ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2006-2007
Traccia della lezione del 8 marzo 2007

March 6, 2007

1 Prodotto di distribuzioni

Ricordiamo che nello spazio L^1_{loc} il prodotto non sempre è definito. Ad esempio la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0,1) \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a L^1_{loc}, ma $f^2 \notin L^1_{loc}$. Tuttavia se $f \in L^1_{loc}$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora il prodotto $f\ g$ è, ovviamente, definito e si ha

$$\langle f\ g, \varphi \rangle = \langle f, g\ \varphi \rangle\,, \qquad \forall \varphi \in D.$$

Tale relazione suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione e sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si chiama *distribuzione prodotto* $T\ g$ la distribuzione definita da

$$\langle T\ g, \varphi \rangle = \langle T, g\ \varphi \rangle\,, \qquad \forall \varphi \in D$$

Nello spazio delle distribuzioni si definisce il prodotto soltanto nel caso precedente, i.e. quando almeno uno dei due fattori è una funzione ("tradizionale") di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Pertanto, ad esempio, non si definiscono i simboli $\delta^2(t)$, $e^{-|t|}\delta(t)$, $(\log t)\delta(t)$, $t^{-7}\delta(t)$.

Provare che

$$e^{2t}\delta(t) = \delta(t);$$
$$(t^2+4)\delta(t) = 4\delta(t)$$
$$\sin t\delta(t-\frac{\pi}{2}) = \delta(t-\frac{\pi}{2}).$$

ESERCIZI

Verificare che

$$D[(3+5t)\delta'(t-1)] = -5\delta'(t-1)+8\delta''(t-1)$$
$$(t-1)\delta'(t) = D[(\sin t)\delta'(t)-u(t)]$$
$$tDf = f(t)-4\delta(t)$$

dove $f(t) = t[u(t)-u(t-2)]$.

2 Le distribuzioni temperate

Si consideri lo spazio vettoriale S definito da

$$S = \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : t^j\varphi^{(k)}(t) \to 0 \text{ per } |t| \to +\infty,\ j,k = 0,1,2,....\right\}.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni a decrescenza rapida.* Infatti una funzione φ appartiene a tale spazio se è infinitamente derivabile e tende a zero (per $t \to \pm\infty$), insieme a tutte le derivate $\varphi^{(i)}$, più velocemente di qualunque potenza di t. Ad esempio la funzione $\varphi(t) = e^{-t^2}$appartiene a S.

Ricordando la definizione dello spazio D delle funzioni test

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\},$$

si ha

$$D \underset{\neq}{\subset} S.$$

E' poi possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza.

Ciò premesso si consideri lo spazio formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su S. Tale spazio si indica con il simbolo $\Im$, ossia

$$\Im = \{T : S \to \mathbb{R},\ \text{lineare e continuo}\}$$

Tenendo conto che

$$D \underset{\neq}{\subset} S,$$

si ha allora

$$\Im \subset \mathfrak{D},$$

ossia $\Im$ è un sottospazio di $\mathfrak{D}$. Gli elementi di $\Im$ sono quindi particolari distribuzioni, che prendono nome di *distribuzioni temperate* e il sottospazio $\Im$ si chiama *spazio delle distribuzioni temperate*.

E' possibile provare che sono distribuzioni temperate (i.e. elementi di $\Im$):

1. le funzioni $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ (quindi, in particolare, sono distribuzioni temperate tutte le funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$);
2. le funzioni $f \in L^1_{loc}$ e a crescita lenta, ossia tali che $\exists\ M, q \geq 0$: $|f(t)| \leq M(1 + |t|^q)$;
3. le funzioni $f \in L^1[a, b]$ e periodiche di periodo $b - a$;
4. le distribuzioni $\delta(t)$, $\delta(t - a)$;
5. se $T \in \Im$ allora $DT \in \Im$ (in particolare quindi sono distribuzioni temperate $\delta^{(n)}(t)$, $\delta^{(n)}(t - a)$.

Non sono invece distribuzioni temperate le funzioni

$$e^t,\ e^{-t},\ \sinh t,\ \cosh t.$$

Quindi $\Im$ è un sottospazio proprio di $\mathfrak{D}$.

Si osservi poi che, in virtù di 2., sono distribuzioni temperate le funzioni costanti, i polinomi, le funzioni $\sin t$, $\cos t$.

3 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Sia $\varphi \in S$. Essendo φ a decrescenza rapida si ha $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi φ ammette trasformata di Fourier. Sia pertanto Φ la sua trasformata, ossia $\Phi(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi\}$. Usando le proprietà della trasformata di Fourier in L^1, è possibile provare che "lo spazio S è chiuso rispetto all'operatore trasformata di Fourier", ossia che vale il seguente:

Lemma - *Sia $\varphi \in S$. Allora $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e, indicata con Φ la sua trasformata di Fourier, si ha $\Phi \in S$.*

Si ha poi il seguente:

Teorema - *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier, ossia $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}$. Allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\Phi(\omega)d\omega, \ \forall \varphi \in S$$

ossia

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \Phi \rangle, \ \forall \varphi \in S$$

o, equivalentemente,

$$\langle \mathcal{F}\{f\}, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle, \ \forall \varphi \in S.$$

Tale Teorema suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione temperata; si chiama *trasformata di Fourier di T* (nel senso delle distribuzioni) e si indica con $\mathcal{F}_D\{T\}$, la distribuzione temperata definita da

$$\langle \mathcal{F}_D\{T\}, \varphi \rangle =_{\text{def}} \langle T, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle, \ \forall \varphi \in S.$$

Tale definizione riconduce quindi il calcolo della trasformata $\mathcal{F}_D$ a quello della trasformata "classica" $\mathcal{F}$ (i.e. in L^1 o L^2).

Dal Teorema precedente si ha poi la seguente proprietà

- Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}_D\{f\} \equiv \mathcal{F}\{f\}$,ossia se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora la trasformata nel senso delle distribuzioni di f coincide con quella "classica".

La definizione precedente acquista quindi significato per quelle "funzioni" che non appartengono a $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$.