# LEZIONE 3

# RADIATORI ELEMENTARI

Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
E-mail: *giuseppe.pelosi@unifi.it*
*URL: http://ingfi9.det.unifi.it/*







- **Lezione 1 – Teoria dei potenziali**
- **Lezione 2 – Dipolo elettrico corto e integrali di radiazione**
- **Lezione 3 – Radiatori elementari**
  - Dipolo elettrico corto (dec)
  - Dipolo magnetico corto (dmc)
  - Antenna a loop (antenna a spira o antenna a telaio)
  - Sorgente di Huygens (radiogoniometro)

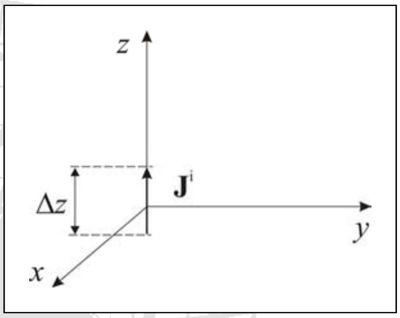
ANTENNE

## DIPOLO ELETTRICO CORTO (dec)

$$\mathbf{E}^e = E_r^e\,\hat{r} + E_\vartheta^e\,\hat{\vartheta} + E_\phi^e\,\hat{\phi}$$

$$\mathbf{H}^e = H_r^e\,\hat{r} + H_\vartheta^e\,\hat{\vartheta} + H_\phi^e\,\hat{\phi}$$

$$\begin{cases} E_r^e = \zeta \dfrac{I\,\Delta z}{2\pi}\left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{jkr^3}\right)\cos\vartheta\, e^{-jkr} \\ E_\vartheta^e = \zeta \dfrac{I\,\Delta z}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r} + \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{jkr^3}\right)\sin\vartheta\, e^{-jkr} \\ E_\phi^e = 0 \end{cases}$$




$$\begin{cases} H_r^e = 0 \\ H_\vartheta^e = 0 \\ H_\phi^e = \dfrac{I\,\Delta z}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r} + \dfrac{1}{r^2}\right)\sin\vartheta\, e^{-jkr} \end{cases}$$

$\dfrac{1}{r^2}, \dfrac{1}{r^3} \rightarrow$ campi vicini o reattivi (trascurabili per $r >> \lambda$)

$\dfrac{1}{r} \rightarrow$ campi lontani o radiativi





ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze



## DIPOLO ELETTRICO CORTO (dec)

Campi radiativi

per $r >> \lambda$

$$\mathbf{E}^e = E_\vartheta^e\,\hat{\vartheta} = jk\zeta \frac{I\,\Delta z}{4\pi r}\sin\vartheta\, e^{-jkr}\,\hat{\vartheta}$$

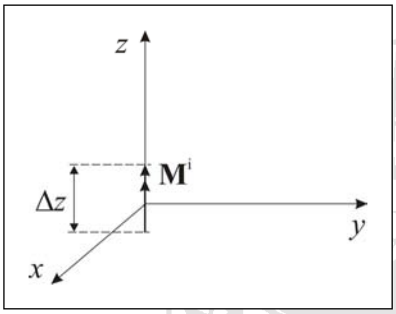
$$\mathbf{H}^e = H_\phi^e\,\hat{\phi} = \frac{\hat{r}\times\mathbf{E}^e}{\zeta} = \frac{E_\vartheta^e}{\zeta}\hat{\phi} = jk\frac{I\,\Delta z}{4\pi r}\sin\vartheta\, e^{-jkr}\,\hat{\phi}$$





ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

## DIPOLO MAGNETICO CORTO (dmc)




Applicando il principio di dualità di Babinet

$$\mathbf{J}^i \to \mathbf{M}^i$$
$$I \to I_m$$
$$\mathbf{E}^e \to \mathbf{H}^m$$
$$\mathbf{H}^e \to -\mathbf{E}^m$$
$$\mu \to \varepsilon$$
$$\varepsilon \to \mu$$

$$\begin{cases} E_r^e = \zeta \dfrac{I\,\Delta z}{2\pi}\left(\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{jkr^3}\right)\cos\vartheta\, e^{-jkr} \\ E_\vartheta^e = \zeta \dfrac{I\,\Delta z}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r}+\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{jkr^3}\right)\sin\vartheta\, e^{-jkr} \\ E_\phi^e = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} H_r^m = \dfrac{1}{\zeta}\dfrac{I_m\,\Delta z}{2\pi}\left(\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{jkr^3}\right)\cos\vartheta\, e^{-jkr} \\ H_\vartheta^m = \dfrac{1}{\zeta}\dfrac{I_m\,\Delta z}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r}+\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{jkr^3}\right)\sin\vartheta\, e^{-jkr} \\ H_\phi^m = 0 \end{cases}$$







## DIPOLO MAGNETICO CORTO (dmc)

$$\mathbf{J}^i \to \mathbf{M}^i$$
$$I \to I_m$$
$$\mathbf{E}^e \to \mathbf{H}^m$$
$$\mathbf{H}^e \to -\mathbf{E}^m$$
$$\mu \to \varepsilon$$
$$\varepsilon \to \mu$$

$$\begin{cases} H_r^e = 0 \\ H_\vartheta^e = 0 \\ H_\phi^e = \dfrac{I\,\Delta z}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r}+\dfrac{1}{r^2}\right)\sin\vartheta\, e^{-jkr} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} E_r^m = 0 \\ E_\vartheta^m = 0 \\ E_\phi^m = -\dfrac{I_m\,\Delta z}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r}+\dfrac{1}{r^2}\right)\sin\vartheta\, e^{-jkr} \end{cases}$$



ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

## DIPOLO MAGNETICO CORTO (dmc)

Campi radiativi

per $r >> \lambda$

$$\mathbf{E}^m = E_\phi^m \hat{\phi} = -jk \frac{I_m \Delta z}{4\pi r} \sin\vartheta \, e^{-jkr} \hat{\phi}$$

$$\mathbf{H}^m = H_\vartheta^m \hat{\vartheta} = \frac{\hat{r} \times \mathbf{E}^m}{\zeta} = -\frac{E_\phi^m}{\zeta} \hat{\vartheta} = j \frac{k}{\zeta} \frac{I_m \Delta z}{4\pi r} \sin\vartheta \, e^{-jkr} \hat{\vartheta}$$

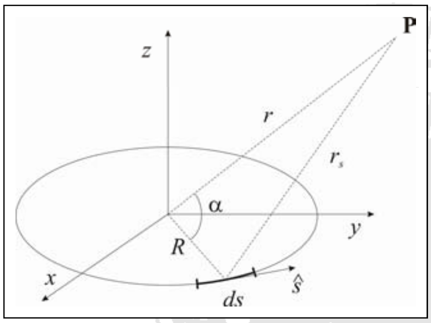


ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze





## ANTENNA A LOOP (a spira o a telaio)




$2\pi R << \lambda$

**I** costante spazialmente e con dipendenza temporale di tipo armonico

$$d\mathbf{A}^\ell(\mathbf{r}) = \frac{\mu \mathbf{I}_\ell \, ds}{4\pi} \frac{e^{-jkr_s}}{r_s}$$

$$\mathbf{A}^\ell(\mathbf{r}) = \frac{\mu I_\ell}{4\pi} \oint_C \frac{e^{-jkr_s}}{r_s} \hat{s} \, ds$$



ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

## ANTENNA A LOOP (a spira o a telaio)



Sviluppo multipolare di Stratton

$$\frac{e^{-jkr_s}}{r_s} = -jk\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)j_n(kR)h_n^{(2)}(kr)P_n(\cos\alpha)$$

$P_n(\cos\alpha)$ polinomi di Legendre

$j_n(kR)$ funzioni sferiche di Bessel di prima specie

$h_n^{(2)}(kr)$ funzioni sferiche di Hankel di seconda specie

Si ottiene quindi: $\mathbf{A}^{\ell} = \underset{n=0}{\mathbf{A}_0^{\ell}} + \underset{n=1}{\mathbf{A}_1^{\ell}} + \underset{n=2}{\mathbf{A}_2^{\ell}} + \cdots$

$$\mathbf{A}_0^{\ell} = \frac{\mu I_{\ell}}{4\pi}\int_0^{2\pi} -jk\left[j_0(kR)h_0^{(2)}(kr)P_0(\cos\alpha)\right]R\hat{\phi}\,d\phi$$

$$\mathbf{A}_1^{\ell} = \frac{\mu I_{\ell}}{4\pi}\int_0^{2\pi} -jk\left[3j_1(kR)h_1^{(2)}(kr)P_1(\cos\alpha)\right]R\hat{\phi}\,d\phi$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{E}^{\ell} = \underset{n=0}{\mathbf{E}_0^{\ell}} + \underset{n=1}{\mathbf{E}_1^{\ell}} + \underset{n=2}{\mathbf{E}_2^{\ell}} + \cdots$$







## ANTENNA A LOOP (a spira o a telaio)



Dato che la spira è circolare $\mathbf{A}_0^{\ell} = 0$

$$\mathbf{E}_1^{\ell} = -j\omega\left(\mathbf{A}_1^{\ell} + \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}_1^{\ell}}{k^2}\right)$$

Fermandosi al termine $\mathbf{A}_1^{\ell}$ (spira piccola) si ha:

$$\mathbf{H}_1^{\ell} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}_1^{\ell}$$

$$\begin{cases} H_{1\,r}^{\ell} = \dfrac{j\omega\mu\left(\pi R^2\right)I_{\ell}}{2\pi}\dfrac{1}{\zeta}\left(\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{jkr^3}\right)\cos\vartheta\, e^{-jkr} \\ H_{1\,\vartheta}^{\ell} = \dfrac{j\omega\mu\left(\pi R^2\right)I_{\ell}}{4\pi}\dfrac{1}{\zeta}\left(\dfrac{jk}{r}+\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{jkr^3}\right)\sin\vartheta\, e^{-jkr} \\ H_{1\,\phi}^{\ell} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{1\,r}^{\ell} = 0 \\ E_{1\,\vartheta}^{\ell} = 0 \\ E_{1\,\phi}^{\ell} = -\dfrac{j\omega\mu\left(R^2\pi\right)I_{\ell}}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r}+\dfrac{1}{r^2}\right)\sin\vartheta\, e^{-jkr} \end{cases}$$

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

## ANTENNA A LOOP (a spira o a telaio)

Dipolo magnetico corto diretto come $z$

$$\begin{cases} H_r^m = \dfrac{1}{\zeta}\dfrac{I_m\,\Delta z}{2\pi}\left(\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{jkr^3}\right)\cos\vartheta\, e^{-jkr} \\ H_\vartheta^m = \dfrac{1}{\zeta}\dfrac{I_m\,\Delta z}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r}+\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{jkr^3}\right)\sin\vartheta\, e^{-jkr} \\ H_\phi^m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_r^m = 0 \\ E_\vartheta^m = 0 \\ E_\phi^m = -\dfrac{I_m\,\Delta z}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r}+\dfrac{1}{r^2}\right)\sin\vartheta\, e^{-jkr} \end{cases}$$

Spira di corrente elettrica sul piano $xy$

$$\begin{cases} H_{1\,r}^\ell = \dfrac{1}{\zeta}\dfrac{j\omega\mu\left(\pi R^2\right)I_\ell}{2\pi}\left(\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{jkr^3}\right)\cos\vartheta\, e^{-jkr} \\ H_{1\,\vartheta}^\ell = \dfrac{1}{\zeta}\dfrac{j\omega\mu\left(\pi R^2\right)I_\ell}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r}+\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{jkr^3}\right)\sin\vartheta\, e^{-jkr} \\ H_{1\,\phi}^\ell = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{1\,r}^\ell = 0 \\ E_{1\,\vartheta}^\ell = 0 \\ E_{1\,\phi}^\ell = -\dfrac{j\omega\mu\left(R^2\pi\right)I_\ell}{4\pi}\left(\dfrac{jk}{r}+\dfrac{1}{r^2}\right)\sin\vartheta\, e^{-jkr} \end{cases}$$

Dal confronto si ha:

$$I_m\Delta z = j\omega\mu\,\Delta s\, I_\ell \qquad \text{con} \quad \Delta s = \pi R^2$$

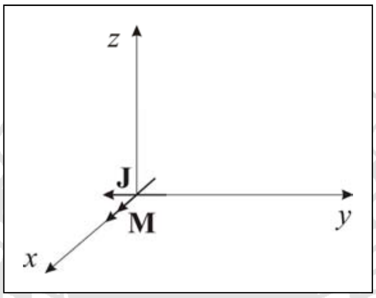






ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

## SORGENTE DI HUYGENS (radiogoniometro)




$I_m = \zeta\, I$

Il campo irradiato può essere trovato come somma dei campi irradiati dal d.e.c. e dal d.m.c

$$\mathbf{E}^H(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^e(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^m(\mathbf{r})$$

## SORGENTE DI HUYGENS (radiogoniometro)

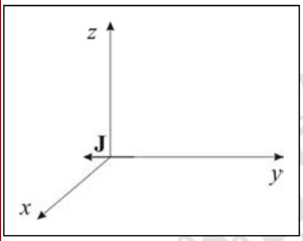
La sorgente di Huygens (antenna a loop più dipolo elettrico corto) può essere utilizzata come radiogoniometro per individuare la direzione di provenienza di una radiazione elettromagnetica

Radiogoniometro aeronautico (1944)





## SORGENTE DI HUYGENS (radiogoniometro)




Dipolo elettrico diretto come -y

$$\mathbf{A} = \frac{\mu \mathbf{I}\,\Delta y}{4\pi}\frac{e^{-jkR}}{R} \qquad \text{con} \qquad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{y} = \sin\vartheta \sin\phi\,\hat{r} + \cos\vartheta \sin\hat{\phi}\,\hat{\vartheta} + \cos\phi\,\hat{\phi}$$

$$\mathbf{A}^e(\mathbf{r}) = \frac{\mu I\,\Delta y}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}(-\hat{y}) = \frac{\mu I\,\Delta y}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\left(-\sin\vartheta \sin\phi\,\hat{r} - \cos\vartheta \sin\hat{\phi}\,\hat{\vartheta} - \cos\phi\,\hat{\phi}\right)$$

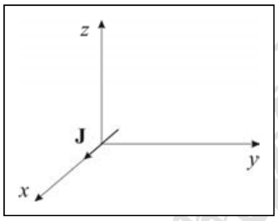
$$\mathbf{E}^e = -j\omega\mathbf{A}^e + \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}^e}{j\omega\varepsilon\mu}$$

In campo lontano ($kr >> \lambda$) $$\mathbf{E}^e(\mathbf{r}) \approx -j\omega\frac{\mu I\,\Delta y}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\left(-\cos\vartheta \sin\hat{\phi}\,\hat{\vartheta} - \cos\phi\,\hat{\phi}\right)$$

## SORGENTE DI HUYGENS (radiogoniometro)



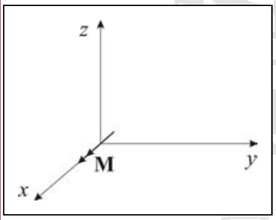
Dipolo elettrico diretto come x




$$\hat{x} = \sin\vartheta\cos\phi\,\hat{r} + \cos\vartheta\cos\hat{\phi}\,\hat{\vartheta} - \sin\phi\,\hat{\phi}$$

campo lontano $\mathbf{E}^e(\mathbf{r}) = -j\omega\dfrac{\mu I\,\Delta x}{4\pi}\dfrac{e^{-jkr}}{r}\left(\cos\vartheta\cos\hat{\phi}\,\hat{\vartheta} - \sin\phi\,\hat{\phi}\right)$

Dipolo magnetico diretto come x (applicando il principio di dualità o di Babinet)




campo lontano $\mathbf{H}^m(\mathbf{r}) = -j\omega\dfrac{\varepsilon I_m\,\Delta x}{4\pi}\dfrac{e^{-jkr}}{r}\left(\cos\vartheta\cos\hat{\phi}\,\hat{\vartheta} - \sin\phi\,\hat{\phi}\right)$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{E}^m(\mathbf{r}) = \zeta\,\mathbf{H}^m(\mathbf{r})\times\hat{r} = -j\omega\zeta\frac{\varepsilon I_m\,\Delta x}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\left(-\sin\hat{\phi}\,\hat{\vartheta} - \cos\phi\cos\vartheta\,\hat{\phi}\right)$$







## SORGENTE DI HUYGENS (radiogoniometro)



$$I_m = \zeta I$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{r}) = j\omega\frac{\mu I\,\Delta y}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\left(\cos\vartheta\sin\hat{\phi}\,\hat{\vartheta} + \cos\phi\,\hat{\phi}\right) = j\omega\frac{\mu I_m\,\Delta y}{\zeta 4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\left(\cos\vartheta\sin\hat{\phi}\,\hat{\vartheta} + \cos\phi\,\hat{\phi}\right)$$

$$\mathbf{E}^m(\mathbf{r}) = j\omega\zeta\frac{\varepsilon I_m\,\Delta x}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\left(\sin\hat{\phi}\,\hat{\vartheta} + \cos\phi\cos\vartheta\,\hat{\phi}\right)$$

$$\omega\zeta\varepsilon = \frac{\omega\mu}{\zeta} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = k \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{r}) = jk\frac{I_m\,\Delta y}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\left(\cos\vartheta\sin\hat{\phi}\,\hat{\vartheta} + \cos\phi\,\hat{\phi}\right)$$

$$\mathbf{E}^m(\mathbf{r}) = j\frac{I_m\,\Delta x}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\left(\sin\hat{\phi}\,\hat{\vartheta} + \cos\phi\cos\vartheta\,\hat{\phi}\right)$$

## SORGENTE DI HUYGENS (radiogoniometro)

Campo totale

$$\Delta x = \Delta y = \Delta l$$

$$\mathbf{E}^H(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^e(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^m(\mathbf{r}) =$$

$$= jk\frac{I_m\,\Delta l}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\left(\cos\vartheta\sin\phi\,\hat{\vartheta} + \cos\phi\,\hat{\phi}\right) + j\frac{I_m\,\Delta l}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\left(\sin\phi\,\hat{\vartheta} + \cos\phi\cos\vartheta\,\hat{\phi}\right) =$$

$$= jk\frac{I_m\,\Delta l}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}(1+\cos\vartheta)\left(\sin\phi\,\hat{\vartheta} + \cos\phi\,\hat{\phi}\right)$$





ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze