ESERCITAZIONE 2

FUNZIONI PWS (*Piece-Wise Sinusoidal function*)

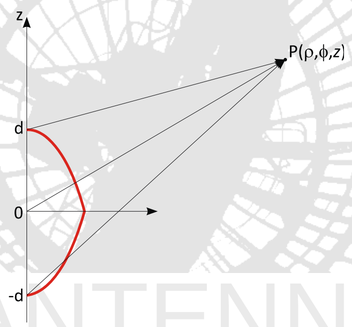
Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
E-mail: *giuseppe.pelosi@unifi.it*
URL: http://www.cem.unifi.it/

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Espressione della corrente

PWS – distribuzione di corrente sinusoidale a tratti

$$I(z') = \frac{\sin\left[k\left(d-|z'|\right)\right]}{\sin(kd)} \qquad -d \le z' \le +d$$



Campo elettrico

La componente E_z del campo elettrico nel generico punto **P** ≡ (ρ, ϕ, z) è data dalla relazione:

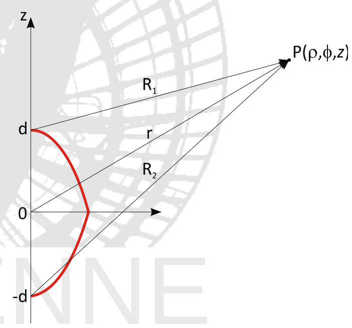
$$E_z(\rho,\phi,z) = -\frac{j\zeta_0}{4\pi\sin(kd)}\left[\frac{e^{-jkR_1}}{R_1}+\frac{e^{-jkR_2}}{R_2}-\cos(kd)\frac{e^{-jkr}}{r}\right]$$

Dove:

$$R_1 = \sqrt{\rho^2+(z-d)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{\rho^2+(z+d)^2}$$

$$r = \sqrt{\rho^2+z^2}$$



Derivazione del campo elettromagnetico

Per derivare l'espressione generale del campo elettromagnetico, ed in particolare della componente E_z data dalla precedente equazione, si deve partire dal potenziale vettore.

La distribuzione di corrente è lungo l'asse z, percui il potenziale vettore **A** ha solo la componente A_z

$$A_z(\rho,\phi,z) = \frac{\mu_0}{4\pi\sin(kd)}\left[\int_0^{+d}\sin\left[k\left(d-z'\right)\right]\frac{e^{-jkR}}{R}dz' + \int_{-d}^{0}\sin\left[k\left(d+z'\right)\right]\frac{e^{-jkR}}{R}dz'\right]$$

Dove:

$$R_1 = \sqrt{\rho^2+(z-d)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{\rho^2+(z+d)^2}$$

$$r = \sqrt{\rho^2+z^2}$$

Derivazione del campo elettromagnetico

I precedenti integrali possono essere riscritti in termini di esponenziali utilizzando le formule di Eulero

$$A_z(\rho,\phi,z)=\frac{\mu_0}{8\pi j\sin(kd)}\left[e^{+jkd}\underbrace{\int_0^{+d}\frac{e^{-jk(R+z')}}{R}dz'}_{I_1}-e^{-jkd}\underbrace{\int_0^{+d}\frac{e^{-jk(R-z')}}{R}dz'}_{I_2}+e^{+jkd}\underbrace{\int_{-d}^{0}\frac{e^{-jk(R-z')}}{R}dz'}_{I_3}-e^{-jkd}\underbrace{\int_{-d}^{0}\frac{e^{-jk(R+z')}}{R}dz'}_{I_4}\right]$$

ed è evidente, dalla simmetria del problema, che:

$$A_z(\rho,\phi,z)=A_z(\rho,z)$$

Derivazione del campo elettromagnetico

I quattro integrali precedenti (I_1, I_2, I_3, I_4) sono della stessa forma.

Introducendo ad esempio in I_1 e I_4 il cambiamento di variabili

$$u=R+(z'-z)$$

È facile verificare che:

$$\frac{du}{dz'}=\frac{u}{R}$$

e di conseguenza gli integrali si possono riscrivere come segue:

$$I_1=\int_0^{+d}\frac{e^{-jk(R+z')}}{R}dz'=e^{-jkz}\int_{u_1}^{u_2}\frac{e^{-jku}}{u}du$$

Dove: $u_1=R_1+d-z,\qquad u_2=r-z$

Derivazione del campo elettromagnetico

La forma dell'ultimo integrale può essere espressa in termini di funzioni speciali *Si* (integralseno) e *Ci* (integralcoseno), ma l'utilizzazione di questa forma non è necessaria in questo caso in quanto non si vuole ricavare il potenziale.

La componente E_z del campo elettrico totale può essere infatti determinata dalla relazione

$$j\omega\varepsilon E_z(\rho,\phi,z) = \frac{\partial^2 A_z(\rho,\phi,z)}{\partial z^2} + k^2 A_z(\rho,\phi,z) = \frac{\partial^2 A_z(\rho,\phi,z)}{\partial z^2} - \nabla^2 A_z(\rho,\phi,z) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial A_z(\rho,z)}{\partial\rho}\right]$$

Derivazione del campo elettromagnetico

Ne consegue che si può trovare la componente E_z del campo totale mediante delle operazioni di differenziazione sulla componente del potenziale A_z e quindi sono necessarie operazioni del tipo

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{u_1}^{u_2}\frac{e^{-jku}}{u}du$$

Si può verificare ad esempio, che:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{u_1}^{u_2}\frac{e^{-jku}}{u}du = \frac{\partial}{\partial\rho}\int_{u_1(\rho)}^{u_2(\rho)}\frac{e^{-jku}}{u}du = \frac{\partial u_1}{\partial\rho}\frac{e^{-jku_1}}{u_1} - \frac{\partial u_2}{\partial\rho}\frac{e^{-jku_2}}{u_2}$$

Dove:

$$\frac{\partial u_1}{\partial\rho} = \frac{\partial R_1}{\partial\rho} = \frac{\partial\left(\sqrt{\rho^2+(z-d)^2}\right)}{\partial\rho} = \frac{\rho}{R_1}$$

e

$$\frac{\partial u_2}{\partial\rho} = \frac{\partial r}{\partial\rho} = \frac{\partial\sqrt{\rho^2+z^2}}{\partial\rho} = \frac{\rho}{r}$$

Quindi:

$$\frac{\partial I_1}{\partial\rho} = e^{-jkz}\left[\frac{e^{-jk(R_1+d-z)}}{(R_1+d-z)}\frac{\rho}{R_1} - \frac{e^{-jk(r-z)}}{(r-z)}\frac{\rho}{r}\right]$$

Derivazione del campo elettromagnetico

Con i rimanenti integrali si procede analogamente.

Per esempio con I_2 si ha:

$$I_2 = \int_0^{+d} \frac{e^{-jk(R-z')}}{R} dz' = -e^{-jkz} \int_{v_1}^{v_2} \frac{e^{-jkv}}{v} dv$$

Dove si è posto:
$$v = R - z' + z, \qquad \frac{dv}{dz'} = -\frac{v}{R}$$
$$v_1 = R_1 - d + z, \qquad v_2 = R_2 + d + z$$

ed allora

$$\frac{\partial I_2}{\partial \rho} = -e^{-jkz} \left[\frac{e^{-jk(R_1-d+z)}}{R_1 - d + z} \frac{\rho}{R_1} - \frac{e^{-jk(r+z)}}{r+z} \frac{\rho}{r} \right]$$

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Derivazione del campo elettromagnetico

L'espressione finale per $\partial A_z / \partial \rho$ assume la forma:

$$\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = -H_\phi = \frac{1}{4\pi j \sin(kd)} \left[\frac{e^{-jkR_1}}{\rho} + \frac{e^{-jkR_2}}{\rho} - \frac{2\cos(kd)}{\rho} e^{-jkr} \right]$$

da cui si può ottenere anche la componente E_z tramite la relazione:

$$j\omega\varepsilon E_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right)$$

La componente E_ρ può essere invece ottenuta dall'espressione:

$$j\omega E_\rho = -\frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial \rho}$$

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Derivazione del campo elettromagnetico

Le tre componenti non nulle del campo elettromagnetico irradiato da una PWS assumono le seguenti espressioni:

$$H_\phi = -\frac{\mu_0}{4\pi j \rho \sin(kd)}\left[e^{-jkR_1} + e^{-jkR_2} - 2\cos(kd)e^{-jkr}\right]$$

$$E_z = \frac{\zeta_0}{4\pi j \sin(kd)}\left[\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2\cos(kd)\frac{e^{-jkr}}{r}\right]$$

$$E_\rho = -\frac{\zeta_0}{4\pi j \rho \sin(kd)}\left[(z-d)\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + (z+d)\frac{e^{-jkR_2}}{R_2} + 2z\cos(kd)\frac{e^{-jkr}}{r}\right]$$

Derivazione del campo elettromagnetico

Il campo elettromagnetico irradiato da una PWS può essere riscritto opportunamente nel seguente modo

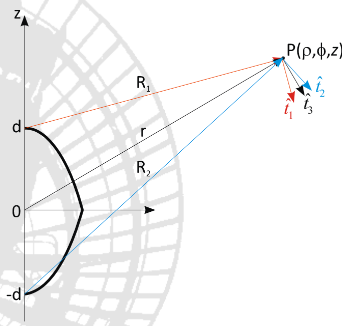
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$$

Con:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\zeta_0}{4\pi j \sin(kd)}\frac{e^{-jkR_1}}{R_1}\hat{t}_1$$

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\zeta_0}{4\pi j \sin(kd)}2\cos(kd)\frac{e^{-jkr}}{r}\hat{t}_2$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{\zeta_0}{4\pi j \sin(kd)}\frac{e^{-jkR_2}}{R_2}\hat{t}_3$$



Questi tre termini esprimono esattamente il campo di un dipolo PWS che può essere interpretato come sovrapposizione di tre onde sferiche con fattore di diagramma di irradiazione $1/\sin(kd)$ provenienti dal centro e dagli estremi del dipolo.

Derivazione del campo elettromagnetico

$$Z_{mn} = < w_m, L(F_n) > = \int_{-h}^{+h} w_m \cdot \int_{-h}^{+h} K(z,z')(F_n)\, dz'\, dz$$

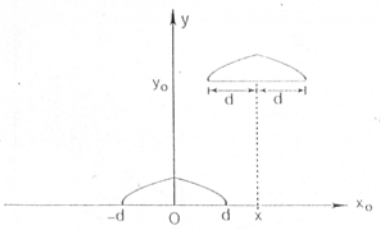


Figure 3.1 Geometry of two parallel equal-length piecewise sinusoidal expansion modes

la matrice delle impedenze generalizzate è di Toeplitz

$$Z_{mn} = Z_{1,|m-n|+1} \qquad m \geq 1$$

$$Z_{ij} = \frac{15}{\sin^2 kd} \sum_{m=-2}^{2} \sum_{n=-1}^{1} A(m+3) e^{-jkn(x_0+md)} E(k\beta)$$

$$\beta = \sqrt{y_0^2 + (x_0+md)^2} - n(x_0+md)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$A(1) = A(5) = 1$$

$$A(2) = A(4) = -4\cos kd$$

$$A(3) = 2 + 4\cos^2 kd$$

$$E(k\beta) = C_i(x) - jS_i(x)s$$