LEZIONE 7

SOLUZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI INTEGRALI PER ANTENNE FILARI

Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
E-mail: *giuseppe.pelosi@unifi.it*
URL: http://ingfi9.det.unifi.it/

LEZIONI PRECEDENTI

- **Lezione 1 – Teoria dei potenziali**
- **Lezione 2 – Dipolo elettrico corto e integrali di radiazione**
- **Lezione 3 – Radiatori elementari**
- **Lezione 4 – Parametri fondamentali delle antenne**
- **Lezione 5 –Teorema di equivalenza**
- **Lezione 6 – Formulazione del problema elettromagnetcio in termini di equazioni integrali**
- **Lezione 7 – Soluzione numerica di equazioni integrali per antenne filari**

ANTENNE

LEZIONE 7

SOLUZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI INTEGRALI PER ANTENNE FILARI

- Un primo tentativo di soluzione numerica di un'equazione EFIE
- Un esempio: antenna filare irradiante in presenza del terreno - problema di Sommerfeld
- Metodo dei residui pesati (metodo dei momenti) per strutture filari

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Lezione 7 – Soluzione numerica di equazioni integrali per antenne filari

LEZIONE 7

SOLUZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI INTEGRALI PER ANTENNE FILARI

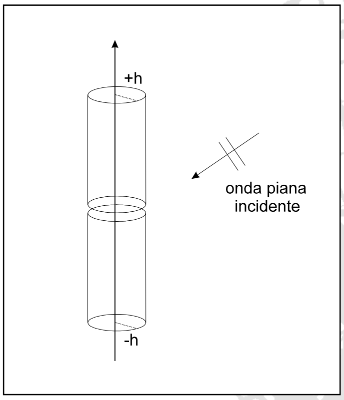
- **Un primo tentativo di soluzione numerica di un'equazione EFIE**
- Un esempio: antenna filare irradiante in presenza del terreno - problema di Sommerfeld
- Metodo dei residui pesati (metodo dei momenti) per strutture filari

ANTENNE

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

UN PRIMO TENTATIVO DI SOLUZIONE NUMERICA DI UN'EQUAZIONE EFIE NELL'AMBITO DELLA *THIN WIRE APPROXIMATION*



Onda piana incidente su un'antenna filare il cui diametro della struttura cilindrica è piccolo rispetto alla lunghezza *2h*

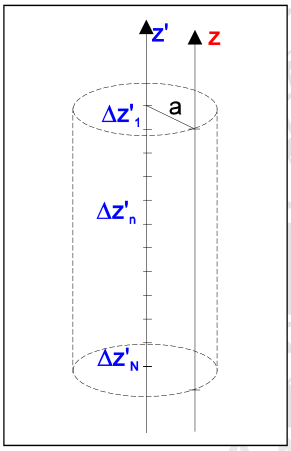
⇩

EFIE nell'ambito dell'approssimazione di filo sottile

Lezione 7 – Soluzione numerica di equazioni integrali per antenne filari

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

UN PRIMO TENTATIVO DI SOLUZIONE NUMERICA DI UN'EQUAZIONE EFIE NELL'AMBITO DELLA *THIN WIRE APPROXIMATION*

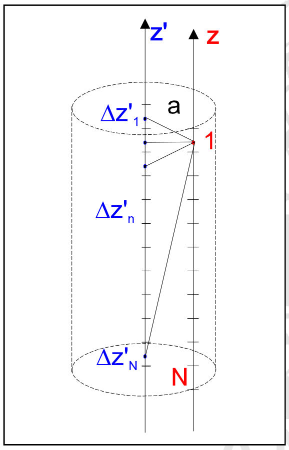


L'asse dell'antenna filare viene suddiviso in N segmenti di lunghezza Δz (Δz << λ) e la corrente incognita è rappresentata come sovrapposizione di una serie di dipoli elettrici corti (*dec*) di ampiezza incognita corrispondenti a ciascun segmento

$$I(z') \cong \sum_{n=1}^{N} I_n F_n(z')$$

$$F_n(z') = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad z' \text{ in } \Delta z' \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

UN PRIMO TENTATIVO DI SOLUZIONE NUMERICA DI UN'EQUAZIONE EFIE NELL'AMBITO DELLA *THIN WIRE APPROXIMATION*



Anche la superficie dell'antenna viene suddivisa in N segmenti di cui si considerano i punti centrali (1,2,…N) in corrispondenza dei quali vengono imposte le condizioni al contorno.

Il campo elettrico tangente corrispondente alla somma dei contributi di tutti i dipoli in ciascun punto della superficie deve essere uguale alla componente tangente del campo incidente cambiata di segno

$$\mathbf{E}_z^1(z_1)+\mathbf{E}_z^2(z_1)+\ldots+\mathbf{E}_z^N(z_1)=-\mathbf{E}_z^i(z_1)$$
$$\mathbf{E}_z^1(z_2)+\mathbf{E}_z^2(z_2)+\ldots+\mathbf{E}_z^N(z_2)=-\mathbf{E}_z^i(z_2)$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{E}_z^1(z_N)+\mathbf{E}_z^2(z_N)+\ldots+\mathbf{E}_z^N(z_N)=-\mathbf{E}_z^i(z_N)$$

UN PRIMO TENTATIVO DI SOLUZIONE NUMERICA DI UN'EQUAZIONE EFIE NELL'AMBITO DELLA *THIN WIRE APPROXIMATION*

Poiché il campo irradiato da un dipolo elettrico corto è proporzionale alla corrente si ha:

$E_z^n(z_m)=Z_{mn}I_n$ ⇒ Contributo al campo elettrico nel punto *m* sull'asse *z* dovuto alla *n-esimo* dipolo posto sull'asse *z'*

$V_m=-E_z^i(z_m)$ ⇒ Componente *z* del campo elettrico incidente valutata nel punto *m-esimo* della superficie dell'antenna

L'equazione che traduce la condizione al contorno per il campo elettrico tangente diventa:

$$\sum_{n=1}^{N} Z_{mn}I_n=V_m \quad , \quad m=1,\ldots N$$

UN PRIMO TENTATIVO DI SOLUZIONE NUMERICA DI UN'EQUAZIONE EFIE NELL'AMBITO DELLA *THIN WIRE APPROXIMATION*

$$[Z_{mn}][I_n]=[V_m]$$

$$\Downarrow$$

$$[I_n]=[Z_{mn}]^{-1}[V_m]$$

$[V_m]=\left[-E_z^i(z_m)\right]$ Vettore delle tensioni generalizzate

$[Z_{mn}]$ Vettore delle impedenze generalizzate

$[I_n]$ Vettore delle correnti generalizzate (incognite)

UN PRIMO TENTATIVO DI SOLUZIONE NUMERICA DI UN'EQUAZIONE EFIE NELL'AMBITO DELLA *THIN WIRE APPROXIMATION*

In definitiva si è ridotto il problema della soluzione di un'equazione integrale di tipo EFIE per una struttura filare nell'ambito della *thin wire approximation* alla risoluzione di un sistema lineare

E' possibile generalizzare e sistematizzare l'approccio?

Antenna filare in presenza del terreno (problema di Sommerfeld)

LEZIONE 7

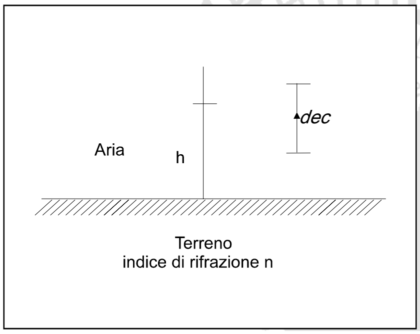
SOLUZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI INTEGRALI PER ANTENNE FILARI

- Un primo tentativo di soluzione numerica di un'equazione EFIE
- **Un esempio: antenna filare irradiante in presenza del terreno - problema di Sommerfeld**
- Metodo dei residui pesati (metodo dei momenti) per strutture filari

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

UN ESEMPIO: ANTENNA FILARE IRRADIANTE IN PRESENZA DEL TERRENO PROBLEMA DI SOMMERFELD

Si costruisce a partire dal problema di Sommerfeld per l'irradiazione di un dipolo elettrico corto (funzioni di base *pulse function*)



$$\left(\nabla^2 + k_1^2\right)\Pi_{1z} = \frac{-j(\Delta z I)}{\omega\varepsilon_0}\delta(x)\delta(y)\delta(z-h)$$

$$\left(\nabla^2 + k_2^2\right)\Pi_{2z} = 0$$

$$\Pi_{1z} = n^2\,\Pi_{2z}$$

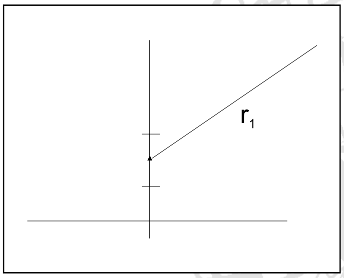
$$\frac{\partial \Pi_{1z}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_{2z}}{\partial z}$$

Per trovare la soluzione si usa un approccio spettrale!!

UN ESEMPIO: ANTENNA FILARE IRRADIANTE IN PRESENZA DEL TERRENO PROBLEMA DI SOMMERFELD

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Dipolo elettrico che irradia nello spazio libero



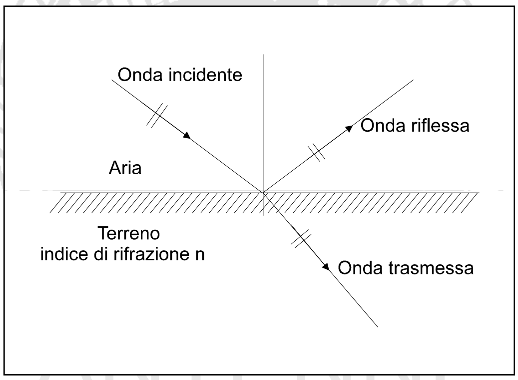
$$\frac{-j(I\Delta z)}{4\pi\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-jkr_1}}{r_1} = -\frac{(I\Delta z)}{8\pi^2\omega^2\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha_1,\alpha_2)\,d\alpha_1 d\alpha_2$$

$F(\alpha_1,\alpha_2)$ è lo spettro di onde piane omogenee e non omogenee

UN ESEMPIO: ANTENNA FILARE IRRADIANTE IN PRESENZA DEL TERRENO PROBLEMA DI SOMMERFELD

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Ogni onda piana si riflette e si trasmette tramite i coefficienti di riflessione e trasmissione di Fresnel



UN ESEMPIO: ANTENNA FILARE IRRADIANTE IN PRESENZA DEL TERRENO PROBLEMA DI SOMMERFELD

Trovata la soluzione (integrale doppio) si deve valutare il campo mediante un processo di differenziazione

Quindi si deve calcolare l'integrale doppio in modo efficiente. Questo si fa approssimando l'integrale doppio sotto determinate ipotesi

LEZIONE 7

SOLUZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI INTEGRALI PER ANTENNE FILARI

- Un primo tentativo di soluzione numerica di un'equazione EFIE
- Un esempio: antenna filare irradiante in presenza del terreno - problema di Sommerfeld
- **Metodo dei residui pesati (metodo dei momenti) per strutture filari**

METODO DEI RESIDUI PESATI (METODO DEI MOMENTI) PER STRUTTURE FILARI

Generalizzazione della tecnica

Il metodo dei residui pesati (Metodo dei Momenti, *Method of Moments*, MoM, R.F. Harrington, 1965) è una tecnica numerica più generale per la soluzione di equazioni funzionali lineari del tipo:

$$L\,(\,I\,) = g$$

$$L(\cdot) = \int_{-h}^{+h} K(z,z')(\cdot)\,dz'$$

$$g(z) = -\mathbf{E}^i(z)\cdot\hat{z}$$

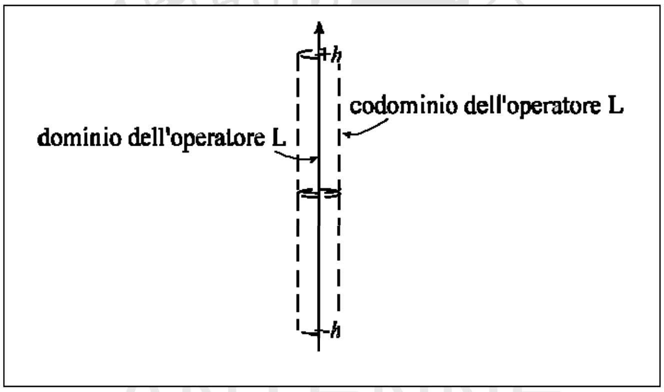
I funzione (corrente) incognita da determinare
L operatore lineare integro-differenziale
g funzione nota (generatori)

Il metodo riconduce la soluzione di un'equazione funzionale lineare a quella di un'equazione di tipo matriciale.

METODO DEI RESIDUI PESATI (METODO DEI MOMENTI) PER STRUTTURE FILARI

Generalizzazione della tecnica

EFIE per un'antenna filare (*thin wire approximation*)



METODO DEI RESIDUI PESATI (METODO DEI MOMENTI) PER STRUTTURE FILARI

Fasi della tecnica di soluzione

La soluzione numerica dell'equazione di Pocklington si articola nelle seguenti fasi:

1) Fase *di pre-processing*
   a. discretizzazione della geometria del problema
   b. costruzione di un'equazione matriciale tramite il metodo dei residui pesati
   c. calcolo dei coefficienti della matrice e del vettore dei termini noti

2) Fase di soluzione
   soluzione del sistema di equazioni

3) Fase di *post-processing*
   a. calcolo dei parametri di interesse
   b. visualizzazione dei dati

METODO DEI RESIDUI PESATI (METODO DEI MOMENTI) PER STRUTTURE FILARI

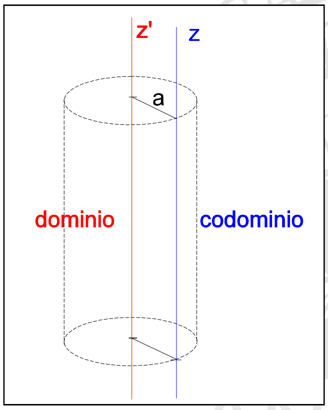
Fase di *pre-processing*

1) definizione di un insieme di funzioni di *base* (*mode function*) e sviluppo della corrente equivalente incognita in termini delle funzioni di base
2) definizione di un insieme di funzioni di *peso*
3) definizione del *residuo*
4) introduzione di un *prodotto interno*
5) imposizione dell'annullamento della proiezione del residuo sulle funzioni di peso e deduzione di un'equazione matriciale

METODO DEI RESIDUI PESATI (METODO DEI MOMENTI) PER STRUTTURE FILARI

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Fase di *pre-processing* – Funzioni di base



La corrente incognita viene sviluppata in una serie di funzioni di base definite nel dominio dell'operatore L cioè sull'asse dell'antenna

$$I(z') \cong \sum_{n=1}^{N} I_n F_n(z')$$

Lezione 7 – Soluzione numerica di equazioni integrali per antenne filari

METODO DEI RESIDUI PESATI (METODO DEI MOMENTI) PER STRUTTURE FILARI

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Fase di *pre-processing* – Criteri di scelta per le funzioni di base

Elementi di cui tener conto nella scelta delle funzioni di base:

- particolare problema preso in considerazione;
- accuratezza della soluzione desiderata;
- facilità con cui possono essere valutati i vari elementi della matrice;
- dimensione della matrice che deve essere invertita;
- realizzazione di una matrice ben condizionata;
- minimizzazione dei tempi di calcolo.

METODO DEI RESIDUI PESATI (METODO DEI MOMENTI) PER STRUTTURE FILARI

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Fase di *pre-processing* – Residuo

$$L(I) = g$$

$$g(z) = -\mathbf{E}^i(z)\cdot\hat{z}$$

$$L(\cdot) = \int_{-h}^{+h} K(z,z')(\cdot)dz'$$

$$I(z') \cong \sum_{n=1}^{N} I_n F_n(z')$$

$$L\left(\sum_{n=1}^{N} I_n F_n\right) \cong g$$

Si definisce il residuo r :

$$r(z) = \sum_{n=1}^{N} I_n L(F_n) - g$$

METODO DEI RESIDUI PESATI (METODO DEI MOMENTI) PER STRUTTURE FILARI

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

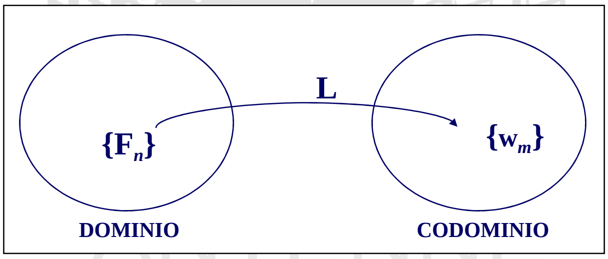
Fase di *pre-processing* – Funzioni di peso

Si definisce nel codominio dell'operatore L un insieme di funzioni di peso $\{w_m, m = 1,..,N\}$

$w_m = F_n$ metodo di Galerkin

$w_m = L(F_n)$ metodo dei minimi quadrati

$w_m = \delta(z-z_m)$ (delta di Dirac) metodo del *point-matching*



METODO DEI RESIDUI PESATI (METODO DEI MOMENTI) PER STRUTTURE FILARI

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Fase di *pre-processing* – Prodotto interno

Si definisce nel codominio dell'operatore L un prodotto interno $<v,w>$ dotato delle seguenti proprietà:

$<v,w> = <w,v>$

$<\alpha v+\beta u,w> = \alpha <v,w> + \beta <u,w>$

$$< w, v > \begin{cases} = 0 & \text{per } v = 0 \\ > 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$< w_m, v_m > = \int_{-h}^{+h} w_m(z) v_m(z) dz$$

METODO DEI RESIDUI PESATI (METODO DEI MOMENTI) PER STRUTTURE FILARI

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Fase di *pre-processing* – Equazione matriciale

Si moltiplica il residuo per le N funzioni di peso, utilizzando la precedente definizione di prodotto interno, e si uguaglia a 0 il risultato

$$\int_{-h}^{+h} w_m(z) r(z) dz = 0 \quad , \quad m = 1,2,3 \cdots N$$

$$\int_{-h}^{+h} w_m(z) \sum_{n=1}^{N} I_n L(F_n) dz + \int_{-h}^{+h} w_m(z) E_z^i(z) dz = 0 \quad , \quad m = 1,2,3 \cdots, N$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{N} I_n \underbrace{\int_{-h}^{+h} w_m(z) L(F_n) dz}_{Z_{mn}} = \underbrace{-\int_{-h}^{+h} w_m(z) E_z^i(z) dz}_{V_m} \quad , \quad m = 1,2,3 \cdots, N$$

METODO DEI RESIDUI PESATI (METODO DEI MOMENTI) PER STRUTTURE FILARI

Fase di *pre-processing* – Equazione matriciale

si ottengono così N equazioni lineari nelle incognite I_n

$$I_1\langle w_1,L(F_1)\rangle + I_2\langle w_1,L(F_2)\rangle + \ldots + I_N\langle w_1,L(F_N)\rangle = \langle w_1,g\rangle$$
$$I_1\langle w_2,L(F_1)\rangle + I_2\langle w_2,L(F_2)\rangle + \ldots + I_N\langle w_2,L(F_N)\rangle = \langle w_2,g\rangle$$
$$\ldots$$
$$I_1\langle w_N,L(F_1)\rangle + I_2\langle w_N,L(F_2)\rangle + \ldots + I_N\langle w_N,L(F_N)\rangle = \langle w_N,g\rangle$$

in forma matriciale:

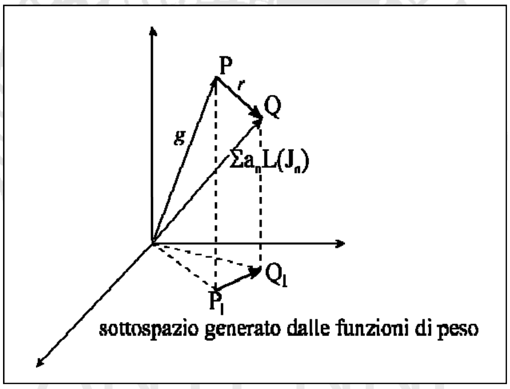
$$[Z_{mn}][I_n]=[V_m]$$

METODO DEI RESIDUI PESATI (METODO DEI MOMENTI) PER STRUTTURE FILARI

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Fase di *pre-processing* – Interpretazione geometrica del metodo

In pratica si impone l'annullamento della proiezione del residuo sul sottospazio generato dalle N funzioni di peso.



METODO DEI RESIDUI PESATI (METODO DEI MOMENTI) PER STRUTTURE FILARI

Fase di *pre-processing* – Soluzione dell’equazione matriciale

$$[Z_{mn}][I_n]=[V_m]$$

$Z_{mn}=<w_m, L(F_n)>$ elemento della matrice delle impedenze generalizzate

$V_m=<w_m, g>$ elemento del vettore dei termini noti

I_n elemento del vettore delle incognite

Risolvendo il sistema si ricavano i coefficienti I_n $\quad [I_n]=[Z_{mn}]^{-1}[V_m]$

e quindi un’approssimazione della funzione incognita $\quad I \cong \sum_{n=1}^{N} I_n F_n$

da cui si deducono poi le caratteristiche dell’antenna

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze