



METODI A BASSA FREQUENZA

Dal modello della struttura all'equazione integrale



Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
E-mail: giuseppe.pelosi@unifi.it
URL: <http://ingfi9.det.unifi.it/>

1/30



METODI A BASSA FREQUENZA

Dal modello della struttura all'equazione integrale

1. Modelli della struttura e/o antenna
2. Formulazione del problema elettromagnetico in termini di un'equazione integrale
3. Equazioni integrali per strutture filari



2/30



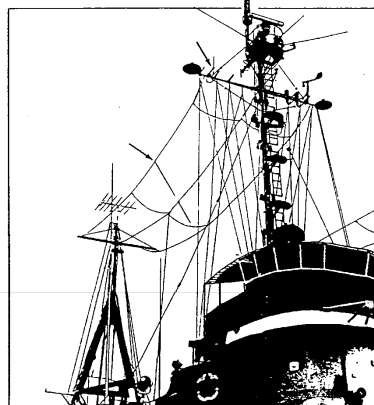
MODELLI DELLA STRUTTURA E/O ANTENNA

1. Modelli della struttura e/o antenna
2. Formulazione del problema elettromagnetico in termini di un'equazione integrale
3. Equazioni integrali per strutture filari

3/30



MODELLI DELLA STRUTTURA E/O ANTENNA

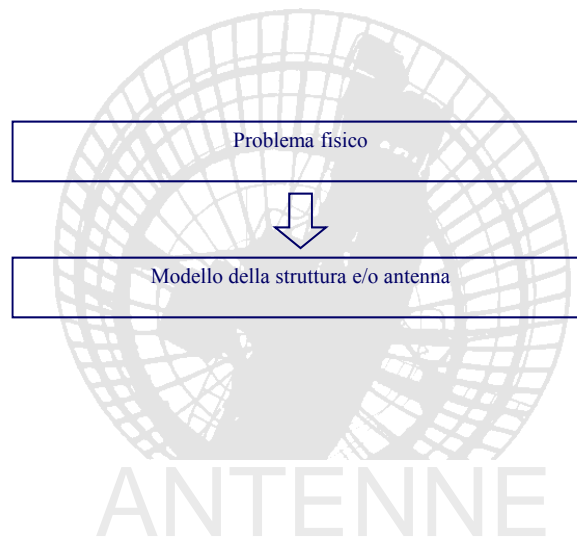


Tipico ambiente operativo a bordo di una Unità navale

4/30



DAL PROBLEMA FISICO AL MODELLO DELLA STRUTTURA



5/30



SCELTA DEL MODELLO

La soluzione di un'equazione integrale, associata al problema elettromagnetico, può essere ottenuta per via numerica con il metodo dei residui pesati. Prima occorre creare un modello della struttura.

Esistono due tecniche per modellare la struttura e/o antenna

Wire Grid Model (WGM)

Surface Patch Model (SPM)

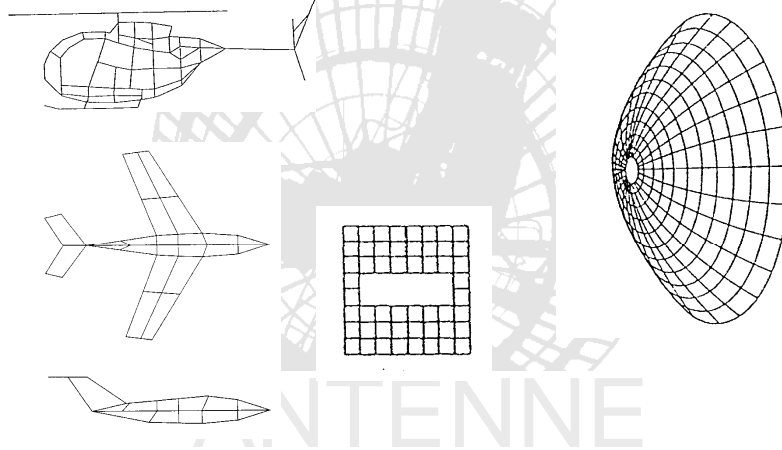
La scelta del modello condiziona la scelta dell'equazione integrale.

6/30



ESEMPI DI MODELLI: WIRE GRID MODEL (WGM)

Il *Wire Grid Model* (WGM) approssima la struttura con un grigliato di dimensioni finite.

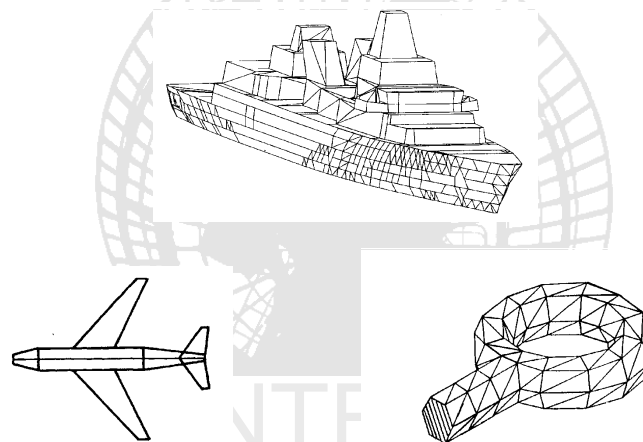


7/30



ESEMPI DI MODELLI: SURFACE PATCH MODEL (SPM)

Il *Surface Patch Model* (SPM) approssima la struttura con una opportuna connessione di piastre piane poligonali.



8/30



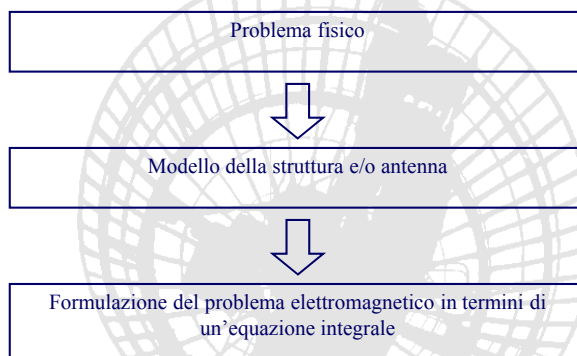
FORMULAZIONE DEL PROBLEMA ELETTROMAGNETICO IN TERMINI DI UN'EQUAZIONE INTEGRALE

1. Modelli della struttura e/o antenna
2. Formulazione del problema elettromagnetico in termini di un'equazione integrale
3. Equazioni integrali per strutture filari

9/30



DAL MODELLO ALL'EQUAZIONE INTEGRALE

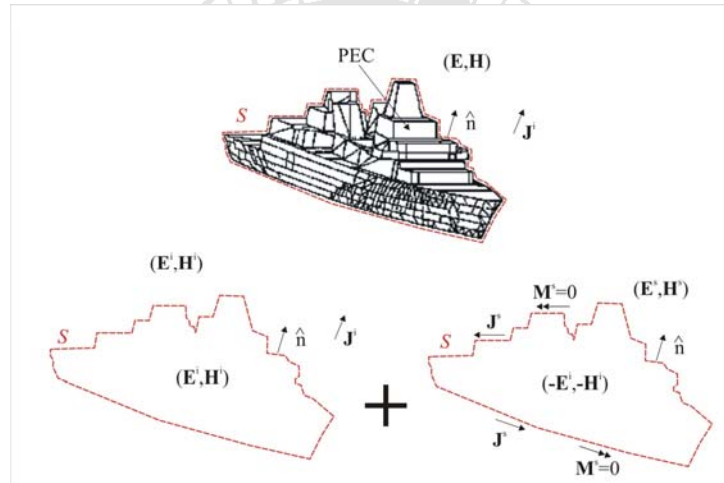


10/30



DAL MODELLO ALL'EQUAZIONE INTEGRALE

Si applica il teorema di equivalenza

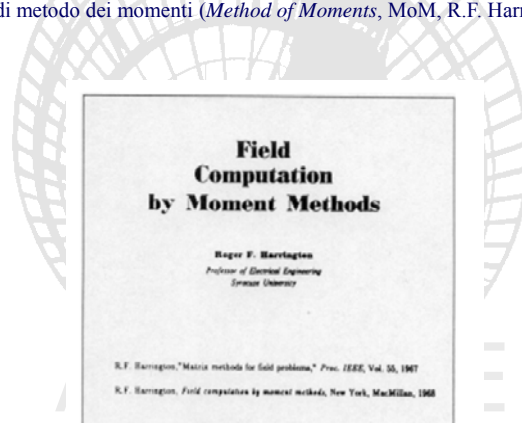


11/30



IL METODO DELL'EQUAZIONE INTEGRALE

Le correnti equivalenti J^s possono essere determinate costruendo un'equazione integro-differenziale, che deriva dall'imposizione delle condizioni al contorno (*Integral Equation method*, *IE method*), e risolvendola numericamente con la procedura del metodo dei residui pesati (*Method of Weighted Residuals*), noto, nell'ambiente dell'ingegneria elettromagnetica, con il nome di metodo dei momenti (*Method of Moments*, MoM, R.F. Harrington, 1965).



12/30



IL METODO DELL'EQUAZIONE INTEGRALE

Le equazioni integrali più usate per determinare la corrente equivalente \mathbf{J}^s sono due:
l'*Electric Field Integral Equation* (EFIE) e la *Magnetic Field Integral Equation* (MFIE).

La formulazione del problema elettromagnetico in termini di equazioni integrali contiene in modo intrinseco la condizione di radiazione all'infinito.

13/30



EQUAZIONI INTEGRALI

L'EFIE (*Electric Field Integral Equation*) deriva dalla condizione al contorno per il campo elettrico tangente alla superficie di un corpo perfettamente conduttore, coincidente con la superficie di equivalenza. L'EFIE è un'equazione di Fredholm di 1^a specie.

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \times \hat{n} &= [\mathbf{E}^s(\mathbf{J}^s) + \mathbf{E}^i(\mathbf{J}^i)] \times \hat{n} = 0 \\ \mathbf{E}^s(\mathbf{J}^s) \times \hat{n} &= -\mathbf{E}^i(\mathbf{J}^i) \times \hat{n} \\ \mathbf{E}^s(\mathbf{J}^s) \times \hat{n} &= -\mathbf{E}^i(\mathbf{J}^i) \times \hat{n} \quad \rightarrow \quad L_E(\mathbf{J}^s) = \mathbf{g} \\ L_E(\mathbf{J}^s) &= \mathbf{E}^s(\mathbf{J}^s) \times \hat{n} \\ \mathbf{g} &= \hat{n} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{J}^i)\end{aligned}$$

14/30



DEFINIZIONE DELLE EQUAZIONI

La MFIE (*Magnetic Field Integral Equation*) deriva dalla condizione al contorno per il campo magnetico tangente alla superficie di un corpo perfettamente conduttore:

$$\hat{n} \times \mathbf{H} = \hat{n} \times [\mathbf{H}^s(\mathbf{J}^s) + \mathbf{H}^i(\mathbf{J}^i)] = \mathbf{J}^s$$

$$\hat{n} \times \mathbf{H}^s(\mathbf{J}^s) - \mathbf{J}^s = -\hat{n} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{J}^i)$$

La MFIE è un'equazione di Fredholm di 2^a specie.

$$\hat{n} \times \mathbf{H}^s(\mathbf{J}^s) - \mathbf{J}^s = -\hat{n} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{J}^i) \quad \rightarrow \quad L_H(\mathbf{J}^s) = \mathbf{g}$$

$$L_H(\mathbf{J}^s) = \hat{n} \times \mathbf{H}^s(\mathbf{J}^s) - \mathbf{J}^s(\mathbf{r}')$$

$$\mathbf{g} = -\hat{n} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{J}^i)$$

15/30



COME SCEGLIERE L'EQUAZIONE INTEGRALE: EFIE O MFIE???

Sia l'EFIE (*Electric Field Integral Equation*) sia la MFIE (*Magnetic Field Integral Equation*) possono essere impiegate per valutare le correnti equivalenti \mathbf{J}^s sulla superficie di equivalenza S che delimita una struttura perfettamente conduttrice.

16/30



ALTRE EQUAZIONI INTEGRALI

CFIE (*Combined Field Integral Equation*)

$$\alpha \mathbf{E}^s(\mathbf{J}^s) \times \hat{n} + \zeta(1-\alpha) \left[\frac{\mathbf{J}^s}{2} + \mathbf{H}(\mathbf{J}^s) \times \hat{n} \right] = \alpha \hat{n} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{J}^i) + \zeta(1-\alpha) \hat{n} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{J}^i)$$

α = coefficiente di accoppiamento

AFIE (*Augmented Field Integral Equation*)

17/30



SCELTA DELL'EQUAZIONE

EFIE (*Electric Field Integral Equation*)

- 😊 strutture filari nell'ambito della *thin wire approximation*
- 😞 superfici chiuse
- 😊 strutture aperte

MFIE (*Magnetic Field Integral Equation*)

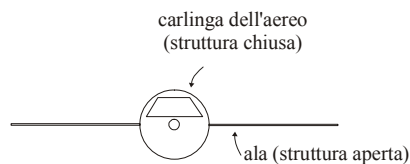
- 😞 strutture filari nell'ambito della *thin wire approximation*
- 😊 superfici chiuse
- 😞 strutture aperte

18/30



SCELTA DELL'EQUAZIONE

Superfici aperte: MFIE o EFIE ???



Nel caso di strutture aperte l'incognita nell'EFIE è rappresentata dalla somma delle correnti sulle due facce, mentre nella MFIE dalla differenza. Pertanto, solo l'EFIE consente di calcolare il campo irradiato dalla struttura.

$$\begin{array}{l} J^t \\ J^b \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{EFIE} \rightarrow J^s = J^t + J^b \\ \text{MFIE} \rightarrow J^s = J^t - J^b \end{array}$$

19/30



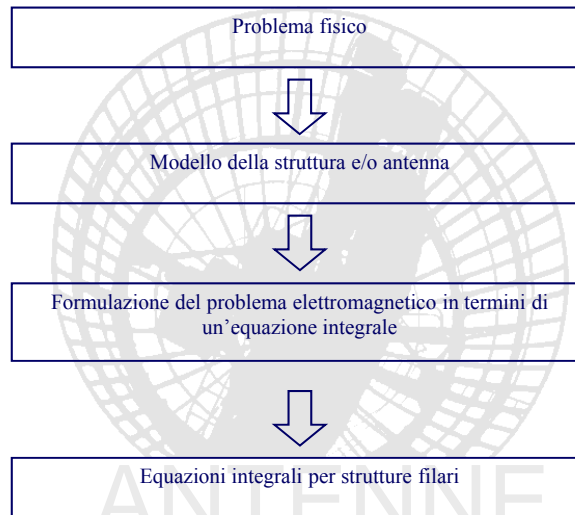
EQUAZIONI INTEGRALI PER STRUTTURE FILARI

1. Modelli della struttura e/o antenna
2. Formulazione del problema elettromagnetico in termini di un'equazione integrale
3. Equazioni integrali per strutture filari

20/30



DERIVAZIONE DELL'EQUAZIONE INTEGRALE



21/30



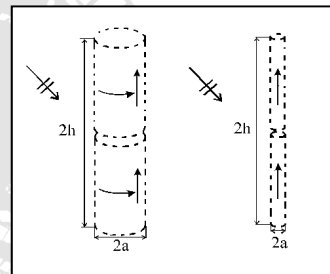
ANTENNE FILARI – EFIE: THIN WIRE APPROXIMATION

Se la struttura è sottile ($h \gg a$) si trascurano:

- la variazione della corrente lungo la circonferenza
- la componente longitudinale della corrente rispetto a quella assiale
- i contributi delle estremità della struttura cilindrica

Inoltre la corrente è assunta:

- nulla alle estremità della struttura filare
- concentrata sull'asse della struttura filare



22/30



ANTENNE FILARI – EFIE: THIN WIRE APPROXIMATION

La *thin wire approximation* consente di:

- semplificare l'equazione integrale
- rimuovere la singolarità della funzione di Green che si ha quando punto di integrazione e di osservazione coincidono

Esempi di EFIE:

- Equazione di Hallén: modello di generatore a *delta gap*

(E. Hallén, “*Theoretical investigations into the transmitting and receiving qualities of antennae*,”

Nova Acta Regiae Soc. Sci. Upsaliensis, Ser. IV, 11, 1-44, 1938)

- Equazione di Pocklington: onda piana incidente

(H.C. Pocklington, “*Electrical oscillations in wire*,” Camb. Phil. Soc. Proc. 9, 324-32, 1897)

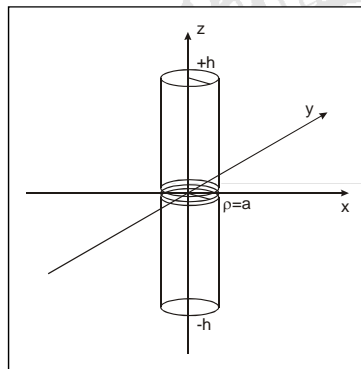
23/30



ANTENNA IN TRASMISSIONE

Antenna in trasmissione

$$\int_{-h}^h K(z, z') I(z') dz' = \frac{B}{\mu} \cos(kz) - \frac{j}{2\zeta} V_g \sin(k|z|) \quad (\text{equazione di Hallén})$$



$$K(z, z') = G(z, z') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

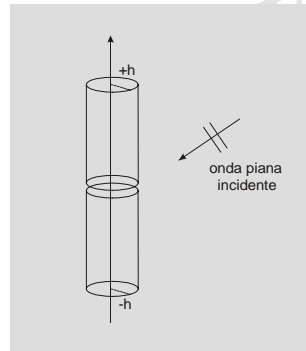
Modello di generatore a δ -gap

$$\mathbf{E}^i(z) = V_g \delta(z) \hat{z}, \quad \rho = a$$

24/30



ANTENNE FILARI – EQUAZIONE DI POCKLINGTON



Antenna in ricezione
Onda piana incidente sull'antenna filare

$$\int_{-h}^h K(z, z') I(z') dz' = -\mathbf{E}^i(z) \cdot \hat{z}$$

(equazione di Pocklington)

$$K(z, z') = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \left[\frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial^2 z} + k^2 G(z, z') \right]$$

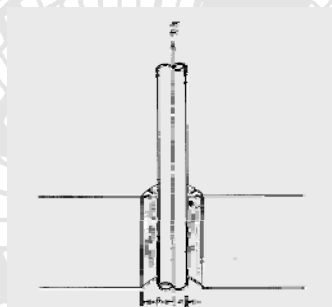
$$G(z, z') = \frac{e^{-jk\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}}{4\pi\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}$$

25/30



ANTENNE FILARI – ALTRI MODELLI DI GENERATORE: MAGNETIC FRILL GENERATOR

Equivale ad alimentare l'antenna mediante un spira di corrente magnetica (ovvero con un dipolo elettrico corto)



26/30



Campo elettrico in presenza di sole correnti magnetiche

Siamo interessati al campo elettromagnetico generato per $z > 0$

Essendo $\mathbf{J} = 0$ e $\mathbf{M} \neq 0$, si ha $\mathbf{A} = 0$ e $\mathbf{F} \neq 0$

Ricordando che in presenza di sole correnti magnetiche il campo elettrico vale:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{F}$$

e l'espressione del potenziale vettore di tipo magnetico è:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{M}) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iiint_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \frac{e^{-j\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv'$$

Da cui:

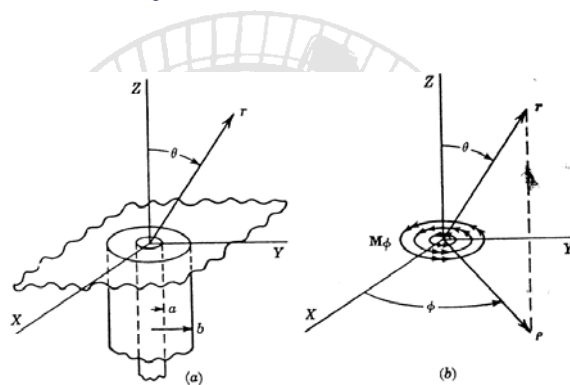
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \times \iint_{\text{superficie}} \frac{e^{-j\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{2\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{s}'$$

27/30



Cavo coassiale con piano di massa

Apertura di un cavo coassiale su piano di massa



Ipotesi:

Campo all'apertura corrispondente al modo fondamentale del cavo coassiale (TEM)

28/30



Corrente all'apertura

Nell'ipotesi vista:

$$\mathbf{E} = E_\rho(\rho)\hat{\rho} = \frac{-V}{\rho \log\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{\rho} \quad \text{e} \quad \mathbf{J}_m = \mathbf{E} \times \hat{z} = J_{m_\phi}(\rho)\hat{\phi} = \frac{V}{\rho \log\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{\phi}$$

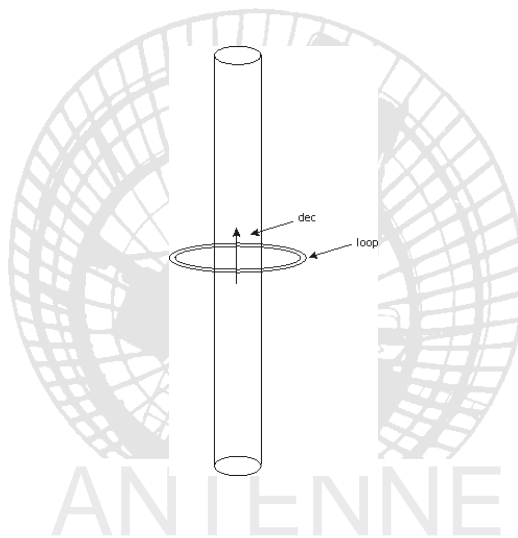
Questa è una spira di corrente magnetica, che per $b \ll \lambda$, equivale in pratica a un dipolo elettrico

$$I_m \Delta z = j\omega\mu \Delta S I_l \quad \Delta S = \pi R^2$$

Applicando Babinet: $I_l \Delta z = j\omega\varepsilon \Delta S I_l^m$

Si ha:
$$\Delta S I_l^m = \int_a^b \pi \rho^2 dI_l^m = \int_a^b \pi \rho^2 J_{m_\phi} d\rho = \frac{\pi V}{\log\left(\frac{b}{a}\right)} \int_a^b \rho d\rho = \frac{\pi V (b^2 - a^2)}{2 \log\left(\frac{b}{a}\right)}$$

29/30



30/30