ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2006-2007
Traccia delle lezioni del 24 e 25 gennaio 2007

January 25, 2007

1 Spazi normati

Sia V uno spazio vettoriale complesso. Si chiama *norma in V* ogni applicazione $||\cdot||$

$$||\cdot|| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

$$\begin{array}{ll} ||f|| \geq 0, = 0 \text{ se e solo se } f = \underline{0} & \forall f \in V, \\ ||\alpha f|| = |\alpha|\ ||f|| & \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in V \\ ||f+g|| \leq ||f|| + ||g|| & \forall f, g \in V \end{array}$$

e lo spazio V si chiama *spazio normato*.

Ad esempio, se V è lo spazio delle funzioni continue in $[0,1]$, ossia $V = C[0,1]$, allora è immediato verificare che sono norme in $C[0,1]$ le seguenti ($f \in C[0,1]$):

$$||f||_M = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$$

$$||f||_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

- **Ogni spazio normato V è anche uno spazio metrico, con distanza d data da**

$$d(f,g) = ||f-g|| \qquad\qquad (f,g \in V)$$

In riferimento all'esempio di sopra, allora in $C[0,1]$ è possibile considerare le tre distanze (metriche) $(f,g \in C[0,1])$:

$$\begin{aligned} d_M(f,g) &= ||f-g||_M = \max_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)| \\ d_1(f,g) &= ||f-g||_1 = \int_0^1 |f(t)-g(t)|dt \\ d_2(f,g) &= ||f-g||_2 = \left(\int_0^1 |f(t)-g(t)|^2 dt\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Esercizio. Sia $f(t) = t(1-t), g(t) = t/2$. Si verifichi che

$$d_M(f,g) = 1/2, \qquad d_1(f,g) = 1/8.$$

2 Richiami sul concetto di integrale improprio

Sia f una funzione reale di variabile reale, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile in ogni intervallo limitato e chiuso dell'asse reale. Se, **comunque** siano scelti $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste finito il limite

$$\lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

e tale limite è indipendente da a, b, allora si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =_{def} \lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

e diremo che f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, o, equivalentemente che l'integrale di f, esteso a $\mathbb{R}$, converge. In caso contrario diremo che f non è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ o semplicemente che f non è integrabile in $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, che l'integrale di f, esteso a $\mathbb{R}$, non converge.

Si chiama poi *valore principale dell'integrale improprio* (in $\mathbb{R}$), e si indica con

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

il limite

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =_{def} \lim_{L\to+\infty} \int_{-L}^{+L} f(x)dx. \tag{2}$$

La relazione tra le due definizioni (1), (2) è, ovviamente, la seguente: se f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, allora il valore principale dell'integrale improprio esiste finito e coincide con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, ossia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \implies v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M.$$

Ovviamente NON vale il viceversa, ossia il valore principale dell'integrale improprio può essere finito, ma l'integrale (1) può non convergere, i.e.

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \;\not\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \;.$$

Ad esempio per la funzione

$$f(x) = \frac{x^5}{x^4+1}$$

si ha

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5}{x^4+1}dx = 0$$

in quanto la funzione è dispari, ma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ovviamente non converge (f è illimitata!).

2.1 Gli spazi $\mathbf{L}^p$

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e sia p un numero reale $p \geq 1$.

Scriveremo $f \in L^p(\mathbb{R})$, se $|f|^p$ è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, ossia se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty.$$

In particolare se $p = 1, f$ si dice *sommabile* e in tal caso scriveremo $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Se $p = 2$, f si dice *a quadrato sommabile* e scriveremo $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Gli spazi $L^p(\mathbb{R})$ sono spazi normati (e quindi anche metrici).

In particolare la norma e la distanza in $L^1(\mathbb{R})$ sono date, rispettivamente, da $(f, g \in L^1(\mathbb{R}))$

$$||f||_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$$
$$d_{L^1}(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|dt$$

Per quanto riguarda $L^2(\mathbb{R})$, la norma e la distanza sono date da $(f, g \in L^2(\mathbb{R}))$

$$||f||_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$
$$d_{L^2}(f, g) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

3 Trasformata di Fourier in L^1

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile **reale** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sommabile, ossia $f \in L^1(\mathbb{R})$, i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty;$$

ciò posto, si chiama *Trasformata di Fourier (in L^1)* di f la funzione F definita da

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{3}$$

dove ω è un numero reale fissato.

- La definizione (3) è lecita, nel senso che l'integrale in (3) converge per ogni ω reale.

- Utilizzando le formule di Eulero si ha:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\ dt}_{(*)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\ dt}_{(+)}$$

  $(*)$ si chiama *Trasformata coseno di Fourier* e $(+)$ *Trasformata seno di Fourier.*

- Formula della antitrasformata : vale il seguente teorema

Teorema *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si supponga inoltre che f sia sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo chiuso $[-L, L]$, qualunque sia L. Ciò premesso si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

4 Prime proprietà della trasformata di Fourier in $\mathbf{L}^1$

Indichiamo con $\mathfrak{F}$ l'operatore che associa a $f(\in L^1(\mathbb{R}))$ la sua trasformata di Fourier F, ossia $\mathfrak{F}\{f\} = F$. Ciò premesso si ha:

Teorema. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; allora la sua trasformata F è una funzione continua e infinitesima per $|\omega| \to \infty$.*

Corollario. *La trasformata di Fourier F di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ è una funzione limitata per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.*

Ad esempio non sono trasf. di Fourier (di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$!) le funzioni

$$F_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 12}{\omega^2 + 4}; F_2(\omega) = \frac{\omega + 12}{\omega^2 - 4}.$$

La trasformata di Fourier F di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$ puo' non essere derivabile. Esempi in tal senso saranno visti nelle prossime lezioni. Se, all'ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R})$ aggiungiamo anche $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$, allora la risposta è affermativa, come segue subito dal seguente risultato.

Teorema *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *e* $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$; *allora la trasformata di Fourier* F *di* f *è derivabile e si ha:*

$$\mathfrak{F}\{tf(t)\} = j\frac{d}{d\omega}F(\omega).$$

Si osservi che tale teorema fornisce solo una condizione sufficiente. Si osservi inoltre che le due ipotesi "$f \in L^1(\mathbb{R})$" *e* "$tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$" sono tra loro indipendenti. Infatti, ad esempio, per la funzione f, data da

$$f(t) = \begin{cases} 1/t^2 & \text{se } t > 1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha $f \in L^1(\mathbb{R})$" *e* "$tf(t) \notin L^1(\mathbb{R})$, mentre per la funzione g, data da

$$g(t) = \begin{cases} 1/t & \text{se } t \in (0,1) \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha "$g \notin L^1(\mathbb{R})$" *e* "$tg(t) \in L^1(\mathbb{R})$" .