ELEMENTI DI TEORIA DELLA RADIAZIONE - RICHIAMI

Giuseppe Pelosi
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Università di Firenze
E-mail: *giuseppe.pelosi@unifi.it*
URL: http://ingfi9.det.unifi.it/

ELEMENTI DI TEORIA DELLA RADIAZIONE: RICHIAMI

1. *Problema di antenna* e *problema radar*
2. Principio di equivalenza (formulazione di Love)
3. Teoria dei potenziali
4. Integrali di radiazione
5. Modalità di soluzione del *problema di antenna*

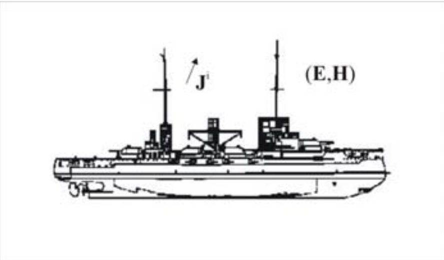
PROBLEMA DI ANTENNA E PROBLEMA RADAR

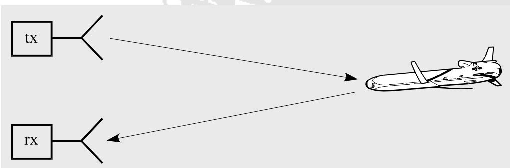
Elementi di teoria della radiazione - Richiami

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

PROBLEMA DI ANTENNA E PROBLEMA RADAR

Nel *problema di antenna* la distribuzione di corrente nota J^i (antenna) è posta al finito rispetto alla struttura e si vuole determinare il campo in zona vicina-lontana.

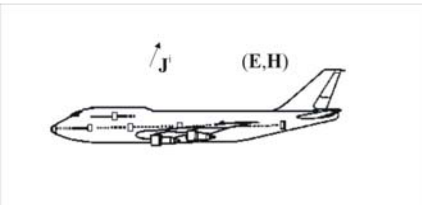




Nel *problema radar* la struttura è supposta illuminata da un'onda piana e si vuole determinare il campo lontano

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA (FORMULAZIONE DI LOVE)

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA (FORMULAZIONE DI LOVE)



La soluzione del problema elettromagnetico richiede la soluzione delle equazioni di Maxwell una volta specificate

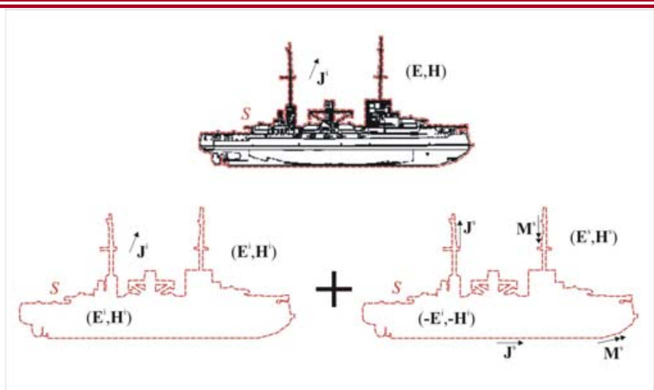
- le sorgenti $\mathbf{J}^i$ (antenna)

e imposte

- le condizioni al contorno sulle superfici che delimitano materiali diversi
- la condizione di radiazione all'infinito

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\,\mathbf{B}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\,\mathbf{D} + \mathbf{J}^i$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

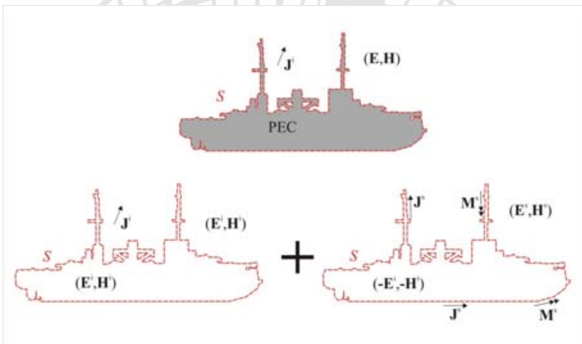
PRINCIPIO DI EQUIVALENZA PER CORPI ARBITRARI



- si lavora nello spazio libero
- le correnti equivalenti J^s e M^s sono incognite e dipendono dal campo elettromagnetico totale $(\mathbf{E},\mathbf{H}) = (\mathbf{E}^i,\mathbf{H}^i) + (\mathbf{E}^s,\mathbf{H}^s)$ **su** S
- si perde però l'informazione sul campo elettromagnetico all'interno della superficie di equivalenza *S*

UN CASO PARTICOLARE: CORPI PERFETTAMENTE CONDUTTORI

Facendo coincidere la superficie di equivalenza con quella di un oggetto perfettamente conduttore (*PEC*), le sorgenti equivalenti sono soltanto di tipo elettrico.



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r};\mathbf{J}^i) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r};\mathbf{J}^s,\mathbf{M}^s = 0)$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^i(\mathbf{r};\mathbf{J}^i) + \mathbf{H}^s(\mathbf{r};\mathbf{J}^s,\mathbf{M}^s = 0)$$

TEORIA DEI POTENZIALI

1. *Problema di antenna* e *problema radar*
2. Principio di equivalenza (formulazione di Love)
3. Teoria dei potenziali
4. Integrali di radiazione
5. Modalità di soluzione del *problema di antenna*

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI DI MAXWELL CON SORGENTI ELETTRICHE J^i+J^s IRRADIANTI NELLO SPAZIO LIBERO

$$\nabla \times \mathbf{E}_A = -j\omega \mathbf{B}_A$$
$$\nabla \times \mathbf{H}_A = j\omega \mathbf{D}_A + \mathbf{J}^i + \mathbf{J}^s$$
$$\nabla \cdot \mathbf{D}_A = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B}_A = 0$$

6 equazioni scalari in 6 incognite

Relazioni costitutive del mezzo

$$\mathbf{B}_A = \mu \mathbf{H}_A$$
$$\mathbf{D}_A = \varepsilon \mathbf{E}_A$$

La densità di corrente J tiene conto delle sorgenti J^i e della corrente equivalente J^s

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^i + \mathbf{J}^s$$

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

$\nabla\cdot\mathbf{B}_A = 0 \Rightarrow \mathbf{B}_A = \nabla\times\mathbf{A}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$ A è il potenziale vettore di tipo elettrico

$\nabla\times\mathbf{E}_A = -j\omega\mu\mathbf{H}_A \Rightarrow \nabla\times\left(\mathbf{E}_A + j\omega\mathbf{A}\right) = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{E}_A + j\omega\mathbf{A} = -\nabla\phi$ ϕ è il potenziale scalare di tipo elettrico

$$\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$$
$$\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi$$

I campi sono espressi in termini dei potenziali vettore A (3 incognite) e scalare ϕ (1 incognita).

Noti i potenziali i campi vengono dedotti attraverso operazioni di tipo differenziale

Il problema elettromagnetico è più semplice o più complicato?

…cerchiamo le equazioni a cui obbediscono i potenziali A e ϕ

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

$\nabla\times\mathbf{H}_A = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_A + \mathbf{J}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\mu}\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_A + \mathbf{J}$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{\mu}\left[\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right) - \nabla^2\mathbf{A}\right] = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_A + \mathbf{J}$

$$\nabla^2\mathbf{A} + \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{A} - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\phi\right) = -\mu\mathbf{J}$$

In modo analogo…

$$\nabla^2\phi + \omega^2\varepsilon\mu\phi - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\phi\right) = 0$$

ANTENNE

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

In definitiva per determinare il campo elettromagnetico occorre risolvere 4 equazioni in 4 incognite che risultano accoppiate fra loro

$$\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A}$$
$$\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi$$

$$\nabla^2\mathbf{A} + \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{A} - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\phi\right) = -\mu\mathbf{J}$$
$$\nabla^2\phi + \omega^2\varepsilon\mu\phi - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\phi\right) = 0$$

E' possibile semplificare ulteriormente il problema disaccoppiando le equazioni dei potenziali?

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

La semplificazione è possibile tenendo conto che la scelta dei potenziali non è univoca:

$$(\mathbf{A},\phi) \rightarrow (\mathbf{E}_A, \mathbf{H}_A)$$
$$(\mathbf{A}',\phi') \rightarrow (\mathbf{E}_A, \mathbf{H}_A)$$

dove $\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\psi \\ \phi' = \phi + j\omega\varepsilon\mu\psi \end{cases}$

ψ è una funzione scalare da determinare

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

Se vale $\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\phi = \chi$

…e si sceglie la funzione ψ in modo tale che $\nabla^2\psi + \omega^2\varepsilon\mu\psi = \chi$

Si ottiene $\nabla \cdot \mathbf{A}' + j\omega\varepsilon\mu\phi' = 0$

(Condizione o *gauge* di Lorentz che, nel caso di campi statici, ω=0, prende il nome di condizione di Coulomb)

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Elementi di teoria della radiazione - Richiami

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

Se vale la condizione di Lorentz $\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\phi = 0 \Rightarrow \phi = \dfrac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu}$

I potenziali obbediscono alle equazioni di Helmholtz (equazioni di tipo ellittico disaccoppiate tra A e ϕ)

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}$$
$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$$
con $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$

$$\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A}$$
$$\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu}$$
$$\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A}$$

Per determinare il campo elettromagnetico (E_A,H_A) si deve conoscere solo il potenziale A

ANTENNE

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI ELETTRICHE

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z}$$

$$\nabla^2 A_x = \frac{\partial^2 A_x(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x(x,y,z)}{\partial z^2}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x + k^2 A_x = -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y + k^2 A_y = -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu J_z \end{cases}$$

PRINCIPIO DI DUALITÀ O DI BABINET

$$\mathbf{E} \to \mathbf{H}$$
$$\mathbf{H} \to -\mathbf{E}$$
$$\mu \to \varepsilon$$
$$\varepsilon \to \mu$$
$$\mathbf{J} \to \mathbf{M}^s$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_F = -j\omega \mathbf{B}_F - \mathbf{M}^s$$
$$\nabla \times \mathbf{H}_F = j\omega \mathbf{D}_F$$
$$\nabla \cdot \mathbf{D}_F = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B}_F = 0$$

EQUAZIONI DI HELMHOLTZ PER SORGENTI MAGNETICHE

Equazione di Helmholtz per il potenziale vettore di tipo magnetico (F è il potenziale di Fitzgerald):

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = -\varepsilon\mathbf{M}}$$

$$\mathbf{H}_F = -j\omega\mathbf{F} + \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{F}}{j\omega\varepsilon\mu}$$

$$\mathbf{E}_F = -\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathbf{F}$$

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

POTENZIALI DI HERTZ DI TIPO ELETTRICO E MAGNETICO

Potenziale di Hertz di tipo elettrico

$$\boxed{\mathbf{A} = j\omega\varepsilon\mu\,\Pi^e}$$

$$\begin{cases} \mathbf{H}_A = \dfrac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A} \\ \mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} + \dfrac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{H}_A = j\omega\varepsilon\nabla\times\Pi^e \\ \mathbf{E}_A = k^2\,\Pi^e + \nabla\left(\nabla\cdot\Pi^e\right) \end{cases}$$

Potenziale di Hertz di tipo magnetico

$$\boxed{\mathbf{F} = j\omega\varepsilon\mu\,\Pi^h}$$

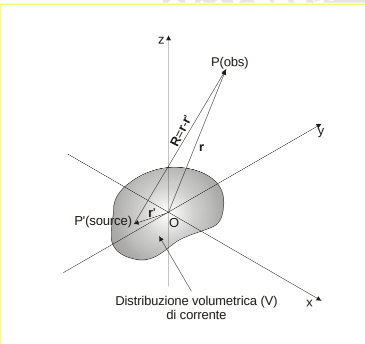
ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

INTEGRALI DI RADIAZIONE

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze
Elementi di teoria della radiazione - Richiami

DALLE EQUAZIONI DI HELMHOLTZ ALLE SOLUZIONI PER I POTENZIALI

Risolvendo le equazioni di Helmholtz si ottengono le *relazioni integrali* che legano il potenziale vettore A ed il potenziale di Fitzgerald F alle sorgenti



$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r};\mathbf{J}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dv'$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r};\mathbf{M}) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iiint_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dv'$$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad , \quad k = k_R - jk_I$$

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$$

è la funzione di Green dello spazio libero

DAI POTENZIALI AL CAMPO

Noti i potenziali A ed F il campo elettromagnetico può essere ottenuto tramite delle *relazioni differenziali* dai potenziali vettore *A* ed F

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F = -j\omega\mathbf{A} - \frac{j}{\omega\varepsilon\mu}\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathbf{F}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F = -j\omega\mathbf{F} - \frac{j}{\omega\varepsilon\mu}\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{F}\right) + \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$$

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

Elementi di teoria della radiazione - Richiami

MODALITÀ DI SOLUZIONE DEL PROBLEMA ELETTROMAGNETICO DI ANTENNA

1. *Problema di antenna* e *problema radar*
2. Principio di equivalenza (formulazione di Love)
3. Teoria dei potenziali
4. Integrali di radiazione
5. Modalità di soluzione del problema di antenna

ANTENNE

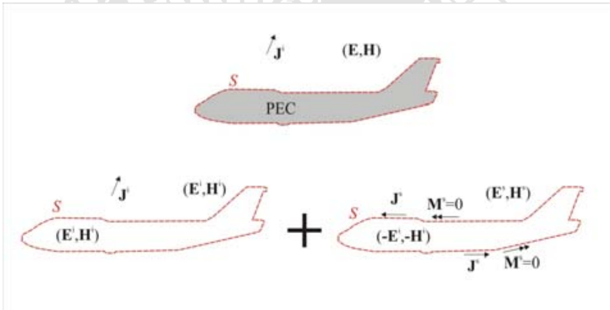
ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI

Torniamo al problema originario...

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r};\mathbf{J}^i) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r};\mathbf{J}^s,\mathbf{M}^s = 0)$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^i(\mathbf{r};\mathbf{J}^i) + \mathbf{H}^s(\mathbf{r};\mathbf{J}^s,\mathbf{M}^s = 0)$$



Le relazioni che legano i campi alle correnti, passando attraverso i potenziali, sono di tipo integro-differenziale

Elementi di teoria della radiazione - Richiami

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

DETERMINAZIONE DELLE INCOGNITE

Come determinare le sorgenti incognite J^s (che sono funzioni del campo magnetico totale incognito sulla superficie S e di conseguenza il campo elettromagnetico (E^s, H^s) ?

BASSA E ALTA FREQUENZA

Ad esempio dalla condizione al contorno per il campo elettrico sulla superficie di equivalenza S si ottiene un'equazione integro-differenziale per la corrente equivalente incognita

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})\times\hat{n}=[\mathbf{E}^s(\mathbf{r};\mathbf{J}^s)+\mathbf{E}^i(\mathbf{r};\mathbf{J}^i)]\times\hat{n}=0 \quad \mathbf{r}\in S$$

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r};\mathbf{J}^s)\times\hat{n}=-\mathbf{E}^i(\mathbf{r};\mathbf{J}^i)\times\hat{n} \quad \mathbf{r}\in S$$

L'equazione integro-differenziale (EFIE, Electric Field Integral Equation) deve essere risolta con tecniche di tipo numerico che riconducono la soluzione dell'equazione integro-differenziale alla risoluzione di un'equazione di tipo matriciale. Questo tipo di approccio viene utilizzato quando le dimensioni caratteristiche del problema sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda (Parte II)

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

BASSA E ALTA FREQUENZA

In alternativa….

….. se non si risolve la predetta equazione integro-differenziale si può cercare una stima *a priori* della corrente elettrica superficiale incognita e quindi valutare il campo elettromagnetico ad essa associato attraverso gli integrali di radiazione

L'approssimazione *a priori* della corrente elettrica equivalente è utilizzata per il *problema radar* nell'ambito delle tecniche ad alta frequenza o asintotiche (ovvero quando le dimensioni caratteristiche del problema sono grandi rispetto alla lunghezza d'onda) (Parte III)

L'approssimazione viene eseguita utilizzando le *tecniche fisiche*

PO, *Physical Optics*

PTD, *Physical Theory of Diffraction*

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

BASSA E ALTA FREQUENZA

… ed ancora in alternativa …

…si può procedere ad una stima *a priori* del campo elettromagnetico totale reirradiato dalle strutture

L'approssimazione *a priori* del campo totale è utilizzata per il *problema d'antenna* nell'ambito delle tecniche ad alta frequenza o asintotiche (ovvero quando le dimensioni caratteristiche del problema sono grandi rispetto alla lunghezza d'onda) (Parte III).

L'approssimazione viene eseguita utilizzando le *tecniche geometriche*

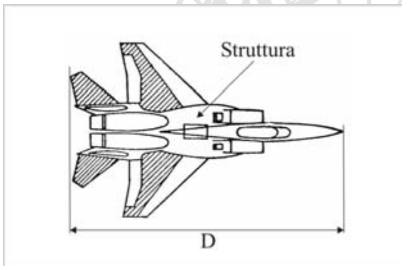
GO, *Geometrical Optics*

UTD, *Uniform Geometrical Theory of Diffraction*

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze

BASSA E ALTA FREQUENZA

Affrontiamo il problema della soluzione delle equazioni integrali per strutture le cui dimensioni caratteristiche sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda



$D \leq \lambda$ bassa frequenza (metodi numerici)

$D \rightarrow$ dimensione caratteristica della struttura

ANTENNE II – ANTENNE IN AMBIENTE OPERATIVO
Prof. G. Pelosi - Laboratorio di Elettromagnetismo Numerico
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni – Università di Firenze