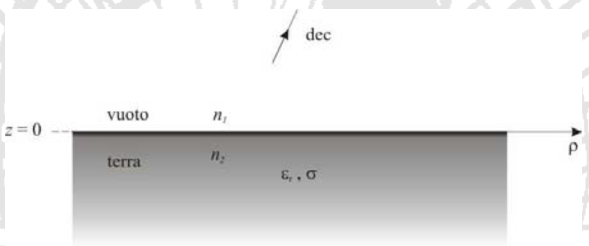
ANTENNE IRRADIANTI IN PRESENZA DEL TERRENO: IL PROBLEMA DI SOMMERFELD

Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
E-mail: giuseppe.pelosi@unifi.it
URL: http://ingfi9.det.unifi.it/

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

PROBLEMA GENERALE

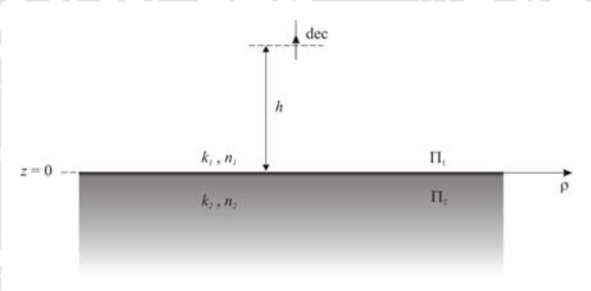
Può essere usato come base per risolvere problemi più complessi



n_1 ed n_2 sono gli indici di rifrazione

CONFIGURAZIONE DI BASE

Si inizia da un problema più semplice...



k_1 ed k_2 sono le costanti di propagazione

Si lavora col potenziale di Hertz di tipo elettrico $\mathbf{\Pi}$

$$\mathbf{A} = j\omega\varepsilon\mu\,\mathbf{\Pi}$$

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ

$p = I\Delta z$ momento del dec

$n_1 = \dfrac{k_1}{k_0}$ indice di rifrazione

Si pone: $\left.\begin{array}{l} k_1 = k_0 \\ n_1 = 1 \end{array}\right\}$ vuoto

Devo risolvere l'equazione di Helmholtz per il potenziale di Hertz $\mathbf{\Pi}$

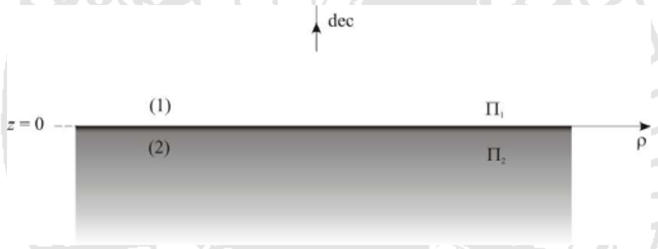
(mi interessa la componente lungo z perché il dec è verticale)

Mezzo 1 ⟶ $\nabla^2\Pi_{1z} + k_1^2\Pi_{1z} = -j\dfrac{p}{\omega\varepsilon_0 n_1^2}\delta(x)\delta(y)\delta(z-h)$

Nel mezzo 2 non si hanno sorgenti ⟶ $\nabla^2\Pi_{2z} + k_1^2\Pi_{2z} = 0$

CONTINUITÀ TRA I DUE MEZZI

Risolte le equazioni di Helmholtz si impongono le condizioni di continuità fra i due mezzi (in z = 0) per la determinazione delle costanti di integrazione



Noti i potenziali di Hertz si ricavano i potenziali vettore e quindi i campi

$$\mathbf{\Pi}_1 \rightarrow \mathbf{A}_1 \rightarrow (\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$$
$$\mathbf{\Pi}_2 \rightarrow \mathbf{A}_2 \rightarrow (\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$$

UN ESEMPIO

$$\mathbf{H}_{(1,2)} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}_{(1,2)}$$

$\mathbf{A}_{(1,2)} = A_{(1,2)z}\hat{z}$ il dipolo è diretto lungo z

$\mathbf{A}_{(1,2)} = j\omega\varepsilon\mu\, \mathbf{\Pi}_{(1,2)}$ ➡ $\mathbf{A}_{(1,2)} // \mathbf{\Pi}_{(1,2)}$ e dunque $\mathbf{\Pi}_{(1,2)} = \Pi_{(1,2)z}\hat{z}$

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{(1,2)} = j\omega\varepsilon_0 n^2 \left(\dfrac{\partial \Pi_{(1,2)z}}{\partial y}\hat{x} - \dfrac{\partial \Pi_{(1,2)z}}{\partial x}\hat{y} \right) \\ \mathbf{E}_{(1,2)} = \dfrac{\partial^2 \Pi_{(1,2)z}}{\partial x \partial z}\hat{x} + \dfrac{\partial^2 \Pi_{(1,2)z}}{\partial y \partial z}\hat{y} + \left(\dfrac{\partial^2 \Pi_{(1,2)z}}{\partial z^2} + k^2 \Pi_{(1,2)z} \right)\hat{z} \end{cases}$$

UN ESEMPIO

Imponendo le condizioni di continuità per la componente x del campo magnetico:

$$n_1^2 \frac{\partial \Pi_{1z}}{\partial y} = n_2^2 \frac{\partial \Pi_{2z}}{\partial y}$$

Imponendo le stesse condizioni per $\mathbf{H}_y$, $\mathbf{E}_x$ e $\mathbf{E}_y$ si trovano quattro equazioni che vengono manipolate tenendo conto della simmetria:

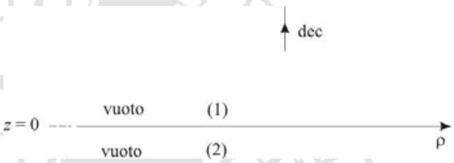
$$n_1^2 \Pi_{1z} = n_2^2 \Pi_{2z}$$

$$\frac{\partial \Pi_{1z}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_{2z}}{\partial z}$$

Il problema dal punto di vista matematico è ben formulato

COME SI TROVA LA SOLUZIONE?

Supponiamo che anche il mezzo (2) sia il vuoto (assenza di interfaccia)



Il potenziale è della forma $\frac{e^{-jkr_1}}{r_1}$ più un fattore costante

Campo radiato dal dipolo in spazio libero $\frac{-jp}{4\pi\omega\varepsilon_0 n_1^2}\frac{e^{-jkr_1}}{r_1}$

Si esprime il fattore $\frac{e^{-jkr_1}}{r_1}$ attraverso un integrale:

$$\frac{e^{-jkr_1}}{r_1} = \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\left[-j\left(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \tau_1|z-h|\right)\right]}{\tau_1}d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\tau_1 = \sqrt{k_1^2 - \left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)}$$

QUAL È L'IDEA?

E' una rappresentazione mediante sovrapposizione di onde piane

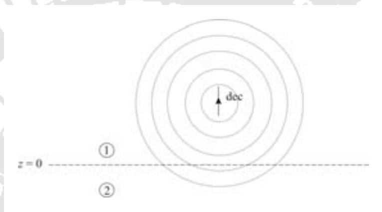
In determinate condizioni la riflessione e la trasmissione di un'onda piana è nota

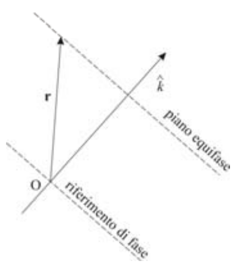
Se il mezzo (2) non è il vuoto la soluzione può essere trovata calcolando i coefficienti di trasmissione e riflessione relativi a ciascuna onda piana

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

ASSENZA DI INTERFACCIA

Se non c'è l'interfaccia la soluzione è un'onda sferica che può essere rappresentata come sovrapposizione di onde piane





e^{-jkz} onda piana che si propaga lungo z

$e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ onda piana che si propaga nella direzione $\hat{k}$

$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

ASSENZA DI INTERFACCIA

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ vettori complessi costanti

Dalle equazioni di Maxwell

$$\nabla\times\mathbf{E} = -j\omega\mu\,\mathbf{H}$$
$$\nabla\times\mathbf{H} = j\omega\varepsilon\,\mathbf{E}$$
$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$$
$$\nabla\cdot\mathbf{H} = 0$$

$\nabla \approx -j\mathbf{k}$ $\longrightarrow$

$$-j\mathbf{k}\times\mathbf{E} = -j\omega\mu\,\mathbf{H}$$
$$-j\mathbf{k}\times\mathbf{H} = j\omega\varepsilon\,\mathbf{E}$$
$$-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$$
$$-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{H} = 0$$

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

ASSENZA DI INTERFACCIA

Ricavando **H** dalla prima e sostituendo nella seconda

$$\left(k^2 - \omega^2\varepsilon\mu\right)\mathbf{E} = 0 \qquad \mathbf{k} = \alpha_1\hat{x} + \alpha_2\hat{y} + \alpha_3\hat{z} \qquad k = |\mathbf{k}|$$

se $\mathbf{E} \neq 0$ $\longrightarrow$ $\omega^2\varepsilon\mu = k^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ $\qquad \alpha_3 = \sqrt{k^2 - \left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)}$

$$\alpha_3 = \pm\sqrt{k^2 - \left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)}$$

se $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ $\longrightarrow$ $e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{-j(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)}$

$z \rightarrow +\infty$ l'onda deve decadere a 0 $\longrightarrow$ torna l'espressione dell'esponenziale nel doppio integrale

Dunque erano onde piane!!

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

ONDE NON VISIBILI

Una sovrapposizione di onde piane è allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{E}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-j(\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z)}d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\alpha_3=\pm k\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{k^2}}$$

al variare di α_1, α_2 ho diverse onde

α_1, α_2 variano tra -∞ e +∞ quindi esisteranno dei valori per cui la radice diventa negativa

$$\begin{cases} 1-\dfrac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{k^2}>0\Rightarrow \text{VISIBILE} \\ 1-\dfrac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{k^2}<0\Rightarrow \text{NON VISIBILE} \end{cases}$$

TECNICA SPETTRALE

Soluzione nello spazio libero

$$\Pi_1=-\frac{p}{8\pi^2\omega\varepsilon_0 n_1^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-j\tau_1|z-h|}}{\tau_1}e^{-j(\alpha_1 x+\alpha_2 y)}d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\tau_1=\sqrt{k_1^2-\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)}$$

Il campo nel generico punto **P** del mezzo (1) sarà dato dalla sovrapposizione di onde piane dirette e riflesse

⬇

TECNICA SPETTRALE

CAMPO RIFLESSO

Integrale per il campo riflesso

$$-\frac{p}{8\pi^2\omega\varepsilon_0 n_1^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R(\alpha_1,\alpha_2)\, e^{-j\tau_1 z} e^{-j(\alpha_1 x+\alpha_2 y)}\, d\alpha_1 d\alpha_2$$

coefficiente da determinare

Potenziale nel mezzo (1)

$$\mathbf{\Pi}_1 = -\frac{p}{8\pi^2\omega\varepsilon_0 n_1^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-j\tau_1|z-h|}}{\tau_1} e^{-j(\alpha_1 x+\alpha_2 y)}\, d\alpha_1 d\alpha_2 - \frac{p}{8\pi^2\omega\varepsilon_0 n_1^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R(\alpha_1,\alpha_2)\, e^{-j\tau_1 z} e^{-j(\alpha_1 x+\alpha_2 y)}\, d\alpha_1 d\alpha_2$$

CAMPO TRASMESSO

Potenziale nel mezzo (2)

$$\mathbf{\Pi}_2 = -\frac{p}{8\pi^2\omega\varepsilon_0 n_1^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T(\alpha_1,\alpha_2)\, e^{j\tau_2 z} e^{-j(\alpha_1 x+\alpha_2 y)}\, d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\tau_2 = \sqrt{k_2^2 - \left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)}$$

siamo in z < 0 quindi si è cambiato segno

CALCOLO DEL COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE

Per trovare R(α_1, α_2) si impone onda piana per onda piana la continuità del campo all'interfaccia tra i due mezzi

$$\begin{cases} \dfrac{e^{-j\tau_1 h}}{\tau_1} + R(\alpha_1,\alpha_2) = \left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)^2 T(\alpha_1,\alpha_2) \\ \dfrac{e^{-j\tau_1 h}}{\tau_1} - R(\alpha_1,\alpha_2) = \dfrac{\tau_2}{\tau_1} T(\alpha_1,\alpha_2) \end{cases}$$

Il procedimento è del tutto generale

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

CALCOLO DEL COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE

Risolvendo si trovano i coefficienti

$$\begin{cases} R(\alpha_1,\alpha_2) = \dfrac{n_{21}^2\tau_1 - \tau_2 e^{j\tau_1 h}}{n_{21}^2\tau_1 + \tau_2} \\ T(\alpha_1,\alpha_2) = \dfrac{2e^{j\tau_1 h}}{n_{21}^2\tau_1 + \tau_2} \end{cases} \qquad n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

Il potenziale nel mezzo (1) diventa

$$\mathbf{\Pi}_1 = \frac{jp}{4\pi\omega\varepsilon_0 n_1^2}\left[\frac{e^{jk_1 r_1}}{r_1} + \frac{e^{jk_1 r_2}}{r_2} + I_1\right]$$

$$r_2 = \left[\rho^2 + (z+h)^{1/2}\right]$$

$$I_1 = -\frac{j}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau_2}{\tau_1\left(n_{21}^2\tau_1 + \tau_2\right)} e^{-j[\alpha_1 x + \alpha_2 y + \tau_1(z+h)]} d\alpha_1 d\alpha_2$$

ANTENNE

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

TERMINE CORRETTIVO

si operano le trasformazioni

$$\alpha_1 = \lambda \cos\beta \qquad x = \rho\cos\phi$$
$$\alpha_2 = \lambda \sin\beta \qquad y = \rho\sin\phi$$

si ottiene

$$I_1 = -j\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau_2 H_0^{(1)}(\lambda\rho)}{\tau_1\left(n_{21}^2\tau_1 + \tau_2\right)} e^{j\tau_1(z+h)}\lambda\, d\lambda$$

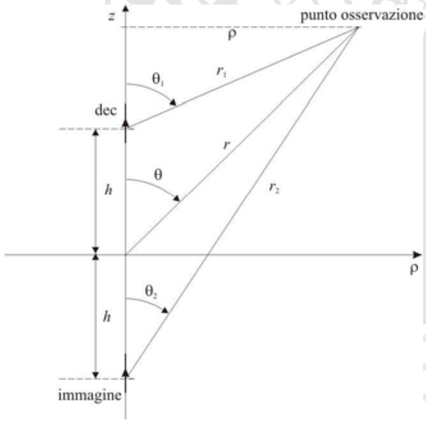
$H_0^{(1)}(\cdot)$ $\longrightarrow$ funzione di Hankel di prima specie di ordine 0

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze
Antenne irradianti in presenza del terreno: il problema di Sommerfeld

TERMINE CORRETTIVO

I_1 è un fattore di correzione che ha un contributo non nullo quando la conducibilità del mezzo (2) è finita

se $n_2 >> n_1 \quad (\sigma_2 \to \infty)$ il contributo di I_1 si annulla



La soluzione tende a coincidere con quella del problema di dipolo su piano perfettamente conduttore

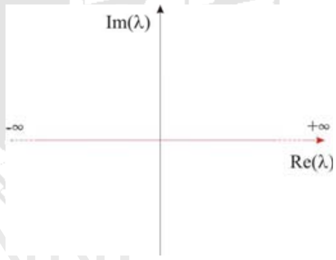
CAMPO RIFLESSO NEL MEZZO (1)

$$\mathbf{\Pi}_1 = \frac{jp}{4\pi\omega\varepsilon_0 n_1^2}\left[\frac{e^{jk_1 r_2}}{r_2} + I_1\right] \longrightarrow \text{contributo riflesso}$$

$$\frac{e^{jk_1 r_2}}{r_2} \longrightarrow \text{contributo dipolo immagine}$$

$$I_1 = -j\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau_2 H_0^{(1)}(\lambda\rho)}{\tau_1\left(n_{21}^2\tau_1 + \tau_2\right)} e^{j\tau_1(z+h)}\lambda\, d\lambda \longrightarrow \text{termine correttivo}$$

L'integrale viene valutato in campo complesso considerando λ come variabile complessa



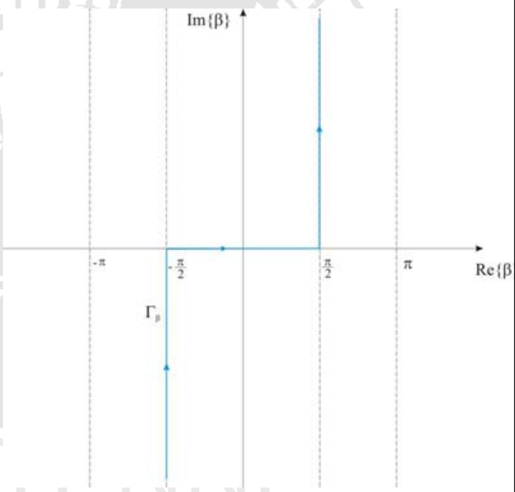
VALUTAZIONE DELL'INTEGRALE COMPLESSO

Si operano le trasformazioni

$$\begin{cases} \lambda = k_1 \sin\beta \\ z + h = r_2\cos\vartheta_2 \\ \rho = r_2 \sin\vartheta_2 \end{cases}$$

ottenendo un integrale della forma

$$I_1 = \int_{\Gamma_\beta} F(\beta)e^{jk_1 r_2\cos(\beta-\vartheta_2)}\,d\beta$$



$$I_1 = \int_{\Gamma_\beta} F(\beta) e^{jk_1 r_2 \cos(\beta - \vartheta_2)}\, d\beta$$

$$I_1 = \int_{\Gamma_\beta} F(\beta) e^{k_1 r_2 f(\beta)}\, d\beta$$

$$f(\beta) = f_R(\beta) + j\, f_I(\beta) = j\cos(\beta - \theta_2)$$

$$\frac{df(\beta)}{d\beta} = 0 \quad \text{punto di sella} \quad \beta = \beta_s = \pm\theta_2$$

Tra tutti i possibili cammini passanti per i punti di sella si sceglie quello tale che:

$$I_1 = \int_{\Gamma_\beta} F(\beta) e^{k_1 r_2 f(\beta)}\, d\beta$$

$$f(\beta) = f_R(\beta) + j\, f_I(\beta) = j\cos(\beta - \theta_2)$$

$$f_R(\beta) = f_R(\beta = \beta_s) - s^2$$

$$f_I(\beta) = f_I(\beta = \beta_s)$$

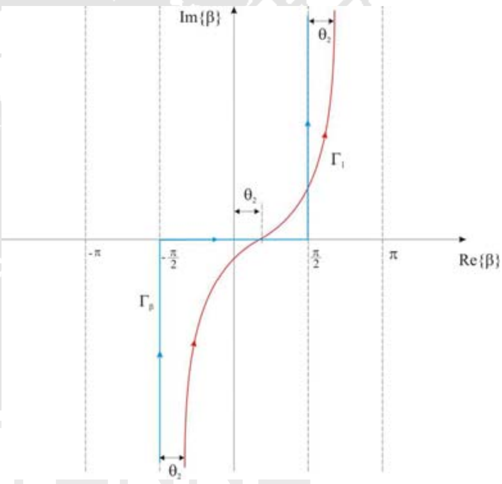
$$f(\beta) = f(\beta = \beta_s) - s^2$$

METODO DEL PUNTO DI SELLA

$$I_1(k_1r_2) = \int_{\Gamma_1} F(\beta) e^{jk_1r_2\cos(\beta-\vartheta_2)}\, d\beta$$

$$I_1(k_1r_2) = e^{k_1r_2 f(\beta_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(s)\, e^{-k_1r_2s^2}\, ds$$

$$\phi(s) = F(\beta)\frac{d\beta(s)}{ds}$$



ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

$$I_1(k_1r_2) = e^{k_1r_2 f(\beta_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(s)\, e^{-k_1r_2s^2}\, ds$$

$$\phi(s) = F(\beta)\frac{d\beta(s)}{ds}$$

Sviluppando in un intorno del punto di sella s=0

$$\phi(s) \cong \phi(0) + \phi'(0)s + \frac{1}{2}\phi''(0)s^2 + \cdots$$

e fermandosi al primo termine dello sviluppo

$$I_1(kr) \cong e^{k_1r_2 f(\beta_s)}\phi(0)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k_1r_2s^2}\, ds \cong e^{k_1r_2 f(\beta_s)}\phi(0)\sqrt{\frac{\pi}{k_1r_2}}$$

integrale di Poisson

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

INDICI DI RIFRAZIONE

f	Terra		Acqua di mare	
	n^2	n	n^2	n
1 kHz	$15+j2.16\text{x}10^5$	$328(1+j)$	$81+j7.2\text{x}10^7$	$6000(1+j)$
10 kHz	$15+j2.16\text{x}10^4$	$104(1+j)$	$81+j7.2\text{x}10^6$	$1900(1+j)$
100 kHz	$15+j2.16\text{x}10^3$	$32.8(1+j)$	$81+j7.2\text{x}10^5$	$600(1+j)$
1 MHz	$15+j2.16\text{x}10^2$	$10.4(1+j)$	$81+j7.2\text{x}10^4$	$190(1+j)$
10 Mhz	$15+j21.6$	$6.02+j3.14$	$81+j7.2\text{x}10^3$	$60(1+j)$
100 Mhz	$15+j2.16$	$3.87+j720$	$81+j720$	$60+j53.4$

Variazione in frequenza dell'indice di rifrazione della terra e dell'acqua di mare

Terra

$\sigma = 12\times10^{-3}$ mho/m

$\varepsilon_r = 15$

Acqua di mare

$\sigma = 4$ mho/m

$\varepsilon_r = 81$