LEZIONE 1

TEORIA DEI POTENZIALI

Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
E-mail: *giuseppe.pelosi@unifi.it*
URL: *http://ingfi9.det.unifi.it/*

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI DI MAXWELL CON SORGENTI ELETTRICHE ($\mathbf{J}^i$) NELLO SPAZIO LIBERO

$$\nabla\times\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{B}_A$$
$$\nabla\times\mathbf{H}_A = j\omega\mathbf{D}_A + \mathbf{J}^i$$
$$\nabla\cdot\mathbf{D}_A = 0$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B}_A = 0$$

$$\mathbf{E}_A \equiv \mathbf{E}_A(\mathbf{r},\omega)$$
$$\mathbf{H}_A \equiv \mathbf{H}_A(\mathbf{r},\omega)$$
$$\mathbf{D}_A \equiv \mathbf{D}_A(\mathbf{r},\omega)$$
$$\mathbf{B}_A \equiv \mathbf{B}_A(\mathbf{r},\omega)$$
$$\mathbf{J}^i \equiv \mathbf{J}^i(\mathbf{r},\omega)$$

Relazioni costitutive del mezzo

$$\mathbf{B}_A = \mu\mathbf{H}_A$$
$$\mathbf{D}_A = \varepsilon\mathbf{E}_A$$

6 equazioni scalari in 6 incognite!

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_A = 0 \Rightarrow \mathbf{B}_A = \nabla \times \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A}$$

A è il potenziale vettore di tipo elettrico

$$\nabla \times \mathbf{E}_A = -j\omega \mathbf{B}_A = -j\omega \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E}_A + j\omega \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\mathbf{E}_A + j\omega \mathbf{A}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E}_A + j\omega \mathbf{A} = -\nabla \phi$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{H}_A &= \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E}_A &= -j\omega \mathbf{A} - \nabla \phi \end{aligned}}$$

I campi sono espressi in termini dei potenziali vettore **A** (3 incognite) e scalare ϕ (1 incognita). Noti i potenziali i campi vengono dedotti attraverso operazioni di tipo differenziale

Il problema elettromagnetico è più semplice o più complicato?
…cerchiamo le equazioni a cui obbediscono i potenziali A e ϕ

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

$$\nabla \times \mathbf{H}_A = \nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A}\right) = j\omega\varepsilon \mathbf{E}_A + \mathbf{J}^i \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = j\omega\varepsilon \mathbf{E}_A + \mathbf{J}^i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu}\left[\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}\right] = j\omega\varepsilon \mathbf{E}_A + \mathbf{J}^i$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} + \omega^2 \varepsilon\mu \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\phi) = -\mu \mathbf{J}^i}$$

In modo analogo…

$$\boxed{\nabla^2 \phi + \omega^2 \varepsilon\mu\phi - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\phi\right) = 0}$$

ANTENNE I - ANTENNE PER SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

In definitiva per determinare il campo elettromagnetico occorre risolvere 4 equazioni in 4 incognite che risultano accoppiate fra loro

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{H}_A &= \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A} \\ \mathbf{E}_A &= -j\omega\mathbf{A}-\nabla\phi \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \nabla^2\mathbf{A}+\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{A}-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}+j\omega\varepsilon\mu\phi)=-\mu\mathbf{J}^i \\ \nabla^2\phi+\omega^2\varepsilon\mu\phi-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}+j\omega\varepsilon\mu\phi)=0 \end{gathered}}$$

E' possibile semplificare ulteriormente il problema disaccoppiando le equazioni dei potenziali?

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

La semplificazione è possibile tenendo conto che la scelta dei potenziali non è univoca:

$$\begin{gathered} (\mathbf{A},\phi)\rightarrow(\mathbf{E}_A,\mathbf{H}_A) \\ (\mathbf{A}',\phi')\rightarrow(\mathbf{E}_A,\mathbf{H}_A) \end{gathered}$$

dove $\begin{cases} \mathbf{A}'=\mathbf{A}-\nabla\psi \\ \phi'=\phi+j\omega\varepsilon\mu\psi \end{cases}$ ψ è una funzione scalare da determinare

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

Se vale $\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\phi = \chi$

…e si sceglie la funzione ψ in modo tale che $\nabla^2\psi + \omega^2\varepsilon\mu\psi = \chi$

Si ottiene $\nabla \cdot \mathbf{A}' + j\omega\varepsilon\mu\phi' = 0$

(Condizione o *gauge* di Lorentz che, nel caso di campi statici, ω=0, prende il nome di condizione di Coulomb)

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

Se vale la condizione di Lorentz $\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\phi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \phi = -\dfrac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu}$

I potenziali obbediscono alle equazioni di Helmholtz (equazioni di tipo ellittico disaccoppiate tra **A** e ϕ)

$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}^i \\ \nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \\ \text{con} \quad k^2 = \omega^2\varepsilon\mu \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{H}_A = \dfrac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A} \\ \mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi \end{array}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} + \dfrac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu} \\ \mathbf{H}_A = \dfrac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A} \end{array}}$$

Per determinare il campo elettromagnetico ($\mathbf{E}_A$,$\mathbf{H}_A$) si deve conoscere solo il potenziale **A**

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}^i$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z}$$

$$\nabla^2 A_x = \frac{\partial^2 A_x(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x(x,y,z)}{\partial z^2}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x + k^2 A_x = -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y + k^2 A_y = -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu J_z \end{cases}$$

PRINCIPIO DI DUALITÀ O DI BABINET

$$\mathbf{J}^i \to \mathbf{M}^i$$
$$\mathbf{E} \to \mathbf{H}$$
$$\mathbf{H} \to -\mathbf{E}$$
$$\mu \to \varepsilon$$
$$\varepsilon \to \mu$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_F = -j\omega \mathbf{B}_F - \mathbf{M}^i$$
$$\nabla \times \mathbf{H}_F = j\omega \mathbf{D}_F$$
$$\nabla \cdot \mathbf{D}_F = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B}_F = 0$$

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI MAGNETICHE

Equazione di Helmholtz per il potenziale vettore di tipo magnetico (**F** è il potenziale di Fitzgerald): $\Rightarrow$ $\boxed{\nabla^2\mathbf{F}+k^2\mathbf{F}=-\varepsilon\,\mathbf{M}^i}$

$$\mathbf{H}_F=-j\omega\mathbf{F}+\frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{F}}{j\omega\varepsilon\mu}$$

$$\mathbf{E}_F=-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathbf{F}$$

POTENZIALI DI HERTZ

Potenziale di Hertz di tipo elettrico

$$\boxed{\mathbf{A}=j\omega\varepsilon\mu\,\Pi^e}$$

$$\begin{cases}\mathbf{H}_A=\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}\\[2mm]\mathbf{E}_A=-j\omega\mathbf{A}+\dfrac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{H}_A=j\omega\varepsilon\nabla\times\Pi^e\\[2mm]\mathbf{E}_A=k^2\,\Pi^e+\nabla\left(\nabla\cdot\Pi^e\right)\end{cases}$$

Potenziale di Hertz di tipo magnetico

$$\boxed{\mathbf{F}=j\omega\varepsilon\mu\,\Pi^h}$$

DAI POTENZIALI AL CAMPO

Noti i potenziali **A** ed **F** il campo elettromagnetico può essere ottenuto tramite delle *relazioni differenziali* dai potenziali vettore ***A*** ed **F**

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F = -j\omega\mathbf{A} - \frac{j}{\omega\varepsilon\mu}\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathbf{F}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F = -j\omega\mathbf{F} - \frac{j}{\omega\varepsilon\mu}\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{F}\right) + \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$$