LEZIONE 2

DIPOLO ELETTRICO CORTO E INTEGRALI DI RADIAZIONE

Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
E-mail: *giuseppe.pelosi@unifi.it*
URL: http://ingfi9.det.unifi.it/

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

POTENZIALE VETTORE DI TIPO ELETTRICO

$$\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu}$$

$$\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$$

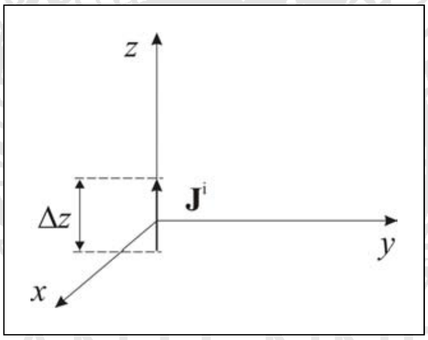
$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mu\,\mathbf{J}^i$$

$$k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$$

ANTENNE

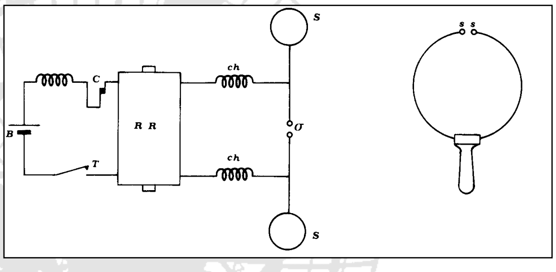
DIPOLO ELEMENTARE

$$\mathbf{J}^i = I\delta(x)\delta(y)\delta(z)\hat{z}$$



DIPOLO ELEMENTARE

H. Hertz



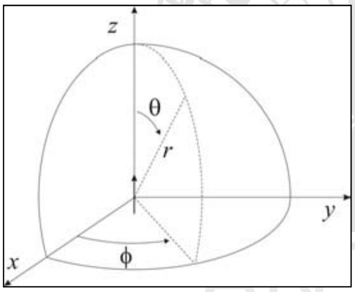
DIPOLO ELEMENTARE

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu\, \mathbf{J}^i \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\nabla^2 A_x + k^2 A_x = 0 \\ &\nabla^2 A_y + k^2 A_y = 0 \\ &\nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu I \delta(x)\delta(y)\delta(z) \end{aligned}$$

DIPOLO ELEMENTARE

Soluzione per le componenti x e y $\Longrightarrow$ $A_x = A_y = 0$

Soluzione per la componente z $\Longrightarrow$ per $r \neq 0 \Rightarrow \nabla^2 A_z + k^2 A_z = 0$



La simmetria sferica del problema impone $A_z = A_z(r)$

DIPOLO ELEMENTARE

L'equazione di Helmholtz si riduce a:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A_z(r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial A_z(r)}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 A_z(r)}{\partial\phi^2}+k^2A_z(r)=0$$

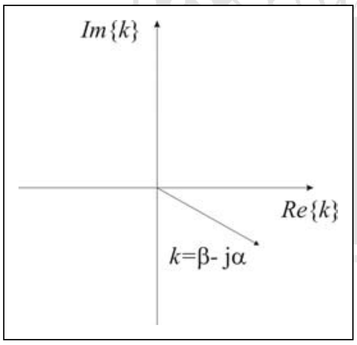
$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dA_z(r)}{dr}\right)+k^2A_z(r)=0$$

DIPOLO ELEMENTARE

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dA_z(r)}{dr}\right)+k^2A_z(r)=0$$

posto $A_z(r)=\dfrac{f(r)}{r}$ si ha $\dfrac{d^2f(r)}{dr^2}+k^2f(r)=0$

$$f(r)=C\exp(-jkr)+F\exp(jkr)$$



Scelta di k (costante di propagazione)

$$k=\beta-j\alpha$$

$$\mathrm{Re}\{k\}=\beta>0$$

$$\mathrm{Im}\{k\}=-\alpha<0$$

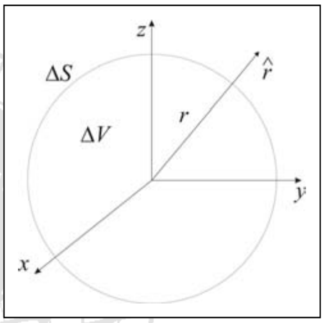
$\beta\rightarrow$ costante di fase

$\alpha\rightarrow$ costante di attenuazione

DETERMINAZIONE DELLE COSTANTI DI INTEGRAZIONE

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu I \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

Si integra l'equazione non omogenea su un volume sferico ΔV limitato dalla superficie ΔS e centrato nell'origine



$$\iiint_{\Delta V} \nabla^2 A_z(r)\, dV + k^2 \iiint_{\Delta V} A_z(r)\, dV = -\mu I \Delta z$$

$$\iiint_{\Delta V} \nabla^2 A_z(r)\, dV = \iiint_{\Delta V} \nabla \cdot (\nabla A_z(r))\, dV = \oiint_{\Delta S} \nabla A_z(r) \cdot \hat{r}\, dS$$

$$\oiint_{\Delta S} \nabla A_z(r) \cdot \hat{r}\, dS + k^2 \iiint_{\Delta V} A_z(r)\, dV = -\mu I \Delta z$$

$$I_1 = \oiint_{\Delta S} \nabla A_z(r) \cdot \hat{r}\, dS$$

$$I_2 = k^2 \iiint_{\Delta V} A_z(r)\, dV$$

$$I_1 + I_2 = -\mu I \Delta z$$

DETERMINAZIONE DELLE COSTANTI DI INTEGRAZIONE

Consideriamo l'integrale in dV

$$I_2 = k^2 \iiint_{\Delta V} A_z(r)\, dV$$

$$A_z(r) = C \frac{e^{-jkr}}{r} + F \frac{e^{+jkr}}{r} \qquad dV = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\phi$$

$$I_2 = k^2 \iiint_{\Delta V} A_z(r)\, dV = k^2 \iiint_{\Delta V} \left(C \frac{e^{-jkr}}{r} + F \frac{e^{+jkr}}{r} \right) r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\phi$$

Per $r \to 0$ anche $I_2 \to 0$

DETERMINAZIONE DELLE COSTANTI DI INTEGRAZIONE

Consideriamo l'integrale in dS

$$I_1 = \oiint_{\Delta S} \nabla A_z(r)\cdot \hat{r}\, dS$$

$$A_z(r) = C\frac{e^{-jkr}}{r} + F\frac{e^{+jkr}}{r} \qquad dS = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta d\phi$$

$$\nabla A_z(r) = \frac{\partial A_z(r)}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_z(r)}{\partial \vartheta}\hat{\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_z(r)}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

$$\nabla A_z(r)\cdot \hat{r}dS = \left[\frac{dA_z(r)}{dr}\hat{r}\right]\cdot \hat{r}dS = \left(C\frac{-jk\, e^{-jkr}r - e^{-jkr}}{r^2} + F\frac{jk\, e^{+jkr}r - e^{+jkr}}{r^2}\right) r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta d\phi$$

Ponendo $F = 0$

$$\nabla A_z(r)\cdot \hat{r}dS = \left(C\frac{-jk\, e^{-jkr}r - e^{-jkr}}{r^2}\right) r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta d\phi = C\left(-jk\, e^{-jkr}r - e^{-jkr}\right)\sin\vartheta\, d\vartheta d\phi$$

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

DETERMINAZIONE DELLE COSTANTI DI INTEGRAZIONE

$$I_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} C\left(-jk\, e^{-jkr}r - e^{-jkr}\right)\sin\vartheta\, d\vartheta d\phi$$

per $r \to 0$ si ha $I_1 \to -4\pi C$

Concludendo si ha

$$I_1 = \oiint_{\Delta S} \nabla A_z(r)\cdot \hat{r}\, dS \to -4\pi C$$

$$I_2 = k^2 \iiint_{\Delta V} A_z(r)\, dV \to 0$$

da cui: $C = \frac{\mu I\Delta z}{4\pi}$

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI HELMHOLTZ PER IL DIPOLO ELEMENTARE

Il potenziale vettore associato al dipolo elementare è dunque

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_z(r)\hat{z} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,\Delta z}{r}\exp(-jkr)\hat{z}$$

Dal potenziale ai campi elettromagnetici

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$$

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAMPO ELETTRICO

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu}$$

$$\mathbf{A} = A_z(r)\cos\vartheta\,\hat{r} - A_z(r)\sin\vartheta\,\hat{\vartheta} =$$

$$= \left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,\Delta z}{r}\exp(-jkr)\right]\cos\vartheta\,\hat{r} - \left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,\Delta z}{r}\exp(-jkr)\right]\sin\vartheta\,\hat{\vartheta} = A_r(r,\vartheta)\hat{r} + A_\vartheta(r,\vartheta)\hat{\vartheta}$$

$$A_r(r,\vartheta) = A_z(r)\cos\vartheta = \left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,\Delta z}{r}\exp(-jkr)\right]\cos\vartheta$$

$$A_\vartheta(r,\vartheta) = -A_z(r)\sin\vartheta = -\left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,\Delta z}{r}\exp(-jkr)\right]\sin\vartheta$$

$$A_\phi = 0$$

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAMPO ELETTRICO

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_\vartheta \sin\vartheta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r(r,\vartheta)\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_\vartheta(r,\vartheta)\sin\vartheta\right)$$

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) = \nabla g = \frac{\partial g}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial\vartheta}\hat{\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial g}{\partial\phi}\hat{\phi} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_\vartheta\sin\vartheta\right)\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_\vartheta\sin\vartheta\right)\right]\hat{\vartheta}$$

CAMPO ELETTRICO

$$A_r(r,\vartheta) = \left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,\Delta z}{r}\exp(-jkr)\right]\cos\vartheta$$

$$A_\vartheta(r,\vartheta) = -\left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,\Delta z}{r}\exp(-jkr)\right]\sin\vartheta$$

$$A_\phi = 0$$

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu} =$$

$$= -j\omega\left(A_r\,\hat{r} + A_\vartheta\,\hat{\vartheta}\right) +$$

$$+\frac{1}{j\omega\varepsilon\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_\vartheta\sin\vartheta\right)\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_\vartheta\sin\vartheta\right)\right)\hat{\vartheta}\right\}$$

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAMPO MAGNETICO

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$$

$$A_r(r,\vartheta) = A_z(r)\cos\vartheta = \left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,\Delta z}{r}\exp(-jkr)\right]\cos\vartheta$$

$$A_\vartheta(r,\vartheta) = -A_z(r)\sin\vartheta = -\left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,\Delta z}{r}\exp(-jkr)\right]\sin\vartheta$$

$$A_\phi = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\phi \sin\vartheta) - \frac{\partial}{\partial\phi}A_\vartheta\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\phi}A_r - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\hat{\vartheta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial\vartheta}A_r\right]\hat{\phi} =$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial\vartheta}A_r\right]\hat{\phi}$$

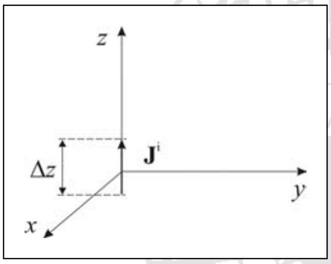
$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\mu}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial\vartheta}A_r\right]\hat{\phi}\right\}$$

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CAMPO ELETTROMAGNETICO

$$\mathbf{E} = E_r\,\hat{r} + E_\vartheta\,\hat{\vartheta} + E_\phi\,\hat{\phi}$$

$$\mathbf{H} = H_r\,\hat{r} + H_\vartheta\,\hat{\vartheta} + H_\phi\,\hat{\phi}$$



$$\begin{cases} E_r = \zeta\dfrac{I\,\Delta z}{2\pi}\left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{jkr^3}\right)\cos\vartheta\exp(-jkr) \\ E_\vartheta = \zeta\dfrac{I\,\Delta z}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r} + \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{jkr^3}\right)\sin\vartheta\exp(-jkr) \\ E_\phi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_r = 0 \\ H_\vartheta = 0 \\ H_\phi = \dfrac{I\,\Delta z}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r} + \dfrac{1}{r^2}\right)\sin\vartheta\exp(-jkr) \end{cases}$$

$\zeta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$ impedenza caratteristica dello spazio libero

$\dfrac{1}{r^2}, \dfrac{1}{r^3} \rightarrow$ campi vicini o reattivi (trascurabili per $r >> \lambda$)

$\dfrac{1}{r} \rightarrow$ campi lontani o radiativi

CAMPO LONTANO

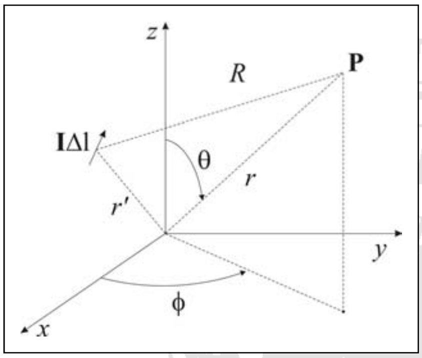
Per (kr >> λ) diventano predominanti i termini che contengono 1/r e le espressioni si semplificano

$$E_\vartheta \approx j\zeta k \frac{I\,\Delta z}{4\pi r} \sin\vartheta \exp(-jkr)$$

$$H_\phi \approx \frac{E_\vartheta}{\zeta}$$

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

INTEGRALI DI RADIAZIONE



Per un dipolo elementare posizionato in **r**’=(x’,y’,z’) e orientato arbitrariamente si ha:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu\,\mathbf{I}\,\Delta l}{4\pi}\frac{e^{-jkR}}{R} \qquad \text{con} \qquad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

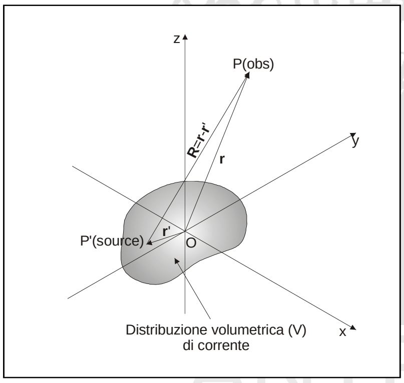
Per una distribuzione di corrente generica il potenziale vettore può essere determinato come somma dei contributi elementari $\mathbf{J}^i(\mathbf{r})dv'$ dovuti a ciascun elemento di volume dv'

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r},\mathbf{J}^i) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \mathbf{J}^i(\mathbf{r}')\frac{e^{-jkR}}{R}dv'$$

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

INTEGRALI DI RADIAZIONE

Risolvendo le equazioni di Helmholtz si ottengono le *relazioni integrali* che legano il potenziale vettore A ed il potenziale di Fitzgerald F alle sorgenti



$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\left(\mathbf{r};\mathbf{J}^i\right) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \mathbf{J}^i(\mathbf{r}')\frac{e^{-jkR}}{R}\,dv'$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\left(\mathbf{r},\mathbf{M}^i\right) = \frac{\varepsilon}{4\pi}\iiint_V \mathbf{M}^i(\mathbf{r}')\frac{e^{-jkR}}{R}\,dv'$$

$$R = \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right| \qquad k = \beta - j\alpha$$

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$$

funzione di Green dello spazio libero