T si dice *nulla in un intervallo* (a, b) se

$$< T, \varphi(t) >= 0$$

per ogni $\varphi \in D$ e avente supporto in (a, b).

Definizione 2 - Sia T una distribuzione, ossia $T \in \mathfrak{D}$. Si chiama *insieme nullo di* T, e si indica con N_T, l'unione di tutti gli intervalli aperti (a, b) in cui T è nulla. Il suo complementare in $\mathbb{R}$ si chiama poi *supporto di* T.

Poiché N_T è unione (infinita) di aperti, N_T è un insieme aperto di $\mathbb{R}$. Il supporto di T, essendo il complementare di un aperto è allora un insieme chiuso di $\mathbb{R}$.

Esempi

1. Sia f la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 4 & \text{se } t \in [-\pi, \pi] \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Allora $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e quindi f è una distribuzione. L'insieme nullo N_f è

$$N_f = (-\infty, -\pi) \cup (\pi, +\infty)$$

e. di conseguenza, il supporto di f è $[-\pi, \pi]$ (come ovviamente era lecito attendersi).

2. Sia f la funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } t \geq 0 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Allora $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e quindi f è una distribuzione. L'insieme nullo N_f è

$$N_f = (-\infty, 0)$$

e. di conseguenza, il supporto di f è $[0, +\infty]$ (come ovviamente era lecito attendersi).

3. Per la distribuzione δ si ha poi $N_\delta = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e quindi il supporto di δ è $\{0\}$. Analogamente il supporto di $\delta(t - a)$ è $\{a\}$.

Ciò posto, si ha la seguente:

Definizione 3 - Sia T una distribuzione tale che:

$$\text{il supporto di } T \text{ è contenuto in } [0, +\infty);$$
$$\exists \beta \in \mathbb{R} \text{ tale che } Te^{-\beta t} \text{ è una distribuzione temperata.}$$

Si chiama allora *trasformata di Laplace (nel senso delle distribuzioni)* e si indica con $L_D[f]$, il crochet

$$L_D[T] = \left\langle Te^{-\beta t}, e^{\beta t} \lambda(t) e^{-st} \right\rangle \tag{2}$$

dove $\operatorname{Re} s > \beta$ e λ è una funzione tale che

$$\begin{array}{lll} \lambda \in C^\infty(\mathbb{R}) & & \\ \lambda(t) = 1 & \text{se } t \geq -\varepsilon_1 & (-\varepsilon_1 < 0) \\ \lambda(t) = 0 & \text{se } t \leq -\varepsilon_2, & (-\varepsilon_2 < -\varepsilon_1). \end{array} \tag{3}$$

Si puo' provare che *il crochet (2) è indipendente dalla scelta della funzione λ (purché siano verificate le condizioni (3)) e dalla scelta di β.*

Il crochet (2) dipende quindi soltanto dalla scelta del numero complesso s e pertanto è una funzione della variabile s, ossia

$$L_D[T] = F(s) = \left\langle Te^{-\beta t}, e^{\beta t}\lambda(t)e^{-st} \right\rangle .$$

Pertanto la trasformata di Laplace di una distribuzione T è una **funzione "tradizionale"**, non una distribuzione, come accade invece per la trasformata di Fourier.
Si osservi poi che, per le ipotesi fatte, il primo elemento del crochet, ossia $Te^{-\beta t}$ è una distribuzione temperata, mentre il secondo, i.e. $e^{\beta t}\lambda(t)e^{-st}$, è una funzione a decrescenza rapida.

Proprietà: Se $f \in \Lambda$, allora la trasformata di Laplace di f (in senso classico) **coincide** con la trasformata di Laplace nel senso delle distribuzioni. In altre parole:

$$L_D[f] \equiv L[f].$$

Pertanto la definizione (2) assume significato quando, ferme restando le altre condizioni, T non sia una funzione di classe Λ. In particolare un semplice calcolo prova che:

$$\begin{gathered} L_D[\delta(t)] = 1 \\ L_D[\delta'(t)] = s \\ \ldots\ldots\ldots \\ L_D[\delta^{(n)}(t)] = s^n \\ L_D[\delta(t-a)] = e^{-as} \ (a \geq 0) \end{gathered}$$

Per quanto concerne le funzioni razionali, il seguente risultato generalizza quello visto alcune lezioni fa'.

Teorema *Ogni funzione razionale*

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

è una trasformata di Laplace. Precisamente, se grado $N <$ *grado* D, F *è la trasformata di Laplace una funzione di classe* Λ; *altrimenti, se grado* $N \geq$ *grado* D, F *è la trasformata di Laplace di una distribuzione e non di una funzione di classe* Λ.

Ad esempio la funzione

$$F_1(s) = \frac{s^3 + 8}{s^3 + 3s^2 + 1}$$

è la trasformata di una distribuzione, mentre

$$F_2(s) = \frac{s^2 + 8}{s^3 + 3s^2 + 1}$$

è la trasformata di una funzione di classe Λ.

Per la trasformata di Laplace "tradizionale" vale, come è noto, il seguente:

Teorema derivazione (in senso classico) *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R}), f, f\,' \in \Lambda$. *Allora si ha*

$$L[f\,'] = sL[f] - f(0+) \tag{4}$$

Nell'ambito della trasformata di Laplace per le distribuzioni, si puo' provare il seguente:

Teorema derivazione (nel senso delle distribuzioni) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}\setminus \{0\}), f\,' \in L^1_{loc}$ e siano $f(t)u(t) \in \Lambda, f\,'(t)u(t) \in \Lambda$. Allora

$$L_D[Df] = sL[f] - f(0-) \tag{5}$$

Ovviamente (4) e (5) coincidono se f è nulla sul semiasse negativo, oppure se f è continua in $t = 0$. In generale, (4) e (5) sono pero' diverse e cio' dipende dal diverso significato di $f\,'$ e Df.

4 La distribuzione v.p. (1/t)

Consideriamo il funzionale T definito da

$$T : \varphi \in D \to \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt \tag{6}$$

L'integrale in (6) è ben definito in quanto la funzione integranda è nulla per ogni t sufficientemente grande ($\varphi \in D$) ed inoltre

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} = 2\varphi'(0).$$

Si può provare che tale funzionale è lineare e continuo in D e quindi è una distribuzione. Tale distribuzione si indica con $v.p.1/t$, ossia

$$\left\langle v.p.\frac{1}{t}, \varphi(t) \right\rangle =_{\text{def}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt.$$

Il motivo del nome dato a questa distribuzione è giustificato dal fatto che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}\varphi(t)dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t}\varphi(t)dt \right),$$

ossia

$$\left\langle v.p.\frac{1}{t}, \varphi(t) \right\rangle =_{\text{def}} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}\varphi(t)dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t}\varphi(t)dt \right)$$

dove ε è una costante positiva,

Proprietà:

- la derivata nel senso delle distribuzioni di $\log|t|$ è $v.p.\frac{1}{t}$,i.e.

$$D(\log|t|) = v.p.\frac{1}{t};$$

- Trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = -jv.p.\frac{1}{\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{sgn(t)\} = -2jv.p.\frac{1}{\omega},$$

dove $u(t)$ rappresenta la funzione scalino e $sgn(t)$ la funzione "segno", i.e.

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t > 0 \\ -1 & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$