

 $\nabla \cdot \mathbf{B}_A = 0 \Rightarrow \mathbf{B}_A = \nabla \times \mathbf{A}$   $\longrightarrow$   $\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$  A è il potenziale vettore di tipo elettrico

 $\nabla \times \mathbf{E}_{A} = -j\omega \mathbf{B}_{A} = -j\omega \nabla \times \mathbf{A} \Longrightarrow \nabla \times \mathbf{E}_{A} + j\omega \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{E}_{A} + j\omega \mathbf{A}) = 0$ 

$$\mathbf{H}_{A} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$$
$$\mathbf{E}_{A} = -j\omega \mathbf{A} - \nabla \phi$$

I campi sono espressi in termini dei potenziali vettore A (3 incognite) e scalare  $\phi$  (1 incognita). Noti i potenziali i campi vengono dedotti attraverso operazioni di tipo differenziale

> Il problema elettromagnetico è più semplice o più complicato? .cerchiamo le equazioni a cui obbediscono i potenziali A e  $\phi$

3/13

Lezione 1 – Teoria dei potenziali

# EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

$$\nabla \times \mathbf{H}_{A} = \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}\right) = j\omega\varepsilon \,\mathbf{E}_{A} + \mathbf{J}^{i} \qquad \qquad \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = j\omega\varepsilon \,\mathbf{E}_{A} + \mathbf{J}^{i}$$

$$\qquad \qquad \qquad \frac{1}{\mu} \left[\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^{2} \mathbf{A}\right] = j\omega\varepsilon \,\mathbf{E}_{A} + \mathbf{J}^{i}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{A} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \varepsilon \mu \phi) = -\mu \mathbf{J}^i$$

In modo analogo..

$$\nabla^2 \phi + \omega^2 \varepsilon \mu \phi - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + j \omega \varepsilon \mu \phi \right) = 0$$

4/13



NTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI

Lezione 1 – Teoria dei potenziali

### EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

In definitiva per determinare il campo elettromagnetico occorre risolvere 4 equazioni in 4 incognite che risultano accoppiate fra loro

$$\mathbf{H}_{A} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$$
$$\mathbf{E}_{A} = -j\omega \mathbf{A} - \nabla \phi$$

$$\nabla^{2} \mathbf{A} + \omega^{2} \varepsilon \mu \mathbf{A} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + j \omega \varepsilon \mu \phi) = -\mu \mathbf{J}^{i}$$
$$\nabla^{2} \phi + \omega^{2} \varepsilon \mu \phi - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + j \omega \varepsilon \mu \phi) = 0$$

E' possibile semplificare ulteriormente il problema disaccoppiando le equazioni dei potenziali?

5/13



Lezione 1 – Teoria dei potenziali

### EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

La semplificazione è possibile tenendo conto che la scelta dei potenziali non è univoca:

$$(\mathbf{A}, \phi) \rightarrow (\mathbf{E}_{A}, \mathbf{H}_{A})$$

$$(\mathbf{A}', \phi') \rightarrow (\mathbf{E}_{A}, \mathbf{H}_{A})$$

dove 
$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \psi \\ \phi' = \phi + j\omega \varepsilon \mu \psi \end{cases}$$

ψ è una funzione scalare da determinare

6/13

ANTENNE 1- ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
POF G Pelosi - Laboratorio di Eletromagnetismo Numerico
Dipartimento di Eletronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze



TTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI

Lezione 1 – Teoria dei potenziali

### EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

Se vale  $\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \varepsilon \mu \phi = \chi$ 

...e si sceglie la funzione  $\psi$  in modo tale che

 $\nabla^2 \psi + \omega^2 \varepsilon \mu \psi = \chi$ 

Si ottiene

 $\nabla \cdot \mathbf{A}' + j\omega \varepsilon \mu \phi' = 0$ 

(Condizione o gauge di Lorentz che, nel caso di campi statici,  $\omega$ =0, prende il nome di condizione di Coulomb)

7/13



Lezione 1 – Teoria dei potenziali

# EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

Se vale la condizione di Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\phi = 0 \qquad \qquad \phi = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu}$$

I potenziali obbediscono alle equazioni di Helmholtz (equazioni di tipo ellittico disaccoppiate tra  ${\bf A}$  e  $\phi$ )

$$\nabla^{2} \mathbf{A} + k^{2} \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}^{i}$$

$$\nabla^{2} \phi + k^{2} \phi = 0$$

$$\operatorname{con} \quad k^{2} = \omega^{2} \varepsilon \mu$$

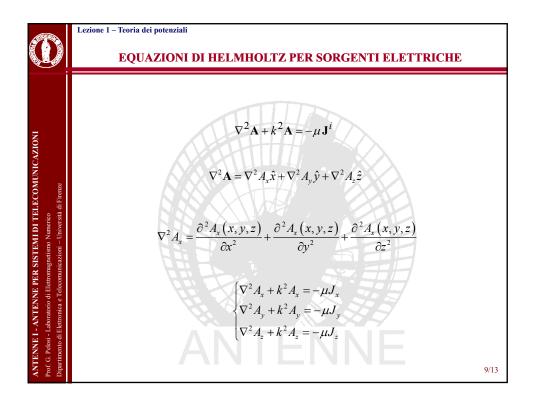
$$\mathbf{H}_{A} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$$
$$\mathbf{E}_{A} = -j\omega \mathbf{A} - \nabla \phi$$

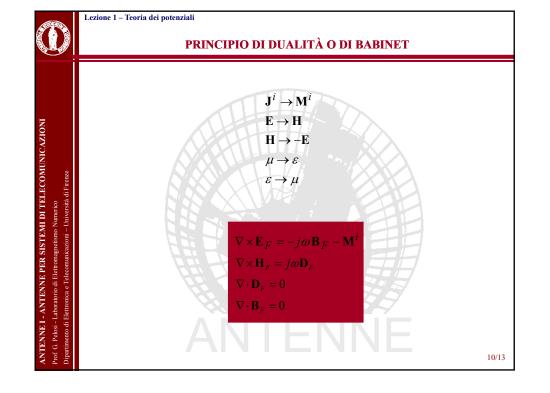
$$\qquad \qquad \Box \rangle$$

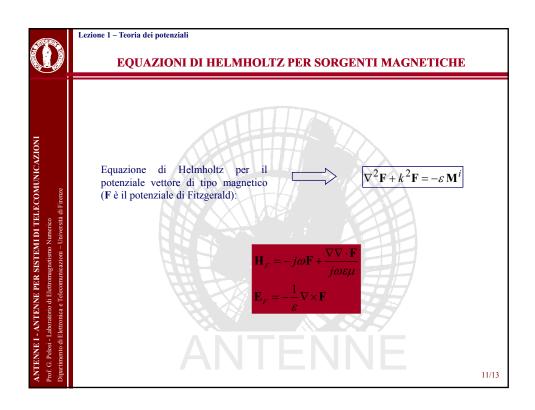
$$\mathbf{E}_{A} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu}$$
$$\mathbf{H}_{A} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A}$$

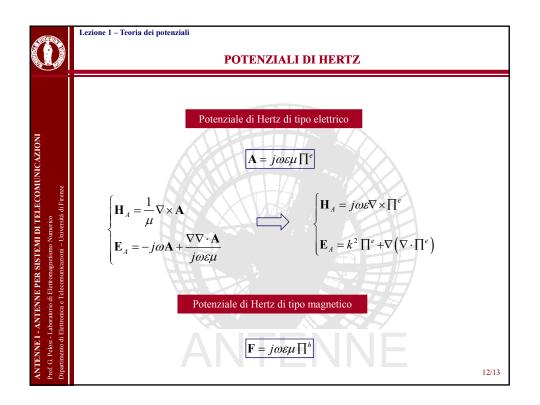
Per determinare il campo elettromagnetico  $(\mathbf{E}_{A}, \mathbf{H}_{A})$  si deve conoscere solo il potenziale  $\mathbf{A}$ 

8/13









ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI

### DAI POTENZIALI AL CAMPO

Noti i potenziali  $\bf A$  ed  $\bf F$  il campo elettromagnetico può essere ottenuto tramite delle relazioni differenziali dai potenziali vettore  $\bf A$  ed  $\bf F$ 

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\scriptscriptstyle{A}} + \mathbf{E}_{\scriptscriptstyle{F}} = -j\omega\mathbf{A} - \frac{j}{\omega\varepsilon\mu}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathbf{F}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F = -j\omega\mathbf{F} - \frac{j}{\omega\varepsilon\mu}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) + \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$$

13/13