ESERCITAZIONE 1

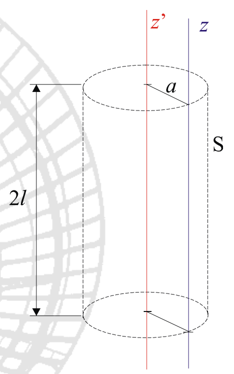
EQUAZIONE INTEGRALE DI HALLEN

Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
E-mail: *giuseppe.pelosi@unifi.it*
URL: http://www.cem.unifi.it/

Geometria del problema

- cilindro elettrico perfetto
- diametro 2a, altezza 2l
- sistema di riferimento cilindrico (r,ϕ,z) con l'asse z' coincidente con l'asse dell'antenna;
- la superficie dell'antenna sarà in tale sistema di riferimento:

$$(a,\phi,z) \quad \text{con} -l < z < l;$$



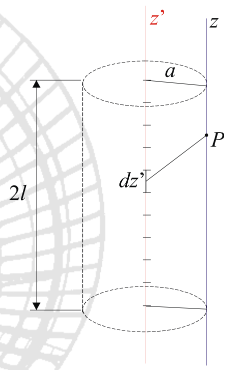
1

Geometria del problema

- $a << l$ l'antenna è detta filiforme, in particolare si definisce il coefficiente di snellezza Ω come:

$$\Omega = 2\log\left(\frac{2l}{a}\right)$$

Se $\Omega > 10 \frac{2l}{a} > 150$ l'antenna è considerata in genere filiforme.
(thin wire approximation)



ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

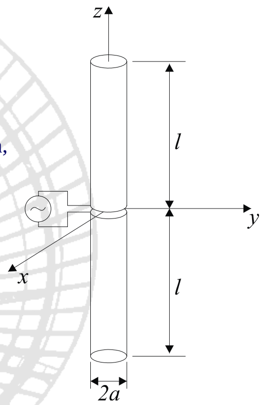
Tipologia di sorgente e condizioni al contorno

È stata applicata in $z = 0$ un campo elettrico

$$\mathbf{E}_{GAP} = -V\,\delta(z)\,\mathbf{z} \qquad (\delta - \text{gap generator})$$

Si vuole trovare:

1. la distribuzione di corrente che si instaura sull'antenna,
2. il campo irradiato a grande distanza.



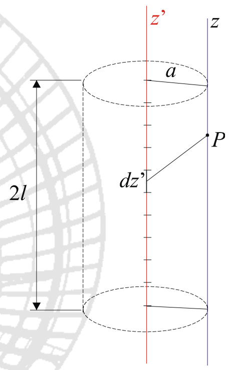
In particolare tale campo deve soddisfare:

- l'equazioni di Maxwell
- la condizione di radiazione all'infinito
- sulla superficie dell'antenna (*r=a, -l<z<l*) $E_z = 0$ per $z \neq 0$; $E_z = E_{GAP}$ per $z = 0$

ANTENNE

Potenziale vettore

Per la simmetria del problema la corrente è diretta secondo z per cui il potenziale vettore **A**, che nel sistema di riferimento scelto sarebbe stato della forma



$$\mathbf{A}(r,\phi,z) = A_\phi(r,\phi,z)\,\hat{\phi} + A_z(r,\phi,z)\hat{\mathbf{z}} + A_r(r,\phi,z)\hat{\mathbf{r}}$$

risulterà costituito dalla sola componente lungo l'asse z:

$$\mathbf{A}(r,\phi,z) = A_z(r,\phi,z)\hat{\mathbf{z}}$$

Dal potenziale al campo

Noto il potenziale si può trovare il campo elettrico

$$\mathbf{E} = -j\omega\,\mathbf{A} - \nabla\phi$$

Ma:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} + j\omega\epsilon\mu\phi = 0 \qquad \text{(gauge di Lorentz)}$$

Per cui

$$\mathbf{E} = -j\omega\left[\mathbf{A} - \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{-j\omega j\omega\epsilon\mu}\right] = -j\omega\left[\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{\omega^2\epsilon\mu}\right] =$$

$$= -j\omega\left[\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{k^2}\right] = -\frac{j\omega}{k^2}\left[k^2\,\mathbf{A} + \nabla\nabla\cdot\mathbf{A}\right]$$

Soluzione del potenziale vettore

A noi interessa la componente tangenziale del campo elettrico lungo l'antenna

$$E(r,\phi,z)\cdot \hat{\mathbf{z}}|_{r=a} = E_z(a,\phi,z) \qquad \text{per } -l \le z \le l$$

per cui

$$E_z = -\frac{j\omega}{k^2}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z\right).$$

Sulla superficie dell'antenna (ossia per $-l \le z \le l$)

$$-\frac{j\omega}{k^2}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z\right)\Bigg|_{r=a} = -V\delta(z)$$

$$\left(\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k^2 A_z\right)\Bigg|_{r=a} = -\frac{jk^2}{\omega}V\delta(z)$$

dove si è sostituito la derivata parziale con la derivata totale dato che per simmetria, non si può (per $r = a$, $-l < z < l$) avere dipendenza dalle coordinate angolari, ossia

$$A_z(r,\phi,z) = A_z(z)$$

Soluzione generale del potenziale vettore

La soluzione generale sarà:

$$A_z(z) = C_1 \cos kz + S_1 \sin kz \qquad z > 0$$
$$A_z(z) = C_2 \cos kz + S_2 \sin kz \qquad z < 0$$

inoltre dato che $A_z(z) = A_z(-z)$ ossia $A_z(z)$ deve essere una funzione pari

$$C_1 \cos kz + S_1 \sin kz = C_2 \cos(-kz) + S_2 \sin(-kz)$$

ovvero

$$C_1 = C_2 = C$$
$$S_1 = -S_2 = S$$

E quindi

$$A_z(z) = C \cos kz + S \sin k|z| \qquad \text{per} \quad |z| < l, z \ne 0$$

Soluzione del potenziale vettore – Determinazione della costante *S*

Integriamo tra $-\Delta z$ e $+\Delta z$

$$\int_{-\Delta z}^{+\Delta z} \frac{d^2 A_z}{dz^2} dz + k^2 \int_{-\Delta z}^{+\Delta z} A_z dz = -\frac{jk^2}{\omega} V$$

Ma

$$\int_{-\Delta z}^{+\Delta z} \frac{d^2 A_z}{dz^2} dz = \left.\frac{dA_z}{dz}\right|_{-\Delta z}^{+\Delta z}$$

Dove:

$$\frac{dA_z}{dz} = -Ck \sin kz + Sk \cos kz \qquad z > 0$$

$$\frac{dA_z}{dz} = -Ck \sin kz - Sk \cos kz \qquad z < 0$$

Quindi:

$$\left.\frac{dA_z}{dz}\right|_{-\Delta z}^{+\Delta z} = \left\{ \left[-Ck \sin k\Delta z + Sk \cos k\Delta z\right] - \left[-Ck \sin(-k\Delta z) - Sk \cos(-k\Delta z)\right] \right\} \rightarrow 2kS \text{ per } (\Delta z \rightarrow 0)$$

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Esercitazione 1 – Equazione integrale di Hallen

Soluzione del potenziale vettore – Determinazione della costante *S*

Inoltre

$$\begin{aligned} k^2 \int_{-\Delta z}^{+\Delta z} A_z dz &= k^2 \int_{-\Delta z}^{+\Delta z} \left[C\cos(kz) + S\sin(kz)\mathrm{sgn}(z) \right] dz = \\ &= k^2 \left[\left.\frac{C sin(kz)}{k}\right|_{-\Delta z}^{+\Delta z} + S\int_{-\Delta z}^{+\Delta z} \sin(kz)\mathrm{sgn}(z) dz \right] = \\ &= k^2 S \left[\left. -\frac{\cos(kz)\mathrm{sgn}(z)}{k}\right|_{-\Delta z}^{+\Delta z} + 2\int_{-\Delta z}^{+\Delta z} \frac{\cos(kz)}{k}\delta(z) dz \right] = \\ &= k^2 S \left[\frac{-2\cos(k\Delta z)}{k} + \frac{2}{k} \right] \rightarrow 0 \text{ per } (\Delta z \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Quindi

$$2kS = -j\frac{k^2}{\omega}V$$

$$\boxed{S = -j\frac{k}{2\omega}V}$$

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Soluzione del potenziale vettore – Determinazione della costante *C*

La soluzione sarà:

$$A(z) = A_z(z) = C\cos(kz) - j\frac{k}{2\omega}V\sin(k\,|z|)$$

Ma:

$$\frac{k}{2\omega} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{2\omega} = \frac{1}{2c}$$

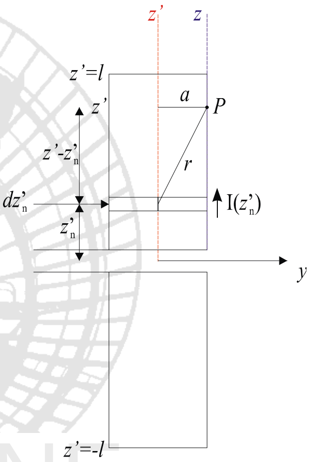
$$A(z) = C\cos(kz) - j\frac{V}{2c}\sin(k\,|z|)$$

Esercitazione 1 – Equazione integrale di Hallen

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Soluzione del potenziale vettore – Determinazione della costante *C*

Il potenziale vettore può essere sempre pensato funzione della distribuzione di corrente **I(*z’*)** che, dato $a \ll l$ può essere assunta concentrata lungo l'asse.



Per un dipolo elettrico elementare si è visto:

$$\Delta A_z = \frac{\mu}{4\pi}\frac{I_0\Delta z}{r}e^{-jkr}$$

Quindi per un generico elemento *dz’* si avrà:

$$dA_z(P) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{I(z')dz'}{r}e^{-jkr}$$

con $r = \sqrt{a^2 + (z-z')^2}$

Soluzione del potenziale vettore – Determinazione della costante *C*

Ne segue:

$$A(P) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{-l}^{+l} I(z')\frac{e^{-jk\sqrt{a^2+(z-z')^2}}}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}dz'$$

Uguagliandola con la $A(z) = A_z(z) = C\cos kz - j\frac{k}{2\omega}V\sin k|z|$ si ha:

$$\frac{\mu}{4\pi}\int_{-l}^{+l} I(z')\frac{e^{-jk\sqrt{a^2+(z-z')^2}}}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}dz' = C\cos kz - j\frac{V}{2c}\sin k|z|$$

Ovvero:

$$\int_{-l}^{+l} I(z')\frac{e^{-jk\sqrt{a^2+(z-z')^2}}}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}dz' = \frac{4\pi}{\mu}C\cos kz - j\frac{2\pi V}{c\mu}\sin k|z|$$

questa è un'equazione di Fredholm di prima specie che ha come incognita la distribuzione di corrente sull'antenna. La costante *C* sarà invece determinata dal porre:

$$I(l) = I(-l) = 0$$

Soluzione del potenziale vettore – Determinazione della costante *C*

Cerchiamo una soluzione approssimata e poniamo

$$u = \sqrt{a^2+(z-z')^2}$$

$$\int_{-l}^{+l} I(z')\frac{e^{-jku}}{u}dz' = \int_{-l}^{+l}\frac{I(z')}{u}dz' + \int_{-l}^{+l} I(z')\frac{e^{-jku}-1}{u}dz' =$$

per *a* che tende a 0 il maggior contributo del primo integrale viene per $z' = z$

$$= I(z)\int_{-l}^{+l}\frac{1}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}dz' - \underbrace{\int_{-l}^{+l} I(z')e^{-j\frac{ku}{2}}\frac{e^{-j\frac{ku}{2}}-e^{j\frac{ku}{2}}}{u}dz'}_{\Downarrow}$$

$$-jk\int_{-l}^{+l} I(z')e^{-j\frac{ku}{2}}\frac{sin\frac{ku}{2}}{\frac{ku}{2}}dz'$$

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Soluzione del potenziale vettore – Determinazione della costante *C*

valutiamo l'integrale $\int_{-l}^{+l} \frac{1}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}\,dz'$

poniamo $z-z'=y, \quad -dz'=dy$

$$-\int_{z+l}^{z-l} \frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}}dy = \int_{z-l}^{z+l}\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}}dy = \log\left[y+\sqrt{a^2+y^2}\right]_{z-l}^{z+l} = \log\frac{(z+l)+\sqrt{a^2+(z+l)^2}}{(z-l)+\sqrt{a^2+(z-l)^2}} =$$

$$=\log\frac{\left[(z+l)+\sqrt{a^2+(z+l)^2}\right]\left[(z-l)-\sqrt{a^2+(z-l)^2}\right]}{(z-l)^2-a^2-(z-l)^2}=$$

$$=\log\frac{\left[(z+l)+\sqrt{a^2+(z+l)^2}\right]\left[(l-z)+\sqrt{a^2+(z-l)^2}\right]}{a^2}=$$

$$=\log\frac{4l^2}{a^2}\frac{\left[(z+l)+\sqrt{a^2+(z+l)^2}\right]\left[(l-z)+\sqrt{a^2+(z-l)^2}\right]}{4l^2}=$$

$$=2\log\left(\frac{2l}{a}\right)+\underbrace{\log\left\{\frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{z}{l}\right)+\sqrt{\left(\frac{a}{l}\right)^2+\left(1+\frac{z}{l}\right)^2}\right]\left[\left(1-\frac{z}{l}\right)+\sqrt{\left(\frac{a}{l}\right)^2+\left(1-\frac{z}{l}\right)^2}\right]\right\}}_{F(z)}=$$

$$=\Omega+F(z)$$

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Soluzione del potenziale vettore – Determinazione della costante *C*

$$I(z)\left[\Omega+F(z)\right]-jk\int_{-l}^{+l}I(z')e^{-j\frac{ku}{2}}\frac{\sin\frac{ku}{2}}{\frac{ku}{2}}du=$$

$$=-2\pi j\frac{V}{\zeta}\sin\left(k\,|z|\right)+\frac{4\pi}{\mu}C\cos\left(kz\right)$$

Abbiamo trasformato una equazione di Fredholm di prima specie in una equazione di Fredholm di seconda specie, da cui

$$I(z)=\frac{1}{\Omega}\left[-2\pi j\frac{V}{\zeta}\sin\left(k\,|z|\right)+\frac{4\pi}{\mu}C\cos\left(kz\right)\right]+\frac{1}{\Omega}\left[jk\int_{-l}^{+l}I(z')e^{-j\frac{ku}{2}}\frac{\sin\frac{ku}{2}}{\frac{ku}{2}}dz'-F(z)I(z)\right]$$

Soluzione del potenziale vettore – Determinazione della costante *C*

Si può risolvere in modo iterativo:

1. Si pone:

$$\left[jk\int_{-l}^{+l} I(z')e^{-j\frac{ku}{2}} \frac{\sin\frac{ku}{2}}{\frac{ku}{2}} dz' - F(z)I(z) \right] = 0$$

$$I^0(z) = \frac{1}{\Omega}\left[-2\pi j \frac{V}{\zeta}\sin\left(k|z|\right) + \frac{4\pi}{\mu} C\cos\left(kz\right) \right]$$

2. si sostituisce di nuovo e si ha

$$I^1(z) = \frac{1}{\Omega}\left[-2\pi j \frac{V}{\zeta}\sin\left(k|z|\right) + \frac{4\pi}{\mu} C\cos\left(kz\right) \right] + \frac{1}{\Omega}\left[jk\int_{-l}^{+l} I^0(z')e^{-j\frac{ku}{2}} \frac{\sin\frac{ku}{2}}{\frac{ku}{2}} dz' - F(z)I^0(z) \right]$$

3. si procede con l'iterazione, ottenendo una soluzione in termini inversamente proporzionali a potenze crescenti di $1/\Omega$

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Soluzione del potenziale vettore – Determinazione della costante *C*

Fermandosi alla prima approssimazione si ha:

$$I(z) \simeq I^0(z) = \frac{1}{\Omega}\left[-2\pi j \frac{V}{\zeta}\sin\left(k|z|\right) + \frac{4\pi}{\mu} C\cos\left(kz\right) \right]$$

$$I(\pm l) \simeq I^0(\pm l) = 0$$

Ossia:

$$-2\pi j \frac{V}{\zeta}\sin\left(kl\right) + \frac{4\pi}{\mu} C\cos\left(kl\right) = 0$$

Da cui:

$$\boxed{C = 2\pi j \frac{V}{\zeta} \frac{\sin\left(kl\right)}{\cos\left(kl\right)} \frac{4\pi}{\mu}}$$

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Distribuzione di corrente sull'antenna

Quindi:

$$I(z) \simeq I^0(z) = \frac{2\pi jV}{\zeta\Omega}\left[-\sin(k|z|) + \frac{\sin(kl)}{\cos(kl)}\cos(kz)\right] =$$

$$= \frac{2\pi jV}{\zeta\Omega}\,\frac{-\sin(k|z|)\cos(kl) + \sin(kl)\cos(kz)}{\cos(kl)} =$$

$$= \frac{2\pi jV}{\zeta\Omega}\,\frac{\sin[k(l-|z|)]}{\cos(kl)}$$

In generale si avrà:

$$I(z) \simeq \frac{2\pi jV}{\zeta\Omega}\,\frac{\sin[k(l-|z|)] + b_1/\Omega + b_2/\Omega^2 + \ldots}{\cos(kl) + d_1/\Omega + d_2\Omega^2 + \ldots}$$

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Impedenza d'ingresso

Impedenza d'ingresso: $Z_{in} = \dfrac{V}{I(z=0)} = R_{in} + jX_{in}$

Approssimazione di primo ordine:

$$Z_{in} = -j\frac{\zeta}{2\pi}\Omega\left[\frac{\cos kl + \left(\dfrac{d_1}{\Omega}\right)}{\sin kl + \left(\dfrac{b_1}{\Omega}\right)}\right]$$

Approssimazione di secondo ordine:

$$Z_{in} = -j\frac{\zeta}{2\pi}\Omega\left[\frac{\cos kl + \left(\dfrac{d_1}{\Omega}\right) + \left(\dfrac{d_2}{\Omega^2}\right)}{\sin kl + \left(\dfrac{b_1}{\Omega}\right) + \left(\dfrac{b_2}{\Omega^2}\right)}\right]$$

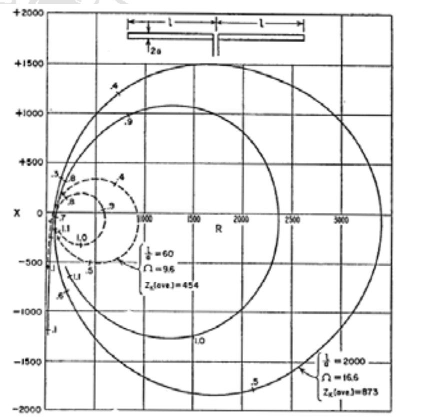


FIG. 9-9. Calculated input impedance ($R + jX$) in ohms for cylindrical center-fed antennas with ratios of total length to diameter ($2l/2a$) of 60 and 2,000 (after Hallén).

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze