ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2006-2007
Tracce delle lezioni del 7 e 8 febbraio 2007

February 8, 2007

1 Derivazione

Teorema (Derivazione) *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$,$f' \in L^1(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\mathfrak{F}\{f'\} = j\omega\mathfrak{F}\{f\}.$$

Corollario *Sia* $f \in C^N(\mathbb{R})$ *e* $f \in L^1(\mathbb{R})$,$f' \in L^1(\mathbb{R}), ..., f^{(N)} \in L^1(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\mathfrak{F}\left\{f^{(N)}\right\} = (j\omega)^N\mathfrak{F}\{f\}.$$

In particolare, se $f \in C^2(\mathbb{R})$ *e* $f \in L^1(\mathbb{R})$,$f' \in L^1(\mathbb{R})$,$f'' \in L^1(\mathbb{R})$, *allora*

$$\mathfrak{F}\left\{f''\right\} = -\omega^2\mathfrak{F}\{f\}.$$

Si osservi che l'ipotesi "$f \in C^1(\mathbb{R})$" nel precedente Teorema non può essere tralasciata, come mette in luce l'esempio dell'impulso rettangolare.

2 Integrabilità della trasformata

Ricordiamo la formula dell'antitrasformata:

Teorema *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *e si supponga inoltre che* f *sia sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso* $[-L, L]$. *Ciò premesso si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{1}$$

Se $F \in L^1(\mathbb{R})$ allora l'integrale in (1) converge non solo nel senso del valore principale, ma anche in senso generalizzato (o improprio). In altre parole, se $F \in L^1(\mathbb{R})$ la formula dell'antitrasformata diviene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{2}$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ puo' accadere che la sua trasformata $F = \mathfrak{F}\{f\}$ non appartenga a $L^1(\mathbb{R})$, come illustra, ad esempio il caso dell'impulso rettangolare. Pertanto, come si dice, lo spazio L^1 non è chiuso rispetto all'operatore "trasformata di Fourier".

Condizioni sufficienti affinchè la trasformata appartenga a $L^1(\mathbb{R})$ si ottengono come immediata conseguenza del teorema della derivazione. Si hanno infatti i seguenti:

Corollario 1 *Sia* $f \in C^n(\mathbb{R})$,*f.* $f^{'}, ..., f^{\,(n)} \in L^1(\mathbb{R})$;*allora* $F = o(\omega^{-n})$ *per* $|\omega| \to \infty$, *ossia*

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \frac{F(\omega)}{\omega^{-n}} = 0$$

dove $F = \mathfrak{F}\{f\}$.

Il significato di tale Corollario è il seguente: "*la trasformata di Fourier* F *di una funzione* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *tende a zero (per* $|\omega| \to +\infty$*) tanto più velocemente, quanto più* f *è "liscia" (e con derivate in* $L^1(\mathbb{R})$*)"*

Corollario 2 *Sia* $f \in C^2(\mathbb{R})$,*f.* $f^{'}, f^{\,''} \in L^1(\mathbb{R})$;*allora* $F \in L^1(\mathbb{R})$ *(e quindi nella formula della antitrasformata si può omettere la sigla v.p.,in quanto, in tal caso, (1) e (2) coincidono.*

3 Il Teorema del campionamento

Un'importante applicazione della trasformata di Fourier nell'ambito della trasmissione di segnali è data dal Teorema di Shannon (o del campionamento) : si veda Cap. 3.14 in M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche*", Edizioni Cedam, 1999.

4 Altre proprietà

1. **Integrazione -** Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dove $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, si ha
$$\mathfrak{F}\{g\} = \frac{F(\omega)}{j\omega}.$$
Poiché la trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$ è una funzione continua per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, dalla proprietà precedente si ha anche il

   Corollario *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dove $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, si ha*
$$\lim_{\omega \to 0} F(\omega) = 0.$$

2. **Convoluzione -** Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Si chiama prodotto di convoluzione di f e g, e si indica con $f * g$, la funzione
$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$
Tale definizione è lecita, nel senso che è possibile provare che
$$f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R}).$$
Teorema - *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}, G(\omega) = \mathfrak{F}\{g\}$, si ha*
$$\mathfrak{F}\{f * g\} = F(\omega)G(\omega).$$
Se **inoltre** f, g sono nulle sul semiasse negativo, ossia se per $t < 0$ si ha
$$f(t) = g(t) = 0,$$
allora è immediato verificare che (per $t > 0$)
$$(f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{3}$$
Il prodotto di convoluzione interviene nella risolubilità di equazioni (o sistemi) differenziali lineari a coefficienti costanti. A titolo di esempio, per l'equazione lineare scalare
$$y' = cy + b(t), \tag{4}$$

dove c è una costante reale e b una funzione continua (a tratti) in $[0, \infty)$ si ha

$$y(t) = e^{ct}y(0) + e^{ct} * b(t). \tag{5}$$

Si osservi che la funzione e^{ct} è una soluzione dell'equazione lineare omogenea

$$x'(t) = cx(t); \tag{6}$$

precisamente è la soluzione x di (6) tale che $x(0) = 1$. La formula (5) mette in luce che per la risolubilità di (4) è sufficiente allora determinare tale soluzione. Così, ad esempio, tutte le soluzioni di

$$y' + 7y = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

sono date da

$$y(t) = e^{-7t}y(0) + e^{-7t} * \frac{2t}{t^2 + 1}.$$

5 Trasformata di Laplace

5.1 Definizione

Introduzione, Preliminari, Funzioni di classe Λ, ascissa di convergenza: si veda Cap. 1.1, 1.2, 1.3 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

Si ha poi il seguente:

Teorema. *Sia $f \in \Lambda$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza. Allora la funzione $f(t)e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $x > \alpha_f$.*

In virtù di tale teorema, possiamo porre allora la seguente

Definizione. *Sia $f \in \Lambda$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza. Si chiama* **trasformata di Laplace di** f, *e si indica con $L[f(t)]$, la trasformata di Fourier di $f(t)e^{-xt}$, con $x > \alpha_f$, ossia*

$$L[f(t)] = \mathfrak{F}\left\{f(t)e^{-xt}\right\}, \text{ dove } x > \alpha_f. \tag{7}$$

Ricordando la definizione di trasformata di Fourier, si ottiene allora la ben nota

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

dove s è un qualunque numero complesso con $\operatorname{Re} s = x > \alpha_f$.

5.2 Principali proprietà

Sia $f \in \Lambda$, α_f la sua ascissa di convergenza e $F(s) = L[f(t)]$ la sua trasformata di Laplace. Allora:

- F **è analitica per ogni** s **tale che** $\operatorname{Re} s > \alpha_f$.

- **Vale il seguente**
$$\lim_{\operatorname{Re} s \to +\infty} F(s) = 0.$$

- **linearita'.**
$$L[c_1 f(t) + c_2 g(t)] = c_1 L[f(t)] + c_2 L[g(t)]$$
dove anche $g \in \Lambda$ e $c_i, i = 1, 2$, sono numeri complessi.

- **traslazione temporale.**
$$L[f(t-A)] = F(s)e^{-As}, \text{ con } A > 0;$$

- **traslazione in frequenza (o smorzamento).**
$$L[f(t)e^{\gamma t}] = F(s-\gamma), \text{ con } \gamma \in \mathbb{C};$$

- **derivazione**. Sia $f \in C^1[0, +\infty), f, f' \in \Lambda$. Allora
$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0+)$$
dove $f(0+) = \lim_{t \to 0+} f(t)$.

- **integrazione.** Posto $g(t) = \int_0^t f(r)dr$, sia anche $g \in \Lambda$. Allora
$$L[g(t)] = \frac{F(s)}{s}$$

Si confrontino queste proprietà con le "corrispondenti" viste per la trasformata di Fourier, evidenziandone le analogie e differenze.

5.3 Formula di Bromwich-Mellin

Si veda Cap. 1.13.1, 1.13.2, del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

Formula di Bromwich-Mellin - *Sia $f \in \Lambda$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza. Sia inoltre f sviluppabile in serie di Fourier in $[0, L], \forall L > 0$. Indicata con $F(s) = L[f(t)]$ la sua trasformata di Laplace, si ha per $t > 0$*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

dove $x > \alpha_f$.

Tale formula, nota anche sotto il nome di formula di Riemann-Fourier, puo' essere facilmente ottenuta dalla formula di inversione per la trasformata di Fourier e da (7).

Nel caso in cui F sia razionale, vale il seguente:

Teorema *Sia F razionale. Allora esiste $f \in \Lambda$ tale che $F(s) = L[f(t)]$* **se e solo se** *F è propria.*

Utilizzando poi la teoria dei residui e il Lemma di Jordan, si puo' provare il seguente:

Teorema *Sia F razionale propria, $F(s) = N(s)/D(s)$ con N, D polinomi primi tra loro. Allora l'antitrasformata di Laplace di $F(s)$ è data, per $t > 0$, dalla funzione*

$$f(t) = \sum_{s_i} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_i],$$

dove s_i rappresentano gli zeri del polinomio D, i.e. le singolarità di F.

6 Equazioni differenziali lineari - Richiami

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{8}$$

dove le funzioni a, b sono continue a tratti in un intervallo I dell'asse reale. Allora:

1. *Per ogni* $x_0 \in I$ *e per ogni* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *esiste un'unica soluzione* $y = y(x)$ *di (8) tale che* $y(x_0) = c_1$, $y'(x_0) = c_2$.

2. *Ogni soluzione di (8) è persistente, ossia è definita in tutto l'intervallo* I.

3. *L'insieme delle soluzioni di (8) è uno spazio lineare di dimensione* 2 .